

**Biljana Zllatanovska**  
**Limonka Koceva Lazarova**  
**Marija Miteva**  
**Teuta Jusufi - Zenku**

# MATEMATIKA

## I PËR VITIN I

### ARSIMI I MESËM PROFESIONAL

Drejtmet::

Gjeologji-xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari-gjeodezi,  
Grafikë, Ekonomi-drejtës dhe tregti, Elektronikë, Shërbime  
personale, Makineri, Komunikacion, Tekstil lëkure,  
Tregtar-turistik, Kimi teknologji

**Biljana Zllatanovska**  
**Limonka Koceva Lazarova**  
**Marija Miteva**  
**Teuta Jusufi - Zenku**

# MATEMATIKA

Për vitin I

**ARSIMI I MESËM PROFESIONAL**

Drejtimit:

Gjeologji-xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari-gjeodezi, Grafikë, Ekonomi-drejtës dhe tregti, Elektronikë, Shërbime personale, Makineri, Komunikacion, Tekstil lëkure, Tregtar-turistik, Kimi teknologji

# **MATEMATIKA**

## **Për vitin I**

### **ARSIMI I MESËM PROFESIONAL**

#### **Drejtimit:**

Gjeologji-xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari-gjeodezi, Grafikë, Ekonomi-drejtës dhe tregti, Elektronikë, Shërbime personale, Makineri, Komunikacion, Tekstil lëkure, Tregtar-turistik, Kimi teknologji

#### **Autore:**

Biljana Zllatanovska  
Limonka Koceva Lazarova  
Marija Miteva  
Teuta Jusufi Zenku

#### **Recensentë:**

Gjorgji Markoski  
Biljana Jovanova  
Jagoda Tanushska

#### **Ilustrues:**

Biljana Zllatanovska  
Limonka Koceva Lazarova  
Marija Miteva  
Teuta Jusufi Zenku

Titulli i origjinal:

МАТЕМАТИКА ЗА I ГОДИНА  
СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Струки:

Геолошко-рударска и металуршка, Градежно-геодетска, Графичка,  
Економско-правна и трговска,  
Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска,  
Угостителско-туристичка, Хемиско технолошка

Билјана Златановска  
Лимонка Коцева Лазарова  
Марија Митева  
Теута Јусуфи Зенку

#### **Përkthyer nga gjuha maqedone:**

Muzafer Beqiri

#### **Redaktor profesional i botimit në gjuhën shqipe:**

Xhevair Beqiri

**Lektura:** Refail Sulejmani

**REDAKTOR:** Refail Sulejmani

**REDAKTIMI GRAFIK DHE TEKNIK:** Leon Xhingo, Evgenija Pavlova - ARS STUDIO

**Vendi dhe viti i botimit:** Shkup, 2023

#### **BOTUES:**

Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut  
Rr. "Shën Kirili dhe Metodi" nr. 54, 1000 Shkup

Me vendimin për lejimin e tekstit shkollor nga lënda Matematika për vitin I, arsimi i mesëm profesional, drejtimi: Gjeologji-xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari-gjeodezi, Grafikë, Ekonomidrejtësi dhe tregti, Elektronikë, Shërbime personale, Makineri, Komunikacion, Tekstil lëkure, Tregtar-turistik, Kimi teknologji, numër 26-97/1 të datës 15.04.2022, i miratuar nga Komisioni Nacional për tekste shkollore.

## ПРЕДГОВОР

Ky tekst shkollor është dedikuar, para së gjithash, për nxënësi të shkollave të mesme profesionale në Republikën e Maqedonisë së Veriut të cilat mësojnë drejtimet: gjeologji-xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari-gjeodezi, Grafikë, Ekonomi-drejtësi dhe tregti, Elektronikë, Shërbime personale, Makineri, Komunikacion, Tekstil lëkure, Tregtar-turistik, Kimi teknologji e të e të tjera, si tekst themelor për lëndën e matematikës, por i njëjti mund të shërbejë si literature e shkëlqyeshme për çdonjërin që dëshiron t'i mësojë njësitë modulare të përfshira në tekst.

Në tekst janë përpunuar njësitë modulare:

- Logjika e matematikës dhe bashkësitë;
- Numrat realë;
- Shprehjet algjebrike racionale;
- Proporcionaliteti i madhësive;
- Barazimet lineare, pabarazimet lineare dhe sistemi i pabarazimeve lineare;
- Funksion i linear dhe sistemi i barazimeve lineare me dy të panjohura;
- Figurat gjeometrike në rrafsh;
- Perimetri dhe syprina e figurave të rrafshëta.

Përmbajtja të çdo njësi modulare është në pajtim me Programin mësimor që është parashikuar të përpunohet në orët e matematikës në shkollat e mesme profesionale.

Çdo njësi modulare është ndarë në njësi mësimore. Njësitë mësimore janë tërësi të formuara në pajtim me përmbajtjen konkrete që përpunohet dhe të njëjtat nuk janë rigorozisht për përpunimin në një orë. Arsimitari një tërësi mësimore mund ta ndajë në dy ose më shumë orë.

Në fillim të çdo njësie modulare janë theksuar qëllimet të cilat duhet të arrihen duke mësuar njësinë mësimore, të parashikuar nga Ministria e arsimit dhe shkencës dhe Biroja për zhvillimin e arsimit.

Te çdonjëra prej tërësive mësimore janë theksuar konceptet e reja të cilat përpunohen, si edhe lidhjet ndërmjet tyre, por të njëjtat qartë janë përcjellë me shembuj përkatës dhe detyra të zgjidhura. Në fund të çdo njësie janë dhënë detyra për përsëritje të njësisë modulare. Duke i zgjidhur këto detyra nxënësit më lehtë do t'i përvetësojnë përmbajtjet e reja të cilat i mësojnë.

Në fund të tekstit janë dhënë përgjigje dhe udhëzime të detyrave për punë të pavarur, si edhe të detyrave për përsëritje të njësisë modulare.

Do të jemi të kënaqura si autore nëse ky libër ju ndihmon në përvetësimin e matematikës dhe në arritjen e suksesit solid.

Nga autoret

# PËRMBAJTJA

|                                                                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Njësia modulare 1: LOGJIKË E MATEMATIKËS DHE BASHKËSITË</b>                                                | <b>5</b>   |
| <b>Njësia modulare 2: NUMRAT REALË</b>                                                                        | <b>49</b>  |
| <b>Njësia modulare 3: SHPREHJA ALGJEBRIKE RACIONALE</b>                                                       | <b>99</b>  |
| <b>Njësia modulare 4: PROPORCIONALITETI I MADHËSIVE</b>                                                       | <b>157</b> |
| <b>Njësia modulare 5: BARAZIMET LINEARE, PABARAZIME DHE SISTEMI I PABARAZIMEVE LINEARE ME NJË TË PANJOHUR</b> | <b>193</b> |
| <b>Njësia modulare 6: FUNKSIONI LINEAR, SISTEMI I BARAZIMEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA</b>                   | <b>223</b> |
| <b>Njësia modulare 7: FIGURAT GJEOMETRIKE NË RRAFSH</b>                                                       | <b>255</b> |
| <b>Njësia modulare 8: PERIMETRI DHE SYPRINA E FIGURAVE TË RRAFSHËTA</b>                                       | <b>287</b> |
| <b>ZGJIDHJE DHE UDHËZIME PËR ZGJIDHJE</b>                                                                     | <b>337</b> |



# 1

## MATEMATIKA LOGJIKE DHE BASHKËSITË



### QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

**Duke mësuar njësinë modulare, nxënësi duhet të aftësohe:**

- të përcaktojë vlerën logjike të gjykimeve elementare dhe të përbëra;
- të shfrytëzojë ligjet logjike;
- të paraqesë bashkësi në mënyra të ndryshme
- të kryejë operacione me bashkësi dhe të vërtetojë disa ligje;
- të përcaktojë bashkësi zgjidhjesh të funksioneve të thjeshta gjykimore.

## **PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 1**

**7**

**Koncepti për gjykim. Përcaktimi i vlerës logjike të gjykimit**

**9**

**Negacioni. Konjuksioni. Disjunksioni. Disjunksioni i përjashtuar**

**16**

**Implikacioni. Ekuivalenca**

**21**

**Formulat gjykimore**

**26**

**Ligjet logjike**

**32**

**Koncepti për bashkësi, nënbashkësi, bashkësi të barabarta dhe ekuivalente**

**35**

**Përkufizimi i operacioneve me bashkësi me ndihmën e operacioneve logjike**

**43**

**Ligjet për operacionet me bashkësi**

**45**

**Funksionet gjykimore, bashkësi zgjidhjesh**

**48**

**Detyra për përsëritje të njësisë modulare**

## 1. Koncepti për gjykim

Te çdo gjuhë ekzistojnë lloje të ndryshme të fjalive, edhe atë: fjali dëftore, fjali pyetëse, fjali urdhërore, etj.



Mendo dhe përgjigju!

- Të gjitha fjalitë a janë të menduara?
- Të gjitha pohimet a janë të sakta?

Shpeshherë ballafaqohemi me fjali të lloji: “Kryeqyteti i Italisë është Roma”. Me këtë fjali është shprehur pohimi që është i vërtetë, por tani me fjalinë “Kryeqyteti i Italisë është Venediku” është shprehur pohim që nuk është i vërtetë.

Këto fjali janë dëftore dhe për çdonjërin prej tyre ka kuptim të parashtrohet pyetja a është i vërtetë ose jo i vërtetë pohimi që është shprehur me ato. Llojet e këtilla të fjalive janë me rëndësi të veçantë në matematikë pasi kanë vërtetësi të vërtetë të caktuar. Me fjalitë e këtilla janë përkufizuar gjykimet në matematikë.

Ta përkufizojmë konceptin gjykim.



- ❖ Koncepti themelore në logjikën matematikore është gjykim
- ❖ Fjalja dëftore (treguese) e cila ka kuptim dhe e cila është ose e vërtetë ose jo e vërtetë quhet **gjykim**.

- ❖ Gjykimet kryesisht shkruhen me shkronja të vogla të alfabetit latin: p, q, r, s, ... dhe e quajmë ndryshore gjykimore

### Shembulli 1

1. Fjalja p: “Numri 55 është numër çift”, është gjykim dhe është gjykim jo i saktë.
  2. Fjalja q: “Molla është pema më e shijshme”, nuk është gjykim. Kjo fjali ka kuptim, për disa njerëz molla është pemë më e shijshme, por për disa nuk është më e shijshme. Domethënë, nuk ka vlerë të saktësisë së vetme.
  3. Fjalja r: “Trekëndëshi shëtit nëpër park”, nuk është gjykim. Qartazi se kjo fjali nuk ka kuptim.
- Fjalitë që fillojnë me: “Mendoj se...”, “Dua...”, “Kam dëshirë...”, “Vallë...”, etj., nuk janë gjykime.



Mendo dhe përgjigju!

- Pse këto fjali i llogarisim për gjykime?

**Shembulli 2** Cakto cilat prej këtyre fjalive janë gjykime:

- a) Sa është ora? – kjo fjali nuk është gjykim, pasi është fjali pyetëse.
- b) Trekëndëshi vozit biçikletë – kjo fjali nuk është gjykim, pasi nuk ka kuptim.
- c)  $2x + 3 < 4$  për  $x = 1$  kjo fjali është gjykim.
- ç)  $2.5 + 14 = 24$  kjo fjali është gjykim

### 1.1.Përcaktimi i vlerës logjike

Duke pasur parasysh që për çdo gjykim mund të themi se a është i vërtetë (i saktë) ose gënjeshtër (jo i saktë), ne mund të përkufizojmë vlerë të vërtetësisë së gjykimit.



- ❖ Me ndihmën e funksionit (lexohet “tau”), shënohet **vlera logjike (vërtetësia)** e gjykimit të dhënë.
- ❖ Për shembull, me (p) shënohet **vlera e vërtetësisë së gjykimit p**.

I futim këto simbole:

T – për të saktë (lexohet “te”) dhe  $\perp$  - për të pa saktë (lexohet “jo te”). Nëse gjykimi p është i vërtetë, shënojmë

(p) = T dhe lexojmë “tau prej p është te”, por kur gjykimi p është jo i vërtetë do të shkruajmë  
(p) =  $\perp$  dhe lexojmë ta prej p sht jo te,

**Shembulli 3** Fjalja r:  $2 < 3$  është gjykim dhe është gjykim i vërtetë, domethënë (r) = T.

**Shembulli 4** Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:

a) 3 është numër natyror;      b)  $3^3 = 27$ ;

c)  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ ;      ç)  $2^2 \neq 4$ ;

a)  $\tau(3 \text{ është numër natyror}) = T$ ;    b)  $\tau(3^3 = 27) = T$ ;    c)  $\tau\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}\right) = \perp$ ;    ç)  $\tau(2^2 \neq 4) = \perp$

**Detyra për punë të pavarur:**

1. Cakto cilat prej këtyre fjalive janë gjykime:

- a) Mendoj se nesër do të bjerë borë.      b) Hekuri është metal.
- c) Mali luan valle.      ç) 0 është numër natyror.

2. Sqaro pse nuk janë fjali gjykimore:
- Dimri nuk është koha më e mirë vjetore.
  - Kam dëshirë lumi Vardar të kalojë nëpër Ohër.
  - Numri 3 vozit automobil.
  - Të lutem hape derën!
3. Përcakto cilat prej këtyre fjalive nuk është e vërtetë:
- $2 - 7 = 7 - 2$  ;    b)  $\frac{1}{2} = 0,5$ ;    c) Viti ka 13 muaj;    ç)  $3 \cdot 2 < 10 - 3$
4. Përcakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:
- $p$  : Shkupi është kryeqyteti i Republikës së Maqedonisë së Veriut;
  - $q$  :  $(3)^3 = (-3)^3$ ;    c)  $r$  : Numri 24 plotpjesëtohet me numrin 6;    ç)  $S$ :  $-3 < -2$
5. Përcakto vlerën e vërtetësisë për çdonjërin prej gjykimeve të kësaj tabelë (duke shfrytëzuar gjykimet T dhe  $\perp$ ):

| $x$               | -2 | -1 | 1 | 2 |
|-------------------|----|----|---|---|
| $\tau(x < 3)$     |    |    |   |   |
| $\tau(x^2 = 4)$   |    |    |   |   |
| $\tau(x + 1 > 2)$ |    |    |   |   |

## 2. Negacioni. Konjuksioni. Disjunksioni. Disjunksioni i përjashtuar

Dihet se në çdo gjuhë ekzistojnë më shumë lidhëse të cilat përdoren për ndërtimin e fjalive të përbëra. E dimë se prej dy ose më shumë fjali të thjeshta ose të përbëra, me ndihmën e lidhëseve mund të formohen fjali të përbëra.

Lidhëse ekzistojnë edhe në matematikë me të cilat lidhim dy ose më shumë gjykime. Në veçanti lidhëse të rëndësishme që përdoren në matematikë janë: “dhe”, “ose”, “nëse...”, “atëherë”, “nëse dhe vetëm nëse”, “ose-ose” dhe negacioni “jo”.



Mendo dhe përgjigju!

- Mund se dy gjykime t'i lidhim me ndonjërin prej lidhëseve të lartpërmendura?
- Çfarë fjalish fitojmë?



- ❖ Me ndihmën e gjykimeve dhe lidhëseve “dhe”, “ose”, “nëse... atëherë”, “nëse dhe vetëm nëse”, “ose-ose” dhe negacioni “jo” mund të formohen fjalitë e përbëra të cilat nuk janë gjykime. Këto gjykime quhen **gjykime të përbëra**.
- ❖ **Gjykime elementare ose të thjeshta** janë gjykimet që nuk përmbajnë asnjërin prej lidhëseve të lartpërmendura, as negacionin jo.

### Shembulli 1

Gjykime: p “Numri 55 është numër çift” dhe: q “Numri 56 është numër çift” janë gjykime elementare, ndërsa tani gjykimi: r “Numri 55 është numër çift dhe numrit 56 është numër çift”. Është gjykim i përbërë i përfituar prej gjykimeve p, q të lidhura me lidhësen “dhe”.

1

Bëj gjykim të përbërë prej këtyre dy gjykimeve: p “Numri 5 është numër i thjeshtë” dhe: q „Numri 5 është numër çift “me përdorimin e lidhëse:

- a) dhe;      b) ose;      c) nëse... atëherë;      ç) nëse dhe vetëm nëse.

2

Cilat prej këtyre gjykimeve janë elementare, kurse cilat gjykime janë të përbëra?

- a) Nëse bie shi, atëherë rruga është e lagët.  
 b) Katrori është katërkëndësh i rregullt ose është paralelogram.  
 c) 5 është i thjeshtë.  
 ç) Numri plotpjesëtohet me 5 nëse mbaron me shifrën 5 ose 0.  
 d) Lumi Vardar buron në Vrutok.

**Vërejtje:** Gjykimet elementare kanë saktësisht vlerë të vërtetësisë së përcaktuar. Vlera e vërtetësisë së gjykimit të përbërë varet prej vlerës së vërtetësisë së gjykimeve elementare prej të cilave është formuar dhe prej lidhëses së përdorur.

## 2.1.Negacioni

Të përkufizojmë negacionin.



- ❖ *Le të jetë dhënë gjykimi. Gjykimi “jo p” (shënohet me p) quhet **negacion** i p.*  
 „Jo p” është gjykim i cili është jo i vërtetë kur është i vërtetë, ndërsa gjakimi “Jo p” është i vërtetë kur p është jo i vërtetë.

Thjeshtë fjala “jo” qëndron pranë foljes, prandaj p lexohet “3 nuk është numër çift”, (në vend “Jo 3 është numër çift”).

Të vërejmë se si do të formojmë negacion prej gjykimit të dhënë p.

**Shembulli 2** Negacioni i gjykimit “Sot është e hënë” është “Sot nuk është e hënë” ose “Nuk është e saktë se sot është e hënë”.

Vlera e vërtetësisë së negacionit mund ta paraqesim edhe me ndihmën e tabelës.

| $p$     | $\neg p$ |
|---------|----------|
| T       | $\perp$  |
| $\perp$ | T        |

**Shembulli 3** T’i negociojmë këto gjykime:

a) Sara luan tenis;      b)  $5 > 7$ ;      c)  $3 \mid 9$ .

a) (Sara luan tenis) = Sara nuk luan tenis.

b)  $6 \mid (5 \cdot 7) = 57$  ;

b)  $\neg(3 \mid 9) = 3 \nmid 9$ .

**Shembulli 4** T’i negociojmë këto gjykime dhe të përcaktojmë vlerë e tyre të vërtetësisë:

a)  $p: 3 \neq 3$ ;      b)  $q: -2 \leq 3$ ;      c)  $r$ : Numri 6 është numër i thjeshtë.

a)  $\neg: 3 = 3, p$        $p$        $= \neg) ( \neg T$ .

b)  $\neg: -2 > 3, q$        $q$        $\neg( \neg) = \perp \perp$ .

b)  $\neg r$ : Numri 6 nuk është numër i thjeshtë (  $(r) = T$  ).

**3** Të negociohen këto gjykime dhe të përcaktohet vlera e vërtetësisë së tyre:

a) Numri 7 është numër çift;

b) Çdo katërkëndësh është trapez;

c)  $2 + 3 = 5$  ;

ç) Numri 17 plotpjesëtohet me 4

d)  $2 > 1$

dh) Numri 5 është pjesëtues i numrit 100.

## 2.2. Konjuksioni

Të përkufizojmë konjuksionin.

❖ **Konjuksion** quhet gjykimi i përbërë i përfituar prej dy gjykimeve elementare me ndihmën e lidhëses „dhe”.

Le të jenë  $p$  dhe  $q$  dy gjykime elementare, atëherë konjuksionin e  $p$  dhe  $q$  e shënojmë me  $\wedge p \ q$  (lexohet “ $p$  dhe  $q$ ”).

### Shembulli 5

Konjuksioni i gjykimeve  $p : 7$  është numër i plot; dhe  $q : 7$  është numër tek e:  $\wedge p \ q : 7$  është numër i plotë dhe  $7$  është numër tek.

Prej përkufizimit për konjuksionin, si edhe prej shembullit 5, mund të vëresh se konjuksioni në realitet është gjykim i përbërë, që është përfituar me lidhjen e dy gjykimeve të thjeshta me lidhësen “dhe”.

❖ Konjuksioni është gjykim i cili është i vërtetë nëse edhe të dy gjykimet janë të vërteta, në të gjitha rastet e tjera është i pavërtetë.

Vlerën e vërtetësisë së konjuksionit mund ta paraqesim edhe me ndihmën e tabelës.

| $p$     | $q$     | $p \wedge q$ |
|---------|---------|--------------|
| T       | T       | T            |
| T       | $\perp$ | $\perp$      |
| $\perp$ | T       | $\perp$      |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$      |

### Shembulli 6

Le të jenë dhënë gjykime:  $p : 2^3$  është numër i përbërë  $q : \frac{1}{2} > 8$  и  $r : x + 5 = 10 - 2$  за  $x = 3$ . Formoji gjykime:

a)  $\wedge p \ q$  ; б)  $\wedge p \ r$  ; в)  $\wedge q \ r$  , por pastaj përcakto vlerën e vërtetësisë. a)  $p \ q$

$\wedge : 2^3$  është numër i përbërë dhe  $\frac{1}{2} > 8$   $\tau(p \ q) = \wedge(\tau(p)) \wedge \tau(q) = T \wedge \perp = \perp$ .

б)  $p \ r : 2^3$  është numër i përbërë dhe  $x + 5 = 10 - 2$  за  $x = 3$ ,  $\tau(p \ r \wedge) = (\tau(p)) \tau \wedge(\tau(r)) = T \wedge T = T$ .

в)  $q \wedge r : \frac{1}{2} > 8$  и  $x + 5 = 10 - 2$  за  $x = 3$ ,  $\tau(q \wedge r) = \tau(q) \wedge \tau(r) = \perp \wedge T = \perp$ .

4

Të përcaktohet vlera e vërtetësisë së këtyre konjuksioneve:

a)  $(2 > 5) \wedge (3 < 9)$ ; б)  $(3 \frac{2}{5} = 2) \wedge (4 - 1 = 4)$ ; в)  $(3 + 2 = 4) \wedge (9 - 5 = 4)$ ;

ç) numri 17 plotpjesëtohet me 4 dhe numrit 5 është më i vogël se 0.

## 2.3. Disjunksoni

Të përkufizojmë disjunksonin.

- ❖ **Disjunksoni** quhet gjykim i përbërë i përfituar prej dy gjykimeve elementare me ndihmën e lidhëses “ose”.  
Le të jenë  $p$  dhe  $q$  dy gjykime elementare, atëherë disnjksioni i  $p$  dhe  $q$  dhe e shënojmë me  $p \vee q$  (lexohet “ $p$  ose  $q$ ”).

**Shembulli 7** Disjunksoni i gjykimeve  $p$  : 16 është numër çift dhe  $q$  : plotpjesëtohet me 4 është:  $p \vee q$  : 16 është numër çift ose 16 plotpjesëtohet me 4.

Për vlerën e vërtetësisë së gjykimit të përbërë të formuar duke shfrytëzuar operacionin logjik disjunksonin vlen kjo që vijon:

- ❖ Disjunksoni është gjykim i cili është i pavërtetë nëse të dy gjykimet janë të pavërteta, në gjitha rastet e tjera është i vërtetë.

Vlerën e vërtetësisë së disjunksonit mund ta paraqesim edhe me ndihmën e tabelës:

| $p$     | $q$     | $p \vee q$ |
|---------|---------|------------|
| T       | T       | T          |
| T       | $\perp$ | T          |
| $\perp$ | T       | T          |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$    |

**Shembulli 8** Le të jenë dhënë gjykime:  $p$  :  $4 \cdot 3 = 7 - 4$ ,  $q$  :  $4 \cdot 3 \cdot 0 = 6$  dhe  $r$  : 4 është numër i plotë:

Formoji gjykime:

a)  $p \vee q$  ; б)  $p \vee r$  ; в)  $q \vee r$  ,  
por pastaj përcakto vlerën e tyre të vërtetësisë.

a)  $p \vee q$  :  $4 \cdot 3 = 7 - 4$  или  $4 \cdot 3 \cdot 0 = 6$ ,  $\tau(p \vee q) = \tau(p) \vee \tau(q) = \perp \vee \perp = \perp$ .

б)  $p \vee r$  :  $4 \cdot 3 = 7 - 4$  ose 4 është numër i plotë,  $(\vee \tau p \vee r) = (p) \tau \vee (r) = \perp \vee \text{T} = \text{T}$ .

в)  $q \vee r$  :  $4 \cdot 3 \cdot 0 = 6$  или 4 е цел број,  $\tau(q \vee r) = \tau(q) \vee \tau(r) = \perp \vee \text{T} = \text{T}$ .

**5** Të përcaktohet vlera e vërtetësisë së këtyre disjunkSIONEVE:

a)  $(12 > 5) \vee (x^2 = 1 \text{ за } x = 3)$ ; б)  $(\frac{5}{8} + 2\frac{1}{8} = \frac{31}{8}) \vee (6,39 - 1\frac{1}{4} = 3)$ ;

c)  $(3 \cdot 2 \cdot 1 - 5) \vee (6^2 = 36)$  ç) 0,5 është numër iracional ose 5 është numër racional

6

Le të jenë  $p$ ,  $q$  dhe  $r$  se следните искази:

$p$ : Sharrplaninci është qen maqedonas;

$q$ : Unë kam oborr të vogël;

$r$ : Unë kam qen sharrplaninc të madh.

Shkruaji këto gjykime simbolike si fjali:

a)  $p \wedge q \wedge r$ ; б)  $(p \vee \neg q) \wedge r$ ; в)  $\neg q \wedge r$ .

## 2.4. Disjunksioni i përjashtuar

Të përkufizojmë disjunksion të përjashtuar

❖ **Disjunksioni** i quhet gjykim i përbërë i fituar prej dy gjykimeve elementare me ndihmën e lidhëses “ose-ose”.

Le të jenë  $p$  dhe  $q$  dy gjykime elementare, atëherë disjunksioni i përjashtuar i  $p$  dhe  $q$  dhe e shënojmë me  $(p \vee q)$  (lexohet “ose  $p$ -ose  $q$ ”).

**Shembulli 9** Disjunksini i përjashtuar i gjykimeve  $p: 4 \neq 2$  и

$q: \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$  e:

$p \vee q$ : или  $4 \neq 2$  или  $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ .

Për vlerën e vërtetësisë së gjykimit të përbërë të formuar me disjunksionin e përjashtuar, duhet ta dish këtë:

❖ Disjunksioni i përjashtuar është gjykim i cili është i vërtetë nëse të dy gjykimet kanë vlera të ndryshme të vërtetësisë, në dy rastet e tjera është i pavërtetë.

Vlerën e vërtetësisë së disjunksionit të përjashtuar mund ta paraqesim me ndihmën e tabelës së vërtetësisë.

| $p$     | $q$     | $p \vee q$ |
|---------|---------|------------|
| T       | T       | $\perp$    |
| T       | $\perp$ | T          |
| $\perp$ | T       | T          |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$    |

**Shembulli 10** Le të jenë dhënë gjykime:  $p: 2 + 7 \cdot 5 \leq 4$ ,  $q: 7 \mid 21$  и  $3r \mid x - 21 \nmid ax - 7$ .

Formoji gjykime:

a)  $\forall p \wedge q$ ; б)  $\forall p \wedge r$ ; в)  $\forall q \wedge r$ ;

por pastaj cakto vlerën e tyre të vërtetësisë.

- a)  $p \vee q$ : или  $2+7 \leq 5 \cdot 4$  или  $7|21$ ,  $\tau(p \vee q) = \tau(p) \vee \tau(q) = T \vee T = T$ .
- б)  $p \vee r$ : или  $2+7 \leq 5 \cdot 4$  или  $3x \neq 21$  за  $x=7$ ,  $\tau(p \vee r) = \tau(p) \vee \tau(r) = T \vee \perp = T$ .
- в)  $q \vee r$ : или  $7|21$  или  $3x \neq 21$  за  $x=7$ ,  $\tau(q \vee r) = \tau(q) \vee \tau(r) = T \vee \perp = T$ .

7

Të caktohet vlera e vërtetësisë së këtyre gjytimeve:

- a)  $(2 < 6) \vee (2 | 6)$ ; б)  $(2+3=5) \vee (5-3=2)$ ;  
 в)  $(3 \cdot 2 + 1 = 5) \vee (6^2 = 45)$ ; г) Или  $3|9$  или  $3|8$ .

### Detyra për punë të pavarur:

1. Shkruaj negacionet e gjytimeve:

- a) Sot është e premte; б)  $3 \geq 5$ ; в) 10 është numër negativ; г)  $\frac{1}{5} \neq \frac{1}{3}$ .

2. Shkruaj negacionet e këtyre gjytimeve, por pastaj cakto vlerën e vërtetësisë së gjytimeve të fituara:

- a)  $p$ : Metri është njësi themelore matëse për gjatësinë;  
 б)  $q$ : Numri 9 është pjesëtues i 37;  
 в)  $r$ :  $2 \cdot 7 \neq 9$ ; г)  $s$ :  $7 < 3$ .

3. Le të jenë dhënë gjykimet  $p$ : 5 është numër natyror,  $q$ :  $2 > 3$  и  $r$ :  $3 | 9$ . Formoj konjunksionet:

- a)  $p \wedge q$ ; б)  $p \wedge p$ ; в)  $q \wedge r$ ; г)  $r \wedge p$ .

4. Le të jenë dhënë gjykimet  $p$ : 8 është numër i thjeshtë,  $q$ :  $x + 3 = 5$  për  $x=1$  и  $r$ :  $2 \nmid 7$ .

Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjytimeve:

- a)  $p \wedge \neg q$ ; б)  $r \wedge \neg p$ ; в)  $(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$ ; г)  $\neg(p \wedge q) \wedge r$ .

5. Le të jenë dhënë fjalia: "Numri 5 është numër i thjeshtë dhe numër tek". Cakto gjykimet elementare të fjalës.

6. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjytimeve:

- a)  $\tau(5 > 3 \wedge 3 | 18)$ ; б)  $(\tau^3 = 2^3 \wedge 6^2 = 6^2)$ ;

- в)  $\tau\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \wedge \frac{1}{5} < \frac{1}{2}\right)$ ; г)  $\tau(\text{numri} - 2 \text{ është numër negativ} \wedge 2 = 2)$ .

7. Le të jenë dhënë gjykimet  $p$ :  $3 - | = | - 3$ ,  $q$ :  $\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{7} = 4$  и  $r$ :  $5 \geq 7$ . Formo disjunksione:

- a)  $p \vee q$ ; б)  $p \vee p$ ; в)  $q \vee r$ ; г)  $r \vee p$ .

8. Le të jenë dhënë gjykimet,  $p$ : Katrori me brinjë  $a$  ka syprinë  $a^2$   $q$ :  $5 \cdot 7 - 2 = -2$  и  $r$ :  $2^2 \cdot 3 = 2^6$ .

Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjytimeve:

- a)  $p \vee \neg q$ ; б)  $r \vee \neg p$ ; в)  $(\neg p \vee \neg r) \vee q$ ; г)  $\neg(p \vee q) \vee r$ .

9. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykrimeve:

a)  $\tau(5 \mid 25 \vee 2 \mid 20)$ ;    б)  $\tau(7+3 \neq 10 \vee 3 > -1)$ ;    в)  $\tau\left(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \vee 4^2 = 8\right)$ ;

г)  $\tau(\text{Syprina e një shumëkëndëshi është numër negativ} \vee 2 = 2)$ .

10. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykrimeve:

a)  $(\neq 3 \wedge 2 \wedge 2) < 1 \vee (\text{Numri } 36 \text{ plotpjesëtohet me } 6)$ ;

b)  $\left(\frac{5}{5} = 1 \vee 5 - 6 = 1\right) \wedge \left(\frac{2}{3} < \frac{1}{2}\right)$ ;

в)  $(10 = 5 \cdot 2 \wedge 6 > 6) \vee \neg(6^2 = 36)$ ;

г)  $\neg\left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \vee -2 > 3\right) \wedge (x+5=7 \text{ за } x=2)$ .

11. Le të jenë dhënë gjykrimet p: Paralelogrami nuk ka asnjë çift të brinjëve paralele, q:  $14$

$2 \neq 7$  и  $r: 7 - 7 = 0$ . Formo disjunksionet e përjashtuara

a)  $p \vee q$ ;    б)  $r \vee r$ ;    в)  $q \vee r$ ;    г)  $r \vee p$ .

### 3. Implikacioni dhe ekuivalenca

#### 3.1. Implikacioni

Prej fjalive të varura - të përbëra në logjikën e matematikës me rëndësi të veçantë janë edhe fjalitë kushtore. Me pjesën e kushtëzuar të fjalisë jepet kushti nën të cilin kryhet ose do të kryhet veprimi të fjalës kryesore. Me ndihmën e fjalive të kushtëzuara përkufizohet implikacioni në logjikën e matematikës.

Të përkufizojmë implikacionin.

❖ **Implikacion** quhet gjykimi i përbërë i fituar prej dy gjykrimeve elementare me ndihmën e lidhëses “nëse... atëherë”. Le të jenë p dhe q dy gjykrime elementare, atëherë implikacionin e gjykrimeve p dhe q e shënojmë me  $(p \rightarrow q)$  (lexohet “Nëse p, atëherë q”, “Prej p vijon”, “p implikon q”, etj.).

**Shembulli 1.** Implikacioni i gjykrimeve  $p: 2+0=2$  dhe  $q: 2 \mid 14$  është:  $\Rightarrow p \rightarrow q$  : Nëse  $2+0=2$ , atëherë

❖ **Implikacioni** është gjykim i cili është i pavërtetë nëse gjykimi i parë është i vërtetë, ndërsa gjykimi i dytë është i pavërtetë, në të gjitha rastet e tjera është i vërtetë.

Tabela e vërtetësisë së implikacionit  $\Rightarrow p \quad q$  është dhënë në këtë tabelë:

| $p$     | $q$     | $p \Rightarrow q$ |
|---------|---------|-------------------|
| T       | T       | T                 |
| T       | $\perp$ | $\perp$           |
| $\perp$ | T       | T                 |
| $\perp$ | $\perp$ | T                 |

**Shembulli 2** Le të jenë dhënë gjykime:  $p$ : 15 plotpjesëtohet me 5,  $q$ :  $5 > -2$  и  $2 \mid x$      $5 \nmid 3ax=2$ .

Formo gjykime

a)  $\Rightarrow p \quad q$  ;    б)  $\Rightarrow p \quad r$  ;    в)  $\Rightarrow q \quad r$  ;

por pastaj cakto vlerën e tyre të vërtetësisë.

a)  $\Rightarrow p \quad q$  : Nëse 15 plotpjesëtohet me 5 atëherë,  $5 > -2$ ,  $(\neg p \quad q) \Rightarrow (\neg p \quad \neg q) = T \Rightarrow$

б)  $\Rightarrow p \quad r$  : Nëse 15 plotpjesëtohet me 5, atëherë  $-2x = 5$  за  $x = 2$ ,  $(\neg p \quad r) \Rightarrow (\neg p \quad \neg r) =$

в)  $\Rightarrow q \quad r$  : Nëse 15 plotpjesëtohet me 5, atëherë  $-2x = 5$  за  $x = 2$ ,  $(\neg q \quad r) \Rightarrow$

1

Të caktohet vlera e vërtetësisë së këtyre implikacioneve:

a)  $(2 < 5) \Rightarrow (2 \mid 17)$ ;    б)  $(2 + 3 \neq 5) \Rightarrow (5 - 3 \neq 2)$ ;

в)  $(3 \cdot 2 - 1 = 5) \Rightarrow (6^2 = 36)$ ;    г) Nëse  $3 \mid 7$ , atëherë  $3 \mid 8$ .

Në logjikën matematike janë të lidhur tre gjykime të reja., përkatësisht, nëse është dhënë implikacioni  $\Rightarrow p \quad q$ , atëherë mund t'i formojmë këto gjykime të përbëra

$\Rightarrow q \quad p$  konversioni prej  $\Rightarrow p \quad q$  ;

$\neg p \quad q \quad \neg \Rightarrow$  - inversioni prej  $\Rightarrow p \quad q$  ;

$\neg q \quad p \quad \neg \Rightarrow$  - kontrapozicioni prej  $\Rightarrow p \quad q$  .

2

Formo tabelat e vërtetësisë së konversionit, inversionit dhe kontrapozicionit të implikacionit

$\Rightarrow p \quad q$  .

3

Le të jenë  $p$ ,  $q$  dhe  $r$  këto gjykime:

$p$  - Ai do të blejë automobila të reja.

$q$  - Ai do të bëjë festim.

r - Ai do të fitojë në loto.

Shkruani këto fjali si shprehje simbolike:

- a) Nëse fiton në loto, atëherë do të blejë automobila të reja dhe do të bëjë festim;
- b) Nëse nuk blen automobila të reja, atëherë nuk do të bëjë festim;
- c) Nëse nuk do të fitojë në loto ose nuk blen automobila të reja, atëherë nuk do të bëjë festim.

Në formë të implikacionit në matematikë janë shkruar një numër i madh i pohimeve dhe teoremave matematike.

4

Formulo dy teorema të cilat i di prej përpara, por të cilat janë treguar në formë të implikacionit.

### 3.2. Ekuivalenca

Me përkufizimin e implikacionit në dy kahe përkufizohet operacion i ri logjik i cili quhet ekuivalencë. Përkufizimi i implikacionit në dy kahe quhet ekuivalencë. Përkufizimi i implikacionit  $\Rightarrow p \quad q$  si edhe të implikacionit të anasjelltë  $\Rightarrow q \quad p$ , mundëson përkufizimin e ekuivalencës.

Të përkufizojmë ekuivalencë.



**Ekuivalencë** quhet gjykimi i përbërë prej dy gjykimeve elementare me ndihmën e lidhëses “nëse dhe vetëm nëse”.

Le të jenë p dhe q dy gjykime elementare, atëherë ekuivalencat p dhe q i shënojmë me  $\Leftrightarrow p \quad q$  (lexohet “nëse dhe vetëm nëse”, “është ekuivalente me”, “atëherë dhe vetëm, atëherë kur”, etj.).

#### Shembulli 3

Ekuivalenca e gjykimeve  $p : \frac{1}{2}$  është numër racional dhe  $PVP(12, 16) = 4$

e:  $\Leftrightarrow p \quad \overline{2}q$  : 1 është numër racional nëse dhe vetëm nëse  $PVP(12, 16) = 4$ .

Për vlerën e vërtetësisë së gjykimit të përbërë të formuar me ekuivalencën, vlen kjo:



❖ Ekuivalenca është gjykim që është i vërtetë kur të dy gjykimet kanë vlerë të njëjtë të vërtetësisë, në dy rastet e tjera është i pavërtetë.

Vlerën e vërtetësisë së ekuivalencës mund ta paraqesim edhe me ndihmën e tabelës.

| $p$     | $q$     | $p \Leftrightarrow q$ |
|---------|---------|-----------------------|
| T       | T       | T                     |
| T       | $\perp$ | $\perp$               |
| $\perp$ | T       | $\perp$               |
| $\perp$ | $\perp$ | T                     |

**Shembulli 4** Le të jenë dhënë gjykime:  $p: \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$ ,  $q: 3^2 > 2^3$  и  $r: -2 \cdot 3 = -6$ .

Formoi gjykime:

a)  $p \Leftrightarrow q$ ; б)  $p \Leftrightarrow r$ ; в)  $q \Leftrightarrow r$ ;

por pastaj cakto vlerën e tyre të vërtetësisë.

a)  $p \Leftrightarrow q: \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$  vetëm nëse  $3 \cdot 2^3$ ,  $\tau(p \Leftrightarrow q) = \tau(p) \Leftrightarrow \tau(q) = \perp \Leftrightarrow T = \perp$ .

б)  $p \Leftrightarrow r: \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$  dhe vetëm nëse  $-2 \cdot 3 = -6$ ,  $\tau(p \Leftrightarrow r) = \tau(p) \Leftrightarrow \tau(r) = \perp \Leftrightarrow T = \perp$ .

в)  $q \Leftrightarrow r: 3^2 > 2^3$  nëse dhe  $-2 \cdot 3 = -6$ ,  $\tau(q \Leftrightarrow r) = T \Leftrightarrow T = T$ .

**5** Të caktohet vlera e vërtetësisë së këtyre ekuivalencave:

a)  $(2 < 6) \Leftrightarrow (2 \mid 6)$ ;

c)  $(2 + 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2) \leq 1$ ;

б)  $(3 \cdot 2 - 1 = 5) \Leftrightarrow (6^2 = 36)$ ;

ç)  $3 \mid 7$  nëse dhe vetëm nëse  $3 \mid 8$ .

**6** Le të jenë, p, q dhe r gjykime:

p – Ai është nxënës i shkëlqyeshëm.

q – Ai është i popullarizuar ndërmjet shokëve.

r – Ai shko në të gjitha festat.

Shkruaji këto shprehje simbolike si fjali:

a)  $q \Leftrightarrow (p \wedge r)$ ;

б)  $q \Leftrightarrow r$ ;

в)  $\neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee r)$ .

❖ Negacioni ( $\neg$ ), konjunksioni ( $\wedge$ ), disjunksioni ( $\vee$ ), disjunksioni i përjashtuar ( $\underline{\vee}$ ), implikacioni ( $\Rightarrow$ ) dhe ekuivalenca ( $\Leftrightarrow$ ) quhen operacione logjike.

### Detyra për punë të pavarur:

1. Letëjenëdhëngjykimet  $p: \frac{1}{4} = 0,25$  Lumi Danub kalon nëpër Shkup;  $r: \sqrt{2}$  e

është numër iracional. Formo implikacione:

- a)  $p \Rightarrow q$ ;      b)      c)  $q \Rightarrow r$ ;      d)  $r \Rightarrow p$ .

2. Le të jenë dhënë gjykimet  $q$   $p: \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ ,  $q: 2x=4$  dhe  $x=-2$

r: Numri 9 është numër i përbërë. Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjytimeve:

- a)  $p \Rightarrow \neg q$ ;      b)  $p \vee r$ ;      c)  $(p \wedge r) \vee q$       d)  $(p \vee q) \wedge r$ .

- 3. Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:**

$$) * 5 * 3 \cdot 6 \% \cdot 6 ; \& 2 \cdot 15 \%$$

$$)2 \neq 0 = 2 \% \text{ for } ; \&14:2 = 12 \% \text{ , } \&2 = 0 \quad 2 \% \text{ }$$

- #### 4. Rrethoje gjykimin e saktë:

- a) Nëse  $p$ , atëherë  $q$  quhet negacion;  
b) Nëse  $p$ , atëherë  $q$  quhet ekuivalencë;  
c) Nëse  $p$ , atëherë  $q$  quhet disjunksion;  
ç) Nëse  $p$ , atëherë  $q$  quhet implikacion.

Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:

$\mathbb{R}^n$

)&T[[0% c                      † % &[[ [[0%) r [[0%.

6. Le të jenë dhënë gjykimet:  $p: -1$  është numër pozitiv,  $q: 4 \nmid n$  dhe  $r: 2 * 6 = 0$ . Formo ekuivalenca:

- а)  $p \Leftrightarrow q$ ;      б)  $q \Leftrightarrow q$ ;      в)  $q \Leftrightarrow r$ ;      г)  $r \Leftrightarrow p$ .

Le të jenë dhënë gjykimet p: Shuma e këndeve te katërkëndëshi është 3600,

$q:3+2=5$  dhe  $r:2|48$ . Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjyкитеve:

- a)  $p \Leftrightarrow \neg q$ ;      b)  $\nVdash p$ ;      c)  $\nVdash p$ ;      d)  $\nVdash p$ ;      e)  $\nVdash p$ ;      f)  $\nVdash p$ ;      g)  $\nVdash p$ ;      h)  $\nVdash p$ ;      i)  $\nVdash p$ ;      j)  $\nVdash p$ ;      k)  $\nVdash p$ ;      l)  $\nVdash p$ ;      m)  $\nVdash p$ ;      n)  $\nVdash p$ ;      o)  $\nVdash p$ ;      p)  $\nVdash p$ ;      q)  $\nVdash p$ ;      r)  $\nVdash p$ ;      s)  $\nVdash p$ ;      t)  $\nVdash p$ ;      u)  $\nVdash p$ ;      v)  $\nVdash p$ ;      w)  $\nVdash p$ ;      x)  $\nVdash p$ ;      y)  $\nVdash p$ ;      z)  $\nVdash p$ .

- 8. Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:**

$$\text{a) } \tau(3|20 \Leftrightarrow 3-2 \cdot 1=1); \quad \text{b) } \tau\left(3=3 \Leftrightarrow 2=\frac{6}{3}\right); \quad 122 \frac{1}{2} \text{ } \left\{ \begin{array}{l} \text{н/д} \\ \text{н/д} \end{array} \right\} \text{ } \text{сб } 6^{20}\% ;$$

r) Syprina e drejtkëndëshit me dimensione a dhe b është numri  $a \cdot b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ .

9. Le të jenë dhënë gjykimet  $p:5-5 \nmid 0=0$ ,  $q:\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Syprina e një shumëkëndëshi është numër negativ

- а)  $p \vee \neg q$ ;      б)  $r \underline{\vee} \neg p$ ;      в)  $(\neg p \underline{\vee} \neg r) \Rightarrow q$ ;      г)  $\neg(p \Leftrightarrow q) \underline{\vee} r$ .

11. a)  $(T \sqcup \perp) \vdash T$     c)  $(\perp \sqcup T) \vdash T$   
 b)  $(T \sqcup T) \vdash T$     d)  $(\perp \sqcup \perp) \vdash \perp$

## $q$ -Formo disjunksionet e përjashtuara

Shkruaji këto fjali si shprehje simbolike:

- a) Nëse ai merr pjesë në kuize dhe shikon filma kriminelë, atëherë ai është programues.
- b) Nëse ai nuk merr pjesë në kuize dhe nuk shikon filma kriminelë, atëherë I nuk është programues.
- c) Nëse ai shikon filma kriminelë, atëherë ai merr pjesë në kuize; dhe nëse ai nuk shikon filma kriminelë, atëherë ai është programues.

#### 4. Formulati gjykimore

Le të jenë  $p$  dhe  $q$  dy gjykime elementare, atëherë implikacionin e gjykimeve  $p$  dhe  $q$



- Prej fjalive të varura - të përbëra në logjikën e matematikës me rëndësi të veçantë janë edhe fjalitë kushtore. Me pjesën e kushtëzuar të fjalisë jepet kushti nën të cilin kryhet ose do të kryhet veprimi të fjalës kryesore. Me ndihmën e fjalive të kushtëzuara përkufizohet implikacioni në logjikën e matematikës.
- Të përkufizojmë implikacionin.

Të përkufizojmë formula gjykimore.



- 1) Ndryshoret gjykimore  $p, q, r, s, \dots$  etj dhe konstantë  $T$  dhe  $\perp$  janë formula gjykimore.
  - 2) Nëse  $A$  dhe  $B$  janë formula gjykimore, atëherë edhe  $(\phi \text{ формула})$  dhe  $(\phi \text{ формула})$  janë formula gjykimore.
  - 3) Formulat gjykimore mund të formohen vetëm me ndihmën e numrit të fundshëm të zbatimeve të rregullave 1) dhe 2).
- Gjykimet e përbëra të cilat në logjikën matematike quhen formula gjykimore mund të jenë të vërteta ose të pavërteta.

Gjatë formimit të formulave të përbëra gjykimore shfrytëzohen më shumë operacione logjike. Sikurse edhe në aritmetikë, ashtu edhe në logjikën matematike, është e rëndësishme të dihet sipas cilës renditje kryhen operacionet logjike. Kjo mundëson që gjatë të shkruarit e formulave të përbëra gjykimore të shfrytëzohen më pak kllapa.

Në lidhje me renditjen e operacioneve logjike duhet të dihe:



- ❖ Nëse te formula gjykimore hasen të gjitha operacionet logjike dhe poashtu nuk hasen kllapa, atëherë renditja e operacioneve logjike është si vijon:

1) ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) ; 6) .

#### Shembulli 1.

T'i shqyrtojmë gjykime:

$p$ : Sot bie shi;  $q$ - Sot bie borë.

Prej këtyre gjykimeve do t'i formojmë gjykime:

është e saktë se sot binte shi ose borë

$p \quad q$  Sot nuk binte shi dhe sot nuk binte bore.

Për formimin e gjykimeve do t'i formojmë tabelat e vërtetësisë. Përkatësish: :

| $p$     | $q$     | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p \wedge \neg q$ |
|---------|---------|----------|----------|------------|------------------|------------------------|
| T       | T       | $\perp$  | $\perp$  | T          | $\perp$          | $\perp$                |
| T       | $\perp$ | $\perp$  | T        | T          | $\perp$          | $\perp$                |
| $\perp$ | T       | T        | $\perp$  | T          | $\perp$          | $\perp$                |
| $\perp$ | $\perp$ | T        | T        | $\perp$    | T                | T                      |

Vërejmë se në katër rastet vlera e vërtetësisë së (формула) është e njëjtë me vlerën e vërtetësisë së . Kjo do të thotë se është gjykim i përbërë (формула) është i vërtetë për çdo vlerë të gjykimeve p dhe q.

Gjatë shqyrtimit të vlerës së vërtetësisë së formulës së dhënë gjykimore, duhet të dihet se nga sa vlera të vërtetësisë duhet të ketë çdonjëra prej ndryshoreve gjykimore që haset te formula.



❖ Nëse te formula gjykimore kemi n ndryshore gjykimore, atëherë për çdo ndryshore gjykimore te tabela e vërtetësisë duhet të ketë  $2n$  vlera të vërtetësisë.

**Ta shqyrtojmë te ky shembull:**

**Shembulli 2.** Ta shqyrtojmë vlerën e vërtetësisë së formulës gjykimore (формула). Me ndihmën e tabelës së vërtetësisë, duke respektuar rendin e operacioneve logjike kemi:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow (p \vee q)$ |
|-----|-----|------------|----------------------------|
| T   | T   | T          | T                          |
| T   | ⊥   | T          | T                          |
| ⊥   | T   | T          | T                          |
| ⊥   | ⊥   | ⊥          | T                          |

- Vërejmë se te ky shembull kemi dy ndryshore gjykimore dhe atë p dhe q, prandaj kemi 22 vlera të vërtetësisë për çdo ndryshore

Formula gjykimore te Shembulli 2 është e saktë për çdo vlerë të vërtetësisë së të gjitha ndryshoreve gjykimore që hasen tek ajo.

Formulat gjykimore mund t'i grupojmë në tre grupe:

- ❖ **Formulat gjykimore që janë të vërteta për të gjitha vlerat e ndryshoreve gjykimore quhen tautologji.**
- ❖ **Formulat gjykimore që janë të pavërteta për të gjitha vlerat e ndryshoreve gjykimore quhen kontradiksione.**
- ❖ **gjykimore që janë të vërteta për disa vlera të ndryshoreve gjykimore, por për të e të tjerat janë të pavërteta quhen formula gjykimore neutrale.**

**Пример 3** cakto vlerën e vërtetësisë për çdonjërin prej formulave gjykimore:

a)  $p \Rightarrow \neg r \Leftrightarrow \neg(r \vee q) \Rightarrow p$ ;      b)  $(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q)$   
 за  $\tau(p) = \perp$ ;  $\tau(q) = \top$ ;  $\tau(r) = \perp$ .

a)

$$\begin{aligned} \tau(p \Rightarrow \neg r \Leftrightarrow \neg(r \vee q) \Rightarrow p) &= \perp \Rightarrow \neg \perp \Leftrightarrow \neg(\perp \vee \top) \Rightarrow \perp = \\ &= \perp \Rightarrow \top \Leftrightarrow \neg \top \Rightarrow \perp = \\ &= \top \Leftrightarrow \perp \Rightarrow \perp = \\ &= \top \Leftrightarrow \top = \\ &= \top \end{aligned}$$

b) Përpiqu vetë!

**Shembulli 4.** Është dhënë p të caktohet vlera e vërtetësisë së çdonjëres prej këtyre formulave:

a)  $p \vee \top$ ;      б)  $(\top \vee p) \Leftrightarrow \perp$ ;      в)  $p \wedge \top$ ;      г)  $(p \Rightarrow \neg \perp) \Rightarrow \top$ .

a) Gjykimi p mund të jetë i vërtetë ose i pavërtetë, domethënë  $(p) \models \top$  dhe  $(\neg p) \models \perp$

1) Nëse  $(p) \models \top$ , atëherë  $(p \vee \top) \models \top$

2) Nëse  $(\neg p) \models \perp$  atëherë  $(\neg p \vee \top) \models \top$

b) Ngjashëm sikurse nën  $(p) \models \top$  или  $(\neg p) \models \perp$

1) Nëse  $(p) \models \top$ , atëherë  $(\top \vee p) \models \top$

2) Nëse  $(\neg p) \models \perp$  atëherë  $(\neg p \vee \top) \models \top$

c) и d) Обиди се сам!

**Shembulli 5** Me ndihmën e tabelës së vërtetësisë të vërtetohet se këto formula gjykimore janë tautologji:

a)  $(p \vee r) \wedge (p \wedge r) \Rightarrow p$

b)  $p \vee q \Rightarrow p \vee pq$

a)  $(p \vee q) \wedge r \Rightarrow p \vee (q \wedge r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \wedge r$ | $q \wedge r$ | $p \wedge (q \wedge r)$ | $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ |
|-----|-----|-----|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|---------------------------------------------------------------|
| T   | T   | T   | T            | T                       | T            | T                       | T                                                             |
| T   | T   | ⊥   | T            | ⊥                       | ⊥            | ⊥                       | T                                                             |
| T   | ⊥   | T   | ⊥            | ⊥                       | ⊥            | ⊥                       | T                                                             |
| T   | ⊥   | ⊥   | ⊥            | ⊥                       | ⊥            | ⊥                       | T                                                             |
| ⊥   | T   | T   | ⊥            | ⊥                       | T            | ⊥                       | T                                                             |
| ⊥   | T   | ⊥   | ⊥            | ⊥                       | ⊥            | ⊥                       | T                                                             |
| ⊥   | ⊥   | T   | ⊥            | ⊥                       | ⊥            | ⊥                       | T                                                             |
| ⊥   | ⊥   | ⊥   | ⊥            | ⊥                       | ⊥            | ⊥                       | T                                                             |

Domethënë, formula gjykimore është tautologji.

b) Обиди се сам!

**Пример 6** Vërteto se këto formula gjykimore janë ekuivalenca logjike:

a)  $q \vee \neg p$  и  $p \Rightarrow q$ ; б)  $p \wedge (p \vee q)$  и  $p$ .

Formojmë formulë të re gjykimore me ndihmën e operacionit logjik për ekuivalencën, me atë formojmë formulë të re gjykimore

$q \vee \neg p \quad p \quad pq$ . Nëse formula e fundit gjykimore është tautologji,

atëherë gjykimet e dhëna fillestare janë logjikisht ekuivalente.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $q \vee \neg p$ | $p \Rightarrow q$ | $q \vee \neg p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|-------------------------------------------------|
| T   | T   | ⊥        | T               | T                 | T                                               |
| T   | ⊥   | ⊥        | ⊥               | ⊥                 | T                                               |
| ⊥   | T   | T        | T               | T                 | T                                               |
| ⊥   | ⊥   | T        | T               | T                 | T                                               |

Vijon, formulat gjykimore и  $q$  и  $p \vee \neg q$  janë logjike ekuivalente b)

Përpiqu vetë!

### Detyra për punë të pavarur:

1. Cakto vlerën e vërtetësisë për çdonjërin prej formulave gjykimore

a)  $\neg p \wedge r \Leftrightarrow \neg(r \wedge q) \Rightarrow p$ ;      б)  $(p \vee \neg r) \Rightarrow \neg(q \Leftrightarrow p)$ .

3a  $\tau(p) = \perp$ ;  $\tau(q) = \top$ ;  $\tau(r) = \perp$ .

2. Për gjykimin e dhënë p cakto vlerën e vërtetësisë së çdonjërit prej formulave:

a)  $p \vee \top$ ;      б)  $p \Rightarrow (\neg p \wedge \top)$ ;      в)  $p \Leftrightarrow \perp$ ;      г)  $(\top \Rightarrow p) \vee \neg \top$ .

3. Vërteto se këto formula janë logjike ekuivalente:

a)  $(\neg q) \Rightarrow p \Leftrightarrow q \wedge p$ ;      б)  $p \wedge (\neg q) \Rightarrow p$ .

4. Formo tabelë të vërtetësisë së këtyre formulave gjykimore:

a)  $(p \vee r) \Rightarrow (p \wedge q)$ ;      б)  $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ;      в)  $((p \Rightarrow q) \vee r) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ .

## 5. Ligjet logjike

Te njësia mësimore paraprake përkufizuar formulën gjykimore dhe shqyrtuar si mund të jetë ajo në pikëpamje të vlerës së saj të vërtetësisë: formula gjykimore tautologji, kontradiksion ose neutrale.



Përkujtohu dhe përgjigju!

- Çfarë është formulë gjykimore?
- Çfarë është tautologji, e çfarë është kontradiksion?
- Çfarë është formulë gjykimore neutrale?

Prej të gjitha llojeve të formulave gjykimore, tautologjitë kanë domethënie të veçantë.



❖ Disa ligje logjike më të rëndësishme janë:

❖ **Некои поважни логички закони се:**

1. Ligji komutativ për konjunksionin ;
2. Ligji komutativ për disjunksion
3. Ligji asociativ për konjunksion ;
4. Ligji asociativ për disjunksionin
5. Ligji distributiv për konjunksionin në lidhje me disjunksionin ;
6. Ligji distributiv për disjunksionin në lidhje me konjunksionin
7. Ligji për absorbimin e disjunksionit nga konjunksioni ;
8. Ligji për absorbimin e konjunksionit nga disjunksioni ;
9. Ligji për përjashtim të tretës
10. Ligji për kundërthënie;
11. Ligji për negacion të dyfishtë ;
12. Ligji për zëvendësimin e implikacionit :
13. Ligji për zëvendësimin e ekuivalencës ;
14. Ligji për zëvendësimin e ekuivalencës
15. Ligjet e De Morgani:
  - a) Ligji për negacion të konjunksionit
  - b) Ligji për negacion të disjunksionit

**Shembulli 1.** Me zbatimin e tabelës së vërtetësisë të vërtetohet se formulat 1,2 dhe 3 janë tautologji.

Për formulën gjykimore  $p \quad q \quad q \quad p$  :

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $q \wedge p$ | $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ |
|-----|-----|--------------|--------------|-----------------------------------------|
| T   | T   | T            | T            | T                                       |
| T   | ⊥   | ⊥            | ⊥            | T                                       |
| ⊥   | T   | ⊥            | ⊥            | T                                       |
| ⊥   | ⊥   | ⊥            | ⊥            | T                                       |

Vijon, formula gjykimore është tautologji.

Në mënyrë të ngjashme tregohet se për disjunksionin vlen ligji komutativ dhe se vlen ligji asociativ për konjunksionin.

1

Me zbatimin e tabelës së vërtetësisë të vërtetohet se formulat 5,6 dhe 14 janë tautologji.

2

Ta transformojmë formulën ashtu që të mos përmbajë implikacion.  
Me shfrytëzimin e ligjeve logjike kemi

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

- Cilat ligje logjike janë shfrytëzuar gjatë transformimit?

2

Me shfrytëzimin e ligjeve logjike transformoi këto formula:

a)  $\neg(p \wedge q)$  ; b)  $(p \vee q) \wedge \neg p$  .

**Shembulli 3** Me shfrytëzimin e ligjeve logjike të kryejmë negacionin e gjykimi:

Numri 2 është numër i thjeshtë dhe numrit 2 është numër çift. Këtë gjykim simbolikisht mund ta shkruajmë si (формула), ku p: numri 2 është numër i thjeshtë; q numri 2 është numër çift.

Me shfrytëzimin e njërit prej ligjeve të De Morganit kemi, ose nëse e lexojmë me fjalë Numri 2 nuk numër i thjeshtë ose numrit 2 nuk është numër çift.

o Cili ligj i De Morganit është shfrytëzuar këtu?

○

Kryejë negacionin e këtyre gjykimeve:

3

a)  $3+5=8$  dhe  $2=5+3$  ; b)  $3+5=8$  dhe  $3=8+5$  ; v) Nëse  $3+7=10$  atëherë  $7=10-3$  .

**Shembulli 3.** T'i shqyrtojmë këto implikacione: :

a) Nëse  $3+7=10$  Nëse  $7=10-3$  и b) Nëse  $3+7=10$  Nëse  $7=10-3$  .

Të dy implikacionet janë të vërteta, por ndërmjet tyre ka dallim. Tek implikacioni nën a) përfundimi

$7=10-3$  vijon prej supozimit  $3+7=10$ . Te ky implikacion, përfundimi drejtpërdrejt vijon prej supozimit edhe përfundimi është gjithmonë i vërtetë kur është i vërtetë supozimi, atëherë themi se përfundimi logjikisht vijon prej supozimit. Për çdo implikacion të këtillë themi se është vijim logjik.

Për implikacionin nën b) kjo nuk mund ta përfundojmë.

- ❖ Implikacionet e vërteta të cilat përfundimi logjikisht vijon prej supozimit i quajmë vijim logjik.
- ❖ Çdo teoremë mund të shkruhet në formë të implikacionit të këtillë (формула), ku p supozimi i teoremës, por q është përfundim i teoremës.

4

Cilat prej këtyre implikacioneve janë vijim logjik:

- a) Nëse numrit 225 plotpjesëtohet me 9, atëherë numri 225 plotpjesëtohet me 3;
- b) Nëse  $9 - 5 = 4$  atëherë  $-1 \cdot 0$

**Kur dikush do të përfundojë se prej bashkësisë së caktuar të gjytimeve, gjykim i caktuar “logjikisht vijon”, atëherë kemi përfundim deduktiv. Gjykimet prej të cilave nisët quhen supozime ose hipoteza, por gjykimi i cili vijon prej tyre quhet përfundim ose pasojë. Nëse realizimi i përfundimit varet vetëm prej atyre vetive të hipotezave dhe përfundimeve të cilat mund të shprehen kur gjykimet janë supozuar me shkronja gjykimore dhe operacione logjike, atëherë kemi realizim gjykimor të përfundimit logjik. Për realizimin e përfundimit logjik të logjika gjykimore shfrytëzohen shumë ligje logjike prej të cilave do të përmendim vetëm disa prej tyre:**

❖ **Rregulla për realizimin e përfundimit janë:**

1. Modus ponens;
2. Modus tolens
3. Silogjizmi hipotetik
4. Rregulla për kontrapozicion .

Do të zgjidhim disa shembuj praktikë të rregullave për realizimin e përfundimeve:

Ќе решиме неколку практични примери од правилата за изведување на заклучоци:

**Shembulli 4. Të realizojmë përfundim logjik të këtyre gjytimeve:**

Jashtë bie shi;

Nëse jashtë bie shi, merre ombrellën.

Këtu gjykimet mund t'i shënojmë me shkronja gjykimore dhe shfrytëzimi i operacioneve logjike.

Kështu, do të kemi:

p: Jashtë bie shi;

: Nëse jashtë bie shi, q: merre ombrellën.

Domethënë ne si supozime i kemi gjykimet p dhe

Prej këtu me shfrytëzimin e rregullës për përfundim Modus ponens , si përfundim do të realizojmë gjykimin q.

Domethënë, përfundimi është: Merre ombrellën.

5

Realizo përfundim logjik të këtyre gjytimeve:

Shumë do të mësoj për testin e matematikës.

Nëse mësoj shumë për testin e matematikës, do të marr notë 5.

Cilën rregull për realizimin e përfundimit logjik e shfrytëzon?

Кое правило за изведување на логички заклучок го искористи?

**Shembulli 5.** Të realizojmë përfundim logjik të këtyre gjykimeve:

Nëse është festë, shkolla është e mbyllur;

Shkolla nuk është e mbyllur.

Këtu gjykimet mund t'i shënojmë me shkronja gjykimore dhe shfrytëzimin e operacioneve logjike. Kështu, do të kemi:

Nëse është festë, q: shkolla është e mbyllur

ku gjykimi p: Është festë. Gjykimi q: Shkolla është e mbyllur.

q: Shkolla nuk është e mbyllur.

Domethënë ne si supozime i kemi gjykime: dhe

Prej këtu me shfrytëzimin e rregullës për përfundim Modus tolens , si përfundim do ta realizojmë gjykimin

Domethënë, përfundimi është: Nuk është festë.



Realizo përfundim logjik të këtyre gjykimeve

Nëse është ngrohët do të shkojmë në shetitje.

Nuk do të shkojmë në shetitje.

Cila rreguë për realizim të përfundimit logjik e shfrytëzove?

**Shembulli 6.**

Të realizojmë përfundim logjik të këtyre gjykimeve:

Nëse shkoj të notoj, atëherë gjatë kohë do të qëndroj në diell.

Nëse gjatë kohë qëndroj në diell, atëherë do të digjem.

Gjykimet prej të cilave duhet të realizojmë përfundim mund t'i shënojmë me shkronja gjykimore dhe me shfrytëzimin e operacioneve logjike. Kështu, do të kemi:

Nëse shkoj të notoj, atëherë gjatë kohë do të qëndroj në diell.

Nëse gjatë kohë do të qëndroj në diell, atëherë do të digjem

Me shfrytëzimin e rregullës për silogjizëm hipotetik vijon se përfundimi do të jetë:

Nëse shkoj të notoj, atëherë do të digjem.

**Shembulli 7.** Të realizojmë përfundim të këtyre gjykimeve:

Nëse e pastroj dhomën, nëna nuk do të jetë e hidhëruar.

Nëse me ndryshore gjykimore i shkruajmë gjykimet elementare, kemi:

p- Do ta pastroj dhomën.

q- Nëna do jetë e hidhëruar.

Prej këtu, gjykimi: Nëse e pastroj dhomën, nëna nuk do të jetë e hidhëruar, do ta shkruajmë sikurse (формула)

Duke e shfrytëzuar rregullën për kontrapozicion, gjykim ekuivalent do të jetë: (формула), domethënë ose e shprehur me fjalë: Nëse nëna është e hidhëruar, atëherë nuk do ta pastroj dhomën (формула).

Kryeji përfundimet logjike prej gjykimeve ekuivalente:

7

Nëse marr notë të mirë nga fizika, do të shkoj të shikoj film.

Nëse shikoj film, do të shkoj me shokët në akullore.

Cila rregull për realizim të përfundimit logjik e shfrytëzove?

### Detyra për punë të pavarur:

1. Provo se këto formula gjykimore a janë ligje logjike:

a)  $p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$ ; б)  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ ; в)  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ;

г)  $(p \Rightarrow q) \vee p \Rightarrow q$ ; д)  $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$ ; е)  $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ .

Nëse bëhet fjalë për ligj logjik, a e njeh?

2. Me zbatimin e tabelës së vërtetësisë të vërtetohet se formulat 8,9 dhe 15 a janë tautologji.

3. Me shfrytëzimin e ligjeve logjike transformoi këto formula:

a) (формула); b) (формула).

4. Kryeje negacionin e këtyre gjykimeve:

a) Hekuri është metal ose hekuri nuk është në gjendje të lëngët;

b) (формула) dhe (формула)

c) Nëse numrit 9 është numër i përbërë, atëherë numri 9 plotpjesëtohet me numrin 3.

5. Shprehi 3 implikacione të cilat janë vijim logjik dhe 3 të cilat nuk janë!

6. Kryej përfundim logjik të këtyre gjykimeve:

Nëse jam matematikan i mire, atëherë lehtë do të mësoj programimin.

Unë jam matematikan i mirë.

Cilën rregull për përfundim logjik e shfrytëzove?

7. Kryej përfundim logjik të këtyre gjykimeve:

Nëse çmimet e prodhimeve rriten, atëherë fuqia blerëse e njerëzve zvogëlohet.

Fuqia blerëse e njerëzve zmadhohet.

Cilën rregull për përfundim logjik e shfrytëzove?

8. Kryej përfundim logjik të këtyre gjykimeve:

Nëse fuqia blerëse e njerëzve zvogëlohet, atëherë çmimet e prodhimeve rriten.

## 6. Koncepti për bashkësi, nënbashkësi, bashkësi të barabarta dhe ekuivalente

Koncepti bashkësi është koncept themelor në teorinë e bashkësive dhe nuk përkufizohet, por mendojmë se intuitivisht nënkuptohet çfarë është bashkësia. Me konceptin bashkësi nënkuptohet shuma ose koleksioni i objekteve të cilat më së shpeshti kanë ndonjë veti të përbashkët.

Bashkësitë zakonisht i shënojmë me shkronjat e mëdha të latinishtes:  $A, B, C, \dots$ ,  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ .

Për një bashkësi do të llogarisim se është përcaktuar njëvlerësisht, nëse për çdo objekt mund të themi se a i takon ose nuk i takon asaj bashkësi. Në lidhje me përkatësinë të elementit të dhënë të një bashkësie i futim këto simbole.

Nëse elementi  $a$  i takon bashkësisë  $A$  shënohet ( $a \in A$ ). Nëse elementi  $b$  nuk i takon bashkësisë  $A$  shënohet ( $b \notin A$ ).



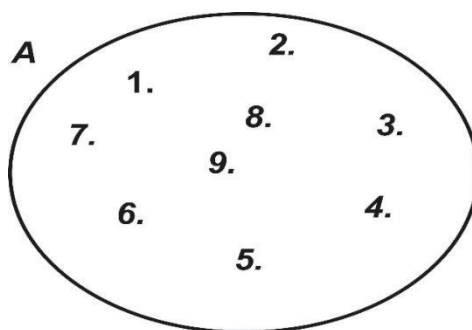
○ Në çfarë mënyra mund të jepet një bashkësi?

- 1) Dhënia e bashkësisë me numërim të elementeve të tij. Me këtë mënyrë elementet e bashkësisë së dhënë shkruhen në kllapa të mëdha dhe poashtu renditja e elementeve 2) Dhënia e bashkësisë duke përmendur vetitë e elementeve të saj, nëse në rastin e përgjithshëm e shënojmë çfarëdo element me  $x$ , kurse vetinë e caktuar e shënojmë me  $P(x)$ , atëherë bashkësia në mënyrë përshkruese mund të jetë e dhënë me  $A = \{x \mid P(x)\}$ .
- 2) 3) Dhënia e bashkësisë me ndihmën e diagrameve të Venit. Me këtë mënyrë të dhënies paraqiten si pjesë e rrafshit të kufizuar me vijë të mbyllur.
- 3) Në lidhje me mënyrat e ndryshme të dhënies së bashkësive t'i shqyrtojmë te ky shembull

Në lidhje me mënyrat e ndryshme të dhënies së bashkësive t'i shqyrtojmë te ky shembull:

**Shembulli 1.** Bashkësia  $A$  prej të gjithë numrave natyrorë më të vegjël se 10, është dhënë:

- a) tabelarish:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,
- b) përshkruese: (lexohet "A është bashkësi prej të gjitha elementeve  $x$ , ku  $x$  është numër natyror dhe  $x$  është më i vogël se 10")
- c) diagram të Veni:



Mund të përfundojmë këtë:



- ❖ Një bashkësi mund të jetë dhënë në shumë mënyra; tabelarisht, përshkruese ose me diagram të Venit.

1

Shkruaji tabelarisht dhe me diagram të Venit bashkësitë:  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \nmid x \wedge 9 \mid x\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \nmid x\}$ ,  $C = \{x \mid x \text{ është numër i dhjetëshes së parë të qindëshes së dytë}\}$ .

**Shembulli 2.** Ta shkeuajmë në mënyrë përshkruese bashkësinë (формула).

Bashkësinë e dhënë mund ta shkruajmë në këtë mënyrë:

është çift më i vogël se 10}, por mund ta shkruajmë edhe si

është shifër e numrit 2468}. Vërejmë se një bashkësi e njëjtë mund të paraqitet në mënyrë përshkruese në shumë mënyra



- ❖ Një bashkësi A është nënbashkësi e tjetër bashkësie B, nëse dhe vetëm nëse çdo element i bashkësisë A është element edhe i bashkësisë B. Shënohet
- ❖ Nëse të gjitha elementet prej një bashkësie A janë elemente të bashkësisë B, por bashkësia B ka të paktën një element që nuk i takon A, atëherë thuhet se A është nënbashkësi e vërtetë e B dhe shënohet

**Shembulli 3.** Bashkësia është nënbashkësi e vërtetë e bashkësisë

d.m.th., edhe akoma më shumë, . Bashkësia është nënbashkësi edhe e bashkësisë A edhe të bashkësisë B, domethënë dhe . Akoma më shumë, C është nënbashkësi e vërtetë e bashkësive A dhe B.

2

Vërejtje: Çdo bashkësi është nënbashkësi e vetvetes.  $M = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ и } n \leq 12\}$ .

**Shembulli 4.** Ta shkruajmë tabelarisht bashkësinë është numër çift pjesëtues i (формула). Mund të vërejmë se nuk ekziston numër i tillë, domethënë numër çift që është pjesëtues i 9, që do të thotë bashkësia nuk përmban elemente. Shkruajmë



- ❖ ashksia, e cila nk prmban elemente het bashksi e brat dhe shkrhe . ashksia e brat sht nnbashksi e do bashksie.
- ❖ Dy bashkësi A dhe B janë bashkësi të barabarta nëse çdo element i bashkësisë A është edhe element i bashkësisë B dhe çdo element i bashkësisë B është element edhe i bashkësisë A. Shkruhet , domethënë = nëse dhe vetëm nëse .
- ❖ Dy bashkësi A dhe B janë ekuivalente nëse kanë numër të barabartë të elementeve. Shkruajmë

#### Shembulli 5

Bashkësitë (e hënë, e martë, e mërkurë, e enjte, e premte, e shtunë, e diel janë bashkësi të barabarta d.m.th., edhe gjithashtu janë ekuivalente d.m.th., është ditë e javës  
Duhet të mbaj mend se:



- ❖ Bashkësia, elementet e të cilës janë të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë quhet bashkësi partitive e bashkësisë dhe shënohet me

#### Пример 6

Bashkësia partitive është bashkësia  $A = \{x, y, z\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

3

Shkruaje bashkësinë partitive të bashkësisë së shifrave të numrit 2263.

### Detyra për punë të pavarur:

1. Bashkësitë e dhëna shkruaji tabelarisht edhe me diagram të Veni:

a)  $A = \{x \mid x \text{ është shkronjë e fjalës TEKNIKA}\}$  ;

b)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$

v)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$

g)  $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 30\}$ .

2. Le të jetë dhënë bashkësia. Cilat prej këtyre pohimeve janë të vërteta:

a)  $2 \subset A$ ;    b)  $\{3\} \in A$ ;    v)  $\{4, 5, 6\} \in A$ ;    g)  $\{3, 5, 8\} \subset A$ .

3. Cakto cilat prej bashkësive të dhëna janë të barabarta, e cilat ekuivalente:

a)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2, 3, 4, 5\}$ ; b)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2, 3, 4, 5\}$ ,

6;     $\mathbb{N}$

4. Zgjidh pohimin e saktë për x dhe y ashtu që bashkësitë të jenë të barabarta  $A = \{x, 3, 5, 7\}$  и  $B = \{2, 5y, 7\}$

a)  $x = 2, y = 7$  ;    b)  $x = 5, y = 2$  ;    v)  $x = 2, y = 7$  ;    g)  $x = 2, y = 3$  .

5. Shkruaje bashkësinë partitive për bashkësinë:

a)  $A = \{1, 2, 3\}$ ;    b)  $B = \{a, b, c, d\}$  .

## 7. . Përkufizimi i operacioneve me bashkësi me ndihmën e operacioneve logjike

Negacioni konjunksioni , dijsjunksioni disjunksioni i përjashtuar

Implikacioni dhe ekuivalenca janë operacione logjike d.m.th., operacione me gjykime.

Në mënyrë shumë të ngjashme sikurse te gjykimet, ashtu edhe te bashkësitë mund të përkufizohen operacionet.

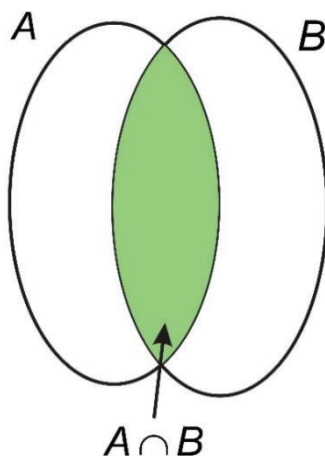
Në praktikë më së shpeshti ballafaqohemi me problem te të cilat njëkohësisht duhet t'i shqyrtojmë elementet të cilat u takojnë dy ose më shumë bashkësive, elementet e përbashkëta të dy ose më shumë bashkësive nuk i takojnë bashkësisë tjetër e të ngjashme.

## Prerja e bashkësive



- ❖ Prerja e dy bashkësive A dhe B është bashkësia e të gjitha elementeve të përbashkëta të bashkësive
- ❖ A dhe B dhe shkruhet  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- ❖ Dy bashkësi A dhe B quhen disjunkte, nëse prerja e tyre është bashkësi e zbrazët, domethënë

Bashkësia e dhënë me diagram të Venit është:



T'i shqyrtojmë këta shembuj

**Shembulli 1.** Prerja e bashkësive është bashkësia 1

$A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$  и  $B = \{x \mid x \leq 5\}$  и  $A \cap B = \{4, 9, 16, 25\}$ .

$\mathbb{N}$

**Shembulli 2.** Bashkësitë janë disjunkte, pasi,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $B = \{x \mid 5 \leq x\}$

$A \cap B = \emptyset$ .

1

Shkruaje prerjen e bashkësive  $A = \{0, 1, 2, 9, 10, 12, 15\}$  и  $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

- ➤Ta shqyrtojmë tabelën e vërtetësisë së konjunksionit dhe tabelën për përkatësi të elementeve të prerja:

| $p$     | $q$     | $p \wedge q$ |
|---------|---------|--------------|
| $\top$  | $\top$  | $\top$       |
| $\top$  | $\perp$ | $\perp$      |
| $\perp$ | $\top$  | $\perp$      |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$      |

| $A$      | $B$      | $A \cap B$ |
|----------|----------|------------|
| $\in$    | $\in$    | $\in$      |
| $\in$    | $\notin$ | $\notin$   |
| $\notin$ | $\in$    | $\notin$   |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$   |

○ Çfarë mund të përfundosh?

➤ Prej kësaj që u theksua më lart, është e qartë se prerja e dy bashkësive A dhe B është bashkësia  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \in B\}$ .

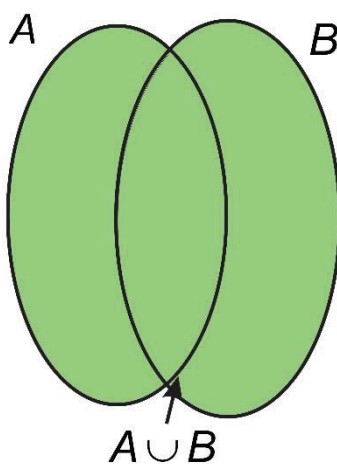
2 Le të jenë dhënë bashkësitë  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  dhe  $B = \{a, c, d, k\}$ . Shkruaje prerjen  $A \cap B$ .

## Unioni i bashkësive

❖ Unioni i dy bashkësive A dhe B është bashkësia e të gjitha elementeve, të cilat i takojnë të paktën njërës prej bashkësive A dhe B, shkruhet me  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Bashkësia e dhënë me diagram të Venit është



**Shembulli 3.** Unioni i bashkësive është bashkësia  $A = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  и  $B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12$ .

- Ta shqyrtojmë vërtetësinë e tabelës së disjunksionit dhe tabelës së përkatësisë së elementeve të unioni:

| $p$     | $q$     | $p \vee q$ | $A$      | $B$      | $A \cup B$ |
|---------|---------|------------|----------|----------|------------|
| T       | T       | T          | $\in$    | $\in$    | $\in$      |
| T       | $\perp$ | T          | $\in$    | $\notin$ | $\in$      |
| $\perp$ | T       | T          | $\notin$ | $\in$    | $\in$      |
| $\perp$ | $\perp$ | $\perp$    | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$   |

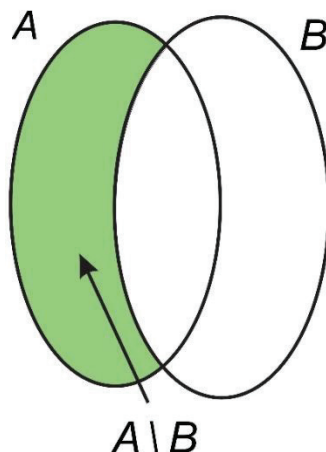
3 Çfarë mund të përfundosh  $A$  ? = „0, 1, и BT,  $\perp$ , Запиши ја

## Ndryshimi i bashkësive

- ❖ Ndryshimi i bashkësisë me bashkësi prej të gjitha elementeve që i takojnë bashkësisë A, por nuk i takojnë bashkësisë B. Shkruhet me (формула)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Bashkësia e dhënë me diagram të Venit është:



Shembulli 4. Ndryshimet dhe e dy bashkësive A dhe B janë bashkësitë  $\mathbb{N}$  dhe  $\mathbb{N}$  d përkatësisht

4

Cakto ndryshimin e bashkësisë me bashkësinë

5

5. Shkruaje ndryshimin e bashkësisë me bashkësinë  $A = \{0,1,2,9,10\}$   $B = \{7,8,9,10\}$ .

- Ta shqyrtojmë tabelën e vërtetësisë së formulave gjykimore dhe tabelën për përkatësi të elementeve të ndryshimi i dy bashkësive:

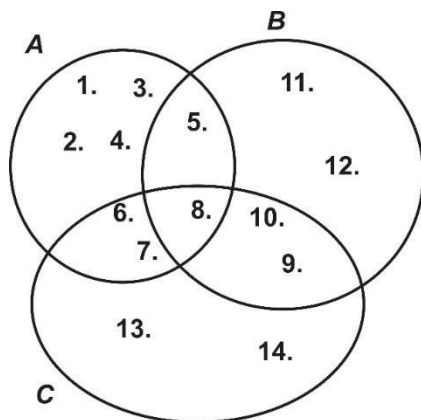
| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $\neg p \wedge q$ | $A$      | $B$      | $A \setminus B$ | $B \setminus A$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|----------|----------|-----------------|-----------------|
| T   | T   | F        | F        | F                 | F                 | $\in$    | $\in$    | $\notin$        | $\notin$        |
| T   | F   | F        | T        | T                 | F                 | $\in$    | $\notin$ | $\in$           | $\notin$        |
| F   | T   | T        | F        | F                 | T                 | $\notin$ | $\in$    | $\notin$        | $\in$           |
| F   | F   | T        | T        | F                 | F                 | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$        | $\notin$        |

- Çfarë përfundon?

- Prej asaj që u përmend më lart është e qartë pse ndryshimi i bashkësisë A me bashkësinë B është bashkësia e përkufizuar me  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \notin B\}$ .

6

Prej diagramit të dhënë të caktohen bashkësitë:  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  dhe  $(B \cap C) \setminus A$ .

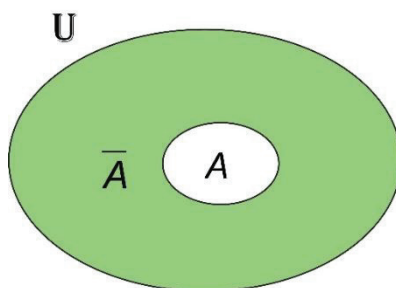


## Komplementi i bashkësisë



- ❖ Komplement i bashkësisë A te bashkësia është bashkësia e të gjitha elementeve që i takojnë bashkësisë , por nuk i takojnë bashkësisë A që shënohet me.
- ❖ Quhet bashkësi universale.
- ❖

Bashkësia (формула) e dhënë me diagram të Venit është



**Shembulli 5.** Komplementi i bashkësisë (формула) në bashkësinë (формула) është bashkësia 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12 .  $\overline{A_U} =$  ...

- Ta shqyrtojmë tabelën e vërtetësisë së negacionit dhe tabelën e përkatësisë së elementeve te komplementi i një bashkësie:

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| T   | ⊥        |
| ⊥   | T        |

| $A$      | $\overline{A_U}$ |
|----------|------------------|
| $\in$    | $\notin$         |
| $\notin$ | $\in$            |

- Çfarë mund të përfundosh?
- ➤ Prej kësaj që u përmend, komplementi i një bashkësie A në bashkësinë është bashkësia e përkufizuar me (формула).
- 

7

Le të jenë dhënë bashkësitë  $=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ,  $U = \{1, 2, \dots, 100\}$  dhe  $B = \{10, 20, 30, \dots, 100\}$ . Shkruaji bashkësitë  $\overline{A_U}$ ,  $\overline{A_B}$  и  $\overline{B_U}$ .

## Prodhi i Dekartit të bashkësive

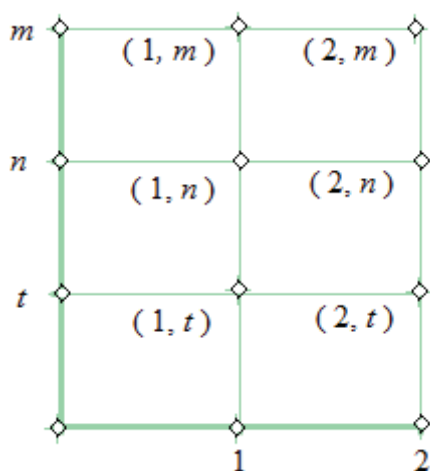
- ❖ Prodhi i Dekartit të dy bashkësive  $A$  dhe  $B$  është bashkësia e të gjitha çifteve të renditura të cilat elementi i parë i takon bashkësisë  $A$ , por elementi i dytë bashkësisë  $B$ . Shkruhet me  $A \times B$ .
- ❖ Domethënë .
- ❖ Ngjashëm, katrori i Dekartit të bashkësisë  $A$  i cili shkruhet është prodhi i Dekartit të bashkësisë jo të zbrazët  $A$  me vetveten, domethënë  $A \times A$ .
- ❖

### Приме р 6

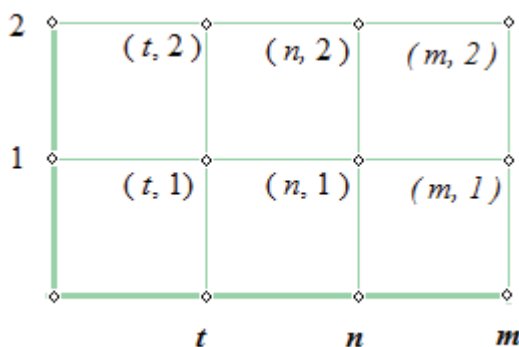
Prodhi i Dekartit dhe të vetë bashkësisë janë

$$A = \{(1), (2)\}, (1, n), (1, m), (2, t), (2, n), (2, m) \text{ и } B = \{(1), (2)\}, (t, 1), (n, 1), (m, 1), (t, 2), (n, 2), (m, 2)$$

Të ilustruara me skemën koordinative janë:



$A \times B$



$B \times A$

7 Shkruaj prodhimin e Dekartit  $A \times B$  të bashkësive  $A = \{2, 4, 6\}$  и  $B = \{2, 3\}$ . Njehso

8 Katrorin e Dekartit për bashkësinë  $A^2 = A \times A$  и  $A = \{x \mid x \mid 10\}$ .

## Detyra për punë të pavarur:

1. Janë dhënë bashkësitë dhe . Cakto bashkësitë

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^2, 16\} . \text{ Cakto bashkësitë}$$

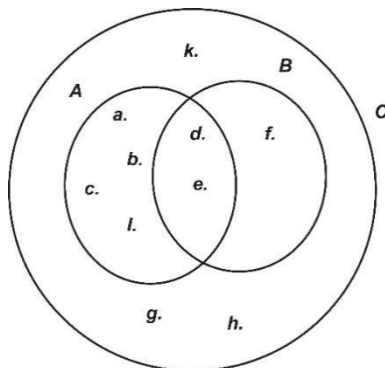
a)  $A \cup B$ ;

б)  $A \cap B$ ;

в)  $(A \setminus B) \cup C$ ;

г)  $A \cap (B \setminus C)$ .

2. Prej diagramit të Venit të caktohen bashkësitë:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $A \cap B$ .



3. Janë dhënë bashkësitë  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$  и  $C = \{1, 5, 7\}$ . Vërteto saktësinë e barazisë  $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$ .

4. Nëse  $A = \{a, 2, 3\}$  и  $B = \{1, b\}$  cakto prodhimet e Dekarti:

a)  $A \times B$  б)  $B \times A$ .

5. Janë dhënë bashkësitë  $A = \{x \mid x \leq 4\}$  и  $B = \{x \mid x^2 - 9 = 0\}$ . Caktoji bashkësitë:

a)  $A \cap B$  б)  $A \setminus B$  в)  $P(A \setminus B)$  г)  $B \setminus A$ .

6. Cakto cilat prej këtyre çifteve të bashkësive janë disjunkte:

a)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$  и  $B = \{x \mid x \leq 5\}$ ;  $\mathbb{Z}$

б)  $C = \{x \mid x \text{ është çift}\}$  и  $D = \{x \mid x - 5 = 0\}$ .  $\mathbb{N}$

7. Është dhënë bashkësia universale  $U = \{1, 2, -5\}$ , и nënbashkësitë  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 5\}$ , и  $C = \{1, 5\}$ . Cakto bashkësitë:

a)  $\bar{A}$  б)  $\bar{C}$  в)  $\bar{C} \cup \bar{B}$  г)  $\overline{(A \setminus B)}$ .

8. Cakto për cilën vlerë të ndryshoreve  $x$  dhe  $y$  vlejnë barazitë:

a)  $(x, 5) = (3, y)$  б)  $(2, y) = \left(x, \frac{1}{2}\right)$ .

9. Cakto bashkësitë  $A$  dhe  $B$  prej të cilave është fituar prodhimi i Dekartit  $A \times B = \{(1, a), (b, 1), (b, a), (a, 1)\}$ .

10. Shkruaj bashkësi të barabarta të bashkësive:

a)  $A \setminus B$  б)  $A \cap B$  в)  $(A \setminus B) \cap C$ .

## 8. Ligjet për operacione me bashkësi

Prej pjesës së parë të këtij kapitulli u njoftëm me disa ligje logjike ose ligje të menduarit, edhe atë: ligji komutativ për konjunksionin dhe disjunksionin, ligji asociativ për konjunksionin dhe disjunksionin, etj.

Prej më lart që përmendëm vërejtëm se operacionet me bashkësi ngushtë janë të lidhura me operacionet logjike.

Gjithashtu, sikurse te logjika matematike, ashtu edhe në teorinë e bashkësive ekzistojnë ligje për operacione me bashkësi.

Bëhet fjalë për ligjet e njëjta logjike të cilat janë zbatuar në teorinë e bashkësive në këtë mënyrë:

Gjykim  $\rightarrow$  bashkësi

Konjunksioni i gjykimeve  $\rightarrow$  prerja e bashkësive

Disjunksioni i gjykimeve  $\rightarrow$  unioni i bashkësive

Negacioni i gjykimeve  $\rightarrow$  komplementi i bashkësisë.

Disa ligje më të rëndësishëm për operacionet me bashkësi janë:

1. Ligji komutativ për prerje
2. Ligji komutativ për unionin;
3. Ligji asociativ për prerjen
4. Ligji asociativ për unionin
5. Ligji distributiv i prerjes në lidhje me unionin
6. Ligji distributiv i unionit në lidhje me prerjen
7. Ligji për komplement të dyfishtë
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
12. Ligjet e De Morgani:
  - a) Ligji për komplement të prerjes
  - b) Ligji për komplement të unionit
13. Ligji distributiv për prodhimin e Dekartit në lidhje me prerjen

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

14. Ligji distributiv për prodhimin e Dekartit në lidhje me unionin (формула);

$$15. (A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$$

$$16. (A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$$

### Shembulli 1. Ta vërtetojmë ligjin komutativ për prerjen

I –

Me zbatimin e formulave gjykimore dhe ligjit logjik për komutativitetin të konjunksionit kemi:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in B \cap A \end{aligned}$$

Vijon se  $A \cap B = B \cap A$ .

II –

Me zbatimin e tabelës për përkatësi të elementit të bashkësia kemi

| $A$      | $B$      | $A \cap B$ | $B \cap A$ |
|----------|----------|------------|------------|
| $\in$    | $\in$    | $\in$      | $\in$      |
| $\in$    | $\notin$ | $\notin$   | $\notin$   |
| $\notin$ | $\in$    | $\notin$   | $\notin$   |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$   | $\notin$   |

Prej tabelës vërehet se dy shtyllat e fundit janë të njëjta, me të cilan vërtetohet barabarësia e bashkësive, domethënë ligji komutativ për prerjen  $A \cap B = B \cap A$ .

### Ta vërtetojmë ligjin distributiv për prodhimin e Dekartit në lidhje me unionin

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

**Detyra për punë të pavarur**

1. Të vërtetohen vetitë 4,6,12 a) dhe 16.
2. A është e saktë barazia

**9. Funksionet gjykimore, zgjidhjet e bashkësive**

Deri më tani u njohëm me formulat gjykimore, tautologjitë dhe ligjet logjike.



Mendo dhe përgjigju!

- Çfarë është formula gjykimore?
- Cilën formulë gjykimore e quajmë tautologji?
- Ndryshe si i quajmë tautologjitë?

**Shembulli 1.** E dimë se fjalia " $2 + x = 10$ " nuk është gjykim, por fjalia " $2 + x = 10$  për  $x = 5$ " është gjykim i pavërtetë. Fjalia " $x + 2 = 10$  për  $x = 8$ " është gjykim i vërtetë.

Fjalia e parë " $2 + x = 10$ " është fjali me ndryshore e cila për çfarëdo numër real bëhet gjykim.

Fjalitë e këtilla kanë rëndësi të veçantë në logjikën matematike dhe ato i quajmë formula gjykimore ose predikate. Pasi funksionet gjykimore janë funksione, domethënë ato kanë fushën e përkufizimit. Vërejtëm prej shembullit të fjalës " $2 + x = 10$ " nëse shtojmë "për  $x = 5$ " kalon në gjykim të pavërtetë, por me shtimin "për  $x = 8$ " kalon në gjykim të vërtetë.

Domethënë, funksioni gjykimore për disa numra nga fusha e tij e përkufizimit kalon në gjykim të vërtetë, por për disa në të pavërtetë.

Mund të përfundojmë këtë:

- ❖ Nëse fjalia me ndryshore bëhet gjykim për çdo vlerë të ndryshores prej ndonjë bashkësie  $M$ , atëherë për atë fjalë themi se është funksion gjykimor ose predikat.
- ❖ Për bashkësinë  $M$  themi se është fusha e përkufizimit të funksionit gjykimor, por elementet e asaj bashkësie janë vlera të lejuara të ndryshores.
- ❖ Nëse (формула) i përmban saktë të gjitha elementet prej  $M$  për të cilën funksioni gjykimor është gjykim i saktë, atëherë për (формула) themi se është bashkësi e zgjidhjeve të funksionit gjykimor. Çdo element prej (формула) quhet zgjidhje e funksionit gjykimor

**Shembulli 2.** Funksioni gjykimor është fjalia  $x^2 = 4$ . Zgjidhje e funksionit gjykimor  $x^2 = 4$  mbi  $x^2 = 4$  над  $M = \mathbb{Z}$  e  $M_1 = \{-2, 2\}$ .

**1** Cilat prej këtyre fjalive janë funksione gjykimore:

- a)  $2 = 6, x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$       б)  $x + 2 = y, x = 5$ .

**2** Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të funksionit gjykimor të përkufizuar në bashkësinë  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

**Shembulli 3.** Në bashkësinë e numrave të plotë  $\mathbb{Z}$  është përkufizuar funksioni gjykimor  $P(x): x^2 = 4$ . Vlera e vërtetësisë së gjykimit  $P(2)$  e  $(P(2)) = T$ , а на  $\mathbb{Z}$  (e  $\mathbb{Z}$ )  $= T$ . Përpiqu vetë të caktosh

**3** Le të jenë dhënë funksionet gjykimore dhe të përkufizuara në bashkësinë e numrave natyrorë. Konstatohet vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve

- a)  $(2) \rightarrow (8P(2));$  б)  $P(9 \rightarrow (3));$  в)  $(10) \rightarrow P(7)$ .

- ❖ Me shfrytëzimin e fjalëve “çdonjëri” (ose “të gjithë” ose “çfarëdo”) ose “ekziston” (ose “ndonjëri”), funksioni gjykimor kalon në gjykim, të vërtetë ose të pavërtetë.
- ❖ Fjala “çdonjëri” në matematikë shënohet me simbolin (формула) dhe quhet kuantor universal ose kuantifikator universal.
- ❖ Fjala “ndonjëri” në matematikë shënohet me simbolin (формула) dhe quhet kuantor ekzistencial ose kuantifikator ekzistencial.

**Shembulli 4.** Gjykimi “Ekziston numër i plotë  $x$  për të cilin , mund ta shkruajmë me simbolet . Ky gjykim është z vërtetë pasi ekzistojnë numra të plotë dhe për të cili është i saktë.

**4** Gjykimet vijuese shkruaji me simbole:

- a) Për çdo numër natyror  $n$  është e saktë;
  - b) Ekziston numër racional  $y$  për të cilin është i saktë
- Pastaj, cakto vlerën e tyre të vërtetësisë.

**5** Gjykimet vijuese shkruaji me simbole, shkruaji me fjali:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\}$
- b)  $(x \in \mathbb{Q}) \rightarrow 3x = x + x + x$ .

Pastaj, cakto vlerën e tyre të vërtetësisë.

➤ T përmendim se si kantifikator shfërtohet

**Shembulli 5.** Gjykimiparaqet “Ekziston numër i plotë i vetëm  $x$  për të cili është i saktë , që do të thotë se ekziston vetëm një numër i plotë  $x$  për të cilin është i saktë barazia. Ky dallohet prej gjykimit “Ekziston numër i plotë  $x$  për të cilin ” prej shembullit 3.

Të shkruar me simbole , ku jo patjetër të jetë vetëm një numër i plotë, por mund të jenë edhe dy. Edhe përdorësi gjykimi të Shembulli 3. është gjykim i vërtetë, gjykimi është gjykim i pavërtetë.

### Detyra për punë të pavarur:

1. Cilat prej këtyre fjalive janë funksione gjykimore:

- a)  $x + 2 > 6, x \in \mathbb{Z}$ ;      б)  $x - 2 < 6, \forall x \in \mathbb{Z}$ ;      в)  $2x = y, x = 5, y = -1$ .

2. Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të funksionit gjykimor “ $x$  është numër çift” të përkufizuar në bashkësitë  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ .

3. Le të jenë dhënë funksionet gjykimore (формула) të përkufizuara në bashkësinë e numrave natyrorë. Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:

- a) (формула) б) (формула) в) (формула)       $\mathbb{N}$

Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:

- a)  $(\exists x \in \mathbb{Q}) 2x = x \cdot x$ ;      б)  $(\forall x \in \mathbb{N}) 3x = x^3$ ;      в)  $(\exists! x \in \mathbb{Z}) x - 1 = -5$ .

5. Jepni tre shembuj të funksioneve gjykimore. Te çdonjëri prej tyre cakto bashkësinë e zgjidhjeve të tyre.
6. Jepni tri fjali të cilat janë gjykime me zbatimin e kuantifikatorëve dhe . Pastaj cakto vlerën e vërtetësisë.

## 10. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Cakto cilat prej këtyre fjalive janë gjykime:

a) Dil jashtë! b) (формула) c) Dardha është pema më e shijshme.

2. Cakto vlerën e vërtetësisë për gjykimin te tabela (duke shfrytëzuar simbolet T dhe  $\perp$ ):

|                     |    |    |   |   |   |
|---------------------|----|----|---|---|---|
| $x$                 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $\tau(-2x + 5 = 3)$ |    |    |   |   |   |

3. Le të jenë dhënë gjykimet (формула) dhe (формула). Të formohen gjykime: (формула)  
a) (формула) b) (формула) c) (формула).

4. Të caktohet vlera e vërtetësisë për formulën gjykimore (формула) për (формула) dhe (формула).

5. Me ndihmën e tabelës së vërtetësisë të vërtetohet se kjo formulë është tautologji (формула).

6. Janë dhënë bashkësitë: (формула) dhe (формула). Të caktohen bashkësitë (формула)

a) (формула); b) (формула) c) (формула)

7. Të caktohet bashkësia A prej prodhimit të Dekartit (формула)

8. Janë dhënë bashkësia universale (формула) dhe nënbashkësia (формула). Të caktohet bashkësia (формула)

9. Nëse (формула) dhe (формула), të caktohet bashkësia: (формула).

10. Të vërtetohet ligji për komplement të unioni:

.

# 2

## NUMRAT REALË



### QËLLIMI I NJËSISË MODULARE

**Duke mësuar njësinë modulare, nxënësi duhet të aftësohe:**

- të shfrytëzojë operacionet me numrat natyrorë;
- të përkufizojë numër të thjeshtë dhe të përbërë, të zbëthejë numër natyror në shumëzues të thjeshtë dhe të caktojë SHVP dhe PMP të numrave natyrorë;
- të shfrytëzojë operacionet në bashkësinë e numrave të plotë;
- të përkufizojë dhe të zgjidhë detyra me vlerë absolute;
- të përkufizojë dhe të krahasojë numrat racionalë;
- të zgjerojë dhe thjeshtojë thyesat;
- të kryejë operacione me thyesa;
- të shkruajë numër dhjetor në thyesë dhe anasjelltas;
- të përkufizojë numër iracional dhe vlera absolute të numrit real;
- të paraqesë numrat realë në boshtin numerik;
- të përkufizojë dhe të paraqesë gjeometrikisht dhe interval në mënyrë përshkruese;
- të sjellë rrënjën në formë normale;
- të zgjidhë detyra praktike.

## PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 2

51

Bashkësia e numrave realë, operacionet dhe vetitë e operacioneve

61

Plotpjesëtueshmëria e numrave natyrorë. Numrat e thjeshtë dhe të përbërë. PMP dhe SHVP

69

Numrat e plotë dhe operacionet me numrat e plotë

74

Numrat racionalë

79

racionalë

86

Operacionet me numrat racionalë dhe dhjetorë. Operacionet me numrat dhjetorë.

90

Numrat realë

96

Detyra për përsëritje të njësisë modulare

## 1. Bashkësia e numrave natyrorë: operacionet dhe vetitë e operacioneve

Numrat natyrorë janë formuar për shkak të nevojës së numërimit. Me ata e paraqesim rezultatin e numërimit të elementeve në një bashkësi të fundshme.

Për numrat natyrorë e saktë është kjo:

- Numrat natyrorë i shkruajmë me shifrat 1,2,3,4,5,6,7,8,9 dhe 0;
  - Numrin natyror pesëqind e njëzetë e shtatë i shkruar me shifra që e ka formën 527;
  - Numrin natyror shtatë qind e shtatë i shkruar me shifra që e ka formën 107;
  - Numrin natyror shtatë qind e njëzetë i shkruar me shifra që e ka formën 720.
- Shkruaji me shifra numrat natyrorë dyqind e shtatëdhjetë e pesë, një mijë e pesëdhjetë e një, dy mijë shtatëdhjetë e tetë!
- Numrat natyrorë janë: 1,2,3,4,5,...;
  - Bashkësinë e numrave natyrorë e shënojmë me shkronjën (формула) d.m.th., ajo është bashkësia e formës.

### 1.1. Futja e numrave natyrorë

Te vargu i numrave natyrorë mund t'i vëresh këto ligjshmëri:

- Numri natyror më i vogël është numri 1;  
Pasardhësi i numrit natyror 7 është numri 8, por i numrit natyror 523 është numri natyror 524.



Mendo dhe përgjigju:

- o Cili numër natyror është pasardhësi i numrit natyror 78, e cili i numrit natyror 1230?
- o Çdo numër natyror a ka pasardhës?
- o Bashkësia e numrave natyrorë a është bashkësi e fundshme?

- Paraardhës i numrit natyror 25 është numri natyror 24, por i numrit natyror 2054 është numri natyror 2053.

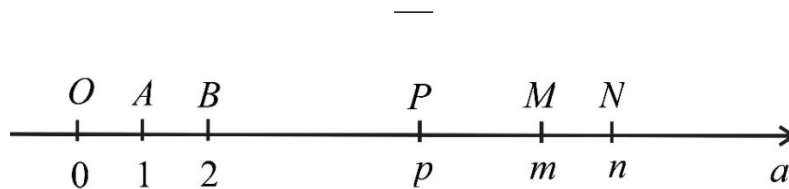


Mendo dhe përgjigju:

- o Cili numër natyror është paraardhësi i numrit natyror 125, e cili i numrit natyror 2050?
- o Cili numër natyror është paraardhësi i numrit natyror 1? Çdo numër natyror a ka paraardhësin e vet?

- A është i saktë gjykimi “0 është numër natyror“?
- Numri 0 nuk është numër natyror d.m.th.,

- Nëse bashkësisë së numrave natyrorë ia shtojmë numrin 0, atëherë e fitojmë zgjerimin e bashkësisë së numrave natyrorë, të cilën e shënojmë me (формула) d.m.th., bashkësia e ka formën (формула)
- Numrat natyrorë mund t'i paraqesim edhe gjeometrikisht me boshtin numerik (si te vizatimi), që është drejtëz e orientuar, tek e cila është dhënë një pikë fikse si fillim dhe është zgjedhur një segment njësi (формула) si segment njësi 1.
- 



Prej drejtëzës numerike  $a$  vërehet se pika  $O$  është numri 0, pikës  $A$  është shoqëruar numri natyror 1, pikës  $B$  është shoqëruar numri natyror 2, pikës  $N$  i është shoqëruar numri natyror  $n$  etj. Domethënë, çdo numri natyror mund t'i shoqërohet nga një pikë prej boshtit numerik  $a$ .

o Cilët numra natyrorë u janë shoqëruar pikave  $P$  dhe  $M$ ?

Nëse e vërejmë boshtin numerik  $a$ , atëherë vërejmë se numrit natyror 1 është më në të majtë prej numrit natyror 2 d.m.th., (формула) (lexohet: 1 është më i vogël se 2), por numri natyror 2 është më në të djathtë prej numrit natyror 1 d.m.th., (формула) (lexohet: 2 është më i madh se 1). Numri 0 gjendet në të majtë prej të gjithë numrave natyrorë, prandaj numri 0 është më i vogël prej të gjithë numrave natyrorë.

Këto gjykime janë të sakta:

- (формула) (lexohet: 1 është më i vogël ose i barabartë me 2);
- (формула) (lexohet: 2 është më i madh ose i barabartë me 1);
- (формула) (lexohet: 2 është më i madh ose i barabartë me 2);
- (формула) (lexohet: 2 lexohet 2);
- Por, nuk është i saktë gjykimi (формула). Nuk është i saktë as gjykimi (формула).

Sipas boshtit numerik  $a$ , numri natyror  $m$  është më në të majtë prej numrit natyror  $n$ , atëherë shkruajmë (формула). Kur do të shkruajmë (формула), atëherë shënojmë se (формула).

1.

1

Cilat prej këtyre gjykimeve janë të sakta:

- a)  $25 > 12$ ;    б)  $25 \geq 75$ ;    в)  $15 < 12 \wedge 15 > 3$ ;    г)  $5 \leq 2 \vee 5 > 3$ .

Duhet të dish këtë:



- ❖ ❖ Bashkësia e numrave natyrorë është (формула), ndërsa tani bashkësia e gjeruar e numrave natyrorë është (формула).
- ❖ ❖ Në bashkësinë e numrave natyrorë, çdo numër natyror ka pasardhës.
- ❖ ❖ Nuk ekziston numër natyror më të madh në bashkësinë e numrave natyrorë.
- ❖ ❖ Bashkësia e numrave natyrorë nuk është bashkësi e fundshme, por bashkësi e pafundshme.
- ❖ ❖ Nëse numrit natyror  $m$  është në të majtë prej numrit natyror  $n$  te boshti numerik  $a$ , atëherë shkruajmë (формула).
- ❖ ❖ Gjykimi (формула) domethënë (формула).
- ❖ ❖ Numrat natyrorë mund t'i radhisim, domethënë (формула)
- ❖ ❖ Numri 0 nuk është numër natyror dhe ai është më i vogël prej të gjithë numrave natyrorë.
- ❖

## 1.2. Operacione dhe vetitë e operacioneve në bashkësinë e numrave natyrorë

Operacionet të cilat do t'i përkufizojmë në bashkësinë e numrave natyrorë janë: mbledhja, shumëzimi, zbritja dhe pjesëtimi.

Mbledhja: Çiftit të renditur të numrave natyrorë (формула) i shoqërohet numri natyror  $k$  si shumë e tyre (формула)  $\rightarrow$  (формула) d.m.th., çdo çifti të numrave natyrorë (формула) i shoqërohet numri i vetëm natyror  $k$  si shumë e tyre. Numrat natyrorë  $m$  dhe  $n$  quhen mbledhës.

2

a)  $256 + 782$ ; b)  $(257 + 129) + 526$ ; c)  $456(125 + 128)$ .

Është e njohur se, shuma e çfarëdo numrave natyrorë është përsëri numër natyror d.m.th., (формула). Domethënë, mund të themi se operacioni i mbledhjes është operacion i brendshëm (i tërësishëm) në bashkësinë e numrave natyrorë d.m.th., bashkësia e numrave natyrorë është bashkësi e mbyllur në lidhje me operacionin e mbledhjes.



Mendo dhe përgjigju:

- A janë të sakta barazitë:

$$a) 122 + 523 = 523 + 122 \quad b) (255 + 464) + 789 = 255(464 + 789)?$$

Për operacionin mbledhje në bashkësinë e numrave natyrorë për çfarëdo numra natyrorë (формула) vlejnë këto veti:

❖ vetia komutative për mbledhjen e numrave natyrorë (формула)

❖ vetia asociative për mbledhjen e numrave natyrorë  $(m + n) + k = m + (n + k)$ .

o Si do t'i shprehësh me fjalë vetitë komutative dhe asociative të operacionit të mbledhjes së numrave natyrorë?

o Mbledhja e numrave natyrorë a përkufizohet në mënyrë të njëjtë edhe te bashkësia e zgjeruar (формула)? A janë të sakta vetia komutative dhe asociative e mbledhjes në (формула)?

Me siguri është e saktë edhe vetia

❖ Për çdo numër natyror (формула) është e saktë (формула).

Shumëzimi: Çiftit të renditur të numrave natyrorë (формула) i



Mendo dhe përgjigju:

o si mund ta shkruajmë më shkurt prodhimin  $2 + 2 + 2$ ?  
o, por si do ta shkruash  $5 + 5 + 5 + 5$  dhe  $6 + 6$ ?

**3** Njihso a)  $25 \cdot 82$  b)  $(57 \cdot 29) \cdot 5$  c)  $16 \cdot (5 \cdot 28)$ .

Është e njohur se, prodhimi i çfarëdo qoftë numrave natyrorë është përsëri numër natyror d.m.th., (формула). Domethënë, mund të themi se operacioni i shumëzimit është operacion i mbyllur (i tërësishëm) në bashkësinë e numrave natyrorë d.m.th., bashkësia e numrave natyrorë është e mbyllur në lidhje me operacionin e shumëzimit.



Mendo dhe përgjigju:

o A janë të sakta barazitë: a)  $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$  b)  $(5 \cdot 4) \cdot 8 = 5 \cdot (4 \cdot 8)$ ?

Për operacionin e shumëzimit në bashkësinë e numrave natyrorë për të cilët për çfarëdo numra natyrorë (формула) vlejné këto veti:

- ❖ vetia komutative për shumëzimin e numrave natyrorë, (формула)
- ❖ vetia asociative për shumëzimin e numrave natyrorë



Mendo dhe përgjigju:

o Të shprehen me fjalë vetia komutative dhe asociative e operacionit të shumëzimit të numrave natyrorë.

o A janë të sakta brazime:

a)  $2 \cdot (35 + 21) = 2 \cdot 35 + 2 \cdot 21$ ; b)  $(15 + 24) \cdot 8 = 15 \cdot 8 + 28 \cdot 8$ ?

o Shumëzimi i numrave natyrorë a përkufizohet në mënyrë të njëjtë edhe te bashkësia e zgjeruar e numrave natyrorë (формула)? A janë të sakta vetia komutative dhe asociative të operacionit të shumëzimit në (формула)?

$\mathbb{N}$

Me siguri është e saktë edhe vetia:

❖ Për çdo numër natyror (формула) është e saktë (формула) dhe (формула). Lidhja ndërmjet mbledhjes dhe shumëzimit është dhënë me vetinë distributive:

❖ Për çfarëdo numra natyrorë (формула) është e saktë: (формула) (shumëzimi është distributiv në lidhje me mbledhjen)

Ligjet asociative për mbledhjen dhe shumëzimin na japin mundësi të mbledhjes, përkatësisht

Prodhimin e tre numrave natyrorë ta njehsojmë pa përdorur kllapa d.m.th., për çfarëdo numra natyrorë (формула) është e saktë  $(m + n) + k = m + (n + k) = m + n + k$  dhe (формула).

4

Njehso:

a)  $25126$ ; b)  $12(72)$ ; в)  $35 \cdot 21 + 55 + 69$ ; r)  $258254$



Mendo dhe përgjigju:

o Shumëzimi a është distributiv në lidhje me mbledhjen në

$\mathbb{N}$

5

Me zbatimin e vetisë distributive vërteto se është e saktë barazia  $(m + n)(k + p) = m(k + p) + n(k + p) = mk + mp + nk + np$ .

(Udhëzim: Për vërtetimin e barazisë mund ta shfrytëzosh zëvendësimin (формула). A mund ta shfrytëzosh edhe zëvendësimin  $b = k + p$ ?)

Zbritja: Para se ta futim operacionin e zbritjes, të përkujtohem në disa ligjshmëri të mësuara paraprakisht:

•



Mendo dhe përgjigju:  
o Ndryshimi i çfarëdo numrave natyrorë a është numër natyror?

Për dy numra natyrorë, (формула) ndryshimi (формула) është numër natyror (формула). Kjo na tregon se operacioni i zbritjes në bashkësinë e numrave natyrorë nuk është operacion i brendshëm (i tërësishëm), por është operacion i pjesërishëm në bashkësinë e numrave natyrorë.

6 : a)  $(956) - 782$ ; б)  $956 - 782$ ; в)  $2 * (856)$ ; г)  $2 \mid 568$

**Çfarë mund të përfundosh?**

**Për operacionin zbritje në bashkësinë e numrave natyrorë është e saktë vetia distributive e shumëzimit në lidhje me zbritjen:**

- ❖ Për çfarëdo numra natyrorë, (формула) është e saktë:
- ❖ (формула)
- ❖ (shumëzimi është distributiv në lidhje me zbritjen).
- ❖



Mendo dhe përgjigju:  
o Ndryshimi i çfarëdo numrave natyrorë a përkufizohet në mënyrë të njëjtë edhe në bashkësinë e zgjeruar të numrave natyrorë (формула)? Për (формула), cilido të jetë kushti, që të jetë e saktë (формула)? Shumëzimi a është distributiv në lidhje me zbritjen në (формула)?

Operacioni shumëzim është i lidhur me operacionin fuqi. Prodhimi i (формула) shumëzues të  $\mathbb{N}$  barabartë (формула) quhet fuqia  $n$  e numrit  $m$  dhe shkruhet (формула), ku  $n$  quhet eksponent ose tregues i fuqisë, por  $m$  quhet baza e fuqisë. Për fuqitë janë të sakta këto veti:

- ❖ ❖ Për numrat natror ( формула), fia
- ❖ Për numrat natyrorë (формула), është e saktë (формула)

Pjesëtimi: Para se ta futim operacionin e pjesëtimit, të përkujtohem në disa ligjshmëri paraprakisht të mësuara:

• E panjohura  $x$  te barazimet (формула) dhe (формула) përcaktohet me pjesëtimin e prodhimit me shumëzuesin e të njohurës. Domethënë, për t'i zgjidhur këto barazime duhet të futet operacioni pjesëtim në bashkësinë e numrave natyrorë;

- Herësi  $8 : 2$  është numër natyror, por herësi  $8 : 17$  nuk është numër natyror.

Prej kësaj mund të themi se për dy numra natyrorë (формула), përkufizojmë herës (формула) nëse caktojmë numër natyror  $k$ , ashtu që (формула). Numri natyror  $m$  quhet i pjesëtueshëm, kurse numrit natyror  $n$  quhet pjesëtues.

Kjo na tregon se operacioni pjesëtim në bashkësinë e numrave natyrorë nuk është operacion i mbyllur (i tërësishëm), por është operacion i pjesërishëm në bashkësinë e numrave natyrorë.

7

7. Njehso: a)  $(956 - 782) : 2$ ; b)  $956 : 2 - 782 : 2$ ; c)  $(156 + 82) : 2$ ; ç)  $156 : 2 + 82 : 2$ . Çfarë mund të përfundosh?

Për operacionin pjesëtim në bashkësinë e numrave natyrorë është e saktë vetia distributive në lidhje me mbledhjen dhe shumëzimin:

- ❖ Për çfarëdo (формула) për (формула) dhe (формула) është e saktë: (формула)
- (pjesëtimi është distributive në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen).
- o

A është numër natyror  $8 : 3$ ?

Është e qartë se herësi i dhënë te detyra paraprake nuk është numër natyror, por kjo nuk do të thotë se nuk mund të realizojmë pjesëtimin. Ky pjesëtim quhet pjesëtim me mbetje.

Gjatë pjesëtimit të 8 me 3 fitohet herësi 2 dhe mbetja 2 d.m.th., është e saktë (формула).

Kjo do të thotë se:

❖ Për çfarëdo numra natyrorë  $m$  dhe  $n$  ekzistojnë të vetmit (формула) ku (формула). Numri  $k$  quhet herës, por numri  $r$  quhet mbetje gjatë pjesëtimit të  $m$  me  $n$ .

8 Cakto numrin më të madh natyror që gjatë pjesëtimit me 28 jep herësin 17.  
(Udhëzim: Numrat që gjatë pjesëtimit me 28 japin herësin 17 mund të shkruhen në formën (формула) ku (формула). Që numri të jetë më i madh, si duhet të jetë mbetja? Mendo!)

- ❖ Me siguri, të sakta janë vetitë:
- ❖ ❖ Për çfarëdo numër natyror (формула) është e saktë (формула), pasi (формула).
- ❖ ❖ I pamundshëm është pjesëtimi të numri natyror me 0, prandaj pjesëtimi me numrin 0 nuk përkufizohet.

- !
- ❖ ❖ Operacionet mbledhje dhe shumëzim janë operacione të brendshme (të tërësishme) në bashkësinë e numrave natyrorë d.m.th., bashkësia e numrave natyrorë është e mbyllur në lidhje me operacionin mbledhje dhe shumëzim.
  - ❖ ❖ Operacionet zbritje dhe pjesëtim të numrave natyrorë janë operacione të pjesërishme në bashkësinë e numrave natyrorë.

Te disa detyra gjatë njehsimit hasen të gjitha operacionet. Prandaj parashtrohet pyetja:  
o

Sipas cilës renditje do të kryhen operacionet që të arrihet te rezultati i saktë?

Për renditjen e kryerjes së operacioneve mbledhje, zbritje dhe shumëzim te një detyrë, duhet pasur kujdes në këtë rregull:

- !
- ❖ ❖ Nëse te detyra nuk ka kllapa përparësi në kryerje kanë operacionet shumëzim dhe pjesëtim, para operacioneve mbledhje dhe zbritje. Nëse ka kllapa, së pari kryhen operacionet në kllapa.

9 Njehso: a)  $(3 \cdot 8 + 23) \cdot 5 - 7 \cdot (51 : 5 - 12 \cdot 13)$ ; b)  $25 \cdot (3 \cdot 15 - 99 : 33) - 2 \cdot (250 : 50 + 5 \cdot 12 : 7)$ .

### 1.3.Zgjidhja e problemeve

Këtu do të kalojmë në zgjidhjen e disa detyrave problemore:

#### Пример 1

Një kamion ka shkarkuar çokollata në tre markete në ditën e njëjtë, ku 1 kuti me çokollata Snikers përmban 20 numra, 1 kuti me çokollata Milka përmban 15 numra dhe 1 kuti çokollata Mars përmban 25 numra. Te marketi i parë ka shkarkuar 5 kuti çokollata Snikers, 2 kuti çokollata Milka dhe 1 kuti çokollata Mars. Te marketi i dytë ka shkarkuar 4 kuti çokollata Snikers, 6 kuti çokollata Milka dhe 7 kutia çokollata Mars. Në marketin e tretë ka shkarkuar 8 kuti çokollata Snikers, 5 kuti çokollata Milka dhe 2 kutia çokollata Mars. Sa kuti çokollata ka shkarkuar kamioni atë ditë në çdonjërin prej marketeve? Ku ka shkarkuar më së shumti çokollata? Sa para ka marrë gjithsej, ditën e njëjtë, nëse çokollatën Snikers e ka dhënë nga 10 denarë, çokollatë Milka nga 30 denarë, kurse çokollatën Mars nga 8 denarë?

Te marketi i parë janë shkarkuar: (формула) çokollata

Te marketi i dytë: (формула) çokollata.

Te marketi i tretë: (формула) çokollata. Domethënë, te marketi i dytë janë shkarkuar më së shumti (формула) çokollata.

Gjithsej ka fituar: (формула) denarë.

#### Пример 2

Në një barnatore pronarin e ka interesuar sa profit do të fitojë me shitjen më së shpeshti tabletat e shitura të dedikuara për mjekimin e kokëdhembjes d.m.th., analgjetik: analgin, kafetin dhe nalgesin c. Prandaj, farmacistja duhej t'i numërojë kutitë që i ka pasur në barnatore në atë moment. Çdo kuti ka pasur nga 10 numra në veçanti. Ajo ka numëruar: 20 kuti analgin, 15 kuti kafetin dhe 25 kuti nalgesin c. Sa do të jetë profiti i barnatores, nëse shiten të gjitha kutitë me analgjetik, ku kutia e veçantë analgin ka çmimin e blerjes prej 10 denarë, por shiten nga 15 denarë, kutia e veçantë e kafetinit ka çmimin e blerjes 15 denarë, por shiten nga 25 denarë dhe kuti e veçantë e nalgesin e ka çmimin e blerjes prej 8 denarë, por shitet nga 15 denarë? Prej cilit analgjetik do të ketë më shumë profit, me kusht të shiten të gjitha kutitë me tableta?

Profiti për shitje të:

- të gjitha kutitë e analginit (формула), denarë
- kafetin (формула), denarë dhe
- nalgesin c (формула).

Profit më të madh do të ketë nga nalgesin të shitur, por gjithsej do të fitojë (формула) denarë.

### Пример 3

Babai i tre fëmijëve një lloj u ka ndarë para mujore prej 15 000 denarë. Nga sa para ka fituar çdonjëri prej fëmijëve?

Çdonjëri prej fëmijëve ka marrë nga (формула) denarë në muaj.

Detyra për punë të pavarur:

1. Cili prej këtyre gjykimeve është i saktë?

a) (формула); b) (формула); c) (формула).

2. Shkruaji tabelarisht këto bashkësi:

a) (формула); b) (формула); c) (формула)

3. Shkruaji shkurt këto shuma:

a)  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ ; b)  $9 + 9 + 9 + 9$ ; c)  $10 + 10$ .

4. Këto prodhime paraqiti si fuqi, por pastaj njehsoji:

a)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ; b)  $45 \cdot 45$ ; c)  $12 \cdot 12 \cdot 12$ .

5. Njehso në mënyrë më të thjeshtë:

a) (формула); b) (формула)

c) (формула); ç) (формула)

6. Njehso:

a) (формула); b) (формула); c) (формула)

ç) (формула); d)

7. Cakto numrin më të madh natyror i cili gjatë pjesëtimit me 55 jep herësin 21.

8. Vërteto barazimin (формула)

9. Babai i Tonit i ka dhënë 12 000 denarë të blejë libra për fillimin e vitit shkollor. Toni ka shkuar në librari dhe ka blerë matematikën për 650 denarë, gjuhë amtare për 880 denarë, biologji për 500 denarë, fletore pune për të tri lëndët nga 250 denarë, 5 fletore për të shkruar nga 120 denarë dhe komplete për art për 620 denarë. Sa denarë ka shpenzuar Toni? Sa i kanë ngelur?

10. Iliri dhe Sajmiri kanë kursyer para për vete. Kur kanë mbledhur para të mjaftueshme kanë shkuar në shitore për teknikë. Atje kanë blerë laptop për 21 000 denarë, çantë për laptop për 2 000 denarë dhe ruter për 5 000 denarë. U kanë ngelur 2 000 denarë. Sa para kanë pasur të kursyera Iliri dhe Sajmiri?

11. Një ndërtues duhej të blinte një numër të caktuar të trarëve me çmim prej 408 denarë për një tra. Gjatë njehsimit sa para duhej të pagojë, ai numri e trarëve e ka shumëzuar me 48 në vend me 408. Ashtu, ka bërë gabim prej 270 000. Cakto prodhimin e saktë dhe numrin e trarëve që ka dashur t'i blejë ndërtuesi. Sa denarë duhej të paguajë për ata trarë?

## 2. Plotpjesëtueshmëria e numrave natyrorë. Numrat e thjeshtë dhe të përbërë. PMP dhe SHVP

### 2.1. Plotpjesëtueshmëria e numrave natyrorë

Pasi e futëm bashkësinë e numrave natyrorë dhe përkufizuam operacionet dhe vetitë e atyre operacioneve mund ta themi këtë:

- Për çfarëdo numra natyrorë  $m$  dhe  $n$  ekzistojnë të vetmit (формула) ashtu që (формула). Numri  $k$  quhet herës, por numri  $r$  quhet mbetje gjatë pjesëtimit të  $m$  me  $n$ .

- Nëse te paraprakja e marrim mbetjen (формула), atëherë e fitojmë këtë: për dy numra natyrorë

(формула), herësi: (формула) është numër natyror nëse (формула)

- Indici për plotpjesëtueshmërinë me numrin 2: Një numër natyror plotpjesëtohet me 2 nëse mbaron me njërën prej shifrave 0,2,4,6,8.

- Indici për plotpjesëtueshmërinë me numrin 5: Një numër natyror plotpjesëtohet me 5 nëse mbaron me shifrën 0 ose 5.

- Indici për plotpjesëtueshmërinë me numrin 3: Një numër natyror plotpjesëtohet me 3 nëse shuma e shifrave të tij plotpjesëtohet me 3.

- Indici për plotpjesëtueshmërinë me numrin 9: Një numër natyror plotpjesëtohet me 9 nëse shuma e shifrave të tij plotpjesëtohet me 9.

Shembulli 1. Njehso herësin e numrave:

a) 57 dhe 2; b) 30 dhe 5.

Me siguri vërejte se gjatë pjesëtimit të 57 me 2 fitohet herësi 28 dhe mbetje 1 d.m.th., (формула), por nëse e pjesëtojmë 30 me 5, atëherë fitojmë herësin 6 dhe mbetjen 0, d.m.th., (формула). Gjatë pjesëtimit 30 me 5 mund të themi se pjesëtimi fitohet pa mbetje, por edhe se “30 plotpjesëtohet me 5” ose “30 pjesëtohet me 5” ose “30 e përmban 5” ose “30 është shumëfishi i 5”, por edhe “5 është pjesëtues i 30”. Kjo nuk mund të thuhet për pjesëtimin e 57 me 2.

Në pajtim me shembullin, le të jenë dhënë dy numra natyrorë  $m$  dhe  $n$ . Nëse herësi i tyre  $k = m : n$  është numër natyror (mbetja  $r = 0$ ), atëherë mund të shkruajmë (формула). Në këtë situatë do të themi se  $n|m$  (lexohet:  $n$  është pjesëtues i  $m$ ), por kjo do të thotë edhe “ $m$  është shumëfishi i  $n$ ”.

Nëse kthehemi te shembulli, atëherë në vend “30 është shumëfish i 5” ose “5 është pjesëtues i 30”, mund të shkruajmë  $5|30$ , ndërsa tani, për pjesëtimin e 57 me 2 shkruhet (формула) (lexohet: 2 nuk është pjesëtues i 57).

- ❖ ❖ Çdo numër natyror  $m$  që nuk pjesëtohet me numrin 2 quhet numër tek.

$N$

Prandaj, shpeshherë numrin tek e shkruajmë në formën (формула) për ndonjë (формула).

1 Cakto vërtetësinë e këtyre gjytimeve:

a) (формула); b) (формула) (формула) c) (формула) c) (формула)

2 Cakto bashkësinë e pjesëtuesve të numrave natyrorë: a) 20; b) 11; c) 1.

2.2. Numrat e thjeshtë dhe të përbërë

Prej detyrës 2, vërejmë se:

- Pjesëtues të numrit 20 janë 1, 2, 4, 5, 10, 20;
- Pjesëtues të numrit 11 janë 1 dhe 11;
- Numri natyror 1 ka vetëm një pjesëtues, por ai është 1.

Numri, i cili ka dy pjesëtues, 1 dhe vetë ai, quhet numër i thjeshtë;

❖ Numri që pjesëtohet vetëm me 1, ne vetveten edhe të paktën një quhet numër i përbërë. Ndryshe thënë; Numri i përbërë ka më shumë se dy pjesëtues;

❖ Numri 1 nuk është as i thjeshtë, as i përbërë.

- ❖ Te detyra 2, numri 20 është numër i përbërë, por numri 11 është numër i thjeshtë.

o

- ❖ Cili prej këtyre numrave natyrorë janë të thjeshtë, e cilët numra të përbërë: 21, 99, 17, 51, 321?

Matematikani i vjetër grek Eratosteni (276 p.e.r – 194 p.e.r.) e ka menduar mënyrën për ndarjen e numrave të thjeshtë prej numrave të tjerë natyrorë të njohur si sita e Eratostenit. Ne do ta japim sitën e Ertostebit për 50 numrat e parë natyrorë:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

Mënyra është kjo:

1. Numri 2 është numër i thjeshtë dhe ngel me ngjyrë të zezë. Çdo numër tjetër i dytë duke filluar prej numri 2 është numër çift d.m.th., ata janë numra të përbërë dhe tek ata ndryshon ngjyra në ngjyrë të kuqe;
2. Numri 3 është numër i thjeshtë dhe ngel me ngjyrë të zezë. Çdo numër i tretë numri 3 është numër i thjeshtë dhe ngel me ngjyrë të zezë. Çdo numër i tretë natyror duke filluar prej numrit 3 plotpjesëtohet me 3 d.m.th., ata janë numra të përbërë dhe tek ata ndryshon ngjyra në të kuqe;
3. Numri 5 është numër i thjeshtë dhe ngel me ngjyrë të zezë. Çdo numër natyror i pestë duke filluar prej numrit 5 plotpjesëtohet me 5 d.m.th., ata janë numra të përbërë dhe tek ata ndryshon ngjyra në të kuqe;
4. Numri 7 është numër i thjeshtë dhe ngel me ngjyrë të zezë. Çdo numër natyror i shtatë duke filluar prej numrit 7 plotpjesëtohet me 7 d.m.th., ata janë numra të përbërë dhe tek ata ndryshon ngjyra në të kuqe;
5. Numri 11 është numër i thjeshtë dhe ngel me ngjyrë të zezë. Çdo numër natyror i shtatë duke filluar prej numrit 11 plotpjesëtohet me 11 d.m.th., ata janë numra të përbërë dhe tek ata ndryshon ngjyra në ngjyrë të kuqe etj
6. Me ngjyrë të zezë ngelin numrat 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47, të cilët janë numra të thjeshtë.

Te detyra 2. Vërehet se d.m.th., numrin natyror të përbërë 20 mund ta paraqesim si prodhim prej numra të thjeshtë (формула)

Pyetja është se kjo paraqitje a është e njëvlerëshme (e vetme)? Përgjigja është se, ajo paraqitje është e njëvlerëshme (e vetme). Mund të përkujtohemi edhe në mënyrën për zbërthimin e numrave natyrorë në shumëzues me këtë skemë:

(табела)

Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë këta numra: a) 782; b) 1255; c) 223.

Le të jetë dhënë numri natyror 223, i cili është numër i thjeshtë. Prova se pjesëtimi i atij numri me të gjithë numrat natyrorë më të vegjël se ai nuk japi herës që është numër natyror, na merr shumë kohë. Prandaj, parashtrohet pyetja, si më lehtë dhe më shpejt për numra natyrorë të mëdhenj do të vimë deri te përfundimi se ata numra janë numra të thjeshtë? Përgjigja është e thjeshtë

: numrin e pjesëtojmë vetëm me numra të thjeshtë duke filluar prej 2, pra deri te numrit i thjeshtë, katrori i të cilëve nuk është më i madh se numrit 223. Prova e numrit natyror 223 se është numër i thjeshtë sillet te prova, se herësit a janë numra natyrorë të numri 223 me numra e thjeshtë 2,3,5,7,11,13,17. Këtu ndalojmë, pasi (формула)

Mendo dhe përgjigju:

o Bashkësia e numrave natyrorë a është e fundshme ose e pafundshme?

Numrat e përbërë në mënyrë të vetme mund t'i paraqesim si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë;

Çdo numër natyror që nuk pjesëtohet me asnjë numër të thjeshtë, duke filluar prej 2, pra deri te numrit i thjeshtë, katrori i të cilit nuk është më i madh prej tij është numër i thjeshtë.

Bashkësia e të gjithë numrave të thjeshtë është bashkësi e pafundshme.

Çdo numër natyror më i madh se 1 është ose numër i thjeshtë ose mund të zbërthehet si prodhim prej shumëzuesve të thjeshtë.

4. Provo cilët prej këtyre numrave natyrorë janë numra të thjeshtë: 1229,889,789,2231?

### 2.3. PMP dhe SHVP

Për të sqaruar konceptet PMP dhe SHVP të dy ose më shumë numrave do t'i shqyrtojmë këta shembuj

- Për numrin 12 pjesëtues janë numrat: 1,2,3,4,6 dhe 12. Për numrin 20 pjesëtues janë numrat: 1,2,4,5,10 dhe 20. Elementet e bashkësisë prej pjesëtuesve të tyre të përbashkët janë numrat: 1,2 dhe 4. Bashkësia e pjesëtuesve të tyre të përbashkët është bashkësi e fundshme

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave 12 dhe 20 është 4 dhe atë e quajmë PMP, por shkruajmë (формула)

•

Mënyra për caktimin e tij është treguar meskemën:

- Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë këta numra: a) 782; b) 1255; c) 223.
- Le të jetë dhënë numri natyror 223, i cili është numër i thjeshtë. Prova se pjesëtimi i atij numri me të gjithë numrat natyrorë më të vegjël se ai nuk japi herës që është numër natyror, na merr shumë kohë. Prandaj, parashtrohet pyetja, si më lehtë dhe më shpejt për numra natyrorë të mëdhenj do të vimë deri te përfundimi se ata numra janë numra të thjeshtë? Përgjigja është e thjeshtë: numrin e pjesëtojmë vetëm me numra të thjeshtë duke filluar prej 2, pra deri te numrit i thjeshtë, katrori i të cilëve nuk është më i madh se numrit 223. Prova e numrit natyror 223 se është numër i thjeshtë sillet te prova, se herësit a janë numra natyrorë të numri 223 me numra e thjeshtë 2,3,5,7,11,13,17. Këtu ndalojmë, pasi (формула)
- Mendo dhe përgjigju:
  - o Bashkësia e numrave natyrorë a është e fundshme ose e pafundshme?
  - Numrat e përbërë në mënyrë të vetme mund t'i paraqesim si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë;
  - Çdo numër natyror që nuk pjesëtohet me asnjë numër të thjeshtë, duke filluar prej 2, pra deri te numrit i thjeshtë, katrori i të cilit nuk është më i madh prej tij është numër i thjeshtë.
  - Bashkësia e të gjithë numrave të thjeshtë është bashkësi e pafundshme.
  - Çdo numër natyror më i madh se 1 është ose numër i thjeshtë ose mund të zbërthehet si prodhim prej shumëzuesve të thjeshtë.
- 4. Provo cilët prej këtyre numrave natyrorë janë numra të thjeshtë: 1229,889,789,2231?
- 2.3. PMP dhe SHVP
- Për të sqaruar konceptet PMP dhe SHVP të dy ose më shumë numrave do t'i shqyrtojmë këta shembuj:
  - Për numrin 12 pjesëtues janë numrat: 1,2,3,4,6 dhe 12. Për numrin 20 pjesëtues janë numrat: 1,2,4,5,10 dhe 20. Elementet e bashkësisë prej pjesëtuesve të tyre të përbashkët janë numrat: 1,2 dhe 4. Bashkësia e pjesëtuesve të tyre të përbashkët është bashkësi e fundshme. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave 12 dhe 20 është 4 dhe atë e quajmë PMP, por shkruajmë (формула)
  - Mënyra për caktimin e tij është treguar meskemën:
    - (табела) PMP (12,204) =
  - Për numrin 10 shumëfishë janë numrat: 10,20,30,40,50,60,..., por për numrin 15 janë numrat: 15,30,45,60,... Elementet e bashkësisë prej shumëfishave të tyre të përbashkët janë numrat: 30,60,90,... Bashkësia e shumëfishave të tyre të përbashkët është bashkësi e pafundshme. Shumëfishi më i vogël i numrave 10 dhe 15 është numri 30 dhe atë e quajmë SHVP, por e shkruajmë (формула). Mënyra për caktimin e tij është treguar skema (формула)
    - (табела) SHVP (10,15) = (формула) = 30
- 5. Cakto PMP dhe SHVP të numrave: a) 10 dhe 27; b) 125,250 dhe 335; c) 81,135 dhe 126.
  - Mund të vëreni se PMP (10,27) = 1
  - Numrat e atillë që PMP është 1 quhen numra reciprokisht të thjeshtë. Te numrat reciprokisht të thjeshtë SHVP (10,27) = (формула)
- 6. Cilët prej këtyre numrave janë reciprokisht të thjeshtë: a) 25 dhe 39; b) 21 dhe 90?
- Bashkësia e pjesëtuesve të përbashkët të dy ose më shumë numrave natyrorë është gjithmonë bashkësi e fundshme.
  - PMP i dy ose më shumë numrave natyrorë është pjesëtuesi i tyre më i madh. Ai fitohet si prodhim i shumëzuesve të tyre përbashkët të thjeshtë.
  - Bashkësia e shumëfishave të përbashkët të dy ose më shumë numrave natyrorë është gjithmonë bashkësi e pafundshme.
-

## 2.4. Zgjidhja e problemeve

Në vazhdim janë dhënë disa detyra të zgjidhura praktikisht:

Shembulli 2. Vërteto këto pohime:

- a) Shuma e dy numrave çift është numër çift;
- b) Prodhimi i dy numrave çift është numër çift.

Le të jenë (формула) dy numra çift natyrorë, atëherë ata mund t'i paraqesim në formën (формула) për disa (формула).

- a) Shuma  $m_1 + m_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$ , (формула) është numër çift.
- b) Prodhimi (формула) është numër çift.

Shembulli 3. Vërteto këto pohime:

- a) (формула);
- b) (формула).
- a) Prej (формула), për disa (формула).
- Atëherë (формула).
- b) Prej (формула) për disa (формула).
- Atëherë (формула).

**Shembulli 4.** Provo se për çfarëdo numra natyrorë  $m$  dhe  $n$  shprehjet (формула) dhe (формула) a janë numra të përbërë.

Prej (формула) fitojmë se numrit është i përbërë.

Në të njëjtën mënyrë, prej (формула) fitohet numër i përbërë.

Shembulli 5. Në shitore për tekstil ka pasur dy topa të materialit të njëjtë me dizajn të ndryshëm, por edhe me gjatësi të ndryshme prej 48 metra dhe 36 metra. Një i punësuar për nevojat e myshterinjve të tij duhej t'i pret të dy topat në pjesë së barabarta. Cila është gjatësia më e madhe me të cilan shitësi i materialeve t'i ndajë në gjatësi të barabarta?

Numrave 48 metra dhe 36 metra do të kërkojë PMP.

Gjatësia më e madhe tek e cila mund të ndahen të dy topat e materialeve 4,3 është 12 metra.

Shembulli 6.

Në një aeroport ndërkombëtar tre aeroplanë fluturojnë në ditën e njëjtë. I pari kthehet në çdo 2 ditë, i dyti kthehet në çdo 3 ditë, por i treti në çdo 5 ditë. Për sa ditë të tre aeroplanët përsëri do të fluturojnë në ditën e njëjtë?

Për numrat 2,3 dhe 5 duhet të gjendet SHVP.

табела) SHVP (2,3,5) = 30.

Të tre aeroplanët për 30 ditë përsëri do të fluturojnë në ditën e njëjtë.

Shembulli 7.

Për Tetë Mars në një lulishte, të punësuarit duhet të bëjnë buqete të barabarta. Sa buqetë më shumë mund të bëhen prej 480 gladiolëve, 280 trëndafilave të kuq dhe 300 krinove?

Për numrat 480,280 dhe 300 duhet të caktohet PMP.

(табела) PMP (480,280,300) = 30

Mund të bëhen më së shumti 30 buqeta, ku në çdo buqetë do të ketë nga 16 gladiolë, 15 trëndafila të kuq dhe 17 krinovë.

Detyra për punë të pavarur:

1. Cakto bashkësinë e pjesëtuesve të çdonjërit prej numrave: a) 125; b) 565; c) 232.
2. Zbërtheji në shumëzues këta numra: a) 175; b) 550; c) 1250.
3. Cakto bashkësinë e shumëfishave të çdonjërit prej numrave: a) 8; b) 16; c) 23.
4. Cili prej këtyre numrave natyrorë është i thjeshtë, kurse cili numër është i përbërë: a) 257; b) 943; c) 430?
5. Të caktohet numri i thjeshtë  $\tau$  ashtu që numri  $m^2 + 14$  është numër i thjeshtë.
6. Të kontrollohet se për çfarëdo numër natyror  $m$  shprehjet  $(m + 2)^2 - (m - 2)^2$  dhe  $(m + 7)^2 + (m - 7)^2$  a janë numra të thjeshtë.

7. Të caktohet PMP dhe SHVP të numrave 18 dhe 24. Pastaj, provo saktësinë e barazisë:  
PMP (формула) SHVP (формула)
8. Cakto PMP dhe SHVP të këtyre numrave: a) 42,20 dhe 30; b) 12,18 dhe 25.
9. Cili prej këtyre çifteve të numrave natyrorë janë numra reciprokisht të thjshhtë:  
a) 12 dhe 18; b) 27 dhe 55; c) 36 dhe 49.
10. Vërtetoji këto pohime:  
a) Shuma e dy numrave tek është numër çift, por prodhimi i tyre është numër tek;  
b) Shuma e një numri çift dhe një numri tek është numër tek, por prodhimi i tyre është numër çift.
11. Vërtetoji këto pohime:  
a) (формула); b) (формула)
12. Vërteto se për çdo numër natyror është e saktë: a) (формула) b) (формула)
13. Vërteto se shuma e çfarëdo numrave natyrorë të njëpasnjëshëm plotpjesëtohet me 3.
14. Vërteto se: nëse një numër plotpjesëtohet me 2 dhe 3, atëherë plotpjesëtohet edhe me numrit 6.
15. Iliri dhe Teuta është dashur të blejnë një numër të caktuar të dërrasave për firmën e tyre të ndërtimtarisë. Kanë vendosur çdonjëri prej tyre të blejë numër treshifror të dërrasave ashtu që edhe të dy numrat treshifrorë të plotpjesëtohen me 45, por shifra e tyre e mesme të jetë 8. Cakto nga sa dërrasa duhet të blejë çdonjëri prej tyre, nëse dihet se Iliri duhet të blejë më shumë dërrasa se Teuta.
16. Në një magazinë ka pasur 2 lloje të telit, njëri me gjatësi 15 metra, por tjetri me gjatësi 18 metra. I punësuar, për nevojat e myshterinjve tij duhej të presë të dy llojet e dërrasave në pjesë së barabarta. Cila është gjatësia më e madhe me të cilan i punësuar këto dy lloje të telave mund t'i ndajë në gjatësi të barabarta?
17. Në një stacion hekurudhor katër trena nisen në të njëjtën orë. I pari kthehet në çdo 10 orë, i dyti kthehet në çdo 8 orë, i treti në çdo 9 orë, por i katërti në çdo 12 orë. Për sa orë të katër trenat do të nisen në të njëjtën kohë?
18. Për krishtlindje në një ëmbëltore, të punësuarit duhet të bëjnë pako të barabarta me ëmbëlsira. Sa më së shumti pako, mund të bëjnë prej 15 eklerë, 6 tullumba dhe 9 bakllava?

### 3. Numrat e plotë dhe operacionet me numrat e plotë

#### 3.1. Numrat e plotë

Pas futjes së bashkësisë së numrave natyrorë futim edhe një bashkësi numerike, por ajo është bashkësia e numrave të plotë. Për ta arritur atë qëllim, fillojmë me këto konstatime:

- Për dy numra natyrorë, (формула), ndryshimi (формула) është numër natyror nëse, (формула)
- Bëmë zgjerimin e bashkësisë së numrave natyrorë në (формула) me futjen e 0, atëherë mund të lejojmë zbritjen për dy numra natyrorë (формула), ku (формула), nëse (формула)

1. Zgjidhe barazimin (формула) në (формула). A ka zgjidhje në (формула)?

Është e qartë se barazimi i dhënë nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë, as edhe në bashkësinë e zgjeruar të numrave natyrorë (формула). Për këtë qëllim është i nevojshëm zgjerimi i kësaj bashkësie, që të mund të zgjidhim barazimet e këtij lloji (формула) ku, (формула). Zgjerimin e bëjmë me numrat -1,-2,-3,..., të cilët janë numrat e kundërt të numrave natyrorë dhe quhen numra të plotë. Bashkësinë e numrave negativë të plotë e shënojmë me (формула).

Kjo tërheq se numrat natyrorë mund t'i quajmë numra të plotë pozitivë dhe të shkruajmë (формула). Në këtë kuptim, numri 0 nuk është numër as pozitiv, as negativ.

Bashkësia e numrave të plotë i përfshin të gjithë numrat e plotë pozitivë, të gjithë numrat e plotë negativë dhe numrin zero d.m.th., (формула)

Bashkësinë e numrave të plotë e shënojmë me (формула)

Është e saktë (формула)

Vërejmë se kjo bashkësi nuk ka element më të vogël, as më të madh. Paraqitja gjeometrike e numrave të plotë është në boshtin numerik:

Nëse janë me shenja të ndryshme prej vlerës absolute të numri të plotë që është me vlerë absolute më të Duke pasur parasysh atë që numrat negativë janë në të majtë prej numrave pozitivë dhe numrit 0, domethënë ata janë më të vegjël edhe prej numrave pozitivë dhe prej numrit 0. Prandaj, numrat e plotë mund t'i rendisim (формула).

Përmendëm se për numrat e plotë negativë themi se janë numrat e kundërt të numrave të plotë, por edhe për numrat e plotë pozitivë themi se janë numrat e kundërt të numrave të plotë negativë (формула)  $\frac{1}{4}$

2. Cakto numrat e plotë të kundërt të këtyre numrave të plotë: 256, -1250,89 dhe -5230.

3. Renditi, sipas madhësisë, këta numra të plotë: -256,4208,0,1203, -4503,256, -25.

Le të jetë (формула). Vlera absolute e numrit të plotë m përkufizohet sikurse:  
(формула)

Shembulli 1. (формула) d.m.th., vlera absolute e numrit pozitiv është vetë ai numër, vlera absolute prej 0 është 0 dhe vlera absolute e numrit të plotë negativ është numri i tij i kundërt (формула)  
Është e vërtetë të vërehet se:

❖ Numrat e plotë të kundërt kanë vlerë absolute të njëjtë d.m.th., (формула) për (формула)

4. Cakto vlerat absolute të këtyre numrave të plotë: -1250,65,998, -875,0.

5

. Renditi sipas madhësisë këta numra të plotë sipas vlerës absolute: -125,-2546,0,125,36.

### 3.2. Operacionet me numrat e plotë

Mbledhja, zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave të plotë:

- E dimë se (формула)

Numrat e plotë mbledhen në atë mënyrë, ku, nëse janë shenja të njëjta mbledhen vlerat absolute të numrave të plotë, por shenja përkruhet. madhe zbritet vlera absolute e numrit të plotë me vlerë absolute më të vogël dhe shenja përkruhet prej numrit të plotë me vlerë absolute më të madhe

• Për zbritjen kemi:  $(+ 5) - (+ 7) = (+ 5) + (-7) = (-2)$ ,  $(+ 7) - (+ 5) = (+ 7) + (-5) = (+ 2)$ ,  $(+ 7) - (-5) = (+ 7) + (+ 5) = (+ 12)$ ,  $(-7) - (-5) = (-7) + (+ 5) = (-2)$ . Zbritja e numrave të plotë sillet në mbledhjen e numrave të plotë në atë mënyrë, ku të zbritshmit i shtohet numri i plotë i kundërt zbritësit prej ndryshimit. Më tej vazhdohet me mbledhje të numrave të plotë sipas rregullës paraprakisht të dhënë.

• Për shumëzim kemi: (формула). Numrat e plotë shumëzohen në atë mënyrë, ku nëse janë me shenja të ndryshme, atëherë shumëzohen vlerat e tyre absolute dhe shenja e prodhimit të tyre është “-”. Nëse janë me shenja të njëjta, atëherë shumëzohen vlerat e tyre absolute dhe shenja e prodhimit është “+”. Nëse të paktën njëri prej shumëzuesve është 0, atëherë prodhimi i tyre është 0.

• Për pjesëtimin kemi:  $(+ 35) : (+ 7) = (+ 5)$ ,  $(+ 35) : (-7) = (-5)$ ,  $(-35) : (+ 7) = (-5)$ ,  $(-35) : (-7) = (+ 5)$ . Numrat e plotë pjesëtohen në atë mënyrë, ku, nëse janë me shenja të ndryshme, atëherë pjesëtohen vlerat e tyre absolute dhe shenja e herësit të tyre është “-”. Nëse janë me shenja të njëjta, atëherë pjesëtohen vlerat e tyre absolute dhe shenja e herësit është “+”.

6 Njehso:

a)  $(-8) - (-6)$ ; b)  $(+ 25) - (-12)$ ; c)  $(-64) : (-8)$ ; ç) (формула);  
d) (формула).

Vërejtje: Më së shpeshti, numrat pozitivë i shkruajmë pa shenjën dhe pa kllapa.

Numrat negativë gjithmonë i shkruajmë me shenjë, por lihen vetëm kllapat e panevojshme. Si shembull është detyra 5, d).

Mendo dhe përgjigju!

o Çfarë është shuma e dy numrave të kundërt?

Për çdo (формула)  
(формула) për çdo (формула)

Për operacionin mbledhje dhe shumëzim me numrat e plotë vlejë vetia komutative e mbledhjes, përkatësisht të shumëzimit.



## 7. Zgjidhi barazimet: (формула)

E dimë se shuma, ndryshimi dhe prodhimi i çfarëdo numrave të plotë është numër i plotë

Por, a është kjo e saktë për operacionin e pjesëtimit? Vërehet se barazimi i fundit (формула) nuk është i zgjidhshëm në bashkësinë e numrave të plotë, për dallim nga barazimet e tjera.

Operacionet mbledhje, zbritje dhe shumëzim janë operacione të brendshme të bashkësisë së numrave të plotë d.m.th., bashkësia e numrave të plotë është e mbyllur në lidhje me operacionet mbledhje, zbritje dhe shumëzim.

Operacioni pjesëtim nuk është operacion i brendshëm i bashkësisë së numrave të plotë d.m.th., bashkësia e numrave të plotë nuk është e mbyllur në lidhje me operacionin e pjesëtimit. Pjesëtimi është operacion i pjesërishëm në bashkësinë e numrave të plotë.

## Zgjidhja e problemeve

Në vazhdim do të shqyrtojmë disa shembuj realë.

### Shembulli 2.

Në një qytet temperatura e natës gjatë një jave dimërore ka qenë: (формула). Njehso temperature mesatare javore (формула)  
Në shtatë temperaturat kërkohet mesi aritmetik, (формула)  
Temperatura dimërore mesatare për javën e dhënë është -2.

### Shembulli 3.

Shuma e katër numrave të plotë të njëpasnjëshëm është -22. Cilët janë ata numra?

Numrat e plotë të njëpasnjëshëm do t'i shkruajmë me (формула), ku (формула) është numër i plotë. Atëherë: (формула)  
(табела)

Këta janë numrat e plotë (формула)

Detyra për punë të pavarur:

1. Cakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve:

a) (формула); b) (формула); c) (формула); ç) (формула); d) (формула); dh) (формула); e) (формула)

2. Cakto numrat e kundërt të këtyre numrave të plotë, por pastaj të njëjtit renditi:

-1258,987, -8746, -203,1223.

3. Cakto vlerat absolute të këtyre numrave dhe renditi sipas madhësisë:

-1258,0,987, -8746, -203,1223..

4. Njehso:

a) (формула); b) (формула); c) (формула); ç) (формула)

d) (формула); dh) (формула); e) (формула); f) (формула)

5. Hiqi kllapat dhe shenjat e tepërta, por pastaj njehso vlerën e shprehjes:

a) (формула); b) (формула);

c) (формула); ç) (формула).

6. Njehso vlerën e shprehjes:

a) (формула); b) (формула) për (формула)

7. Të kontrollohet saktësia e, (формула) për (формула) dhe (формула)

8. Vërteto: a) (формула) b) (формула); c) (формула).

9. Në një qytet temperaturat mesatare mujore gjatë një viti kalendarik kanë qenë: (формула). Njehso temperaturën mesatare javore.

10. Sabina pesë ditë dimri me radhë ka matur temperature në mëngjes, pasdite dhe në mbrëmje.

Ajo i ka fituar këto rezultate:

Ditën e parë: (формула);

Ditën e dytë: (формула);

Ditën e tretë: (формула);

Ditën e katërt: (формула);

Ditën e pestë: (формула).

Pastaj, e ka njehsuar temperature mesatare të çdo dite në veçanti. Cilat rezultate i ka fituar Sabina?

Cila ditë ka qenë më e ftohtë, kurse cila më e ngrohtë?

11. Shuma e shtatë numrave të plotë të njëpasnjëshëm është 14. Cilët janë ata numra?

## 4. Numrat racionalë

### 4.1. Numrat racionalë

Të futim edhe një bashkësi numerike të rëndësishme.

- Barazimi (формула) nuk është i zgjidhshëm në bashkësinë e numrave të plotë.
- Barazimi (формула) nuk ka gjithmonë zgjidhje në bashkësinë e numrave të plotë

Për këtë qëllim është i nevojshëm zgjerimi në bashkësinë e numrave të plotë me të ashtuquajtura thyesa.

Barazimi (формула) ka zgjidhje (формула) në bashkësinë e re

Ky numër quhet thyesë, ku numri 1 është numëruesi, numri 2 është emëruesi i thyesës, por vija është vija thyesore që e zëvendëson shenjën për pjesëtim

”. Thyesa është numri (формула)

Bashkësia e cila i përfshin të gjitha thyesat quhet bashkësia e numrave racionalë.

Me fjalë të e të tjera, thyesën e quajmë numër racional. Thyesat janë: (формула)

Bashkësinë e numrave racionalë e shënojmë me (формула) dhe ajo ka formën (формула) ose (формула)

Mendo dhe përgjigju:

o Numrat natyrorë a janë numra racionalë?

o Numrat plotë a janë numra racionalë?

o Si quhen thyesat (формула), si thyesat (формула), por si (формула)? —

o Cilat thyesa nuk kanë kuptim (формула)?

**Shembulli 1.** Thyesat e formës quhen numra të përzier dhe transformohen në thyesa të parregullta d.m.th., (формула)

Mendo dhe përgjigju:

o Thyesa e rregullt ose jo e rregullt është më e madhe se 1?

Çdo numër i plotë është edhe numër racional.

Thyesa (формула) quhet e rregullt (e pastër), nëse (формула), thyesa e parregullt (e papastër) nëse (формула), por thyesa e dukshme nëse (формула)

Shprehja e formës (формула) nuk ka kuptim, pasi pjesëtimi me 0 nuk është përkufizuar

#### 4.2. Zgjerimi, thjeshtimi i thyesave dhe sjellja në emërues të njëjtë

E dimë se shprehja  $25 : 5 = 5$ , por edhe shprehjet (формула) dhe (формула) japin rezultate të njëjta. Nëse shenja për pjesëtim zëvendësohet me vijën thyesore, atëherë fitojmë (формула). Domethënë, thyesa (формула) së pari e thjeshtojmë me 5, por pastaj e zgjerojmë me numrin 2 dhe poashtu fitohet thyesë e barabartë me thyesën (формула)

**Shembulli 2.** Nëse e marrim thyesën (формула), atëherë atë mund ta thjeshtojmë me 2 dhe do të fitohet thyesa (формула).

Por, kjo thyesë (формула) mund të thjeshtohet edhe me numrin 5 dhe të fitohet thyesa (формула).

Thyesa (формула) mund të thjeshtohet edhe me numrin 10 dhe fitohet thyesa (формула).

Vërejmë se thyesat (формула) dhe (формула) mund të thjeshtohen edhe më tej, e para me 5, por e dyta me 2. Por, thyesa (формула) nuk mund të thjeshtohet më tej. Ajo quhet thyesë e thjeshtueshme, pasi  $PMP(1,2) = 1$ .

❖ Nëse numëruesi dhe emëruesi i thyesës, (qpopmyna) pjesëtohen me një numër të njëjtë (qpopmyna) d.m.th., (qpopmyna), atëherë themi se kemi kryer thjeshtimin e thyesës me numrin (qpopmyna). Thyesa e fituar është e barabartë me thyesën fillestare.



Nëse numëruesi dhe emëruesi i thyesës (qpopmyna), (qpopmyna) shumëzohen me një numër të njëjtë (qpopmyna) d.m.th., (qpopmyna), atëherë themi se kemi kryer zgjerimin e thyesës me numrin (qpopmyna). Thyesa e fituar është e barabartë me thyesën fillestare.

❖ Për një thyesë do të themi se është thyesë e pathjeshtueshme nëse numëruesi dhe emëruesi janë numra reciprokisht të thjeshtë.

1

. Thjeshto thyesën (qpopmyna) me 7. Thyesa e fituar a është e pathjeshtueshme? Nëse nuk është, atëherë të sillt në thyesë të pathjeshtueshme.

2. Zgjeri këto thyesa me numrin 3: (qpopmyna).

Mënyra për zgjerimin e thyesave mund të shfrytëzohet për sjelljen e thyesave në emërues të përbashkët.

Shembulli 3. Le të jenë dhënë thyesat (qpopmyna). Ti sjellim në emërues të përbashkët. Për atë qëllim kërkojmë SHVP  $(2,3) = 6$  të emëruesve dhe çdo thyesë e zgjerojmë deri te numrit 6: (qpopmyna)

3. (qpopmyna):

a) (formulat); b) (qpopmyna); c) (qpopmyna).

### 4.3. Renditja e numrave racionalë. Vlera reciproke

**Mendo!**

Si do t'i krahasosh thyesat (формула)? —

Për t'i krahasuar këto thyesa, është e nevojshme t'i sjellim në emërues të përbashkët, por pastaj t'i krahasojmë, ashtu që prej thyesave me emërues të njëjtë më e madhe do të jetë thyesa që ka emërues më të madh.

**Shembulli 4.** Thyesat (формула) i sjellim në emërues të njëjtë (формула). I krahasojmë (формула), pasi (формула)

**4.** Krahasoji thyesa: a) (формула); b) (формула)

**5.** Renditi sipas madhësisë thyesa: (формула) —

**Gjeometrikisht** numrat racionalë i paraqesim në boshtin numerik a:  
(цртеж)

**6.** Paraqiti këto thyesa në boshtin numerik: (формула)

Prej boshtit numerik vëren se ndërmjet çfarëdo dy numrave racionalë ka përsëri numër racional.

Ndërmjet çfarëdo dy numrave racionalë ka numër racional d.m.th., bashkësia e numrave racionalë është dendur e renditur.

Për dy thyesa (формула) do të themi se janë të barabarta (формула), nëse (формула)

Shembulli 5. Thyestat (формула) janë të barabarta, pasi (формула).

7. Kontrolllo a janë të barabarta këto thyesa: a) (формула) b) (формула)

Mendo!

o Për numrin 5, si quhet numri (формула)?

❖ Për numri e dhënë jo zero  $m$ , thyesa (формула) themi se është vlera reciproke e numrit  $m$ .

8. Cakto vlerat reciproke të këtyre numrave racionalë: (формула)

Detyra për punë të pavarur:

1. Në këtë moment ora tregon orën 12 paradite. Shkruaji me thyesa pjesën e kaluar dhe të mbetur të ditës dhe natës.

2. Për cilën vlerë të  $\tau$  shprehja nuk ka kuptim: a) (формула); b) (формула); c) (формула).

3. Zgjeroji thyesa: a) (формула); b) (формула) me 2; c) (формула) me 9.

4. Këto thyesa sjelli deri në thyesa të pathjeshtueshme (формула)

—

Shembulli 1.

a) Të mbledhim dy thyesa me emërues së njëjtë (формула). Vërejmë se shuma e dy thyesave (формула) dhe (формула) është thyesë (формула) me emërues të njëjtë 5 sikurse edhe thyesat (формула) dhe (формула), por numëruesi 3 është shumë e të dy numëruesve të thyesave (формула) dhe (формула) d.m.th.,  $3 = 2 + 1$ .

b) Të mbledhim dy thyesa me emërues të ndryshëm (формула)

Vërejmë se së pari kërkohet SHVP  $(2,5) = 10$  të dy thyesave. Pastaj, çdonjëra prej thyesave zgjerohet deri te thyesa me emërues 10. Në fund mbledhja sillet në mbledhjen e dy thyesave me emërues së njëjtë (mënyra e sqaruar te detyra nën a

1 Njehso shumën: a) (формула) b) (формула) c) (формула)

Zbritja e numrave racionalë:

o Si zbriten thyesat me emërues të njëjtë?

o Si zbriten thyesat me emërues të ndryshëm?

❖ Thyesat me emërues së njëjtë zbriten, ashtu që ndryshimi është thyesë me emërues të njëjtë, por numëruesi është i barabartë me ndryshimin e numëruesit të zbritshmit dhe numëruesit të zbritësit d.m.th., (формула)

❖ Thyesat me emërues të ndryshëm zbriten, ashtu që thyesat sillen në emërues të njëjtë dhe pastaj zbriten si thyesa me emërues të njëjtë.

Shembulli 2.

a) Të zbresim dy thyesa me emërues të njëjtë (формула)

Vërejmë se ndryshimi i dy thyesave (формула) dhe (формула) është thyesë (формула) me emërues të njëjtë 5 dhe thyesat (формула) dhe (формула), por numëruesi 1 është ndryshimi i të dy numëruesve të thyesave të cilat i zbresim d.m.th.,  $2-1 = 1$ .

b) Të zbriten dy thyesa me emërues të ndryshëm (формула).

Vërejmë se së pari kërkohen SHVP  $(3,5) = 15$  të dy emëruesve. Pastaj, çdonjëra prej thyesave zgjerohet me emërues 15. Në fund ndryshimi ndërmjet të dy thyesave sillet në ndryshimin prej dy thyesave me emërues të njëjtë (mënyra e sqaruar te detyra nën a

2 Njehso ndryshimin:

a) (формула); b) (формула); c) (формула); ç) (формула)

Shumëzimi i numrave racionalë:

o Si njehsohet prodhimi i thyesave?

Duhet të mbash mend se:

Prodhimi i thyesave njehsohet ashtu që prodhimi është thyesë me numërues që është prodhim prej numëruesve të shumëzuesve, por emëruesi është prodhim i emëruesve të shumëzuesve d.m.th., (формула)

Për shumëzimin e numrave racionalë vlejnë vetitë komutative dhe asociative të shumëzimit, si edhe vetia distributive e shumëzimit në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen.

Shembulli 3. a) Ta njehsojmë prodhimin e këtyre thyesave: (формула). Vërejmë se prodhimi i dy thyesave është thyesë me numërues që fitohet si prodhim i dy numëruesve të thyesave të cilat luajnë rol te shumëzuesit d.m.th. (формула), dhe emërues që fitohet si prodhim i të dy emëruesve prej thyesave të cilat shumëzohen d.m.th., (формула)

b) Duke përcjellë mënyrën e njëjtë, prodhimi i tri thyesave është (формула). Vërehet se para se të realizohet shumëzimi nëse e mundshme lejohet edhe thjeshtim.

3. Njehso: a) (формула); b) (формула); c) (формула)

—

**Pjesëtimi i numrave racionalë:**

**o Si njehsohet herësi i dy thyesave?**

**Herësi i dy thyesave njehsohet, ashtu që i pjesëtueshmi shumëzohet me vlerën reciproke të pjesëtuesit d.m.th., (формула)**

**Herësi (формула) mund të shkruhet edhe në formën (формула), i cili quhet thyesa dyfishore. Ajo sillet në thyesë të zakonshme me këtë mënyrë (формула)**

**Mendo dhe përgjigju!**

**o Si quhen m dhe q te thyesa dyfishore (формула), kurse si n dhe p?**

**o Si mund të thjeshtojmë te thyesa dyfishore (формула)**

**Shembulli 4.**

**a) Ta njehsojmë herësin e këtyre dy thyesave (формула)**

**Vërejmë se pjesëtimi i thyesës (формула) me thyesën (формула) sillet në operacionin e shumëzimit të dy thyesave ashtu që i pjesëtueshmi (формула) shumëzohet me vlerën reciproke të pjesëtuesit (формула)**

—

Më tej mënyra sillet në shumëzimin e dy thyesave të përshkruar te

b) Ta njehsojmë thyesën dyfishore (формула), si herës të thyesave (формула) edhe (формула) ndryshe e shkruar. Thyesa dyfishore sillet në thyesë të zakonshme me mënyrën që është dhënë lart.

Numëruesi i thyesës së zakonshme është prodhim prej anëtarëve të jashtëm të thyesës së dyfishtë 1 dhe 4, kurse emëruesi është prodhim prej anëtarëve të brendshëm 2 dhe 3 të thyesës së dyfishtë. Gjatë shumëzimit është realizuar edhe thjeshtimi i thyesës së zakonshme

4. Njehso: a) (формула); b) (формула); c) (формула); ç) (формула)

## 5.2. Zgjidhja e problemeve

Të japim disa problem reale.

Shembulli 5.

Në një pishinë janë ndërtuar katër gypa. Me njëërën pishina mbushet për 5 orë, me të dytën për 9 orë, me të tretën për 3 orë, por me të katërtën për 7 orë

Çfarë pjesë e pishinës do të mbushet për 1 orë, nëse njëkohësisht hapen të katër gypat?

Gypi i parë për 1 orë do ta mbushë (формула) të pishinës.

E dyta për 1 orë do ta mbushë (формула) të pishinës. Gypi i tretë për 1 orë do ta mbushë (формула) të pishinës. Gypi i katërt për 1 orë do ta mbushë (формула) e pishinës. Të gjitha së bashku do ta mbushin (формула) pjesë së pishinës.

Shembulli 6.

Dy punëtorë për shkak të moskryerjes së detyrave punuese kanë qenë të dënuar. I punësuari i patë ka marrë prej pagës së tij (формула) që është 12 000 denarë, kurse i dyti ka marrë (формула) prej pagës së tij që është 15 000 denarë.

Cili ka pasur më shumë para për shpenzim gjatë muajit?

I punësuari i parë ka marrë si page gjatë muajit (формула) denarë. I dyti ka marrë (формула) denarë. I punësuari i parë ka marrë pagë më të madhe gjatë muajit.

Shembulli 7. Një familje është nisur të shëtitë me automobilin e tij.

Ditën e parë ka kaluar (формула) të rrugës, ditën e dytë (формула) të rrugës, por ditën e tretë pjesën që ka ngelur prej 120 km. Sa litra naftë ka shpenzuar (формула) nëse në çdo 10 km automobila ka shpenzuar nga (формула) litra naftë?

Dita e tretë është (формула) pjesë e rrugës, që është 120 km. Gjithë rruga është (формула) km. Për 1050 rrugë të kaluar familja ka shpenzuar (формула) litra naftë.

Shembulli 8.

Për ndonjë punë të kryer është ndarë shuma prej 30 000 denarë në 3 të punësuar në këtë mënyrë: I pari ka marrë (формула) prej shumës, i dytë 2 herë më shumë se i pari, kurse i treti ka marrë pjesën që ka ngelur. Nga sa para ka marrë çdonjëri prej tyre për punën e kryer?

I punësuari i parë ka marrë (формула) denarë, i punësuari i dytë ka marrë (формула).

I punësuari i tretë  $30000 - (6000 + 12000) = 30000 - 18000 = 12000$  denarë.

Detyra për punë të pavarur:

1. Të kryhen operacionet e shënuara:

a) (формула); b) (формула) c) (формула) ç) (формула); d) (формула); dh) (формула)

—

2. Le të jenë (формула) çfarëdo numra racionalë. Vërteto këto barazi:

—

a) (формула) b) (формула)

3. Një shumë e parave ka qenë e ndarë në 3 persona. Personi i parë ka marrë (формула) prej shumës, i dyti (формула), por personi i tretë 13 000 denarë. Sa ka qenë shuma, por nga sa kanë marrë personi i parë dhe i dytë?

4. Në një klasë 5 nxënës e përsërisin klasën, por ajo ka qenë (формула) e klasës. Sa nxënës ka numëruar klasa?

5. Një pishinë mbushet me tre gypa, por zbrazet me një gyp. Gypi i parë e mbush për 9 orë, i dyti për 5 orë, i tretë për 7 orë, kurse i katërti e zbraz për 11 orë. Çfarë pjese e pishinës do të mbushet për 1 orë, nëse lëshohen të gjithë gypat njëkohësisht?

6. Orgesi ka qenë sportist i dalluar. Prandaj, ai duhej të shoqërojë planin e caktuar për punë gjatë çdo dite. Ai ka vendosur këtë qëllim për një natë dhe ditë: (формула) do të flejë (формула) do të vrapojë (формула), do të ushtrojë në vegla (формула), do të bëjë ushtrime për zgjatje (формула), do të relaksohet dhe do të hajë 1 orë, Orgesi a është i realizueshëm?

7. Shpendi ka ndërtuar pishinë në oborrin e vilës verore të tij. Pishina e ka formën e kuadrit me dimensione (формула). E ka mbushur me ujë deti deri te lartësia (формула). Uji i detit përmban (формула) l kripë. Sa litra ujë nxë pishina? Sa litra ujë deti ka pishina e Shpendit? Sa kg kripë ka në ujë prej pishinës së Shpendit?

8. Ndryshimi i numrave reciprokë është (формула) dhe 2 pjesëtoje me shumën e tyre.



Nëse thyesa nuk është thyesë dhjetore, atëherë është e mundshme gjithashtu të shndërrohet në numër dhjetor me pjesëtim të numëruesit me emëruesin.

Shembulli 1. Thyesën (формула) mund ta transformojmë në thyesë dhjetore, pasi 3 nuk është pjesëtues i asnjërës prej njësisë dekadë.

Por, nëse numëruesin e pjesëtojmë me emëruesin, atëherë fitojmë numër dhjetor që është i pafundshëm (формула)  
Për thyesat (формула) i fitojmë këta numra të pafundshëm dhjetorë (формула), përkatësisht.

Vërehet se të gjithë numrat dhjetorë, edhe pse janë të pafundshëm, megjithatë tek ata paraqitet përsëritja e një ose grup të shifrave.

Numrat e atillë dhjetorë quhen numra të pafundshëm dhjetorë periodikë. Shifra ose grupi prej shifrave që përsëriten quhet periodë. Kështu, të shkruarit e këtyre numrave dhjetorë është kjo: (формула)  
Çdo numër racional mund të paraqitet si i fundshëm ose numër i pafundshëm periodik.

3. Paraqiti këta numra racionalë në numra dhjetorë: (формула)

—

Është e mundshme edhe numrat të pafundshëm dhjetorë periodikë t'i shndërrojmë në thyesa d.m.th., në numra racionalë.

Shembulli 2. Numrat të pafundshëm dhjetorë periodikë 2,(5) dhe 0,1(23) do t'i shndërrojmë në thyesa në këtë mënyrë: (формула)

4. Këta numra të pafundshëm dhjetorë periodikë paraqiti si thyesa: (формула)

## 6.2. Operacionet me numra dhjetorë

Numrat dhjetorë mblidhen dhe zbriten, ashtu që shkruhet njëri nën tjetrit duke pasur llogari për presjen dhjetore, si edhe për shifrat e vlerës së njëjtë vendore të jenë njëra nën tjetrën dhe mbledhja, përkatësisht zbritja fillon me shifrën e parë e cila gjendet në të djathtë të numrat dhe vazhdon me shifrat të cilat janë në të majtë, prej shifrës më në të djathtë.

Shembulli 3.

T'i mbledhim numrat dhjetorë: 8,25; 0,125; 12,5

T'i zbresim numrat dhjetorë: 2,1 dhe

Shumëzimi i dy numrave dhjetorë është i njëjtë sikurse që shumëzohen numrat natyrorë, vetëm që vendohet presja dhjetore te prodhimi i fituar, ashtu që ajo ndan aq vende dhjetore te prodhimi sa është shuma e vendeve dhjetore te të dy shumëzuesit.

Shembulli 4.

T'i shumëzojmë 2,56 dhe 3,2.

Që të mund të realizojmë pjesëtimin, është e nevojshme i pjesëtueshmi të jetë numër i plotë, Domethënë, mund të pjesëtojmë numër dhjetor me numër të plotë.

Gjatë këtij pjesëtimi kur do ta pjesëtojmë gjithë pjesën prej numrit dhjetor, atëherë te herësi vendosim presje dhjetore dhe vazhdojmë me pjesëtimin e pjesës dhjetore prej pjesëtuesit.

Nëse duhet të pjesëtojmë dy numra dhjetorë, atëherë është e nevojshme i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi t'i shumëzojmë me njësinë dekade e cila ka aq zero sa ka vende dhjetore te pjesëtuesi. Pastaj pjesëtimi sillet në pjesëtim të numrit dhjetor me numër të plotë.

Shembulli 5.

T'i njehsojmë këta herës: a)  $2,52 : 2$ ; b)  $2,52 : 0,2$ .

a) (формула) b) (формула)

5 Njehso:

a) (формула); b) (формула)).

Detyra për punë të pavarur:

1. Këto thyesa shkruaji si thyesa dhjetore: (формула). Cilat prej tyre janë numra të pafundshëm dhjetorë, kurse cilat janë numra dhjetorë të pafundshëm periodik?

2. Këta numra dhjetorë paraqiti si thyesa të pathjeshtueshme:  $1,25$ ;  $0,55$ ;  $0,2$  (3);  $1,(5)$ .

3. Kryeji operacionet e shënuara:

a) (формула); b) (формула); c) (формула)

4. Njehso vlerën e shprehjes:

a) (формула); b) (формула)

5. Ramizi me biçikletë ka kaluar  $20,25$  kilometra në orë, por Merita  $15,74$  kilometra në orë, ndërsa Sajmiri ka kaluar  $21,43$  kilometra në orë. Nga sa kilometra do të kalojë çdonjëri prej tyre, nëse vozitin  $2,32$  orë? Sa kilometra gjithsej do të kalojnë të gjithë së bashku për kohën prej  $0,8$  orë?

6. Gjyshja Besa prej 1,4 kg dredhëza të freskëta ka fituar 1 kg reçel, kurse gjyshja Vera prej 1,2 kg dredhëza të freskëta ka fituar 1 kg reçel. Nga sa kilogramë dredhëza të freskëta duhet të blejnë çdonjëra prej tyre që të fitohet për vete 2,75 kg reçel?

## 7. Numrat realë

7.1. Numrat realë e futëm bashkësinë e numrave racionalë, mund të konstatojmë:

- Ndërmjet çfarëdo dy numrave racionalë ka numër racional d.m.th., bashkësia e numrave racionalë është e renditur në mënyrë të dendur.

- Numrat racionalë i paraqesim te boshti numerik. • Rrënja katrore e numri racional pozitiv  $a$  simbolikisht shkruhet si  $\sqrt{a}$  (формула) ashtu që është e saktë (формула) Diskutimin për zgjidhjen e barazimit (формула) do ta sjellim në sqarimin te ky shembull (формула) Shembulli 1. Barazimi (формула) ka zgjidhje në bashkësinë e numrave racionalë (формула). Por, barazimi (формула) nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave racionalë, (формула) Për këto lloje të barazimeve që të ketë zgjidhje, na imponohet nevoja e futjes së bashkësisë së re që do t'i përfshijë edhe këta numra. Ajo bashkësi quhet bashkësia e numrave iracionalë që shkruhet me  $\mathbb{R}$  (формула). Nëse me kalkulator njehsojmë, vërejmë se fitojmë numër dhjetor të pafundshëm, që nuk është numër dhjetor periodik i pafundshëm. Numra të atillë janë (формула) edhe (формула) Numrat iracionalë janë numra dhjetorë jo të pafundshëm periodikë. Unioni i numrave racionalë dhe iracionalë e japin bashkësinë e numrave realë, që shkruhet me shkronjën  $\mathbb{R}$  (формула) dhe për ato të sakta janë këto gjykime (формула) dhe (формула).

Bashkësitë, (формула) me ndihmën e diagramit të Venit, mund t'i paraqesim në këtë mënyrë:

(цртеж)

Mendo!

o Cili numër është më i vogël: (формула) ose (формула)?

Për t'i krahasuar këta dy numra realë është e nevojshme t'i caktojmë numrat dhjetorë, (формула) dhe (формула). Domethënë, (формула),

1. Renditi sipas madhësisë këta numra realë: (формула).

Domethënë, elementet e bashkësisë së numrave realë mund t'i rendisim d.m.th., çfarëdo dy numra realë  $a$  dhe  $b$  mund t'i krahasojmë dhe poashtu për ata do të vlejë:

(формула).

Tanimë vërejtëm se numrat racionalë i paraqesim në boshtin numerik, por edhe numrat iracionalë mund të paraqiten në boshtin numerik. Paraqitja është me ndihmën e konstruksionit gjeometrik të numrit.

Shembulli 2. T'i paraqesim këta numra iracionalë (формула) dhe (формула) te boshti numerik me këto hapa:

1. Numrin iracional e paraqesim në formën (формула);
2. Duke shfrytëzuar teoremën e Pitagorës, përfundojmë se duhet të konstruktohet trekëndëshi kënddrejtë barakrahas me katete prej 1 njësi dhe hipoteniza me gjatësi (формула) njësi;
3. Konstruksionin e trekëndëshit kënddrejtë barakrahas me katete me gjatësi prej 1 njësie me kulm te këndi i drejtë te pika me njësi matëse 1;

4. Gjatësia e hipotenuzës së trekëndëshit është  $(\sqrt{a})$  njësi dhe e bartim prej pikës O në të djathtë, duke fituar pikën që paraqet numrin iracional  $(\sqrt{a})$

Për  $(\sqrt{a})$  paraqitja është  $(\sqrt{a})$ . Konstruksioni gjeometrik i këtij numri iracional do të realizohet me konstruksionin e trekëndëshit kënddrejtë me gjatë të kateteve prej 1 njësie dhe  $(\sqrt{a})$  njësi.

Hipotenuza e këtij trekëndëshi kënddrejtë është me gjatësi  $(\sqrt{a})$  njësi. Për ta konstruktuar  $(\sqrt{a})$ , së pari duhet të konstruktojmë  $(\sqrt{a})$ . Konstruksioni gjeometrik i këtyre dy numrave iracionalë  $(\sqrt{a})$ ,  $(\sqrt{a})$ , si edhe të  $(\sqrt{a})$ ,  $(\sqrt{a})$  janë dhënë te vizatimi:

(цртеж)

Vërejtje 1:

Numri iracional jo patjetër, gjithmonë ta fitojmë nëpërmjet gjatësisë së hipotenuzës prej konstruksionit të trekëndëshit kënddrejtë. Shembull i atillë është konstruksioni gjeometrik i numrit iracional  $(\sqrt{a})$ .

Domethënë, numrin iracional në këtë mënyrë me konstruksion gjeometrik të numrit mund ta bartim te boshti numerik. Boshti numerik quhet edhe boshti real.

Çdo pike të boshtit real mund t'i shoqërojmë saktë nga një numër real dhe anasjelltas, çdo numri real mund t'i shoqërojmë saktë nga një pikë të boshtit real.

2.

Te boshti real paraqite numrit iracional  $(\sqrt{a})$ .

o Vlera absolute e numrit real a përkufizohet në të njëjtën mënyrë sikurse edhe vlera absolute e numrit të plotë?

Përgjigja e kësaj pyetjeje është po d.m.th., për  $(\sqrt{a})$ , vlerën absolute të numrit real m përkufizohet sikurse

3. Njehso: a) (формула) b) (формула) c) (формула)

Vërejtje 2: Vetitë që vlejné për vlerat absolute të numrave të plotë, vlejné edhe për vlerën absolute të numrave realë:

❖ Numrat e kundërt realë kanë vlerë absolute të njëjtë d.m.th., (формула) për (формула)

❖ Për çdo (формула).

❖ (формула) për çdo (формула)

## 7.2. Intervalet

Kërkesa e zgjidhjes së pabarazimeve në bashkësinë e numrave realë na çon deri te koncepti interval.

• Zgjidhja e pabarazimeve (формула) janë nënbashkësi të bashkësisë së numrave realë. Këto nënbashkësi quhen intervale.

Për intervalet kemi:

❖ Intervalet janë bashkësi të numrave realë  $x$ , që i plotësojnë këto pabarazi të dyfishta (формула), ku numrat realë  $a$  dhe  $b$  quhen skajet e intervaleve.

Këto intervale më së shpeshti shkruhen në këtë mënyrë:

➤ (формула) më shkurt (формула), por edhe si (формула) dhe quhet interval i hapur.

Këtu kufijtë e intervalit i takojné atij;

➤ (формула) më shkurt  $[a, b]$ , por edhe si (формула) dhe quhet interval i mbyllur.

Këtu kufijtë i takojné intervalit;

➤ (формула) më shkurt  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ , por edhe si (формула), (формула) dhe quhet interval gjysmë të hapur.

Tek intervalet gjysmë të hapur i takon vetëm njëri kufi i intervalit. Tek intervali (формула) i takon intervalit  $a$ , por nuk i takon  $b$ . Ndërsa, intervali (формула) nuk i takon  $a$ , por i takon  $b$ .

Vërejtje 3: Pabarazimi i dyfishtë (формула) përkufizohet sikurse konjuksioni ndërmjet dy pabarazimeve d.m.th., (формула).

Intervalet jo patjetër të jenë të fundshëm.

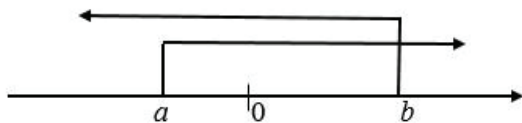
Kemi edhe interval të pakufishëm

Intervalet paraqiten edhe te boshti numerik në këtë mënyrë:

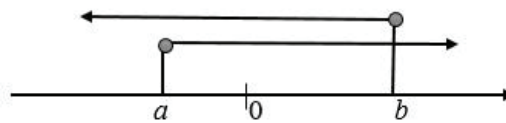
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\},$$

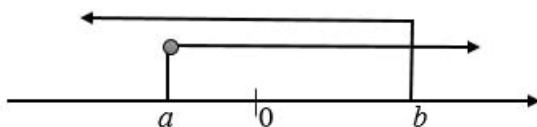
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$



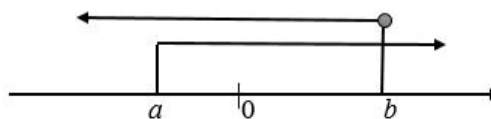
$$x \in (a, b)$$



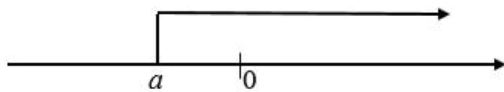
$$x \in [a, b]$$



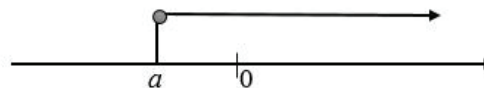
$$x \in [a, b)$$



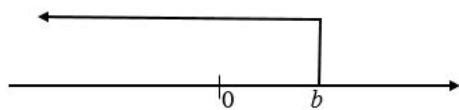
$$x \in (a, b]$$



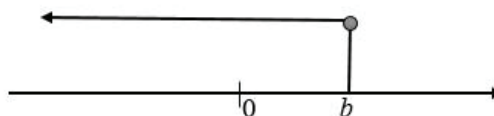
$$x \in (a, +\infty)$$



$$x \in [a, +\infty)$$



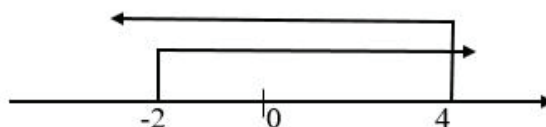
$$x \in (-\infty, b)$$



$$x \in (-\infty, b]$$

### Пример 3

Cili interval është paraqitur te boshti numerik?



4. Te boshti numerik paraqiti këto intervale (формула)

### 7.3. Zgjidhja e problemeve

Të zgjidhim disa probleme.

Shembulli 4.

Nëse (формула), a vijon gjithmonë (формула) për (формула)?  
Prej (формула) nuk vijon gjithmonë (формула), pasi këta numra mund të jenë numra të kundërt. Për shembull (формула)

Shembulli 5. Si duhet të jenë, (формула), që jetë e saktë (формула).  
Numrat realë, (формула) duhet të jenë me shenjë të njëjtë d.m.th., (формула)

Shembulli 6. Me cilin prej këtyre numrave realë mund të matet largësia në kilometra: 20,52; -50; -75 ndërmjet dy qyteteve? Të sqarohet përgjigja.  
Me 20,52 km. largësia gjithmonë është numër pozitiv.

Shembulli 7. Sajmiri ka shkuar të blejë pllaka për dyshe dhe i ka thënë shitësit: “Dua të blej -5 katrorë pllaka. Cilat pllaka do i preferosh? “Shitësi ka qeshur me Sajmirin. Pse është qeshur shitësi me Sajmirin?  
Syprina gjithmonë matet dhe shprehet me numër pozitiv edhe atë 5m<sup>2</sup> (lexohet: 5 metra katror).

Detyra për punë të pavarur:

1. Paraqiti në boshtin numerik këta numra iracionlë: (формула).
2. Njehso: a) (формула) b) (формула).
3. Shkruaji shkurtimisht këto intervale (формула).
4. Te boshti numerik paraqiti këto intervale:  
a) (формула) b) (формула); c) (формула).

5. Kontrolllo saktësinë e këtyre pohimeve:

a) (формула); b) (формула) për (формула)

6. Një bujk është dashur të vlerësojë sa kilogramë grurë ka në thes. Ai e ka bërë vlerësimin, por ka dyshuar se a të thotë -8 kg ose 8 kg. Çfarë është e saktë? Të sqarohet përgjigja.

7. Cakto raportin e katrorit të perimetrit dhe syprinës së një rrethi. Çfarë numri ka fituar?

8. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Njehso: a) (формула); b) (формула)

c) (формула) ç) (формула)

2. Cakto PMP dhe SHVP të numrave 250,210,220.

3. Renditi sipas madhësisë numrat realë duke filluar prej më të vogël: (формула)

4. Paraqite me thyesë numrin e pafundshëm periodik  $2,12(5)$ .

5. Këto thyesa paraqiti si numra dhjetorë: (формула). Cilët prej tyre janë të fundshëm, e cilët numra janë të pafundshëm dhjetorë?

6. Cakto intervalin: a) (формула); b) (формула)

7. Dy bashkëshortë në shtëpi i kanë sjellë pagat e tyre. Bashkëshortja ka marrë 25 000 denarë, por para se të kthehet në shtëpi ka shpenzuar 3 000 denarë për fustan, 500 denarë në market. Bashkëshorti ka marrë 22 000 denarë dhe para se ta sjellë pagën në shtëpi ka shpenzuar 850 denarë në treg dhe është ulur me kolegët në kafe dhe birrë, ku ka shpenzuar 150 denarë. Sa para të dy kanë sjellë në shtëpi?

8. Një bujk ka qenë e nevojshme të blejë tel që ta rrethojë arën e tij me dy rreshta tel. Ara ka qenë në formë të drejtkëndëshit, ashtu që gjerësia ka qenë 25,8 metra, kurse gjatësia ka qenë gjysma e gjerësisë. Sa metra tel duhet të blejë bujku?

9. Tre autobusë në orën 6 në mëngjes njëkohësisht janë nisur prej stacionit të autobusëve në tre kahe të ndryshme. Autobusi i parë është kthyer pas 1 ore dhe 5 minuta dhe përsëri është nisur në rrugë pas 10 minuta. I dyti është kthyer pas 56 minuta dhe përsëri është nisur pas 4 minuta. I treti është kthyer pas 48 minuta dhe për 2 minuta përsëri është nisur për në rrugë. Për sa kohë më të shkurtër të tre autobusët përsëri do të nisen prej stacionit të autobusit në kohë të njëjtë?

10. Një njeri me automobilin e vet, ditën e parë ka kaluar (формула) prej rrugës, ditën e dytë (формула) prej rrugës, por ditën e tretë mbetjen prej 260 km. Sa litra naftë ka shpenzuar nëse çdo 10 km automobili ka shpenzuar nga (формула) litra naftë? Sa para ka shpenzuar, nëse një litër naftë kushton 66 denarë?



# 3

## SHPREHJET RACIONALE ALGJEBRIKE



### QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

Duke mësuar njësinë modulare, nxënësi duhet të aftësohet:

- ➤ të shumëzojë dhe pjesëtojë fuqi me baza të njëjta ose me tregues të njëjtë të fuqisë;
- ➤ të dijë të fuqizojë fuqinë;
- ➤ të përkufizojë dhe njohë monom, të njohë monomer të ngjashëm dhe të kryejë operacione me monome;
- ➤ të përkufizojë polinom dhe të kryejë operacionet me polinome;
- ➤ të dijë të shfrytëzojë formulat për binomin e katrorit, ndryshimi i katrorit, binomi në kub, shuma dhe ndryshimi i kubeve;
- ➤ të zbërthejë polinom në shumëzues;
- ➤ të përkufizojë thyesë algjebrike dhe të kryejë operacione me thyesa algjebrike.
-

## PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 3

- 101. Fuqia. Shumëzimi, pjesëtimi dhe fuqizimi i fuqisë
- 107. Monomet. Operacionet me monome
- 113. Polinomet. Mbledhja dhe shumëzimi i polinomeve
- 119. Formulatat për shumëzimin e shkurtuar
- 122. Pjesëtimi i polinomeve
- 127. Zbërthimi i polinomeve në shumëzues të thjeshtë me nxjerrjen e shumëzuesit të përbashkët para kllapës
- 131. Zbërthimi i polinomeve në shumëzues të thjeshtë me shfrytëzimin e formulave për ndryshimin e katrorit, ndryshimin dhe shumën e kubeve
- 134. Zbërthimi i polinomeve në shumëzues të thjeshtë me shfrytëzimin e formulave për binom e katrorit
- 136. PMP dhe SHVP i polinomeve
- 141. Thyesa algjebrike. Zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesave
- 147. Operacionet me thyesat algjebrike
- 154. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

## 1. Fuqia. Shumëzimi, pjesëtimi dhe fuqizimi i fuqisë

E dimë se shuma e mbledhësve të njëjtë mund të shkruhet në formë të prodhimit. Kështu,

$$(формула) \ 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5.2$$

(5-herë) (da se napishe ispod izrazot)

o Por, si shkurt do ta shkruash prodhim prej shumëzuesve të njëjtë?

**Shembulli 1. Ta shqyrtojmë prodhimin**

(формула)

**Prodhimin (формула) shkurtimisht mund të shkruhet sikurse (формула)**

**Për shënimin (формула) themi se është shënim i shkurtër i prodhimit (формула).**

**Shënimi i këtillë i shkurtër i prodhimit të shumëzuesve të njëjtë quhet fuqi.**

**Te shënimi (формула), 4 është baza e fuqisë, ndërsa 3 është trej  $n$  (формула).**

❖ Sipas përkufizimit, merret se fuqia (формула).

**Treguesi i fuqisë jo patjetër gjithmonë të jetë numër natyror. Fuqia mund të përkufizohet edhe kur eksponenti është çfarëdo numër i plotë.**

Kur treguesi i fuqisë është numër i plotë negativ, atëherë vlen (формула)  
Sipas paraprakisht që u theksua, përpiku t'i zgjidhësh këto detyra:

1. Paraqiti në formë të fuqisë këto prodhime:

a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула) d) (формула)  
o Çfarë vëren?

Te detyra e parë nën a) prodhimi i dhënë nuk mund të paraqitet në formën e një fuqie, pasi shumëzuesit janë të ndryshëm.

2. Paraqiti në formë të prodhimit të shumëzuesve të barabarta këto fuqi:

a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула)

Kur flasim për fuqitë, është e domosdoshme të vërehet se te “roli” i shumëzuesve të barabarta mund të jenë edhe numrat e plotë negativë. Çfarë ndodh me shenjën e fuqisë te të cilat baza është numër real negativ

Për të konstatuar më lehtë t'i shqyrtojmë fuqitë e numrit real (-1).  
(формула) etj

Lehtë mund të konstatohet se kur (формула) shumëzohet numër çift herë, vlera është 1, domethënë shenja është +, ndërsa kur (формула) shumëzohet numër tek herë, vlera është -, domethënë shenja

Duke pasur parasysh se numrat natyrorë çift i shkruajmë në formën (формула), por numrat natyrorë tek si (формула), lirisht mund të shkruajmë me simbole (формула) dhe për çdo (формула)  
Zgjidhe këtë detyrë:



3. Njehso a) (формула) b) (формула):

Te fuqitë me baza të njëjta mund të përkufizohen më shumë operacione si shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim.

## 1.2. Shumëzimi i fuqisë me baza të njëjta

T'i shumëzojmë fuqitë (формула) dhe (формула), ku  $a$  është çfarëdo numër real, kurse (формула)

❖ Kr shmohen fi me baa t njjta, baa e fis ngel e njjta, por tregesit (eksponentt) mblidhen, domethn ( формула)

4 Njehsoji këto prodhime:

a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула)

## 1.3. Pjesëtimi i fuqisë me baza të njëjta

Mendo:

o Pjesëtimin e fuqisë me baza të njëjta a mund ta sjellim në shumëzim të fuqive me baza të njëjta?

Nëse merret parasysh se (формула), atëherë me siguri pjesëtimi me baza të njëjta do të shqyrtohet si shumëzues të fuqive me baza të njëjta

T'i pjesëtojmë fuqitë (формула) dhe (формула), ku  $a$  është çfarëdo numër real, por (формула), por (формула)

Kemi:

Kur pjesëtohen dy fuqi me baza të njëjta, baza e fuqisë ngel e njëjtë, por treguesit (eksponentët) zbriten d.m.th.,

Për bazën e fuqisë  $a$ , patjetër të vlejë se (формула), për t'i ikur rastit kur pjesëtues është 0. Për këtë shkak, më tej pa theksuar në veçanti do të llogarisim se pjesëtuesi është gjithmonë i ndryshueshëm prej 0.

Zgjidhe këtë detyrë:

5 Njehsoi këta herës: a) (формула) b) (формула) c) (формула)

#### 1.4. Fuqizimi i fuqisë

Prej përkufizimit të fuqive e dimë se (формула)

- Duke pasur parasysh këtë mund të konstatojmë se (формула)

❖ Fuqizimi i fuqive nuk është përcaktuar njëvlerësisht.

Përkatësisht, një fuqi mund të jetë paraqitur në shumë mënyra të ndryshme me ndihmën e fuqizimit. Shqyrto këtë shembull:



Këto shprehje paraqiti në formë të fuqisë me bazë y: a) (формула) b) (формула) c) (формула)

Deri më tani i shqyrtuam operacionet shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim për fuqi me baza të njëjta.

o Çfarë nëse shqyrtojmë fuqi me baza të ndryshme dhe tregues të njëjtë të fuqisë?

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 3. (формула)

Prej shembullit të dhënë, mund të konstatojmë se:

❖ Gjatë shumëzimit të fuqive me baza të ndryshme, por tregues të njëjtë të fuqive, bazat shumëzohen, por treguesi i fuqisë ngel i njëjtë.

(формула) n herë n herë n herë

❖ Në mënyrë të ngjashme, gjatë pjesëtimit të fuqive me baza të ndryshme, por tregues të njëjtë të fuqive, bazat pjesëtohen, por treguesi i fuqisë ngel i njëjtë.

(формула) n herë n herë n here

Formula:

(формула) dhe (формула)

janë formula për fuqizim të prodhimit dhe herësit, përkatësisht.

7. Thjeshtoji shprehje:

Me shfrytëzimin e rregullës për fuqizim të prodhimit lehtë mund të konstatohet shenja e çfarëdo fuqie tek e cila baza është numër real negativ, pasi  
(формула)

8. Fuqizoji këto shprehje a) (формула) b) (формула)

1.5. Të shkruarit e numrave natyrorë në formën

(формула)

Të shqyrtojmë disa numra natyrorë të cilët do t'i shkruajmë në formën e zbërthyer nëpërmjet njësheve, dhjetësheve, qindësheve, mijësheve etj.

Shembulli 4.  
(формула)

Në këtë mënyrë mund të jetë shkruar çfarëdo numër natyror me shumëshifror.

Në rastin e përgjithshëm do të vlejë ky zbërthim nëpërmjet fuqive me bazë 10:

për numrin dyshifror; (формула)

për numrin treshifror; (формула)

për numrin katërshifror (формула)

Për çfarëdo numër  $n$  shifrorë për zbërthimin në formën e prodhimit të numrave natyrorë dhe fuqia me bazë 10 shfrytëzohet ky shënim: (формула)

9 Me ndihmën e prodhimit të numrit natyror dhe fuqive me bazë 10, shkruaji në formën e zbërthyer këta numra natyrorë:



Detyra për punë të pavarur:

1. Konstato vërtetësinë e këtyre gjykimeve

a) (формула) b) (формула); c) (формула) nëse (формула)

2. Konstato vlerën e  $x$

a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула)

3. Kryeji operacionet e shënuara:

a) (формула) b) (формула) c) (формула)

4. Njehso:

a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула)

5. Fuqizoji këto shprehje:

) (формула) b) (формула) c) (формула)

. Këta numra paraqiti si prodhim të numrit natyror si fuqi me bazë 10.

a) 700000; b) 50000; c) 1000000.

7. Cakto vlerën e  $x$  te këto barazime:

a) (формула) b) (формула) c) (формула)

8. Vërteto se! (формула)

2. Monomet. Operacionet me monome

Konstantë janë numrat (формула). Simbolet (формула) quhen ndryshore dhe më së shpeshti shfrytëzohen për shënimin e objekteve të ndryshme matematikore. Konstantët dhe ndryshoret shpeshherë mund të jenë të lidhura me operacione të ndryshme matematikore: mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim me eksponent numër natyror dhe në këtë mënyrë të formojnë shprehje algjebrike. Shprehjet algjebrike janë të klasifikuara varësisht operacioneve me të cilat janë formuar.



Shprehja algebrike e formuar prej konstantëve dhe ndryshoreve vetëm me zbatimin e operacioneve: shumëzim dhe fuqizim me eksponent numër natyror quhet monom.

Si monomer llogariten edhe konstantët të cilat qëndrojnë të pavarura, vetëm ndryshoret ose shprehjet të formuara prej prodhimit të konstantës dhe fuqisë së ndryshoreve me eksponent numra natyrorë.

#### Shembulli 1

Monomet janë shprehje: (формула), ndërsa shprehjet (формула)

nuk janë monome

o Pse këto shprehje nuk janë monome?

Përpiqu ta zgjidhësh këtë detyrë:

1 Cilat prej këtyre shprehjeve janë monome?

a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула) d) (формула) dh) (формула)

Ta shqyrtojmë monomin (формула)

Koeficienti i monomit Vlera kryesore eKoeficienti i monomit është konstantja 8, ndërsa vlera kryesore është prodhimi i fuqive të ndryshoreve.

2 Të caktohet koeficienti dhe vlera kryesore e monomi:

a) (формула); b) (формула) c) (формула) ç) (формула)

• Koeficienti dhe vlera kryesore e monomit mund të caktohet vetëm nëse monomi është shkruar në formën normale.

o Çfarë është forma normale e monomit?

Forma normale e monomit është forma tek e cila nuk ka më shumë se një konstantë dhe të gjitha prodhimet e mundshme të fuqive të ndryshoreve të llojit të njëjtë janë të kryera.

Shembulli 2. Kështu, monomi (формула) është monom në formën normale, ndërsa monomi (формула) nuk është në formën normale, pasi konstantët 2 dhe 3 mund të shumëzohen, sikurse (формула) edhe (формула). Në këtë mënyrë monomi në formën normale do të jetë i shkruar sikurse (формула)

3. Shkruaji në formën normale këta monom:

a) (формула) b) (формула)

• Çdo monom i shkruar në formën normale ka fuqinë e vet.

Fuqia e monomit është shuma e treguesve të fuqive të ndryshoreve të cilat e përbëjnë vlerën kryesore të monomit.

Nëse monomi është vetëm konstantë, atëherë llogarisim se fuqia e tij është 0, d.m.th., monomi është fuqi zero.

Shembulli 3. Fuqia e monomit (формула) është (формула).

Fuqia e ndryshores të monomi është treguesi i fuqisë së konstantës konkrete.

Cakto fuqinë e monomeve:

a) (формула) b) (формула) c) (формула)

❖ Monomet mund të jenë të ngjashme, të kundërta ose të barabarta.

- Monomet e ngjashme janë monomet të cilat kanë vlera të njëjta kryesore.

Shembulli 4.

Kështu, monom të ngjashëm janë (формула)

- Monome të kundërta janë monomet të cilat kanë vlera të njëjta kryesore, ndërsa koeficientët janë numra të kundërt.

Shembulli 5.

Monomet e kundërta janë monome: (формула) dhe (формула), dhe (формула)

- Monom të barabarta janë monomet e ngjashme të cilat kanë edhe koeficient të barabartë.

## 2.1. Mbledhja dhe zbritja e monomeve

❖ Operacionet mbledhje dhe zbritje të monomeve mund të përkufizohen vetëm te monomet e ngjashme, domethënë vetëm te monomet që kanë vlera kryesore të barabarta.

Dy monome të ngjashme mblidhen (zbriten) ashtu që koeficientët mblidhen (zbriten), por vlera kryesore ngel e njëjtë.

Zbritja e monomeve sillet në mbledhjen e monomeve, pasi zbritja e numrave realë në realitet është mbledhja me numrat e tyre të kundërt.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 6. a) (формула)

b) (формула)

## 5. Mblidhi monomet (формула)

## 2.2

Shumëzimi i monomeve

Për operacionin shumëzim të dy monomeve, është e saktë:

Çfarëdo dy monome mund të shumëzohen, ashtu që shumëzohen koeficientët e tyre dhe vlerat e tyre kryesore.

Gjatë shumëzimit të vlerave kryesore, duhet pasur kujdes në shumëzimin e fuqive me bazë të njëjtë, ndërsa të e të tjerat vetëm përshkruhen si shumëzues.

Shembulli 7  
a) (формула)

6 Shumëzoji monomet (формула)

### 2.3. Pjesëtimi i monomeve

Për operacionin pjesëtim të dy monomeve, është e saktë kjo:

Çfarëdo dy monome mund të pjesëtohen, ashtu që pjesëtohen koeficientët e tyre, dhe vlerat e tyre kryesore.

Gjatë pjesëtimit të vlerave kryesore duhet pasur kujdes në pjesëtimin e fuqive me bazë të njëjtë.

Shembulli  
(формула) b) (формула) c) (формула)

7. Pjesëtoi monomet (формула)

### 2.4. Fuqizimi i

Monomi fuqizohet me treguesin e fuqisë numër natyror, ashtu që fuqizohet koeficienti dhe vlera kryesore e monomit.

Shembulli 9 a) (формула) b) (формула)

Ki kujdes në ndryshimin e shenjave gjatë fuqizimit

8. Fuqizo monomin (формула) me eksponent 5.

Vërejtje:

- Duhet të theksohet se shuma, ndryshimi i monomeve të ngjashme ose prodhimi i dy monomeve është gjithashtu monom
- Fuqia e monomit gjithashtu është monom
- Herësi i dy monomeve jo patjetër të jetë monom, shiko shembullin 8.

9 Kryeji operacionet e shënuara

- a) (формула) b) (формула)  
c) (формула) ç) (формула)

Detyra për punë të pavarur

1. Të caktohet koeficienti dhe vlera kryesore e monomit

- a) (формула) b) (формула) c) (формула)

2. Të sillet në formën normale monomi:

- a) (формула) b) (формула) c) (формула)

Pastaj cakto monomin e kundërt të çdonjërit prej monomeve.

3. A janë të ngjashme monomet

- a) (формула) dhe (формула) b) (формула) dhe (формула)

4. Kryeji operacionet e shënuara:

- a) (формула) b) (формула) c) (формула)

5. Kryeji operacionet dhe shkruaji shprehjen në formë më të

- a) (формула) b) (формула) c) (формула) ç) (формула) d) (формула)

Polinomet. Mbledhja dhe shumëzimi i polinomeve

E dimë se monomi është prodhim i konstantëve dhe fuqive të ndryshoreve me eksponent numër natyror.

Ta shqyrtojmë këtë shembull.

Shembulli 1

T'i shqyrtojmë monomet: (формула

Shprehjen (формула) si edhe shprehjet e tjera të cilat në realitet janë shumë (ndryshim) të formuar prej dy monomeve quhen binome

Shprehjen (формула) si edhe shprehje të e të tjera të cilat janë shuma të formuara prej tre monomeve quhen

Shprehja (формула) është polinom pasi është shumë prej katër monomeve

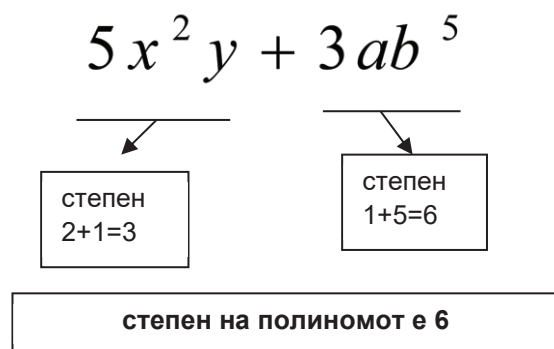
Shuma e numrit të fundshëm të monomeve quhet polinom ose shprehje e plotë algebrike.

Shuma e dy monomeve quhet binom, por shuma e tre monomeve

Shuma e katër dhe më shumë monomeve quhet polinom.

Te njësia paraprake mësove të sjellësh monom në formën normale dhe të caktosh fuqinë e monomit. Ta shqyrtojmë këtë shembull tek i cili do të caktojmë fuqinë e polinomit.

Shembulli 2. Fuqia e polinomit (формула) përcaktohet në këtë mënyrë:



Polinomi është në formën normale nëse të gjitha monomet janë në formën normale.

Fuqia e polinomit në formën normale është më e madhe prej fuqive të monomeve me të cilat është formuar polinomi.

1 Cakto fuqinë e polinomeve:

a) (формула) b) (формула)

• Varësisht prej fuqive të monomeve të cilat e përbëjnë polinomin, polinomet mund të jenë

- Polinomi homogjen – polinomet te të cilat monomet kanë fuqi të barabartë.

Shembulli 3. (формула) fuqi2 fuqi2 fuqi2

- Polinomi komplement – polinomet te të cilat paraqiten të gjitha fuqitë (prej më të vogël deri te më i madhi) të ndryshores së dhënë

Shembulli 4. (формула) fuqi3 fuqi1 fuqi2 fuqi0

- Polinomi i renditur – polinomet te të cilat paraqiten të gjitha fuqitë të ndryshores së dhënë dhe poashtu janë të renditura prej fuqisë më të madhe deri te më e vogla.

Shembulli 5. (формула) fuqi3 fuqi2 fuqi1

Pasi çdo polinom që është shumë e numrit të fundshëm të monomeve, të gjitha operacionet me polinome përkufizohen nëpërmjet operacioneve të monomeve.

### 3.1. Mbledhja e polinomeve

Operacioni mbledhje e polinomeve sillet në mbledhjen e monomeve të ngjashme.

Dy polinome mblidhen ashtu që mblidhen monomet e ngjashme prej polinomeve të dhëna.

Mbledhjen e polinomeve do ta sqarojmë me këtë shembull:

Shembulli 6

(формула)

Lirimi prej kllapës pa ndryshimin e shenjave:

(формула)

3. Mblidhi polinomet (формула)

### 3.2. Shumëzimi i monomit me polinom

Për ta kryer operacionin shumëzim të monomit me polinom duhet ta dish këtë:

Polinomi me monom shumëzohet, ashtu që çdonjëri prej monomeve të cilat e përbëjnë polinomin shumëzohen me monomin e dhënë.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 7.  
shumëzim  
(формула)  
shumëzim

(формула)

Shumëzimi i polinomit me monom, në realitet sillet në zbatimin e vetisë distributive të shumëzimit në lidhje me mbledhjen:  
(формула)

4. Shumëzo polinomin (формула) me monomin (формула)

5. Kryeji operacionet e theksuara:

- a) (формула)
- b) (формула)

3.3. Shumëzimi i polinomeve

Për shumëzimin e polinomit me polinom, është e saktë kjo:

Shumëzimi i polinomit me polinom, në realitet sillet në zbatimin e vetisë distributive të shumëzimit në lidhje me mbledhjen, me të cilan mënyra sillet në zbatimin e mënyrës për shumëzim të polinomit me monom.

Do ta shqyrtojmë këtë shembull, që sqarimi e shkruar më lart praktikisht e zbatohet.

#### Shembulli 8

(формула)

shumëzim

b) Ta njehsojmë prodhimin e polinomeve (формула) dhe (формула)

Së pari, me shumëzuesin e parë, polinomin (формула) do ta shumëzojmë me çdonjërin prej monomeve të shumëzuesit të dytë, binomin (формула), d.m.th. (формула)

në këtë mënyrë mënyra sillet në shumëzimin e polinomit me monom, prej ku: (формула)  
prej ku fitohet (формула)

pra, me mbledhjen e monomeve të ngjashme fitohet (формула)

6. Kryeji operacionet e shënuara, por pastaj silli polinomet në formën e renditur normale

a) (формула); b) (формула);

Dy polinome të shkruara në formën normale me ndryshore të njëjta janë identike ose të barabarta nëse koeficientët para ndryshoreve përkatëse me tregues të fuqisë së njëjtë janë të barabartë.

Shembulli 9.

Të shqyrtojmë polinomet (формула) dhe (формула)

Me kryerjen e operacioneve të shënuara te polinomi (формула)

dhe sjellja e tij në formën normale fitohet polinomi (формула) d.m.th., të dy polinomet janë të barabarta

7. Polinomet (формула) dhe (формула) a janë të barabarta?

Detyra për punë të pavarur:

1.. Silli në formë normale këto polinome:

a) (формула)

b) (формула)

2. Njehso vlerën numerike të polinomit:

a) (формула) për (формула)

b) (формула) për (формула)

3. Kryeji operacionet e shënuara, kurse polinomet e fituara shkruaji në formën normale

a) (формула)

b) (формула)

4. Cakto numrat realë  $m$ ,  $n$  dhe  $p$  ashtu që polinomet do të jenë identike:

(формула) dhe (формула).

5. Janë dhënë polinomet

(формула).

Njehso: a) (формула)

b) (формула)

c) (формула)

6. Për polinomin te detyra 4 kontrollo a janë të sakta këto barazi:



#### 4. Formulatat për shumëzimin e shkurtuar

Gjatë kryerjes së operacionit të shumëzimit të polinomeve, shpeshherë ballafaqohemi me raste speciale të polinomeve të cilat mund të zgjidhen me shfrytëzimin e formulave të caktuara të cilat e thjeshtësojnë mënyrën e zgjidhjes.

Të ndalemi te disa raste speciale që hasen gjatë shumëzimit të polinomeve, të cilat shpeshherë i zbatojmë. Identitetet të cilat i paraqesin ato raste speciale të shumëzimit quhen formula për shumëzimin e shkurtuar.

E dimë se (формула. Nëse (формула), atëherë (формула)

Rezultatit e fituar ta shkruajmë sikurse:  
(формула)

Formula:  
(формула)  
njiher si formula për katrorin e binomit.

Formula:  
(формула)  
njiher si formula për kubin e binomit.

Formulat për katrorin e binomit dhe kubin e binomit njiher si formula për shumëzim të shkurtuar.

Shembulli 1. T'i fuqizojmë këto binome:

a) (формула) b) (формула)

Me zbatimin e formulave për katrorin e binomit: (формула), nëse (формула), por fitojmë (формула)

prej ku me fuqizim, kemi (формула)

b) Me zbatimin e formulave për kubin e binomit: (формула) dhe zëvendësimi (формула) fitojmë: (формула).

1. Me zbatimin e formulave për shumëzim të shkurtuar, njehso:

a) (формула) b) (формула); c) (формула)

Shembulli 2. Ta njehsojmë prodhimin:  
(формула).

2. Njehso prodhimet:

a) (формула); b) (формула).

Pas shumëzimit të kryer (формула) fitojmë:  
(формула).

Krejtësisht në mënyrë të ngjashme fitohet edhe për prodhimin

Në rastin e përgjithshëm për prodhimet e binomeve të formës së këtillë vlen formula:

Formula:

(формула)

është e njohur si formula për katrorët e ndryshimit

Shembulli 3. T'i njehsojmë prodhimet:

a) (формула); b) (формула)

Pas kryerjes së shumëzimit kemi (формула)

(формула)

Krejtësisht në mënyrë të ngjashme fitohet edhe për prodhimin (формула)

Në rastin e përgjithshëm për njehsimin e prodhimeve të formës së këtillë shfrytëzohen formulat për kubet e shumës dhe ndryshimit.

Formula:

(формула)

janë formula për paraqitjen e kubeve të ndryshimit dhe kubeve të shumës në formën e prodhimit, përkatësisht.

3. Njehso: a) b) c)

Detyra për punë të pavarur:

1. Fuqizoji binomet: a) b) c)

2. Me zbatimin e formulave për shumëzim të shkurtuar, shumëzoi polinomet:

a) b) c) ç)

3. Njehso në mënyrë më të shpejtë: a); b); c); ç); d)

4. Fuqizo trinomin:

a); b)

5. Cilët prej këtyre binomëve (формула) kanë katror të barabartë?



Kjo mënyrë është në pajtim me ligjin distributiv të pjesëtimit në lidhje me mbledhjen:  
(формула)

Shembulli 1.  
pjesëtimi  
herësi është polinom

pjesëtimi

Herësi nuk është polinom

Shembulli 2. Ta njehsojmë herësin: (формула)

Sipas ligjit distributive fitohet: (формула)

Sipas rregullës për pjesëtim të monomit me monom: (формула)  
prej ku fitojmë (формула)

Nëse bëjmë provë të zgjidhjes kemi: (формула)

1. Njehso herësit a) b)

Gjatë pjesëtimit të polinomit me polinom, mënyra nuk është aq e thjeshtë sikurse gjatë pjesëtimit të polinomit me monom.

Gjatë pjesëtimit të polinomit me polinom, mënyra nuk është aq e thjeshtë sikurse gjatë pjesëtimit të polinomit me monom.

Mënyra për pjesëtimin e polinomit me polinom përbëhet prej këtyre hapave:

- 1) Së pari, që të pjesëtohet polinomi me polinom, fuqia e polinomit - të pjesëtueshëm duhet të jetë më e madhe ose e barabartë me fuqinë e polinomit-pjesëtues.
- 2) Polinomet duhet të jenë të renditura, duke fillu

ar prej fuqisë më të madhe nga fuqia më e vogël e ndryshores së dhënë.

- 3) Pjesëtimi gjithmonë kryhet ashtu që monomi i parë prej të pjesëtueshmit pjesëtohet me monomin e pjesëtuesit, por herësi i fituar shumëzohet me të gjitha monomet e pjesëtuesit dhe zbritet prej të pjesëtueshmit. Mënyra përsëritet deri sa nuk kryhet shumëzimi, përkatësisht deri sa nuk fitohet polinom me fuqi më të vogël të fuqisë së pjesët

uesit.

Mënyrën do ta përshkruajmë te ky shembull:  
Shembulli 3. Të pjesëtohen polinomet:

(формула)

Te ky shembull fuqitë tek i pjesëtueshmi (формула), së pari duhet t'i rendisim, duke filluar prej më të madhit, pra kemi (формула)

Domethënë, duhet ta njehsojmë herësin (формула)

- Tani monomin e parë prej të pjesëtueshmit (формула)

a) e pjesëtojmë me monomin e parë të pjesëtuesit (формула) d.m.th. (формула). Herësin e fituar (формула) e shumëzojmë me pjesëtuesin (формула). Prodhimin e fituar e zbresim prej të pjesëtueshmit (формула)

- Mënyrën paraprake e përsërisim, ashtu që tani në rolin e të pjesëtueshmit është (формула). Monomin e parë prej pjesëtuesit (формула) e pjesëtojmë me monomin e parë të pjesëtuesit (формула). Herësin e fituar (формула) e shumëzojmë me pjesëtuesin (формула). Prodhimin e fituar e zbresim prej të pjesëtueshmit (формула). Ndryshimi i fituar është mbetja e dytë gjatë pjesëtimit dhe tani është në rolin e të pjesëtueshmit të tretë.

- Mënyrën paraprake e përsërisim, ashtu që tani në rolin e të pjesëtueshmit është (формула). Monomin e parë prej të pjesëtueshmit e pjesëtojmë me monomin e parë të pjesëtuesit (формула). Herësin e fituar e shumëzojmë me pjesëtuesin (формула). Prodhimin e fituar e zbresim prej të pjesëtueshmit (формула) (формула). Në këtë mënyrë pjesëtimi i polinomit është kryer dhe herësi i fituar është shuma e herësve të cilët ishin fituar gjatë tri pjesëtimeve d.m.th., (формула)

Nëse bëjmë provën kemi:  
(формула)

Mënyra e përshkruar praktikisht kryhet në këtë mënyrë: (формула)

Në këtë mënyrë hasen shenja të formës (формула) dhe (формула). Shenja e dytë fitohet për shkak të zbritjes të prodhimit të fituar të polinomit, përkatësisht zbritja e polinomit sillet në mbledhjen me shenja të kundërta.

Gjatë pjesëtimit të dy polinomeve mund të fitohet edhe mbetja.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 4.

$$\begin{array}{r}
 \left( 3x^6 + x^2 - \frac{3}{2}x + 20 \right) : (x^2 - x + 1) = 3x^4 + 3x^3 - 3x - 2 \\
 \underline{\pm 3x^6 \mp 3x^5 \pm 3x^4} \\
 3x^5 - 3x^4 + x^2 - \frac{3}{2}x + 20 \\
 \underline{\pm 3x^5 \mp 3x^4 \pm 3x^3} \\
 -3x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x + 20 \\
 \underline{\mp 3x^3 \pm 3x^2 \mp 3x} \\
 -2x^2 + \frac{3}{2}x + 20 \\
 \underline{\mp 2x^2 \pm 2x \mp 2} \\
 -\frac{1}{2}x + 22
 \end{array}$$

Kjo do të thotë se gjatë pjesëtimit të polinomit (формула) me polinomin (формула) fitohet herës (формула) dhe mbetje (формула)

Në këtë rast gjatë provës kemi: (формула)

2. Kryeje pjesëtimin: a) b) c) ç

Gjatë pjesëtimit të polinomeve, në disa shembuj është e mundshme të zbatohen edhe formulat për shumëzimin e shkurtuar.

I atillë është ky shembull.

Shembulli 5. Ta njehsojmë herësin (формула)

Me shfrytëzimin e mënyrës për pjesëtimin e monomeve kemi: (формула)

Megjithatë nëse merret parasysh se: (формула)  
fitojmë: (формула)

3. Njehso herësin:



Shembulli 1. (формула)

Te shembulli i dhënë që përbëhet prej tre mbledhësve, është e qartë se  $x$  shumëzuesi i përbashkët i çdonjërit prej mbledhësve, prandaj nxirret para kllapës edhe polinomi është shkruar si prodhim i pazbërthyeshëm ose shumëzues i thjeshtë.

Ta shqyrtojmë polinomin te ky shembull:

Shembulli 2. Te polinomi: (формула)

- pjesëtues i përbashkët i koeficientëve të çdonjërit prej monomeve është 2;
- pjesëtuesi i përbashkët më i madh i vlerave kryesore është (формула)
- pjesëtuesi i përbashkët më i madh i të gjitha monomeve në polinom është (формула)
- nëse polinomin e pjesëtojmë me monomin (формула) fitojmë (формула)

Prej këtu, (формула)

Te dy shembujt paraprak shumëzuesi që është nxjerrë para kllapës, është i përbashkët për të gjitha monomet te polinomi.

Përpiku në këtë mënyrë ta zgjidhësh këtë detyrë.

1. Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet

a) b)

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 3. Te polinomi (формула), shumëzuesi i përbashkët i dy monomeve është (формула) që në mënyrë të shkurtër ta shënojmë  $A$ .

Në këtë mënyrë polinomi e merr formën (формула). Nëse e nxjerrim para kllapës shumëzuesin e përbashkët (формула) kemi (формула).

Gjatë nxjerrjes së shumëzuesit të përbashkët para kllapës, në veçanti duhet të kemi kujdes te shenjat.

Gjithmonë duhet pasur parasysh se

### Shembulli 1. (формула)

Te shembulli i dhënë që përbëhet prej tre mbledhësve, është e qartë se  $x$  shumëzuesi i përbashkët i çdonjërit prej mbledhësve, prandaj nxirret para kllapës edhe polinomi është shkruar si prodhim i pazbërthyeshëm ose shumëzuesi

Ta shqyrtojmë polinomin te ky shembull:

### Shembulli 2. Te polinomi: (формула)

- pjesëtues i përbashkët i koeficientëve të çdonjërit prej monomeve është 2;
- pjesëtuesi i përbashkët më i madh i vlerave kryesore është (формула)
- pjesëtuesi i përbashkët më i madh i të gjitha monomeve në polinom është (формула)
- nëse polinomin e pjesëtojmë me monomin (формула) fitojmë (формула)

Prej këtui, (формула)

Te dy shembujt paraprak shumëzuesi që është nxjerrë para kllapës, është i përbashkët për të gjitha monomet te polinomi.

Përpiku në këtë mënyrë ta zgjidhësh këtë detyrë.

1. Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet:

a) b)

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 3. Te polinomi (формула), shumëzuesi i përbashkët i dy monomeve është (формула) që në mënyrë të shkurtër ta shënojmë A.

Në këtë mënyrë polinomi e merr formën (формула). Nëse e nxjerrim para kllapës shumëzuesin e përbashkët (формула) kemi (формула)

Gjatë nxjerrjes së shumëzuesit të përbashkët para kllapës, në veçanti duhet të kemi kujdes te shenjat. Gjithmonë duhet pasur parasysh se

6.4. Nxjerrja e shumëzuesit të përbashkët para kllapës paraprakisht me grupim të monomeve

❖ Jo gjithmonë polinomet kanë shumëzues të përbashkët për të gjitha monomet. Ndonjëherë

shumëzuesi është i përbashkët vetëm për monom të caktuar, prandaj është e nevojshme monomet të grupohen.

T'i shqyrtojmë këta shembuj

Shembulli 5. Ta zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë polinomin (формула)

Monomet në këtë polinom (формула) nuk kanë shumëzues të përbashkët. Megjithatë, me ndihmën e grupimit do të kemi: (формула)

Shembulli 6. Ta zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë polinomin (формула)

Te polinomi (формула), të gjitha mon

omet nuk kanë shumëzues të përbashkët që mund të nxirret para kllapës.

Te monomi i parë dhe i dytë pjesëtues i përbashkët është (формула), ndërsa te monomi i tretë dhe i katërt pjesëtuesi i përbashkët është (формула)

Prandaj do t'i grupojmë monomin e parë dhe të dytë, dhe monomin e tretë dhe të katërt. Domethënë, do të kemi: (формула)

Duke marrë parasysh se para se të nxirret shumëzuesi i përbashkët është e nevojshme të grupohen anëtarët e polinomit, të zgjidhet kjo detyrë:

3. Zbërtheji në shumëzues të përbashkët polinomet:

a); b); c)

Detyra për punë të pavarur:

1. Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet:

a); b)

c); ç).

2. Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet me nxjerrjen para kllapës të shumëzuesit të përbashkët:

b) c) ç)



2. Shkruaji si prodhim të shumëzuesve këto shprehje:

a) b) c)

Në mënyrë krejtësisht të ngjashme, ndryshimi dhe shuma e kubeve mund të shkruhet si prodhim i shumëzuesve të thjeshtë.

Prej paraprakes i shfrytëzuam formulat: (формула

Duke i shfrytëzuar formulat (формула) ta shqyrtojmë këtë shembull.

Shembulli 3. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë shprehjen (формула). Duke pasur parasysh se (формула), nëse vendojmë (формула), por në pajtim me formulën (формула), do të kemi (формула).

3. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë shprehjen:

a) b) c

❖ Te disa shembuj zbërthimi i polinomeve në formë të prodhimit të shumëzuesve të thjeshtë është kombinim, domethënë para se të shfrytëzohet ndonjë formulë për shumëzim të shkurtuar, është e nevojshme të nxirret para kllapës ndonjë shumëzues i përbashkët.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 4. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë binomin (формула).

Nëse i shqyrtojmë anëtarët e binomit (формула), menjëherë do të vërejmë se ata nuk janë

katrorë të plotë.

Por, gjithashtu mund të vërejmë se pjesëtuesi i tyre më i madh i përbashkët është 3.

Prandaj, së pari do ta nxjerrim shumëzuesin e përbashkët para kllapës, domethënë do të kemi: (формула). Tani anëtarët e binomit (формула) janë katrorë të plotë, domethënë

(формула), pra prej këtu me shfrytëzimin e formulës për ndryshim të katrorëve (формула), fitojmë: (формула)

❖ Shpeshherë gjatë zbërthimit të polinomit në formën e shumëzuesve të thjeshtë me ndihmën e formulave për shumëzim të shkurtuar, është e nevojshme së pari të bëhet grupim i caktuar i monomeve të polinomi.

Shembulli 5. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë polinomin (формула)

Për ta zbërthyer këtë polinom në shumëzues të thjeshtë, së pari duhet t'i grupojmë

monomet “e ngjashme”, pasi nuk është e mundur të nxirret shumëzuesi i përbashkët para kllapës për të gjitha monomet të polinomi (формула)

pas nxjerrjes së shumëzuesit të përbashkët prej çdo kllape: (формула)

për shkak se forma e fituar nuk na mundëson nxjerrjen e shumëzuesit tjetër të përbashkët para kllapës, është e nevojshme të shfrytëzojmë se: (формула)  
pra prej këtu: (формула)

prej formulës për ndryshim të katrorëve (формула), fitojmë: (формула)

4. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë polinomin: a) b)



❖ Shpeshherë gjatë zbërthimit të polinomit në formën e shumëzuesve të thjeshtë me ndihmën e formulave për shumëzim të shkurtuar, është e nevojshme së pari të bëhet grupim i caktuar i monomeve të polinomi.

#### **Shembulli 5. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë polinomin (формула)**

Për ta zbërthyer këtë polinom në shumëzues të thjeshtë, së pari duhet t'i grupojmë

monomet "e ngjashme", pasi nuk është e mundur të nxirret shumëzuesi i

përbashkët para kllapës për të gjitha monomet të polinomi (формула)  
pas nxjerrjes së shumëzuesit të përbashkët prej çdo kllape: (формула)

për shkak se forma e fituar nuk na mundëson nxjerrjen e shumëzuesit tjetër

përbashkët para kllapës, është e nevojshme të shfrytëzojmë se: (формула)

pra prej këtu: (формула)  
prej formulës për ndryshim të katrorëve (формула), fitojmë: (формула)

#### **4. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë polinomin: a) b)**

Shembulli 1. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë polinomin (формула)

Nëse e shqyrtojmë formulën (формула) polinomin (формула) mund ta shkruajmë si (формула) prej ku vijon se (формула)

Domethënë, polinomi në realitet binomi i fuqizuar me fuqi 2, d.m.th., (формула)

Gjatë shfrytëzimit të këtyre formulave për binom të katrorit në veçanti duhet të kemi kujdes dhe të mos vërehet vetëm anëtari i parë dhe i tretë prej formës së zbërthyer (формула) d.m.th., vetëm (формула) dhe (формула), por edhe anëtari i tretë (формула)

Kështu nëse kemi polinom (формула), atëherë për atë vlen se (формула) pasi (формула)

1. Shkruaje si binom të katrorit këto polinome:

a) b)

❖ Ngjashëm sikurse te njësia mësimore paraprake, ashtu edhe këtu para se të shkruhet polinomi i dhënë si binom i katrorit, shpeshherë është e nevojshme të nxirret shumëzuesi i përbashkët para kllapës. Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 2. Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë polinomin (формула)

Së pari nxjerrim shumëzues të përbashkët para kllapës:

(формула)

por pastaj me shfrytëzimin e formulës për binomin e katrorit fitojmë (формула)

2 Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet

a); b)

❖ Nëse nuk mund të gjendet shumëzues i përbashkët dhe nuk është i qartë zbatimi i formulës për binom të katrorit, atëherë duhet të mendojmë për grupimin e monomeve prej polinomit.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 3. Shkruaji si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë polinomin (формула)



Te ky shembull është e qartë se nuk mund të shfrytëzohet menjëherë formula për binomin e katrorit, por gjithashtu nuk kanë shumëzues të përbashkët që mund ta nxjerrim para kllapës.

Prandaj do t'i grupojmë anëtarët (формула)

Pastaj me shfrytëzimin e formulës për binom të katrorit fitojmë: (формула)

Nëse tani e shfrytëzojmë formulën për ndryshim të katrorëve, vijon (формула)

Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet:

Detyra për punë të pavarur:

Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet:

1. a) b) c)
2. a) b) c)
3. a) b) c)
4. a) b) c)

9. Shumëfishi më i vogël i përbashkët te pjesëtuesi më i madh i përbashkët të polinomeve

9.1. PMP i

T'i shqyrtojmë numrat 24 dhe 36.

Pjesëtues te 24 janë: 1,2,3,4,6,8,12 dhe 24.

Pjesëtues te 36 janë: 1,2,3,4,6,9,12,18 dhe 36.

Mund të vërejmë se pjesëtues të përbashkët të 24 dhe 36 janë: 1,2,3,4,6 dhe 12.

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët të dy ose më shumë monomeve është monomi, koeficienti i të cilit është i barabartë me pjesëtuesin e madh të përbashkët të koeficientëve të monomeve, por vlera kryesore fitohet si pjesëtues më i madh i përbashkët të vlerave kryesore të monomeve.

Ta shqyrtojmë këtë shembull.

Shembulli 1. Cakto PMP të monomeve (формула)

PMP i koeficientëve të monomeve 15 dhe 45 është 15, d.m.th.,  $\text{PMP}(15, 45) = 15$ .

Nëse i vërejmë vlerat kryesore të monomeve (формула) dhe (формула) vërejmë se pjesëtuesi më i madh i përbashkët është (формула).

Prej këtu PMP (формула).

❖ Që ta caktojmë pjesëtuesin më të madh të përbashkët të polinomeve, së pari është e nevojshme polinomet të jenë shkruar si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë.

Shembulli 2. Cakto PMP të polinomeve: (формула) dhe (формула)

Këtu prej shumëzuesve të thjeshtë.

Pjesëtues të polinomit të parë (формула)

Pjesëtues të polinomit të dytë (формула) janë: (формула).

Pjesëtues të përbashkët të dy polinomeve janë: (формула).

Prej këtu vijon PMP (формула)

Mund ta përfundojmë këtë:

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy ose më shumë polinomeve është prodhimi prej të gjithë pjesëtuesve të përbashkët, ku çdonjëri prej atyre pjesëtuesve merret me tregues së fuqisë më të vogël me të cilin haset te polinomet cilat janë zbërthye në shumëzues të thjeshtë.

Shembulli 3. Cakto PMP të polinomeve: (формула) dhe (формула)

Pjesëtues të polinomit të parë janë: (формула)

Pjesëtues të polinomit të dytë janë: (формула)

Mund të vërejmë se këto dy polinome nuk kanë pjesëtues të përbashkët.

Mund të shkruajmë se PMP (формула)

Për polinomet për të cilat PMP është 1, themi se janë polinom reciprokisht të thjeshta.

1. Cakto PMP të këtyre polinomeve: a) b) c)

## 9.2. SHVP i polinomeve

Të shqyrtojmë numrat 6 dhe 9.

Shumëfisha të numrit 6 janë: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ....

Shumëfisha të numrit 9 janë: 9, 18, 27, 36, 45, ....

Shumëfisha të përbashkët të 6 dhe të 9 janë: 18, 36, 54, ....

Mendo!

o Çfarë është shumëfish më i vogël i përbashkët të dy numrave

Prej tyre më i vogël është 18, pra themi se 18 është shumëfishi më i vogël i përbashkët dhe shkruajmë SHVP  $(6,9) = 18$

Shpeshherë përcaktohet shumëfishi më i vogël i përbashkët edhe te monomet.

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy ose më shumë monomeve është monomi, koeficienti i të cilit është shumëfishi më i vogël i përbashkët i koeficientëve të monomeve, por vlera kryesore është shumëfish më i vogël i përbashkët të vlerës së tyre kryesore.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 4. Cakto SHVP të

: (формула) dhe (формула)

SHVP i koeficientëve të monomeve, 15 dhe 45 është 45, d.m.th.,  $SHVP(15,45) = 45$

Nëse i vërejmë vlerat kryesore të monomeve (формула) dhe (формула) vërejmë se shumëfishi më i vogël i përbashkët është. (формула)

Prej këtu SHVP (формула)

❖ Për ta caktuar shumëfishi më të vogël të përbashkët të polinomeve, së pari është e nevojshme polinomet të jenë të shkruara si prodhime prej shumëzuesve të thjeshtë.

Shembulli 5. Cakto SHVP të polinomeve: (формула) dhe (формула)

Këtu të dy polinomet janë shkruar si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë.

Shumëfisha të polinomit të parë janë: (формула)

Shumëfisha të polinomit të dyte janë: (формула)

Shumëfisha të përbashkët të të dy polinomeve janë: (формула)

Prej këtu vijon se SHVP (формула)

## Shembulli 6. Cakto SHVP të polinomeve (формула)

Para se të caktojme SHVP, është e nevojshme t'i zbërthejmë polinomet e dhëna në shumëzues të thjeshtë. (формула)  
(формула)

Kemi,

(формула)

Mund të përfundojmë këtë:

SHVP i dy ose më shumë polinomeve caktohet si prodhim i të gjithë shumëzuesve të thjeshtë, ku çdo shumëzues merret me treguesin më të madh të fuqisë që haset te polinomet të cilat janë zbërthye në shumëzues të thjeshtë.

## 2. Cakto SHVP të polinomeve: a) b) c)

Detyra për punë të pavarur:

1. Cakto SHVP të polinomeve:

a) b) c)

2. Cakto SHVP të polinomeve:

a) b) c)

3. Cakto SHVP të polinomeve:

a) b)

4. Cakto SHVP të polinomeve:

a) b)



## 10. Thyesa algjebrike. Zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesave

### 10.1. Thyesa algjebrike

Shprehja te shembulli (формула), që është treguar se 2 pjesëtohet me 3, quhet thyesë numerike.

Mendo!

o Përkufizo numëruesin dhe emëruesin e thyesës

Nëse numëruesi dhe emëruesi i thyesës janë shprehje algjebrike, si për shembull (формула), atëherë thyesa është algjebrike.

Thyesa numëruesi dhe emëruesi i së cilës janë shprehje algjebrike quhet shprehje racionale algjebrike ose thyesë algjebrike.

Vlerën e shprehjes racionale algjebrike, mund ta njehsojmë në të njëjtën mënyrë sikurse vlerën e shprehjes algjebrike, me zëvendësimin e vlerave numrave konkrete në vend të ndryshoreve dhe kryerjen e operacioneve me thyesa numerike

Shembulli 1. Shprehje racionale algjebrike më të thjeshtë është shprehja algjebrike (формула)

Lidhni numrin  $x$  me vlerën përkatëse të shprehjes (формула). Mendoni cilat vlera të zëvendësohen në vendin e ndryshores  $x$  dhe në çfarë raporti janë numëruesi dhe emëruesi i thyesës algjebrike.

(табела)

o Te shprehja racionale algjebrike (формула) në vend të  $x$  nuk mund të qëndrojë vlera 0. Pse

Për dy thyesa algjebrike (формула) dhe (формула) themi se janë të barabarta (формула)  
(формула)  
për (формула)

Përpiqu t'i zgjidhësh këto detyra

1. Çmimi i një fotoprinteri është 6799 denarë, por shpenzimi për përpunimin e një fotografie është 4 denarë. Sa është shpenzimi i përgjithshëm për fotografitë e kryera nëse janë punuar:

- a) 2500 fotografi;
- b)  $n$  fotografi;
- c) sa fotografi duhet të punohen që shpenzimi i përgjithshëm për fotografinë e punuar të jetë më i vogël se 6 denarë

2. Cakto fushën e përkufizimit të thyesave algjebrike:

- a) b) c) ç

## 10.2. Thjeshtimi i thyesave algjebrike

Në shkollën fillore keni mësuar të thjeshtoni thyesa të shumta.

- Ta thjeshtojmë thyesën (формула). Edhe emëruesi edhe numëruesi i kësaj thyese janë numra çift, pra mund ta thjeshtojmë thyesën me 2, por pastaj të kontrollojmë se a mund të thjeshtohet akoma me ndonjë numër

- Mënyrë tjetër është të zërthehet edhe numëruesi edhe emëruesi në pjesëtues të thjeshtë, kurse pastaj ta thjeshtojmë thyesën.

Të veprojmë në atë mënyrë:  
(формула)

Si do t'i thjeshtojmë thyesat algjebrike?

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 4. A mund ta thjeshtojmë thyesën algjebrike (формула)?

- Për  $a = 1$ , thyesa algjebrike (формула), pra nuk mund të thjeshtohet.

- Për  $a = 2$ , thyesa algjebrike (формула), pra nuk mund të thjeshtohet.

- Për  $a = 3$ , thyesa algjebrike (формула), pra mund të thjeshtohet.

Vërejtëm se për disa vlera të  $a$ , thyesa algjebrike (формула) nuk mund të thjeshtohet.

Kur flasim për thjeshtimin e thyesave algjebrike, kjo duhet të vlejë për të gjitha vlerat të cilat hyjnë në fushën e përkufizimit të thyesës algjebrike.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 5. Thjeshto thyesën (формула)

Thyesat numerike lehtë i thjeshtuam nëse numëruesi dhe emëruesi janë shkruar si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë.

Të njëjtën do ta bëjmë edhe me thyesën algjebrike. T'i shkruajmë numëruesin dhe emëruesin e thyesës si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë, pastaj të thjeshtojmë. Fitojmë: (формула)

Këtu thjeshtimi mund të bëhet pasi (формула) dhe (формула)

Thyesa algjebrike mund të thjeshtohet vetëm nëse numëruesi dhe emëruesi janë shkruar si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë dhe nëse kanë faktor të përbashkët për thjeshtim. Faktori për thjeshtim mund të jetë numër ose shprehje algjebrike, në çdo rast i ndryshueshëm prej 0.

Zakonisht, thyesa algjebrike (формула) thjeshtohet me polinomin që është PMP ( $P, Q$ ).

3. A mund t'i thjeshtosh thyesat?

a) b)

4. Thjeshtoji thyesat algjebrike:

a) b) c)

### 10.3. Zgjerimi i thyesave

Në shkollën fillore mësuat të thjeshtomi thyesa numerike.

• Ta zgjerojmë thyesën (формула) me 3. Kjo do të thotë se edhe numëruesi edhe emëruesi i thyesës do t'i shumëzojmë me 3, domethënë (формула)

Zgjerimin e thyesës algjebrike kryhet në të njëjtën mënyrë sikurse edhe zgjerimi i thyesave të zakonshme.

Shembulli 6. Zgjeroje thyesën algjebrike (формула) me polinomin (формула)

Kjo do të thotë se edhe numëruesin edhe emëruesin duhet t'i shumëzojmë me polinomin  $x + 2$  d.m.th., (формула)

Prej këtu mund të përfundojmë këtë:

Thyesa algjebrike mund të zgjerohet vetëm nëse numëruesi dhe emëruesi shumëzohen me polinom të njëjtë, domethënë thyesa algjebrike (формула) mund të zgjerohet me polinomin (формула) ashtu që (формула)

❖ Zgjerimi i thyesave algjebrike është i nevojshëm gjatë kryerjes së operacioneve mbledhje dhe zbritje të thyesave algjebrike, kur thyesat sillen në emërues të përbashkët, që zakonisht është shumëfishi më i vogël i emëruesve.

Shembulli 7. Silli në emërues të njëjtë thyesat (формула)

Për t'i sjellë në emërues të njëjtë, së pari do të caktojmë SHVP të emëruesve, por për ta bërë këtë i shkruajmë emëruesit e thyesave si prodhim të shumëzuesve të thjeshtë, domethënë (формула)  
Prej këtu SHVP (формула)

Tani SHVP (формула) do të jetë emëruesi i thyesave algjebrike (формула)

Gjatë zgjerimit të thyesës mund të përfundojmë se zgjerues i thyesës është ai shumëzues që ka SHVP të emëruesve, por nuk është i pranishëm tek emëruesi i thyesës që e zgjerojmë

5. Silli në emërues të njëjtë thyesa: a) b)

Detyra për punë të pavarur:

1. Cakto fushën e përkufizimit të thyesave algjebrike: a) b) c) ç)



Shembulli 1. Ta njehsojmë shumën (формула)

Të gjitha thyesat algjebrike kanë emërues të njëjtë, pra ngel vetëm t'i mbledhim numëruesit e tyre: (формула)

Për të mbledhur thyesa algjebrike me emërues të ndryshëm, është e nevojshme të njëjtat të sillen në thyesa algjebrike me emërues të njëjtë. Për këtë shkak, është e domosdoshme emëruesit e tyre të jenë të zbërthyer në shumëzues të thjeshtë, me qëllim më lehtë të caktojmë SHVP të polinomeve.

Shembulli 2. Ta njehsojmë shumën (формула)

Të gjitha thyesat algjebrike kanë emërues të ndryshëm, pra ngel t'i sjellim në emërues të përbashkët. Prandaj, së pari emëruesit do t'i shkruajmë si prodhime të shumëzuesve të thjeshtë. (формула)

Vërejmë se polinomet e zbërthyer në shumëzues të thjeshtë hasen shenja të kundërta (формула) dhe (формула)

Prandaj, (формула

Prej këtu përfundojmë se SHVP (формула)

Tani do t'i zgjerojmë thyesat algjebrike: (формула)

Tani mbledhja e thyesave algjebrike me emërues të ndryshëm sillen në mbledhjen e thyesave me emërues të njëjtë, domethënë (формула)



1. Njehso: a) b)

Mbledhja e thyesave me emërues të ndryshëm mund të realizohet në mënyrë shumë praktike. Atë do ta tregojmë te detyra nën a) (формула).

## 11.2. Shumëzimi i thyesave algjebrike

Sikurse edhe mbledhja e thyesave, ashtu edhe shumëzimi i thyesave është i njohur prej arsimit fillor.

Mendo dhe përgjigju:

o Si shumëzohen thyesat?

Ta njehsojmë prodhimin (формула)

Domethënë, gjatë shumëzimit të dy thyesave, shumëzohen numëruesi me numërues, emëruesi me emërues.

Në mënyrë të ngjashme, te thyesat algjebrike shumëzohet numëruesi me numërues, emëruesi me emërues, ku duhet të kemi kujdes numëruesit dhe emëruesit të jenë të shkruar në formë të shumëzuesve të thjeshtë (nëse është e mundshme), që të mundësohet thjeshtimi.  
Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 3. Ta njehsojmë prodhimin: (формула)

Shembulli 4. Ta njehsojmë prodhimin: (формула)  
2. Njehso prodhimet a) b)

### 11.3. Pjesëtimi i thyesave algjebrike

Mendo dhe përgjigju

o Si pjesëtohen thyesat?

Ta njehsojmë herësin (формула)

Edhe te thyesat algjebrike pjesëtimi sillet në shumëzimin e thyesave algjebrike-i pjesëtueshmi me vlerën reciproke të thyesës algjebrike pjesëtues.

Ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 5. Njehso herësin: (формула)

Prej rregullës për pjesëtim të thyesave kemi: Njehso herësin

3. Njehso herësit Njehso herësin

Rregulla për shumëzim të dy thyesave algjebrike është: (формула)

Rregulla për pjesëtim të dy thyesave algjebrike është: (формула)

### 11.4. Fuqizimi i thyesave algjebrike

Mendo dhe përgjigju:

o Si fuqizohen thyesat?

(формула)

Fuqizimi i thyesave ishte fuqizimi i numëruesit dhe emëruesit me treguesin e fuqisë.

## 11.5. Thyesat algjebrike dyfishore

Mendo dhe përgjigju:

o Si transformohet thyesa dyfishore në thyesë së zakonshme?

Ta thjeshtojmë thyesën dyfishore (формула)

Thyesën dyfishore e sjellim në thyesë të zakonshme kur prodhimin e anëtarëve të jashtë e jep numëruesin, kurse prodhimin e anëtarëve të brendshëm e japin emëruesin.  
Mënyra është identike edhe te thyesat algjebrike:

Shembulli 8. Ta transformojmë thyesën dyfishore (формула)

5. Transformo në thyesa të zakonshme këto thyesa dyfishore: a) b)

Detyra për punë të pavarur:

Detyra për punë të pavarur:

1. Njehso: a) b)

2. Njehso: a) b)

3. Njehso: a) b) c)

4. Fuqizoji thyesat algjebrike: a) b)

5. Transformoje në thyesë të zakonshme thyesën dyfishore: (формула)

12. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Kryeji operacionet e shënuara: a) b)

2. Njehso: a) b) c) ç)

3. Monomin (формула) sille në formën normale, kurse pastaj cakto koeficientin dhe vlerën kryesore. Cila është fuqia e tij?

4. Njehso vlerën e polinomit (формула) për (формула)

5. Sille në formë normale polinomin: a) b)

6. Njehso herësin: a) b)

7. Zbërtheji në shumëzues të thjeshtë polinomet: a) b)

8. Thjeshtoji thyesat: a) b)

9. Thjeshtoje shprehjen: a) b)

10. Njehso: (формула)

**Пример 8**

Да ја трансформираме двојната дробка  $\frac{\frac{x-1}{a^3}}{\frac{x^2-1}{a}}, a \neq 0, x \neq 1, x \neq -1.$

$$\frac{\frac{x-1}{a^3}}{\frac{x^2-1}{a}} = \frac{(x-1) \cdot a}{a^3 \cdot (x^2-1)} = \frac{(x-1) \cdot a}{a^3 \cdot (x-1)(x+1)} = \frac{1}{a^2(x+1)}.$$

**5**

Трансформирај ги во обични дробки следните двојни дробки:

а)  $\frac{\frac{a+b}{3}}{\frac{a^2+2ab+b^2}{9a}}, a \neq 0, a \neq -b;$     б)  $\frac{\frac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}}{\left(\frac{a}{a^2-a}\right)^2}, a \neq 0, a \neq -1, a \neq -3..$

**Задачи за самостојна работа:**

1. Пресметај:

а)  $\frac{a+b}{2a} - \frac{2a-b}{3b} - \frac{3b-a}{6a}, a, b \neq 0.$     б)  $\frac{a^2-b^2}{ab} + \frac{2b}{a} + 2 - \frac{(a+b)^2}{ab}, a, b \neq 0.$

2. Пресметај:

а)  $\frac{a}{a^2+b^2+2ab} - \frac{b}{b^2-a^2} + \frac{1}{a-b}, a \neq \pm b$   
 б)  $\frac{x-2y}{x^2-2xy} - \frac{x^2-2xy+4y^2}{4xy^2-x^3} + \frac{x^2-2xy+4y^2}{2x^2y-8y^3}, x \neq 0, x \neq 2y$

3. Пресметај:

а)  $a \left(1 + \frac{a}{2b}\right) \left(1 - \frac{a}{2b}\right) : \frac{a^2}{2b} : \left(\frac{a+2b}{a} \cdot \frac{2b-a}{2b}\right), a, b \neq 0, a \neq \pm 2;$   
 б)  $\frac{a^2+3a}{a^2-a^4} \cdot \frac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a} : \left(\frac{a}{a^2-a}\right)^2, a \neq \pm 1, a \neq -3, a \neq 0.$   
 в)  $(x^2-y^2) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right), x, y \neq 0, x \neq y.$

4. Степенувај ги алгебарските дробки:

а)  $\left(\frac{x^2-2x}{x^4-4x^2}\right)^2, x \neq 0, x \neq \pm 2;$     б)  $\left(\frac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}\right)^3, a \neq 0, a \neq -3.$







# 4

## PROPORCIONALITETI I MADHËSIVE



### QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

Duke mësuar njësinë modulare, nxënësi duhet të aftësohet:

- ➤ të njehsojë anëtarë të panjohur te proporcioni;
- ➤ të formojë proporcion të vazhduar dhe ta shfrytëzojë në problem praktik;
- ➤ të zgjidhë detyra praktike me zbatimin e rregullës së thjeshtë dhe rregullës së përbërë të treshit;
- ➤ të shfrytëzojë llogarinë e ndarjes në problem praktik;
- ➤ të përkufizojë përqindjen;
- ➤ të shfrytëzojë llogari të përqindjes në problem praktik prej jetës së përditshme;
- ➤ të shfrytëzojë llogari kamate në problemet praktike prej jetës së përditshme.
-

## PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 4

159

Madhësia fizike. Njësia matëse në SI. Numrat e emërtuar

163

Shkallët dhe proporcionet

170

Proporcioni i drejtë dhe i zhdrejtë

173

Rregulla e thjeshtë dhe e përbërë e treshit

176

Rregulla e përbërë e treshit

179

Koncepti për përqindje. Llogaria e përqindjes prej njëqind

182

Llogaria e përqindjes nën një qind. Llogaria e përqindjes mbi një qind

184

Llogaria e kamatës

191

Detyra për përsëritje të njësisë modulare

## 1. Madhësia fizike. Njësia matëse në SI. Numrat e

Në mjedisin e përditshmërisë shpeshherë hasim koncepti sikurse: gjatësi, masa, koha, shpejtësia, temperatura, syprina, vëllimi. Të gjitha këto janë koncepte për madhësi fizike. Koncepti madhësi fizike është koncept themelor dhe i njëjtë nuk përkufizohet.

Madhësitë fizike karakterizohen me numër pozitiv real i shoqëruar me njësi matëse (njësi mase) përkatëse, të cilat së bashku e formojnë numrin e emërtuar.

Numri me të cilin karakterizohet madhësia e madhësisë së caktuar fizike quhen numri matës. Për shembull, 10 metra është numër i emërtuar që karakterizohet me gjatësi. Në ky shembull numri 10 është numri matës, por metër është njësia matëse.

Në botë është përvetësuar sistemi ndërkombëtar i njësive matëse për madhësi fizike, që shkurtimisht shënohet me SI (shkurtesë prej shprehjes renege *Système International*). Janë përvetësuar shtatë madhësi themelore me njësi matëse themelore përkatëse në SI (të dhënë ta tabela poshtë), por të gjitha të e të tjerat quhen madhësi fizike të nxjerra dhe të njëjtat janë nxjerrë prej themeloreve, në bazë të ligjeve fizike në natyrë.

| Madhësia fizike           | Njësia matëse | Shënimi për njësinë matëse |
|---------------------------|---------------|----------------------------|
| gjatësia                  | metër m       |                            |
| masa                      | kilogram kg   |                            |
| koha                      | sekondë s     |                            |
| forca e rrymës elektrike  | amper A       |                            |
| temperatura termodinamike | kelvin K      |                            |
| sasia materie             | mol mol       |                            |
| forca e dritës            | kandella cd   |                            |

Tabela e madhësive fizike themelore dhe njësitë matëse

Përveç njësive matëse themelore të përvetësuar për madhësitë fizike, ekzistojnë edhe njësi matëse më të vogla dhe më të mëdha të cilat nxirren kur njësia matëse themelore do të pjesëtohet ose shumëzohet me njësinë dekadë përkatëse.

Te tabela që vijon janë dhënë prefiksat të cilat shtohen para njësisë matëse themelore në rastin më të madh, përkatësisht njësia matëse më e vogël prej themelores.

Këtu do të theksojmë se nxjerrja e njësive më të vogla dhe më të mëdha matëse për masën, prefiksat u shtohen njësisë matëse gram (g) që është 103 herë më e madhe prej njësisë matëse themelore kilogram (1 kg = 103 g). Poashtu, njësi më të mëdha matëse për kohën prej themelores (s), që shpeshherë shfrytëzohen, janë minuta (min) dhe ora (h). Poashtu, 1 min = 60 s dhe 1 h = 60 min = 3600 s

❖ Madhësi e nxjerra fizike janë, për shembull, syprina, vëllimi, shpejtësia, nxitimi, dendësia etj. Njësitë matëse themelore përkatëse për këto madhësi janë: metër katror ( $m^2$ ), metër kub ( $m^3$ ), metër në sekondë (m/s), metër në sekondë në katror ( $m/s^2$ ), kilogram në metër kub ( $kg/m^3$ ) dhe të përkufizuara me varësisht prej asaj sikurse është përkufizuar, domethënë madhësia fizike e përcaktuar (në çfarë mënyre e njëjta është nxjerrë prej madhësive fizike themelore).

❖ Diçka tjetër që duhet të dimë se litri (shenja: l) është njësia matëse për vëllim. Një litër përafërsisht është e barabartë me  $1dm^3$  ( $1l = 1dm^3$ ).

Shembulli 1. Numrat e emërtuar

a) 120m është numër i emërtuar 120 është numri matës m është njësia matëse

b) 15l është numër i emërtuar 15 është numri matës l është njësia

c)  $200m^2$  është numër i emërtuar 200 është numri matës  $m^2$  është njësia

ç) 10m/s është numër i emërtuar 10 është numri matës m/s është njësia

d) 90km/h është numër i emërtuar 90 është numri matës km/h është njësia matëse

- Përveç njësisë matëse themelore për syprinën,  $m^2$ , të shfrytëzohen këto njësi matëse më të mëdha prej themelores: ar (shënimi: a;  $1a = 100m^2$ ), dekar (shënimi: da;  $1da = 10a = 1000m^2$ ) dhe hektar (shënimi: ha;  $1ha = 10da = 10\,000m^2$ ).

Në vazhdim, nëpër detyrat e zgjidhura do të sqarojmë se si të shndërrojmë numra të emërtuar të dhënë në numra të emërtuar të shprehur me njësi matëse më të vogla ose më të mëdha. Paraprakisht, shkurtimisht do të përkujtohem në disa operacione themelore me fuqi.

$a^n$  - fuqia a - baza n - eksponenti (treguesi i fuqisë)

Shembulli 2. Çfarë pjese e kilometrit janë decimetri dhe centimetri (формула)

Fitojmë (формула) që do të thotë një decimetër është i barabartë me dhjetë mijëshe pjesë e kilometrit, domethënë (формула)

Në të njëjtën mënyrë, (формула)

Shembulli 3. Sa (формула), dhe (формула) ka pasur në? (формула)

1) Barazimin do ta ngremë në katror, ku fitojmë (формула) që do të thotë një metër katror është i barabartë me 100 decimetra katror.

2) Në të njëjtën mënyrë, me ngritjen në katror të barazimit (формула) fitojmë: (формула) d.m.th., një metër katror është i barabartë me dhjetë mijë centimetra katror.

3) Nëse barazimin (формула) e ngritim në katror, fitojmë: (формула)

Shembulli 4. Njehso sa ka në një litër! (формула) barazimin e fuqizojmë me tregues 3

Shembulli 5. Sa gram ka në një tonelatë, ndërsa sa në 3,5 tonelata?

(формула)

Shembulli 6. Çfarë pjesë e 1t (një tonelatë) janë 525g?

(формула)

Shembulli 7. Sa metra paraqesin? (формула)

pra këtu njehsojmë: (формула)

Shembulli 8. Shpejtësinë shprehni me njësinë matëse themelore për shpejtësinë (m/s).  
(формула)

Detyra për punë të pavarur:

1. a) Sa (формула) paraqesin? (формула)

b) Sa (формула) paraqesin? (формула)

c) Sa mililitra (ml) paraqesin 12,60 decilitra (dl)?

ç) Sa decilitra (dl) paraqesin 1568 mililitra (ml)?

2. Shpejtësinë 30m/s shprehni në km/h.

3. Dendësinë (формула) shprehni me njësinë matëse

: a) (формула) b) (формула)

4. Syprinën (формула) shprehni në (формула)

5. Vëllimin 250 000 cm<sup>3</sup> shprehni në: a) m<sup>3</sup>, b) litra.

6. a) Sa sekonda ka në 2 orë dhe 15 minuta?

b) Sa orë, minuta dhe sekonda ka në 256 424 sekonda?

7. Shprehni në kilogramë 2 tonelata 35 kilogram dhe 6 dekagram.



Të vazhduar janë raportet: (формула) etj.

Raportet i kanë të njëjtat veti sikurse edhe thyesat. Njëjtë sikurse që thyesën mund ta zgjerojmë ose ta thjeshtojmë, duke shumëzuar, përkatësisht duke pjesëtuar numëruesin dhe emëruesin me numrat e njëjtë të ndryshueshëm prej zeros, kështu mund ta zgjerojmë, përkatësisht ta thjeshtojmë raportin.

Kjo veti është e njohur si veti themelore të raporteve.

Vetia themelore e raporteve: Vlera e raportit nuk ndryshon nëse të gjithë anëtarët e tij i shumëzojmë ose i pjesëtojmë me numër të njëjtë të ndryshueshëm prej zeros.

Nëse raportet (формула) dhe (формула) të cilat kanë vlerë të njëjtë, barazimin ndërmjet tyre (формула) e quajmë proporcion. Numrat (формула) quhen anëtarë të jashtëm, por numrat (формула) quhen anëtarë të brendshëm të proporcionit. Vlera e raportit (формула) quhet koeficient i proporcionit

$a : b = c : d$  - proporcion

a, d- anëtarë të jashtëm b, c – anëtarë të brendshëm

Vetia themelore e proporcioneve:

Prodhimi prej anëtarëve të jashtëm të një proporcioni është i barabartë me prodhimin e anëtarëve të brendshëm (формула). Prej proporcionit (формула) dhe vetisë themelore të proporcioneve, drejtpërdrejt vijnë proporcioneve (формула) Nëse janë të njohur tre anëtarë të proporcionit, anëtari i katërt lehtë gjendet duke shfrytëzuar vetinë themelore të proporcioneve

Për shembull, nëse dihen anëtarët, por është i panjohur anëtari i një proporcioni, kemi (формула)

Shembulli 3. Thjeshtojë proporcionin, kurse pastaj njehso anëtarin e panjohur. a) b)

a)

Prej proporcionit të fundit fitojmë: (формула). Në fund njehsojmë (формула)

Proporcionin mund ta thjeshtësojmë edhe në tjetër mënyrë: (формула)

E zbatojmë vetinë themelore të raporteve dhe raportin e fundit e thjeshtojmë me 5, pra kemi:

(формула)

Prej proporcionit të fundit, me zbatimin e vetisë themelore, kemi: (формула) d.m.th., (формула)

Shembulli 4. Njehso  $x$  dhe  $y$  prej proporcioneve:

$$9 : x = 5 : 7 \text{ dhe } x : y = 3 : 10.$$

Prej proporcionit të parë me shfrytëzimin e vetisë themelore të proporcioneve kemi:  
(формула).

Prej proporcionit të dytë me shfrytëzimin e vetisë themelore të proporcioneve kemi:  
(формула).

Nëse barazimin (формула) të fituar prej proporcionit të parë e shumëzojmë me 2 do të fitojmë (формула)  
pra duke i krahasuar me barazimin e fituar prej proporcionit të dytë përfundojmë (формула)

Barazia ndërmjet tre ose më shumë raporteve të barabarta quhet proporcion i vazhduar  
(i zgjeruar)

$$a : x = b : y = c : z - \text{proporcioni i vazhduar}$$

Derisa vlera e çdonjërit prej raporteve të proporcioni i vazhduar është i barabartë me  $k$  (koeficienti i proporcionalitetit), në atë rast do të vlejë: (формула)  
(формула)

Prej barazisë (формула) dhe (формула) vijon se (формула), domethënë (формула), ndërsa  
prej barazisë (формула) dhe (формула) vijon se (формула) d.m.th., (формула).

Proporcionet e fituara (формула) dhe (формула) mund t'i shkruajmë në një proporcion të vazhduar në këtë mënyrë  
(формула).

Fitojmë se proporcionet e vazhduara (формула) dhe (формула) janë ekuivalente dhe prej tyre vijojnë barazitë (формула) ku (формула) është korfirmimi i proporcionalitetit (формула)

Barazitë e fundit shpeshherë zbatohen te detyrat te të cilat madhësia e caktuar duhet të pjesëtohet në disa pjesë së cilat janë në marrëdhënie (raporte) të dhëna.

Këto detyra janë të njohura si zgjidhje e llogarisë së ndarjes.

Shembulli 5. Të formohet proporcion i vazhduar prej këtyre proporcioneve (формула) dhe (формула)  
Pasi çdonjëri prej raporteve është herës prej dy numrave, atëherë për çdonjërin prej proporcioneve është e saktë (формула)

Proporcion i vazhduar është: (формула)

Shembulli 6. Ndaje numrin 450 në katër pjesë të cilat qëndrojnë sikurse  $2 : 3 : 5 : 8$ .  
T'i shënojmë të tre numrat me (формула). Për ata, prej kushteve të detyrës, vlen: (формула)

Te barazimi i dytë (формула) i zëvendësojmë me (формула), ku fitojmë: (формула)  
Njehsojmë:

(формула)

Shembulli 7. Një organizatë bujqësore ka në tre vende gjithsej 12,6 hektarë livadhe. Syprinat as këtyre livadheve qëndrojnë si  $2,4 : 3,2 : 2,8$ . Nga sa hektarë livadhe ka organizata bujqësore në çdonjërën prej të tre vendeve?

Do t'i shënojmë syprinat e çdonjërës prej tre vendeve me  $a$ ,  $b$  dhe  $c$ . Te kushti i detyrës kemi: (формула)  
Fitojmë se organizata në një vend ka 3,6 ha, në vendin e dytë ka 4,8 ha, por në vendin e tretë ka 4,2 ha.

Shembulli 8.

Taulanti, Sajmiri dhe Erioni duhet të ndajnë 1650 denarë, ashtu që Sajmiri duhet të marrë (формула) prej pjesës së Taulantit, por Erioni (формула) prej shumës së pjesëve të Taulantit dhe Sajmiri?

Ta shënojmë me  $x$ ,  $y$ , përkatësisht  $z$ , shumën të cilën duhet ta fitojnë Taulanti dhe Sajmiri dhe Erioni, përkatësisht. Sipas kushtit të detyrës vlen:

$$x + y + z = 1650$$

Për shumat të cilat duhet t'i marrin kemi:

Taulanti  $x$  denarë;

Sajmiri (формула) denarë;

Erioni (формула)

Prej këtyre barazimeve e formojmë këtë proporcion:

Prej proporcionit të fundit vijon barazimi (формула), ku k është koeficienti i proporcionalitetit.

Me zëvendësimin te barazimi i parë kemi: (формула)

Njehsojmë (формула), që do të thotë Taulanti do të marrë 720 denarë, Sajmiri do të marrë 480 denarë, por Erioni do të marrë 450 denarë.

Shembulli 9 Tre praktikantë duhet të ndajnë 36 000 denarë, sipas asaj cili sa ditë ka punuar. Si duhet të ndahen paratë, nëse i pari ka punuar 3 herë më shumë, i dyti ka punuar dy herë më shumë se i treti?

Ta shënojmë me  $x$ ,  $y$ , përkatësisht  $z$ , shumën të cilën duhet ta marrë çdonjëri prej praktikantëve. Sipas kushtit të detyrës vlen: (формула) prej ku e fitojmë proporcionin: (формула), si edhe (формула) prej ku e kemi proporcionin (формула). Për të formuar proporcion të vazhduar prej dy proporcioneve paraprakë, raportin  $3 : 1$  te proporcioni i parë do ta zgjerojmë, pra do të kemi: (формула) dhe (формула), prej ku: (формула).

Prandaj, kemi: (формула)

Prej proporcionit të fundit vijon barazia: (формула), ku k është koeficienti i proporcionalitetit.

Me zëvendësimin te barazimi i parë kemi: (формула)

Njehsojmë: (формула) që do të thotë njëri praktikant do të marrë 24 000 denarë, i dyti do të marrë 8 000 denarë, por praktikant i tretë do të marrë 4 000 denarë. (формула)

Shembulli 10 Katër vëllezër duhet të ndajnë trashëgimi prej 78 000 denarë sipas moshës, ashtu që më i vjetri do të marrë shumën më të vogël, por më i vogëli do të marrë pjesën më të madhe prej trashëgimisë. Vëllezërit janë në moshë prej 26, 29, 31 dhe 36 vjeç. Ata janë dakorduar që më i vogëli të marrë dy herë më shumë prej vëllait më të vjetër dhe 1,2 herë shumë më të madhe prej vëllait që është në moshë 29 vjeç, por vëllau që është në moshë 31 vjeç të marrë 1,5 herë më pak se vëllau në moshë 29 vjeç. Nga sa para duhet të marrë çdonjëri prej vëllezërve?

Ta shënojmë me  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dhe  $t$  dhe shumën që duhet ta marrë çdonjëri prej vëllezërve, përkatësisht, ku  $x$  është shuma që do ta marrë vëllau më i vogël. Prej kushtit të detyrës kemi: (формула) dhe (формула)

Prej dy barazimeve mund t'i shkruajmë këto proporcione:

(формула) dhe (формула).

Nëse e zgjerojmë me 10 çdonjëri prej raporteve tek ana e djathtë, do të fitojmë: (формула)

Për të formuar proporcion të vazhduar prej dy proporcioneve të fundit, raportin në anën e djathtë të proporcioni i parë do ta zgjerojmë me 1,5 dhe me këtë fitojmë: (формула) dhe (формула).

Prej këtyre dy proporcioneve mund ta shkruajmë këtë proporcion të vazhduar:  
 $x : y : z = 18 : 15 : 10$ .

Duke e shfrytëzuar kushtin  $x = 2t$ , domethënë  $x : t = 2 : 1 = 18 : 9$ , e shkruajmë proporcionin:  
 $x : y : z : t = 18 : 15 : 10 : 9$ .

Prej proporcioni të fundit vijnë barazitë: (формула), ku  $k$  është koeficienti i proporcionalitetit.  
Për vlerat (формула) dhe (формула) vlejën barazitë:

$$x + y + z + t = 78000.$$

Duke shkruar të panjohurat nëpërmjet  $k$ , kemi: (формула)

Njehsojmë: (формула)

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto  $x$  prej proporcioni: a) b) c) ç) d) dh)

2. Nëse madhësia  $a$  është 4.5 herë më e madhe prej  $c$ , por  $c$  është 1.5 herë më e vogël prej  $b$ , sa herë madhësia  $a$  është më e madhe (më e vogël) prej  $b$ ? ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  janë madhësi pozitive).

3. Sa herë madhësia  $a$  është më e madhe (më e vogël) prej  $b$  nëse: (формула) dhe (формула)

5. Janë blerë katër lloje të prodhimeve me masë 520 kg, 340 kg, 240 kg dhe 750 kg, përkatësisht. Për transportin e tyre është paguar 7400 denarë. Sa është shpenzimi i transportit për çdonjëri prej katër prodhimeve në veçanti, nëse dihet se shpenzimet për çdo prodhim janë proporcionale me masën e prodhimit?

6. 3 kilogram prej një substance kushton sa 4 kilogram prej substancës tjetër, por 3 kilogram të substancës së dytë kushton sa 4 kilogram prej substancës së tretë. Të gjitha substancat së bashku kushtojnë 7400 denarë. Cakto vlerën (çmimin) e çdonjërës prej substancave.

7. Një legurë e bakrit, zinkut dhe plumbit përmban bakër dy herë më shumë se zink dhe 22 herë më shumë se plumb. Nga sa kilogramë prej çdo metali ka në 680kg prej kësaj legure?

6. 3 килограми од една супстанција чини колку 4 килограми од друга супстанција, а 3 килограми од втората супстанција чини колку 4 килограми од трета супстанција. Сите супстанции заедно чинат 7400 денари. Определете ја вредноста (цената) на секоја од супстанциите.
7. Една легура на бакар, цинк и олово содржи бакар два пати повеќе од цинк и 22 пати повеќе од олово. По колку килограми од секој метал има во 680 kg од оваа легура?

## **. Proporcionaliteti i drejtë dhe i zhdrejtë**

**Madhësitë fizike shpeshherë varen njëra prej tjetrës. Kështu, për shembull, rruga e kaluar për kohën e dhënë varet prej shpejtësisë së lëvizjes. Poashtu, me zbatimin e vlerës së një madhësie ndodh ndryshimi te vlera edhe te madhësia tjetër.**

**Gjatë varësisë së madhësive, në disa raste me zmadhimin e vlerës së njërës madhësi zmadhohet edhe vlera e tjetrës prej madhësive dhe anasjelltas, me zvogëlimin e vlerës së njërës madhësi zvogëlohet edhe vlera e madhësisë tjetër.**

**Në raste të e të tjera pra, me zmadhimin e vlerës së njërës madhësi, zvogëlohet vlera e tjetrës, përkatësisht me zvogëlimin e vlerës të njërës madhësi zmadhohet tjetra.**

**Shembulli 1. Gjatë lëvizjes së një automobili, me zmadhimin e shpejtësisë zmadhohet edhe largësia të cilën e kalon automobila për interval fiks kohor. Kështu, nëse automobila lëviz me shpejtësi 60 km/h, ai për 15 minuta do të kalojë 15 km, por nëse e zmadhon shpejtësinë në 80 km/h, atëherë për 15 minuta do të kalojë 20 km, por nëse e zmadhon shpejtësinë në 100 km/h, për 15 minuta do të kalojë 25 km.**

**Gjatë kësaj varësie, për vlerën e shpejtësisë 60km/h do të themi se korrespondon me vlerën e largësisë 15km, vlera 80km/h korrespondon me vlerën 20km etj.**

**Nga ana tjetër pra, nëse largësinë duhet ta kalojë automobila është fiks, atëherë me zmadhimin e shpejtësisë së lëvizjes zvogëlohet koha për të cilën largësia do të kalohet. Nëse automobila duhet të kalojë largësinë prej 100km, duke lëvizur me shpejtësi prej 50km/h, largësinë e dhënë automobili do ta kalojë për 2 orë. Nëse automobili lëviz me shpejtësi prej 75km/h, largësinë e dhënë do ta kalojë për 1 orë dhe 20 minuta.**

Madhësi të drejta proporcionale i quajmë madhësitë të cilat herësi i çfarëdo vlerave të tyre përkatëse është konstantë.

Nëse  $a$  dhe  $b$  janë dy vlera përkatëse të madhësive të drejta proporcionale, atëherë vlen (формула) ose (формула)  $k$  –koeficienti i proporcionalitetit

Te madhësitë e drejta proporcionale gjatë zmadhimit të vlerës së njëres madhësi zmadhohet edhe vlera e madhësisë tjetër dhe anasjelltas, gjatë zvogëlimit të vlerës së njëres madhësi zvogëlohet edhe vlera e madhësisë tjetër.

Madhësi të zhdrejta proporcionale i quajmë madhësitë të cilat prodhimi i çfarëdo vlerë të tyre përkatëse është konstant.

Nëse  $a$  dhe  $b$  janë vlera përkatëse të madhësive të zhdrejta proporcionale, atëherë vlen: (формула)  
 $k$  – koeficienti i proporcionalitetit.

❖ Te madhësitë e proporcionit të zhdrejtë gjatë zmadhimit të vlerës së njëres madhësi zvogëlohet vlera e madhësisë tjetër, por gjatë zvogëlimit të madhësisë së parë zmadhohet vlera e madhësisë së dytë.

Shembulli 2. Konstato cilat prej dy madhësive janë të drejta proporcionale, kurse cilat janë proporcionale të zhdrejta.

.

- a) gjatësia e brinjës  $a$  të katrorit dhe perimetrit të katrorit;
- b) gjatësia e brinjës  $a$  të katrorit dhe syprinës së katrorit;
- c) gjatësia dhe gjerësia e drejtkëndëshit me syprinë 60;
- ç) koha e kryerjes së punës së caktuar dhe

- a) madhësitë janë proporcionalisht të drejta pasi me zmadhimin e brinjës së katrorit zmadhohet perimetri, dhe anasjelltas, me zvogëlimin e brinjës së katrorit zvogëlohet edhe perimetri i tij;
- b) madhësitë janë proporcionale të zhdrejta;
- c) madhësitë janë proporcionale të zhdrejta për të ngelur syprina e drejtkëndëshit i njëjtë, nëse gjatësinë e drejtkëndëshit e zmadhojmë, duhet ta zvogëlojmë gjerësinë e tij, dhe anasjelltas, nëse e zvogëlojmë gjatësinë, duhet ta zmadhojmë gjerësinë e drejtkëndëshit;
- ç) madhësitë janë proporcionale të zhdrejta nëse zmadhohet numri i punëtorëve, puna do të kryhet për kohë të shkurtër, nëse zvogëlohet numri i punëtorëve, do të jetë e nevojshme më shumë kohë për kryerjen e punës.

Detyra për punë të pavarur:

1. Një njeri me vete ka 240 denarë me të cilat ka dashur të blejë domate në treg. Nëse domatet shiten me çmim 20 denarë për kilogram, sa domate do të blejë njeriu me ato para? Sa kilogramë domate do të mund të blejë njeriu nëse domatet shiten nga 30 denarë, sa nëse ka çmim 40 denarë, sa do të blejë nëse ka çmim 60 denarë, ndërsa sa kilogramë domate do të blejë nëse ato shiten me çmim prej 8 denarë për kilogram? Në çfarë varësi proporcionale janë masat e domateve të blera dhe çmimi i tyre? Në çfarë varësi proporcionale është masa e domateve të blera dhe shuma e përgjithshme e cila për ato duhet të paguhet gjatë çmimit fiks për kilogram?
2. Një kamion në një turne mund të bartë 8 tonelata prej mallit të dhënë. Sa tonelata prej mallit të njëjtë në një turne do të bartin dy kamionë, sa tonelata do të bartin 4 kamionë, ndërsa sa tonelata do të bartin 7 kamionë, nëse të gjithë kanë ngarkesë së njëjtë? Në çfarë varësi proporcionale janë numri i kamionëve dhe masa e përgjithshme e bartur?
3. Mall i caktuar me masë së përgjithshme 30 tonelata, 30 kamionë me ngarkesë të njëjtë mund ta transportojnë për një ditë. Për sa ditë do ta transportojnë mallin 15 prej atyre kamionëve? Për sa ditë do ta transportojnë 10 kamionë, për sa ditë 5 kamionë? Për sa ditë do ta transportojnë 3 kamionë, kurse për sa 2 kamionë, nëse të gjithë kanë ngarkesën e njëjtë? Në çfarë varësie proporcionale janë numri i kamionëve të angazhuar dhe ditët për të cilat malli do të transportohet?
4. Cilat prej këtyre madhësive janë të drejta proporcionale, kurse cilat janë proporcionale të zhdrejta?
  - a) rrezja e rrethit dhe syprina e rrethit;
  - b) rrezja e topit dhe vëllimi i tij;
  - c) lartësia e cilindrit dhe vëllimi i tij;
  - ç) lartësia e cilindrit të drejtë rrethor me vëllim 50 dhe rrezja e bazës së tij;
  - d) diagonalet e katrorit dhe brinja e tij;
  - dh) të dy diagonalet e rombit me syprinën e dhënë S.
5. Semra, Flora dhe Jetoni kanë 20, 30 dhe 50 vjet, përkatësisht dhe duhet të ndajnë shumë të caktuar të denarëve prej 5000 denarë. Njehso nga sa denarë do të marrë çdonjëri prej tyre, nëse:
  - a) shuma e cila duhet të ndahet është 5000 denarë dhe ndarja është proporcionale e drejtë me vitet e tyre;
  - b) shuma e cila duhet të ndahet është 31000 denarë dhe ndarja është proporcionale e zhdrejtë me vitet e tyre.



,3t lëndë e parë 57kg prodhim i gatshëm  
5,1t lëndë e parë x kg prodhim i gatshëm

Gjatë sasisë më të madhe të lëndës së parë është e qartë se do të fitohet sasi më e madhe të prodhimit të gatshëm, që do të thotë se madhësitë janë në proporcion të drejtë dhe shigjetat kanë kahe të njëjtë. (формула)

Fitojmë se prej sasisë së dhënë të lëndës së parë do të fitohet 969kg prodhim të gatshëm.

Shembulli 3. Dhjetë punëtorë mund të kryejnë punë e dhënë për 12 ditë. Sa ditë të njëjtën punë do ta kryejnë 15 punëtorë?

10 punëtorë 12 ditë

15 punëtorë x ditë

Me zmadhimin e numrit të punëtorëve zvogëlohet numri i ditëve për të cilan puna do të kryhet, që do të thotë se në këtë rast madhësitë janë proporcionale të zhdrejta dhe shigjetat janë vendosur në kahe të kundërt. (формула)

Fitojmë se 15 punëtorë punën e njëjtë do ta kryejnë për 8 ditë.

Shembulli 4. Me sasi të ushqimit të caktuar 16 persona mund të ushqehen 30 ditë. Sa ditë me sasinë e njëjtë mund të ushqehen 12 persona?

16 persona 30 ditë

12 persona x ditë

Më pak persona me ushqimin e njëjtë do të ushqehen më shumë ditë, që do të thotë se kemi madhësi të zhdrejta proporcionale dhe shigjetat do të jenë në kahe të kundërt. E parashtrojmë proporcionin:

Fitohet se 12 persona me sasi të njëjtë të ushqimor do të ushqehen 40 ditë

Shembulli 5. Në një fermë ka 45 krerë të bagëtive dhe për ato është siguruar ushqim për 28 ditë. Pas 6 ditë te ferma janë sjellë edhe 10 krerë të bagëtive. Për sa ditë do të ketë ushqim te ferma?

Vetëm 45 krerë bagëti janë ushqyer 6 ditët e para, domethënë, për ditë të e të tjera nëse nuk janë sjellë 10 krerë bagëti tjera, 45 të parat do të kenë ushqim edhe për 22 ditë. Do të formojmë proporcion prej të cilës do të njehsojmë me ushqimin e njëjtë sa ditë do të ushqehen 55 krerë bagëti:

45 krerë bagëti 22 ditë

55 krerë bagëti x ditë

Më shumë krerë bagëti me sasinë e njëjtë të ushqimit do të ushqehen më pak ditë, domethënë kemi madhësi të zhdrejtë proporcionale, pra shigjetat do të kenë kahe të kundërt. E formojmë proporcionin: (формула)

Ushqimi i ngelur do të jetë i mjaftueshëm për 18 ditë, pra nëse e marrim parasysht edhe ushqimin për 6 ditët e para, fitojmë se sasia fillestare e ushqimit do të jetë e mjaftueshme për 24 ditë.

Shembulli 6. Tetë punëtorë kryejnë një punë për 24 ditë. Megjithatë, pas 4 ditë tre prej tyre shkojnë në pushim mjekësor. Sa ditë do të zgjatë puna, nëse nuk ka zëvendësim për punëtorët që mungojnë?

Kur do të punonin të gjithë punëtorët, pas 4 ditë do të ngelë punë edhe për 20 ditë. Por, nëse ngelin 5 punëtor (më pak punëtor prej 8 të parëve), puna do të zgjasë më gjatë:

8 punëtorë 20 ditë

5 punëtorë x ditë

Të pesë punëtorët do ta kryejnë punën e ngelur për 32 ditë, çka duke marrë parasysht edhe 4 ditë paraprake kur kanë punuar të gjithë 8 punëtorë, përfundojmë se puna do të kryhet për 36 ditë.



Ако работниците работат **повеќе** часови на ден (10 наместо 6) ќе заработат и **повеќе** пари, што значи и овде се правопрпорционални величините, а стрелките истонасочни.

|               |           |              |                 |
|---------------|-----------|--------------|-----------------|
| ↑ 8 работника | ↑ 18 дена | ↑ 6 часа/ден | ↑ 99 000 денари |
| 14 работника  | 15 дена   | 10 часа/ден  | $x$ денари      |

---

Според тоа, од дадените услови ја поставуваме следната продолжена пропорција:

$$x : 99\,000 = 14 : 8 = 15 : 18 = 10 : 6$$

од каде се добива пропорцијата:

$$x : 99\,000 = (10 \cdot 15 \cdot 14) : (6 \cdot 18 \cdot 8)$$

по што го пресметуваме  $x$  применувајќи го основното својство на пропорциите:

$$x = \frac{(10 \cdot 15 \cdot 14) \cdot 99\,000}{6 \cdot 18 \cdot 8}$$

$$x = 240\,625.$$

**Пример 2** Некоја стока можат да ја превезат 15 камиони за 20 дена, ако прават по 4 тури дневно. Првите 10 дена возеле 5 камиони по 6 тури дневно. Уште колку камиони треба да се ангажираат со истата носивост, за да ја превезат преостанатата стока во предвидениот рок, ако секој камион прави по 5 тури на ден?

Најпрво да пресметаме за колку дена ќе биде пренесена стоката доколку возат 5 камиони наместо 15 и прават по 6 тури на ден, наместо по 4 тури.

Истородните величини ги запишуваме една под друга.

Првата стрелка поаѓа од  $x$ .

Да видиме како да ја поставиме стрелката кај останатите величини. Ако возат **помалку** камиони (5 наместо 15), ќе бидат потребни **повеќе** денови за да се превезе стоката, што значи стрелката до бројот на камиони ќе биде спротивно насочена со почетната.

Доколку камионите прават **повеќе** тури дневно (6 наместо 4), ќе бидат потребни **помалку** денови за да се превезе стоката. Ова значи дека имаме обратна пропорционалност и стрелката до величината со која се изразени турите на ден ја поставуваме обратно насочена со стрелката кај непознатата.

|              |           |              |
|--------------|-----------|--------------|
| ↓ 15 камиони | ↑ 20 дена | ↓ 4 тури/ден |
| 5 камиони    | $x$ дена  | 6 тури/ден   |

---

Движејќи се во насока на стрелките, ја поставуваме следната продолжена пропорција:

$$x : 20 = 15 : 5 = 4 : 6,$$

од која се изведува пропорцијата:

$$x : 20 = (15 \cdot 4) : (6 \cdot 5),$$

Nëse punëtorët punojnë më shumë orë në ditë (10 në vend 6) do të fitojnë edhe më shumë para, që do të thotë edhe këtu madhësitë janë të drejta proporcionale, por shigjetat janë me kahe të njëjtë.

8 punëtorë 18 ditë 6 orë/sitë 99 000 denarë

14 punëtorë 15 ditë 10 orë/sitë  $x$  denarë

Prandaj, prej kushteve të dhëna e parashtrojmë këtë proporcion të vazhduar:

(формула)

prej ku fitohet proporcioni: (формула)

ku e njehsojmë  $x$  duke zbatuar vetinë themelore të proporcioneve (формула)

*Shembulli 2. Ndonjë mall mund ta bartin 15 kamionë për 20 ditë, nëse bëjnë 4 turne në ditë. Në 10 ditët e para kanë vozitur 5 kamionë nga 6 turne në ditë. Edhe sa kamionë duhet të angazhohen me ngarkesën e njëjtë, që ta bartin mallin e ngelur në afatin e parashikuar, nëse çdo kamion bën nga 5 turne në ditë?*

*Së pari të njomësojmë për sa ditë do të bartet malli nëse vozitin 5 kamionë në vend 15 dhe bëjnë nga 6 turne në ditë.*

*Madhësi të llojit të njëjtë i shkruajmë njëzën nën tjetrën.*

*Shigjeta e parë nis prej  $x$ .*

*Të vërejmë se si do ta parashtrojmë shigjetën të madhësitë tjera. Nëse vozitin më pak kamionë (5 në vend 15), do të jenë të nevojshme më shumë ditë për t'u bartur malli, që do të thotë shigjetat deri te numrit i kamionëve do të jetë me kahe të kundërt me fillestarten.*

*Nëse kamionët bëjnë më shumë turne ditore (6 në vend 4), do të jenë të nevojshme më pak ditë për t'u bartur malli. Kjo do të thotë se kemi proporcion të zhdrejtë dhe shigjeta deri te madhësia me të cilan janë shprehur turnet ditore e parashtrojmë në kahe të kundërt me shigjetën tek e panjohura.*

15 kamionë 20 ditë 4 turne/ditë

5 kamionë  $x$  ditë 6 turne/ditë

Duke lëvizur në kahen e kundërt të shigjetave, e parashtrojmë këtë proporcion të vazhduar:

$$x : 20 = 15 : 5 = 4 : 6,$$

prej të cilës nxirret ky proporcion: (формула)

ku e caktojmë  $x$

(формула)

**Detyra për punë të pavarur:**

1. 10 druprerës, për 6 ditë, duke punuar nga 10 orë në ditë, mund të prenë 400 drunj. Sa drunj mund të prenë 12 druprerës për 10 ditë, nëse punojnë nga 8 orë në ditë?
2. 23 punëtorë për 7 ditë fitojnë 80 500 denarë. Sa do të fitojnë 33 punëtorë për 11 ditë?
3. Nëse 3 punëtorë mund për 5 ditë të paketojnë 385 kuti prej një prodhimi, për sa ditë 7 punëtor do të paketojnë 4312 kuti prej prodhimit të njëjtë

4. Që të bëhet urë me gjatësi 450m dhe gjerësi 5m, janë të nevojshme 4 500 000 denarë. Sa para janë të nevojshme për punimin e urës me gjatësi 250m dhe gjerësi 4m?

#### **6. Koncepti për përqindje prej njëqind**

Raporti (формула) ose (формула) për koeficient (формула) na tregon çfarë pjese është a prej b.

**Shembulli 1.** E dhëna se në klasën prej 25 nxënës ka 5 nxënës të shkëlqyeshëm, mund të shprehet me raport (формула). Këtë thyesë mund ta thjeshtojmë dhe fitojmë thyesën (формула). Ky raport (формула)

do të thotë se në çdo 5 nxënës të klasës ka nga 1 nxënës të shkëlqyeshëm  
Pjesët prej madhësisë së dhënë shpeshherë i shprehim me

përqindje.

❖ Një përqindje (1%) është e qindta pjesë prej ndonjë tërësie.

❖ Nëse S është tërësi e dhënë, 1% prej asaj tërësie (формула), ndërsa p % prej S në realitet është (формула)

Nëse raportin (формула) d.m.th. (формула) të Shembulli 1. e zgjerojmë deri në raport tek i cili anëtari i dytë është 100, e fitojmë raportin (формула). Kjo do të thotë se 20% të nxënësve janë të shkëlqyeshëm

Shembulli 2. Të caktojmë sa përqind prej tërësisë së dhënë paraqesin thyesat (формула). Për këtë qëllim thyesat e dhëna (raportet) do t'i zgjerojmë deri në thyesa me emërues 100. (формула). Kjo do të thotë se (формула) prej çdo tërësie është 40%, (формула) prej tërësisë së dhënë është 65% e tërësisë etj.

Shembulli 3. 25% prej 60 është (формула).

❖ Tërësinë S do ta quajmë vlera kryesore.

Përqindjen do ta shënojmë me p.

Pjesën prej tërësisë që i përgjigjet përqindjes së dhënë do ta quajmë sasi (sasi e përqindjes) dhe do ta shënojmë me i.

Duke pasur parasysh se tërësia përgjigjet në 100%, duke shfrytëzuar rregullën e thjeshtë të treshit mund ta parashtrojmë proporcionin prej ku do t'i nxjerrim formulat për njehsimin e njërës prej tri madhësive paraprake (vlera kryesore S, përqindjen p dhe sasia e përqindjes i), nëse dihen dy të e të tjera:

tërësia S 100%

sasia I p %

- Sasia më e madhe i përgjigjet përqindjes më të madhe, për shkak të shigjetave janë në kahe të njëjtë. E parashtrojmë proporcionin:

i: S = p : 100

prej të cilës i nxjerrim formulat:

(формула)

Njehsimi i njërës prej këtyre tri madhësive, në rastin kur janë të njohura dy të e të tjerat, quhet njehsimi i përqindjes prej një qind.

Shembulli 4. Shitësi i biletave për koncert ka fitim 5% prej çdo bilete të shitur. Nëse bileta kushton 700 denarë, nga sa denarë fiton shitësi prej një bilete të shitur?

Shitësi ka nga 35 denarë fitim prej çdo bilete.

Shembulli 5. Të ardhurat mujore të një personi janë 12 000 denarë. Çdo muaj ai ndan nga 720

denarë për gardërobë të re. Sa përqind prej të ardhurave mujore personi ndan për gardërobë? (формула)

Fituam se çdo muaj personi ndan nga 6% për gardërobë.

Shembulli 6. Për prodhim të caktuar, për të cilin paguan TVSH prej 18% është paguar 450 denarë TVSH. Sa është çmimi themelor i prodhimit, e sa është çmimi i fundit (me tatim)? (формула)

Vlera themelore e prodhimit është 2 500 denarë, çmimi i fundit me TVSH e njehsuar është 2950 denarë.

Detyra për punë të pavarur:

1. Sa përqind përgjigjen 12 litra prej përzierjes së përgjithshme 56 litra?

2. Çmimi i një prodhimi që kushton 640 denarë është zmadhuar për 35%, por menjëherë të nesërmen çmimi i prodhimit të njëjtë është zvogëluar për 25%. Cakto çmimin e prodhimit pas zvogëlimit.

3. Çmimi i një prodhimi që kushton 825 denarë është zvogëluar për 26%, por menjëherë të nesërmen çmimi i prodhimit është zvogëluar për 30%. Cakto çmimin e prodhimit pas shtrenjtimit.

4. Tredhjet përqind e lartësisë së një shtylle është 105 cm. Sa është më e lartë shtylla?

5. Merita ka 45 detyra për detyrë shtëpie nga matematika, të cilat duhet t'i zgjidhë për kohën e pushimit dimëror. Javën e parë ka zgjidhur 27 detyra. Sa përqind Merita ka zgjidhur detyra të shtëpisë? Edhe sa detyra duhet të zgjidhë Merita që të ketë të zgjidhur 80% të detyrës së shtëpisë?



❖ Vlera kryesore  $S$  i përgjigjet 100%. Nëse e njëjta është zmadhuar për  $p\%$ , të cilës i përgjigjet sasia e përqindjes  $i$ , atëherë vlera do të jetë  $(S + i)(100 + p)\%$  dhe e njëjta i përgjigjet  $(100 + p)\%$ . Prandaj, duke zbatuar rregullën e thjeshtë të treshit, mund ta parashtrojmë proporcionin: (формула)

Me formulën e fundit zgjidhim llogari të përqindjes mbi njëqind.

❖ Në mënyrë analoge, nëse vlera kryesore  $S$  është zvogëluar për  $p\%$ , të cilës i përgjigjet sasi e përqindjes  $i$ , atëherë vlera e re  $(S-i)$  do të përgjigjet  $(100-p)\%$ . Në këtë rast me zbatimin e rregullës së thjeshtë të treshit do të fitojmë: (формула)

Me formulën e fundit zgjidhim llogari të përqindjes mbi njëqind.

Shembulli 1. Çmimi i kafes është zmadhuar për 8% dhe tani është 3132 denarë për kuti. Sa ka qenë çmimi i kafes para shtrenjtimit dhe për sa është shtrenjtuar kafja?

Nëse çmimi i kafes para shtrenjtimit ka qenë  $S$  (vlera themelore para se të zmadhohet për 8%), por pas shtrenjtimit është 3132 denarë, atëherë (формула), por (формула), prandaj formula për llogarinë e përqindjes mbi njëqind, kemi: (формула)

Çmimi i kafes para shtrenjtimit ka qenë 2 900 denarë. Kafeja është shtrenjtuar për sa denarë, që paraqet 8% prej 2 900 denarë (kontrolloni vetë) (формула).

Shembulli 2. Për shkak të gabimit gjatë qepjes, çmimi i një fustani është zvogëluar për 12% dhe fustani tani shitet për 1 056 denarë. Sa ka qenë çmimi fillestar i fustanit.

Këtu është dhënë zvogëlimi i vlerës themelore për 12%, domethënë kemi llogari të përqindjes nën njëqind.

Fituam se çmimi fillestar i fustanit, pra zvogëlimit, ka qenë 1200 denarë. Fustani është liruar për (формула), që paraqet 12% prej 1200 denarë (kontrollo vetë).

Detyra për punë të pavarur:

1. Pas rritjes prej 18%, paga e çdo të punësuar në një repart është 28 320 denarë. Njehso sa është rritja dhe sa ka qenë paga paraprake e të punësuarve.

2. Në një konfeksion ku qepen uniforma të nxënësve, norma është tejkaluar për 15% dhe gjithashtu janë qepur 368 uniforma. Sa uniforma ka qenë norma në konfeksion?

3. Vitin e kaluar në një shkollë të mesme në vitin e parë janë regjistruar 104 nxënës, që është për 20% më pak se numrit i nxënësve të cilat janë regjistruar këtë vit. Sa nxënës këtë vit janë regjistruar në atë shkollë të mesme?

4. Në shtator vitin e kaluar në një vend ka pasur mesatarisht 44 l/m<sup>2</sup> të reshura javore, që është për 5% më pak se të reshurat në tetor. Sa të reshura javore mesatarisht ka pasur në tetor?

5. Çmimi i një biçiklete, me tatimin e përfshirë prej 18%, është 10 000 denarë. Cila është vlera themelore e biçikletës, e sa është tatimi?

6. Një furrë që nuk punon ditë e diel, të shtunën prodhon 4 620 bukë, që është për 65% më shumë se numrit i bukëve që e prodhon ditët e tjera të punës. Nga sa bukë prodhon furra në ditët e punës?

7. Për kohën e pushimeve verore një furrë ka prodhuar nga 2795 bukë në ditë, që është 14% më pak prej prodhimit ditor në periudhën tjetër të vitit. Nga sa bukë në ditë prodhon furra në periudhën tjetër të vitit?

## 8. Llogari e kamatës

Llogaria e kamatës shpeshherë zbatohet gjatë kursimit dhe huamarrjes. Kur investojmë (kursejmë) mjete në periudhë të caktuar në bankë ose kursimore, e njëjta i shfrytëzon mjetet tona, por në llogari të asaj ajo na paguan kompensim të caktuar i cili quhet kamatë. E ngjashme është edhe me huamarrje, në atë rast banka na jep mjete t'i shfrytëzojmë dhe t'i kthejmë për një periudhë të caktuar (kredi), për llogari të asaj që kemi pasur në disponim mjete të saja, na njehson kamatë.

Shuma e parave të deponuara, përkatësisht të marra hua, quhet kapital ose vlera themelore. Kompensimi që paguhet për paratë e investuara, përkatësisht, të huamarra, quhet kamatë. Kamata e cila duhet të paguhet shpeshherë është dhënë përqindje e caktuar prej vlerës themelore (kapitali), për kohë të caktuar, por ajo përqindje quhet norma e interesit.

Për shembull, për një deponim të kursimit njehsohet 3% kamata vjetore, kjo do të thotë se 3% prej shumës së deponuar do të jetë kamata e përgjithshme pas mbarimit të një viti prej deponimit.

Shembulli 1. Nse në bankë deponojmë 75 000 denarë si deponim kursyes, me kamatë 2,8% në vjet, për një vit do të na paguhet kamatë (формула) denarë. Nëse tani prej bankës ngrejmë hua (kredi) me normë vjetore të kamatës 6,8%, atëherë paratë e marra për një vit do të duhet të paguajmë (формула) denarë.

Gjatë huamarrjes dhe kursimit shpeshherë në vend saktë për një vit, huamarrjen, përkatësisht kursimin, i bëjmë në disa muaj ose në disa vite, pra kamata duhet të njehsohet në periudhë të caktuar kohore të ndryshueshme prej një viti. Kamata në këtë rast është e qartë se do të varet prej periudhës kohore në të cilën janë deponuar, përkatësisht huamarrje të mjeteve.

Poashtu, periudha më e madhe kohore domethënë edhe kamata më e madhe, poashtu, deponim më i madh (borxh), domethënë kamatë më e madhe. Prej kësaj përfundojmë se kamata e përgjithshme do të jetë proporcionale e drejtë dhe me mjete të deponuara (huamarrje) edhe me periudhën kohore të huamarrjes (deponimit).

Nëse kapitalin (vlerën themelore) e shënojmë me  $K$ , normën e kamatës për interval njësi kohore (një vit, një muaj) e shënojmë me  $p$ , te shembulli paraprak vërejtëm se për interval njësi (shembull për një vit) kamata e njehsuar, e shënuar me  $i$ , do të jetë (формула). Nëse periudha kohore është  $t$  (shembull  $t$  vite), kamata e përgjithshme do të jetë: (формула)

Prej formulës së fundit lehtë nxirren formulat për njehsimin e vlerës kryesore, norma e kamatës ose koha, nëse janë të njohura tri madhësitë tjera: (формула)

Të vërejmë se gjatë njehsimit të kamatës për periudhën kohore  $t$  në këtë mënyrë e njehsojmë kamatën vetëm për vlerën themelore. Kjo kamatë quhet kamata e thjeshtë, por njehsimi i saj quhet llogaria e kamatës së thjeshtë.

Te këto detyra do të supozojmë se kamata e fituar nuk shtohet në vlerën themelore në vitin pasardhës, domethënë kemi llogari kamate të thjeshtë.

Shembulli 2. Sa është kamata e përgjithshme e cilat duhet të jetë paguar në llogarinë kursyese prej 132000 denarë për 5 vjet, nëse norma e kamatës vjetore është 2,2%?

Janë dhënë madhësitë: (формула). Kamata e përgjithshme i për 5 vjet do të jetë (формула) denarë.

Shembulli 3. Sa kapital duhet të deponohet në denarë me normë të kamares vjetore 2,5%, që për 4 vjet kamata e fituar është 12 500 denarë?

Këtu na është dhënë: (формула), ndërsa vlerën themelore (kapitalin) duhet ta njehsojmë. Sipas formulës, (формула) që do të thotë që ta fitojmë kamatën e dhënë gjatë kushteve të dhëna duhet të deponojmë 125 000 denarë.

Shembulli 4.

Për sa vjet duhet të kthehet borxhi prej 60 000 denarë me 8% normë të kamatës vjetore, që kamata e përgjithshme të jetë 12 000 denarë?

Na janë dhënë (формула), por periudhën kohore  $t$ , në vite, duhet ta njehsojmë (формула) Fitojmë se për 2,5 vjet duhet të kthehet borxhi.

Në praktikë gjatë kursimit dhe huamarrjes shpeshherë paraqitet nevoja që deponimi (borxhi) me normë të kamatës vjetore të caktuar duhet të njehsohet për disa muaj ose ditë.

Në rastin kur duhet të njehsojmë kamatë për një muaj gjatë normës së kamatës së dhënë vjetore, kamatën vjetore e pjesëtojmë me 12 dhe kamata mujore është: (формула)

Nëse duhet të njehsojmë kamatën për  $m$  muaj, në rastin e këtillë do të jetë (формула)

Prej kësaj formule nxirren thjeshtë formulat për njehsimin e madhësive të tjera, kur e dimë kamatën e fituar për numër të muajve të caktuar:

Shembulli 5. Sa kamatë sjell deponimi prej 108 000 denarë, me 4% normë të kamatës vjetore për 4 muaj?

Kamata për 4 muaj është 1 440 denarë.

Shembulli 6. Me çfarë normë të kamatës deponimi prej 40 000 denarë për 18 muaj do të sjellë kamatë 3600 denarë? (формула)

Norma e kamatës vjetore duhet të jetë 6%.

Shembulli 7. Për sa muaj është kthyer borxhi prej 72 000 denarë, të marrë me normë të kamatës vjetore prej 8%, nëse kamata e përgjithshme e paguar për borxhin është 2 400 denarë.

Borxhi është kthyer për 5 muaj.

Në rastin kur duhet ta njehsojmë kamatën për një ditë, gjatë normës së dhënë të kamatës vjetore, sasinë vjetore të kamatës do ta pjesëtojmë me 365, pra sasia e kamatës ditore është:

Kamata për d ditë do të jetë:

Këtu do të përmendim se në disa raste (varësisht prej politikës së bankës), në vend me 365, për të njehsuar sasinë e kamatës ditore, kamata vjetore pjesëtohet me 360.

❖ Gjithashtu, nëse është përmendur intervali kohor në muaj, por nuk është përmendur për cilët muaj saktë ka të bëjë, muajt do t'i llogarisim nga 30 ditë. Nëse saktë e dimë për cilët muaj ka të bëjë, do të numërojmë aq ditë sa ka te muajt.

Formulat për njehsimin e çdonjërës prej madhësive të tjera, në rastin kur e dimë sasinë e kamatës për numër të caktuar të ditëve, nxirren thjeshtë prej formulës së fundi:

Shembulli 8. Sa kapital duhet të deponohet në denarë me normë të kamatës vjetore 3,2%, që për 125 ditë të sjellë kamatë 1000 denarë?

Duhet të deponohet 91 250 denarë.

Shembulli 9 Me çfarë normë të kamatës vjetore duhet të deponohen 10 950 denarë, që depozita prej 29 korrik deri në 2 nëntor të sjellë kamatë 114 denarë?

Norma e kamatës vjetore të jetë 4%.

Në praktikë shpeshherë kapitali dhe kamata nuk janë dhënë të ndara, por janë dhënë së bashku si borxh i përgjithshëm, domethënë është e njohura vlera  $K + i$ . Njehsimi i çdonjërës prej këtyre madhësive në veçanti quhen llogari e kamatës mbi njëqind.

Kapitalin në këtë rast e njehsojmë me formulën (формула), ndërsa kamatën e njehsojmë me formulën (формула), ku  $t$  është periudha kohore në vite për të cilën është njehsuar kamata

Nëse na janë dhënë ndryshimi i kapitalit dhe kamatës, domethënë (формула), detyra me të cilan njehsohet çdonjëra prej këtyre dy vlerave quhet llogaria e kamatës mbi njëqind.

Të njëjtat i njehsojmë me këto formula: dhe

Shembulli 10 Për një borxh të marrë me normë të kamatës vjetore 12,5%, për dy vjet është kthyer shuma e përgjithshme 325 500 denarë. Njehso sa është borxhi, ndërsa sa është kamata?

Shembulli 11 Me refuzimin e kamatës, e cila për katër vjet duhet të paguhet për borxhin, kërkuesi i borxhit ka marrë 152 500 denarë. Njehsoni sa është borxhi, ndërsa sa është kamata gjatë normës së kamatës 5%.

$$K - i = 152\,500, \quad t = \frac{1}{3}, \quad p = 5$$

$$K = \frac{(K - i) \cdot 100}{100 - p \cdot t} = \frac{152\,500 \cdot 100}{100 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 155\,084,75;$$

$$i = \frac{(K - i) \cdot p \cdot t}{100 - p \cdot t} = \frac{152\,500 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}}{100 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 2\,584,75.$$

**Detyra për punë të pavarur:**

1. Me çfarë normë të kamatës kapitali prej 9 000 denarë për 5 vjet do të sjellë kamatë 2 700 denarë?
2. Për sa vjet kapitali prej 124 000 denarë do të sjellë kamatë 18 600 denarë, nëse është deponuar me normë të kamatës vjetore 7,5%?
3. Sa kapital të deponuar me normë të kamatës vjetore 9%, për 15 muaj do të sjellë kamatë 3744 denarë?
4. Njehso sa duhet të jetë kapitali i deponuar me normë të kamatës vjetore prej 4,5%, që për dy vjet, tre muaj e pesëmbëdhjetë ditë do të sjellë kamatë 16 500 denarë?
5. Sa kamatë duhet të paguhet për borxhin prej 36 500 denarë për 80 ditë, nëse norma e kamatës vjetore është 6%?
6. Për sa ditë kapitali prej 60 000 denarë do të sjellë kamatë 2 700 denarë, nëse norma e kamatës vjetore është 4,5%?
7. Në bankë janë deponuar 250 000 denarë kapital, me normë të kamatës vjetore 3,6%. Sa kamatë duhet të paguajë banka për 32 muaj?
8. Për kredi të paguar në periudhën prej 16 muaj janë gjithsej 58 080 denarë. Njehso sa është vlera themelore e kredisë, ndërsa sa kamatë, nëse norma e kamatës vjetore është 4,2%?
9. Pas refuzimit të kamatës së njehsuar me normë të kamatës vjetore 6%, për borxhin që duhet të kthehet në afat prej 110 ditë, janë paguar 147 250 denarë. Sa është borxhi, ndërsa sa është kamata e paguar?
10. Pas periudhës prej 75 ditë, gjendja në llogarinë kursyese të një kursyesi që ka deponuar mjete me normë të kamatës vjetore 6%, është 121 500 denarë. Njehso cila është vlera themelore e depozitit të kursyer, ndërsa sa është kamata e paguar.

## 9. Detyra për përsëritje të njësive modulare

1. Tre nxënës, të cilët kanë fituar shpërblimin e parë në garën e matematikës, duhet ta ndajnë shpërblimin prej 100 000 denarë proporcionalisht me numrin e pikëve të fituara. Nga sa denarë do të marrë çdo nxënës, nëse njëri ka fituar 92 pikë, tjetri 95 pikë, e i treti 100 pikë?
2. Për bartjen e mallit me masë 2 tonelata e 458 kilogramë është paguar 11 061 denarë. Sa duhet të paguhet për bartjen e mallit, me masë 4 tonelata, nëse çmimi i bartjes është proporcional me masën e mallit?
3. 12 punëtorë kanë punuar 16 ditë nga 8 orë në ditë dhe kanë fituar 240 000 denarë. Sa do të fitojnë 15 punëtorë për 10 ditë, nëse me kushte të njëjta punojnë nga 9 orë në ditë?
4. 10 kamionë me ngarkesë nga 6 tonelata do të bartin mall të caktuar për 8 ditë nëse bëjnë nga 4 turne në ditë. Për sa ditë do ta bartin mallin e njëjtë 6 kamionë me ngarkesë 8 tonelata, nëse bëjnë nga 5 turne në ditë?
5. Një prodhim që është shitur me çmim prej 8 500 denarë, është liruar për 12% prej çmimit. Cili do të jetë çmimi i ri i mallit dhe për sa do të jetë lirimi?
6. Gjatë transportit të një malli pranohet 0,5% shpenzime. Njehsoni për mallin me masë 12 500 kg sa kilogramë shpenzime pranohen?
7. Paga e të punësuarve në një organizatë do të rritet për 15%. Sa pagë pas rritjes do të marrë punëtori që tani merr 18 000 denarë, ndërsa sa pagë do të marrë punëtori që tani merr 21 000 denarë?
8. Në një klasë prej 32 nxënësve në fund të vitit shkollor 12 nxënës kanë kaluar shkëlqyeshëm, 8 nxënës kanë qenë shumë të mire, 6 kanë qenë të mirë, por 4 nxënës kanë kaluar me sukses të mjaftueshëm. Njehso sa përqind prej nxënësve kanë kaluar shkëlqyeshëm, sa shumë mirë, sa mire, ndërsa sa me sukses të mjaftueshëm.
9. Cisterna është zbrazur me 37.4 tonelata lëng ku te cisterna kanë ngelur 6,5% hapësirë e zbrazur. Sa lëng duhet të derdhen që të mbushet cisterna?
10. Sa kapital duhet të deponojmë me normë të kamatës vjetore 1,1%, në 9 muaj, që kamata të jetë e njëjtë sikurse kamata e borxhit 7 000 denarë, të deponuara në dy vjet me normë të kamatës vjetore 0,9%?
11. Në periudhën prej disa viteve duhet të deponohet kapital prej 150 000 denarë, ku norma e kamatës vjetore 3%, që të njehsohet kamata e njëjtë sikurse edhe kamata e huas prej 100 000 denarë, që me normë të kamatës vjetore 4,5% duhet të kthehen për 4 vjet?



# 5

## BARAZIMET LINEARE, PABARAZIMET DHE SISTEMET E PABARAZIMEVE LINEARE ME NJË TË PANJOHUR



### QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

Duke mësuar njësinë modulare, nxënësit duhet të aftësohen:

- ➤ të zgjidhin barazime lineare me një të panjohur;
- ➤ të diskutojnë zgjidhjen e barazimit linear me parametër varësisht prej vlerave të parametrit;
- ➤ të zgjidhin probleme praktike të cilat sillen në barazim linear me një të panjohur;
- ➤ të zgjidhin pabarazime lineare dhe të dinë ta paraqesin zgjidhjen analitikisht dhe grafikisht në boshtin numerik;
- ➤ të dinë të zgjidhin sistem dhe tërësia të dy pabarazimeve lineare me një të panjohur dhe ta paraqesin zgjidhjen analitikisht dhe grafikisht në boshtin numerik.
-

## PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 5

- 195. Koncepti për barazim linear
- 201. Barazimet me vlerë absolute të cilat sillen në barazime lineare me një të panjohur
- 204. Formimi dhe zgjidhja e barazimeve lineare
- 209. Forma e zgjidhur e pabarazimeve lineare me një të panjohur
- 216. Sistemi dhe tërësia të pabarazimeve lineare me një të panjohur
- 222. Detyra për përsëritje të njësive modulare

# 1. Koncepti për barazim linear

## 1.1. Barazime algjebrike

- Shprehjet (формула); janë shprehje algjebrike me ndryshore.
- I cilit lloj është barazimi (формула)?
- Për (формула) a fitohet saktë një barazim (формула)?
- Për ta përkufizuar konceptin barazim linear, së pari e përkufizojmë barazimin algjebrik dhe zgjidhen e barazimit algjebrik.
- Nëse A dhe B janë dy shprehje algjebrike prej të cilave të paktën njëri përmban ndryshore, atëherë barazimi  $A = B$  quhet barazim algjebrik. Për ndryshoret te barazimi linear thuhet se janë të panjohura te barazimi.
- Shembulli 1. Nëse (формула) dhe (формула) janë dy shprehje algjebrike, atëherë barazimi (формула) është barazim algjebrik me një të panjohur.
- Mund të formohen edhe barazime algjebrike me dy, tre ose më shumë të panjohura;
- Shembulli: (формула)
- 
- 
- 
- ❖ Nëse te barazimi algjebrik  $A = B$ , ku A dhe B janë dy shprehje algjebrike, pas zëvendësimit të panjohurës me numër të caktuar real a, fitohet saktë barazimi numerik, atëherë për numrin a thuhet se është zgjidhje e atij barazimi algjebrik.
- 
- ❖ Të zgjidhet barazimi i dhënë algjebrik, domethënë të caktohen të gjitha zgjidhjet e tij.
- 
- 
- ❖ Të gjitha zgjidhjet e një barazimi algjebrik e përbëjnë bashkësia e zgjidhjeve të atij barazimi.
- 
- 
- Shembulli 2. Numri -1 është zgjidhje e barazimit (формула), pasi (формула), domethënë  $1 = 1$ .
- Për barazimin algjebrik vlen kjo:
-

Një barazimi algjebrik mund

të jetë zgjidhje dhe quhet barazim i zgjidhshëm, nëse bashkësia e saj e zgjidhjeve nuk është bashkësi e zbrazët; tjetër mos jetë zgjidhje, dhe quhet barazim i pazgjidhshëm (i pamundur), nëse nuk ka asnjë zgjidhje.

Shembulli 3. Kontrolllo se numri: a) 4; b) -3; a është zgjidhje e barazimit  $2x + 3 = 4x - 5$ .

a) Te barazimi i dhënë në vend të ndryshores  $x$  e zëvendësojmë numrin 4. Kështu, (формула) dhe (формула). Domethënë, numri 4 është zgjidhje e barazimit të dhënë dhe atë zgjidhje e vetme d.m.th., bashkësia e zgjidhjeve  $M$  të barazimit është (формула). Nëse në vend të ndryshores  $x$  e zëvendësojmë numrin -3, do të vërejmë se nuk do të fitojmë saktë barazim numerik. Domethënë, numri -3 nuk është zgjidhje e barazimit.

1. Cakto cilat prej këtyre barazimeve janë të pamundshme:

a) b) c) ç).

Barazime të pamundshme janë barazimet nën a) dhe c). Sqaro pse!

o Si quhen barazimet të cilat kanë zgjidhje bashkësi zgjidhjesh të njëjta?

❖ Dy barazime algjebrike  $A = B$  dhe  $C = D$  të bashkësia e njëjtë e përkufizimit janë barazime ekuivalente nëse bashkësia e zgjidhjeve përputhet, d.m.th. (формула), ku (формула) është bashkësia e zgjidhjeve të barazimit të parë, por (формула) është bashkësia e zgjidhjeve të barazimit të dytë.

Disa prej vetive të relacionit ekuivalencë që shfrytëzohet gjatë zgjidhjes së barazimeve, janë:

Këto veti të relacionit për ekuivalencë janë të njohura si transformacione ekuivalente të barazimit.

## 1.2. Barazimet lineare dhe zgjidhja e barazimeve lineare

- ❖ Barazimi algjebrik  $A = B$  tek i cili pas rregullimit të tij e panjohura paraqitet vetëm në fuqinë e parë, quhet barazim linear.
- ❖ Forma e përgjithshme e barazimit linear me një të panjohur është (формула)

Barazimet e formës (формула), janë barazime lineare me një të panjohur

Mendo dhe përgjigju!

o Sa zgjidhje ka barazimi linear me një të panjohur?

Shembulli 4.

Barazimet (формула) janë barazime lineare me një të panjohur.

Për zgjidhjen e barazimit linear vlen kjo:

- ❖ Çdo barazim linear mund të sillet në formën (формула)

Zgjidhja e barazimit (формула) varet prej numrave realë  $a$  dhe  $b$ .

- 1) Nëse (формула), barazimi është i zgjidhshëm dhe ka vetëm një zgjidhje (формула)
- 2) Nëse (формула), barazimi gjithashtu është i zgjidhshëm, domethënë çdo numër real është zgjidhje e tij, ka pafund shumë zgjidhje.
- 3) Nëse (формула), barazimi është i pazgjidhshëm (i pamundshëm), pasi barazimi (формула) nuk bëhet barazim numerik i saktë për asnjë numër  $x$ .

Shembulli 5. Zgjidhi barazimet lineare: a) b) c) ç)

a) Me zbatimin e vetisë së dytë d.m.th., me shtimin e -2 nga të dy anët e barazimit fitohet (формула)

b) Me zbatimin e vetisë së tretë, domethënë me shumëzimin e barazimit nga të dy anët me (формула) fitohet

(формула)

c) Barazimin vijues do ta zgjidhim me zbatimin e vetisë së parë, të dytë dhe të tretë, (формула) d.m.th., (формула)

ç) Për zgjidhjen e këtij barazimi së pari e zbatojmë vetinë e tretë me atë që e shumëzojmë barazimin nga të dy anët

me (формула) d.m.th., barazimin do ta shumëzojmë me SHVP prej emëruesve. Pastaj e zbatojmë vetinë e parë dhe

dytë. Kështu, janë (формула) fitohet (формула)

Shembulli 6. Diskuto zgjidhshmërinë e barazimi:

$$\begin{aligned}
3(x+2) &= \frac{x}{4} - 1 : \cdot 4 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 12(x+2) &= x - 4 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 12x - x &= -4 - 24 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 11x &= -28 \\
\Leftrightarrow x &= -\frac{28}{11}.
\end{aligned}$$

Во една равенка, освен непознатата може да се појави некоја буква што се смета како познат број и се нарекува (реален) **параметар**.



- ❖ Општите броеви (букви) со кои во равенката се изразени некои од познатите величини и кои не зависат од непознатите се викаат **параметри** на равенката.
- ❖ Параметрите во равенката обично ги изразуваме со првите букви од латинската азбука  $a, b, c, d, \dots, k, m, n$  за разлика од променливите кои ги означуваме со последните букви од латиницата  $x, y, z, v, u, \dots$
- ❖ Ако зборуваме за општи реални броеви тогаш зборуваме за **реални параметри**.

#### Пример 7

Одреди за која вредност на параметарот  $a$  равенката  $ax - 3a = 1 + 5x$  ќе биде:

- а) решлива;      б) невозможна.

Пред да почнеме со решавање равенка ја трансформираме во еквивалентна равенка на дадената, т.е.  $ax - 3a = 1 + 5x \Leftrightarrow (a - 5)x = 1 + 3a$ .

- а) Равенката е решлива за  $a - 5 \neq 0$ , т.е. за  $a \neq 5$ , и тоа решение е единствено  $x = \frac{1 + 3a}{a - 5}$ .
- б) Равенката е невозможна за  $a - 5 = 0$  т.е. за  $a = 5$ , бидејќи  $0 \cdot x = 1 + 15 = 16$ .

Една равенка може да содржи и повеќе параметри. Во тој случај дискусијата за решливоста на равенката се сведува на дискусија за секој параметар посебно, а и за евентуални врски помеѓу нив.

Да го разгледаме следниот пример:

#### Пример 8

За кои вредности на параметрите  $m$  и  $n$  равенката  $\frac{x}{m+n} + \frac{x}{n} = \frac{n}{m+n}$  е

решлива?

Најпрво равенката има смисла за  $m+n \neq 0$ , т.е.  $m \neq -n$  и  $n \neq 0$ .

Barazim i zgjidhshëm, me shumë zgjidhje, pasi: a) b) c)

b) I pazgjidhshëm, pasi (формула)

c) I zgjidhshëm, me një zgjidhje të vetme, pasi:

(формула)

Te një barazim, përveç të panjohurës, mund të paraqitet ndonjë shkronjë që llogaritet si numër i dhe quhet parametër (real

Numrat e përgjithshëm (shkronjat) me të cilat te barazimi janë shprehur disa prej madhësive të njohura dhe të cilat nuk varen prej të panjohurës quhen parametra të barazimit.

Parametrat te barazimi zakonisht i shprehim me shkronjat e para të alfabetit latin (формула) për dallim prej ndryshoreve të cilat i shënojmë me shkronjat e fundit të alfabetit latin (формула)

Nëse flasim për numrat e përgjithshëm realë, atëherë flasim për parametrat realë.

Shembulli 7. Cakto për cilën  $c = \text{vlerë të parametratit}$ , barazimi do të jetë (формула)

a) i zgjidhshëm; b) i pamundshëm.

Para se të fillojmë me zgjidhjen e barazimit e transformojmë në barazim ekuivalent me të dhënë,

domethënë (формула)

a) Barazimi është i zgjidhshëm për (формула) d.m.th., për (формула) dhe ajo zgjidhje është e vetme (формула)

b) Barazimi është i pamundshëm për (формула) d.m.th.,  $a = 5$  pasi (формула)

Një barazim mund të përmbajë edhe më shumë parametra. Në atë rast diskutimi për zgjidhshmërinë e barazimit sillet në diskutim për çdo parametër në veçanti, por edhe për lidhjet eventuale ndërmjet tyre. Ta zgjidhim këtë shembull:

Shembulli 8. Për cilat vlera të parametratit  $m$  dhe  $n$  barazimi (формула) është i zgjidhshëm? Së pari barazimi ka kuptim për (формула) d.m.th., (формула) dhe (формула)



❖ Vlera absolute e çfarëdo numri natyror paraqet largësinë e këtij numri (формула) prej fillimit të boshtit numerike,  $Ox$

❖ Me largësi ndërmjet dy numrave realë  $a$  dhe  $b$  e nënkuptojmë numrin real dhe (формула) e shënojmë me (формула)

❖ Aksiomat për gjatësi janë:

1. (формула) ose (формула);
2. (формула) ose; (формула)
3. (формула) ose (формула).

Mënyrën e sjelljes së barazimeve me vlerë absolute të barazimeve lineare me një të panjohur do ta ilustrojmë me këta shembuj.

Shembulli 1. Është e qartë se zgjidhje të barazimit (формула) me vlerë absolute (формула) janë

numrat (формула) dhe (формула), pasi (формула). Si fitohen këto zgjidhje dhe cilat janë barazimet lineare me një të panjohur të cilat sillet ky barazim me vlerë absolute? Sipas përkufizimit për vlerë absolute të numrit real të dhënë lart, barazimi me vlerë absolute sillet në këto barazime lineare (формула) ose (формула). Prej këtu fitohet se zgjidhjet janë (формула) dhe (формула).

bsolute (формула).

Pasi barazimin e transformojmë në barazim ekuivalent me atë, domethënë (формула) Me zbatimin e përkufizimit për vlerë absolute si te shembulli 1, fitohet zgjidhja e barazimit (формула) dhe (формула)

Shembulli 3. Zgjidhi barazime: a) b) c)

a) Me zbatimin e përkufizimit për vlerë absolute (формула) Barazimin e zgjidhim në dy intervale.

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ x &= -2 - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ x &= -8 \end{aligned}$$

т.е.  $x = -8 \in (-\infty, -6)$

и

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ x &= 2 - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ x &= -4 \end{aligned}$$

$x = -4 \in [-6, +\infty)$ .

Заклучуваме дека, равенката има две решенија  $x = -8$  и  $x = -4$ .

б) Со примена на дефиницијата за апсолутна вредност

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases}$$

Равенката ја решаваме во два интервали.

1) За  $x \in (-\infty, -3)$ :  $2x - (x - 3) = 9 \Leftrightarrow x + 3 = 9 \Leftrightarrow x = 6 \notin (-\infty, 3)$ .

Решението  $x = 6$  не е решение на равенката.

2) За  $x \in [3, +\infty)$ :  $2x + (x - 3) = 9 \Leftrightarrow 3x - 3 = 9 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = 4 \in [3, +\infty)$ .

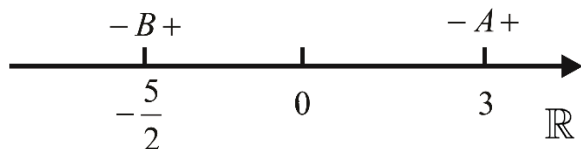
Решението  $x = 4$  е решение на равенката.

Заклучуваме дека, равенката има едно решение  $x = 4$ .

в) Со примена на дефиницијата за апсолутна вредност имаме,

$$|A| = |x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases} \text{ и } |B| = |2x + 5| = \begin{cases} 2x + 5, & x \geq -\frac{5}{2} \\ -(2x + 5), & x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

За подобра прегледност на интервалите во кои ќе ја решаваме равенката, ќе ја употребиме бројната оска:



Забележуваме дека знаците на изразите со променливи  $A$  и  $B$  ни даваат три различни интервали, каде ќе ја решаваме равенката.

1) За  $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$ : Во овој интервал за изразите со променливи  $A$  и  $B$  точно е

$$|A| = -A, |B| = -B \text{ т.е. } -(x - 3) = -(2x + 5) \Leftrightarrow -x + 3 = -2x - 5 \Leftrightarrow x = -8 \in (-\infty, -\frac{5}{2}).$$

Решението  $x = -8$  е решение на равенката.

2) За  $x \in [-\frac{5}{2}, 3)$ : Во овој интервал за изразите со променливи  $A$  и  $B$  точно е

$$|A| = -A, |B| = B \text{ т.е.}$$



Barazimin e zgjidhim në dy intervale.

1. Për (формула): 2. Për: (формула)  
(формула) (формула)  
d.m.th., (формула) dhe (формула)

Përfundojmë se, barazimi ka zgjidhje (формула) dhe (формула)

b) Me zbatimin e përkufizimit për vlerën absolute (формула)  
Barazimin e zgjidhim në dy intervale.

1) Për: (формула)

Zgjidhja  $x = 6$  nuk është zgjidhje e barazimit

2) Për (формула)

Zgjidhja (формула) është zgjidhje e barazimit

Përfundojmë se barazimi ka një zgjidhje  $x =$

c) Me zbatimin e përkufizimit për vlerë absolute kemi, (формула) dhe (формула)

Për qartësi më të madhe të intervaleve të cilat e zgjidhim barazimin, do ta përdorim boshtin numerik:

Vërejmë se shenjat e shprehjeve me ndryshore A dhe B na japin tre intervale të ndryshme, ku do ta zgjidhim barazimin.

1) Për (формула)

Në këtë interval për shprehjet me ndryshore A dhe B është e saktë (формула) dhe (формула)

Zgjidhja  $x = -8$  është zgjidhje e barazimit.

Për (формула)

Në këtë interval për shprehjet me ndryshore A dhe B është e saktë (формула) d.m.th., (формула)

2. Në këtë interval për shprehjet me ndryshore A dhe B është e saktë (формула) d.m.th., (формула)

Zgjidhja (формула) është zgjidhje e barazimit.

3) Për (формула): Në këtë interval për shprehjet me ndryshore A dhe B është e saktë (формула) d.m.th., (формула)

Zgjidhja (формула) nuk është zgjidhje e barazimit. Po, ky barazim tanimë e fituam si zgjidhje të barazimit në intervalin e parë.

Përfundojmë se, barazimi ka dy zgjidhje (формула) dhe (формула).

### 3. Φορμими δηε ζγφιδηφα ε βαραζιμεѳε λινεαρε

формула)

(формула)

формула),

Τηψεσατ αλγφεβρικε κανλ κυπτιμ ѳετлμ κυρ емлρυεσι λσητл ι νδρψσηυεσηлμ πρεφ  
ζεροσ.

формула).

формула)

формула):

формула)

Βлφε проѳлν ε ζγφιδηφεσ σл φιτυαρ!

Τα σηθψρτοφмл κлτл σηεμβυλλ тек ι χιλι βαραζιμι νυκ ка κυπτιμ πлρ | δο нυмлρ  
ρεαλ.

формула)

формула)

формула)

формула)

формула),

формула)

формула)

Ζγφιδηφεν δο та νξφερριμ νл δψ млνψρα.

Млνψρα I

формула)

формула).

(формула)

формула)

Млνψρα II

формула).

формула)

ασηтл ε νφοηυρ σε ѳлера ε νфл τηψεσε λσηтл ζερο νлсе нυмлρυεσι λσηтл ι  
βαραβαρтл με ζερο, пранδαф

формула),

Προѳα ε ζγφιδηφεσ:

формула)

(формула) формула)

Σηεμβυλλι θл ѳιφον λσηтл βαραζιμ λινεαρ με παραμεтлρ. Δο тл блфмл дйскυτιμ тл  
ζγφιδηφεσ σл тиф ѳαρлсйσηтл πρεф ѳлерлс σл παραμεтлριτ.

Shembulli 3. Zgjidhe barazimin (формула) në bashkësinë e përkufizimit.  
Diskuto zgjidhjen e tij varësisht prej vlerës së parametrin  $a$ !

Barazimin e shumëzojmë me shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve SHVP (формула) ku (формула) d.m.th., (формула) dhe (формула).

Vijon, (формула)

Për (формула), barazimi ka zgjidhje të vetme dhe atë (формула)

Për (формула), barazimi nuk ka zgjidhje d.m.th., barazimi i formës (формула).

Në vazhdim do të japim disa detyra tekstuale të cilat mund të zgjidhen me ndihmën e barazimeve lineare me një të panjohur.

Shembulli 4. Shuma e tre numrave natyrorë të njëpasnjëshëm është 246

Caktoji ata numra.

Le të jenë (формула) dhe (формула) tre numra të njëpasnjëshëm. Prej kushteve të detyrës kemi se shuma e tyre është 246. Domethënë, (формула). Ata numra janë: 81, 82 dhe 83.

Shembulli 5. Sara është 5 vjet më e re prej Laurës. Katër vjet më vonë, Laura do të jetë dy herë më e vjetër se Sara. Cakto moshën e tanishme të Sarës dhe Laurës.

Nëse me  $x$  e shënojmë moshën e Laurës, atëherë  $x - 5$  është mosha e Sarës.

Katër vitet e fundit, mosha e Laurës do të jetë  $x + 4$ , ndërsa të Sarës  $x - 5 + 4$ . Sipas kushti të detyrës, katër vjet më vonë Laura do të jetë dy herë më e vjetër se Sara, pra vijon (формула)  
Domethënë, mosha e tanishme e Laurës është 6 vjet, ndërsa Sara është (формула) vjet.

Shembulli 6. Çmimi i dy tavolinave dhe tri karrigeve është 7050 denarë. Nëse një tavolinë kushton 400 denarë më shumë se një karrige, cakto çmimin për një tavolinë dhe një karrige.

Nëse me  $x$  e shënojmë çmimin e një karrige, sipas kushtit të detyrës  $400 + x$  është çmimi për një tavolinë (tavolina kushton 400 denarë më shumë se karrigia).

Atëherë, çmimi i tri karrigeve është  $3x$ , ndërsa për dy tavolina është (формула).

Pasi dihet se 7050 denarë është çmimi i përgjithshëm për dy tavolina dhe tri karrige, kemi: (формула)  
Domethënë, çmimi për një karrige është 1250 denarë, ndërsa çmimi për një tavolinë është

Shembulli 3. Zgjidhe barazimin (формула) në bashkësinë e përkufizimit.

Diskuto zgjidhjen e tij varësisht prej vlerës së parametrin  $a$ !

Barazimin e shumëzojmë me shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve SHVP (формула) ku (формула) d.m.th., (формула) dhe (формула).

Vijon, (формула)

Për (формула), barazimi ka zgjidhje të vetme dhe atë (формула)

Për (формула), barazimi nuk ka zgjidhje d.m.th., barazimi i formës (формула).

Në vazhdim do të japim disa detyra tekstuale të cilat mund të zgjidhen me ndihmën e barazimeve lineare me një të panjohur.

Shembulli 4. Shuma e tre numrave natyrorë të njëpasnjëshëm është 246. Caktoji ata numra. Le të jenë (формула) dhe (формула) tre numra të njëpasnjëshëm.

Prej kushteve të detyrës kemi se shuma e tyre është 246. Domethënë, (формула). Ata numra janë: 81, 82 dhe 83.

Shembulli 5. Sara është 5 vjet më e re prej Laurës.

Katër vjet më vonë, Laura do të jetë dy herë më e vjetër se Sara.

Cakto moshën e tanishme të Sarës dhe Laurës.

Nëse me  $x$  e shënojmë moshën e Laurës, atëherë  $x - 5$  është mosha e Sarës.

Katër vitet e fundit, mosha e Laurës do të jetë  $x + 4$ , ndërsa të Sarës  $x - 5 + 4$ . Sipas kushti të detyrës, katër vjet më vonë Laura do të jetë dy herë më e vjetër se Sara, pra vijon Domethënë, mosha e tanishme e Laurës është 6 vjet, ndërsa Sara është vjet.

Shembulli 6. Çmimi i dy tavolinave dhe tri karrigeve është 7050 denarë. Nëse një tavolinë kushton 400

denarë më shumë se një karrige, cakto çmimin për një tavolinë dhe një karrige.

Nëse me  $x$  e shënojmë çmimin e një karrige, sipas kushtit të detyrës  $400 + x$  është çmimi për një tavolinë (tavolina kushton 400 denarë më shumë se karrigia).

Atëherë, çmimi i tri karrigeve është  $3x$ , ndërsa për dy tavolina është Pasi dihet se 7050 denarë është çmimi i përgjithshëm për dy tavolina dhe tri karrige, kemi:

Domethënë, çmimi për një karrige është 1250 denarë, ndërsa çmimi për një tavolinë është



Shembulli 7. Gjatësia e drejtkëndëshit është dyfish më e madhe se gjerësia. Nëse perimetri është 78 metra, njehso gjatësinë dhe gjerësinë e drejtkëndëshit.

Le të jetë  $x$  gjerësia e drejtkëndëshit, atëherë  $2x$  është gjatësia. Prej kushtit të detyrës dihet se perimetri i drejtkëndëshit është 78 metra, kështu kemi: (формула).

d.m.th., 13 metra është gjerësia dhe (формула) metra është gjatësia e drejtkëndëshit.

Detyra për punë të pavarur:

1. Zgjidhi barazimet në fushën e përkufizimi:

a); b);

2. Emëruesi i një numri racional është më i madh se numëruesi i tij për 3. Nëse numëruesi zmadhohet për 7, ndërsa emëruesi zvogëlohet për 1, numri i ri bëhet (формула). Caktoje atë

3. Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 12. Nëse shifrat i ndërrojnë vendet, numri i ri është për 18 më i vogël se i pari. Cili është ai numër?

4. Sa mg metal që përmban 45% nikel duhet të kombinohet me 6 mg nikel të pastër që të fitohet legurë që përmban 78% nikel?

5. Cakto numrin ku një e gjashta është më e vogël prej një të katërtës për 3.

6. Nëse blini libër për 350 denarë, që është për 30% i zvogëluar prej çmimit të rregullt, cili është çmimi i rregullt i librit?

#### 4. Forma e zgjidhur e pabarazimit linear me një të panjohur

Para se të futim pabarazim linear me një të panjohur dhe ta shqyrtojmë zgjidhjen e tij, të përgjigjemi në disa pyetje.

Mendo dhe përgjigju!

o Çfarë është pabarazim numerik? Jepni shembull!

o Cili interval e paraqet bashkësinë? Paraqiti tek intervalin grafikisht në drejtëzën numerike!  
Çfarë është zgjidhje e pabarazimit (формула), analitikisht, grafikisht?

Së pari, ta përkufizojmë konceptin pabarazim me një të panjohur.

Prej dy shprehjeve algebrike edhe me një ndryshore, të lidhura me njërën prej shenjave për pabarazim (формула) ose (формула) fitohet pabarazim që quhet pabarazim me një të panjohur.

Shembulli 1. Pabarazimet (формула) janë shembuj të pabarazimeve lineare me një të panjohur.  
Ngjashëm sikurse te barazimet me një të panjohur edhe këtu mund të kryhen transformime ekuivalente.

D y pabarazime (формула) dhe (формула) janë pabarazime ekuivalente nëse bashkësia e zgjidhjeve të tyre janë të barabarta ndërmjet tyre. Shënohet  
Disa prej vetive të relacionit ekuivalencë që shfrytëzohen gjatë zgjidhjes së pabarazimeve janë:

Këto veti të relacionit të ekuivalencës që shfrytëzohen gjatë zgjidhjes së pabarazimeve i quajmë edhe

një të panjohur, të sqarojmë çfarë është bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit me një të panjohur.

aba një të panjohur, sikurse që është

Nëse për ndonjë vlerë të të panjohurës, pabarazimi linear kalon në pabarazim numerik të saktë, atëherë për atë vlerën themi se është zgjidhje e pabarazimit linear me një të panjohur.

Bashkësia e vlerave për të cilat pabarazimet kalojnë në pabarazime të sakta numerike pabarazimi quhet bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit.

Shembulli 3.

Çdo numër prej intervalit (формула) është zgjidhje e pabarazimit (формула), pasi pabarazimi (формула) kalon në pabarazim numerik të saktë.

Shembulli, për (формула) pabarazimi (формула) kalon në pabarazim numerik të saktë (формула).

Zgjidhja (формула) është një zgjidhje e pabarazimit, por intervali (формула) është bashkësia e zgjidhjeve të tij.

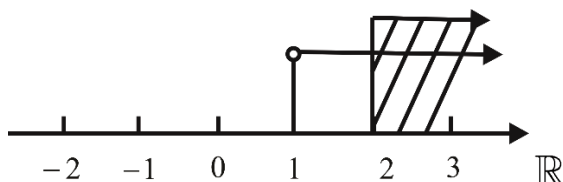
Çdo pabarazim që mund të sillet në formën (формула), ku (формула), quhet pabarazim linear me një të panjohur.

Оттука, наместо на целото множество на реални броеви одеднаш, ќе разгледуваме на два интервали  $[1, +\infty)$  и  $(-\infty, 1)$ .

1) Кога  $x \in [1, +\infty)$ , неравенката го добива обликот:

$$x - 1 + 2x > 5 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2.$$

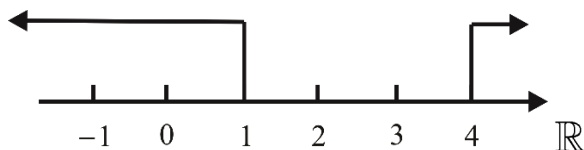
Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме  $[1, +\infty)$  и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка,  $(2, +\infty)$ , го добиваме интервалот  $(2, +\infty)$ .



2) Кога  $x \in (-\infty, 1)$ , неравенката го добива обликот:

$$-x + 1 + 2x > 5 \Leftrightarrow x > 4 \Leftrightarrow x > 4.$$

Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме  $(-\infty, 1)$  и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка,  $(4, +\infty)$ , добиваме  $\emptyset$ .



Конечно, решение на почетната равенка со апсолутна вредност ќе биде унијата од добиените решенија  $(2, +\infty) \cup \emptyset = (2, +\infty)$ .

б)  $|2x - 1| + |x - 3| \leq 5$

Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1), & 2x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x - 1), & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3), & x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases}$$

Оттука, решението на линеарната неравенка ќе го разгледуваме на интервалите:

Prej përkufizimit për vlerë absolute kemi (формула):

Prej këtui, zgjidhjen e pabarazimit linear do ta shqyrtojmë në intervale:

1) Kur pabarazimi e fiton formën (формула)

Nëse caktojmë prerjen e intervalit tek i cili shqyrtojmë edhe intervalin që e fituam me zgjidhjen e pabarazimit linear e fitojmë intervalin

2) Kur (формула), pabarazimi e fiton formën

Nëse gjejmë prerje të intervalit tek i cili shqyrtojmë edhe intervalin që e fituam si zgjidhje të pabarazimit linear (цртеж)

3) Kur , pabarazimi e fiton formën

Nëse gjejmë prerje të intervalit tek i cili e shqyrtojmë edhe intervalin që e fitojmë me zgjidhjen e pabarazimit linear (, e kemi

Përfundimisht si zgjidhje të pybarazimit fitojmë interval që është union prej të gjitha zgjidhjeve, domethënë

—

Detyra për punë të pavarur:

1. Kontrollloji cilët prej këtyre të çifteve të pabarazimeve janë ekuivalente:

a) (формула) dhe (формула) b) (формула) dhe (формула)

2. Zgjidhi pabarazimet lineare me një të panjohur:

a) b) c) ç)

3. Zgjidhi pabarazimet lineare me një të panjohur

a) b) c) ç)

4. Zgjidhi pabarazimet lineare me një të panjohur: (формула).

5. Cakto numrin e plot më të madh që e kënaq pabarazimin: (формула)

6. Cakto shenjën e funksionit (формула). Pastaj të gjendet zeroja e funksionit

—

## 5. . Sistemi i pabarazimeve lineare me një të panjohur dhe tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur

### 5.1. Sistemi i pabarazimeve lineare me një të panjohur

**Cakto bashkësinë e pabarazimeve lineare me një të panjohur (формула) Prerja e intervaleve (формула) dhe (формула) është intervali (формула) Prerjen e intervaleve të lartpërmendura paraqite grafikisht.**

Konjuksioni i dy ose (më shumë) pabarazimeve lineare me një të panjohur, domethënë (формула) ose (формула) quhet sistem i pabarazimeve lineare me një të panjohur

Në vend të shenjës (формула), mund të qëndrojë cilëdo prej shenjave për pabarazi (формула) ose (формула)

Bashkësia e vlerave për të cilat pabarazimet njëkohësisht kalojnë në pabarazi numerike të saktë quhen bashkësi e zgjidhjeve të sistemit të pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Çdo numër i atillë quhet zgjidhje e atij sistemi të pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Të shqyrtojmë këta shembuj:

**Shembulli 1. Zgjidhe sistemin e pabarazimeve lineare me një të panjohur a) b) c)**

(формула) d.m.th., bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë të sistemi është intervali (формула), ndërsa të pabarazimit të dytë është (формула). Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është prerja e bashkësisë së zgjidhjeve të çdo pabarazimi në veçanti, domethënë (формула)

Bashkësia e zgjidhjeve mund të paraqitet në boshtin numerik,

omethënë, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimeve të sistemi janë intervalet dhe , përkatësisht. Domethënë, sistemi nuk ka zgjidhje pasi prerja e këtyre intervaleve është bashkësi e zbrazët, domethënë (цртеж)

Bashkësia e sistemit të pabarazimeve është prerja dhe e paraqitur në boshtin numerik është ((цртеж)

## 5.2. Tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur

Unioni i intervaleve ose është

Unioni i intervaleve të lartpërmendura të paraqiten grafikisht.

Disjunksioni prej dy (ose më shumë) pabarazimeve lineare me një të panjohur, domethënë ose , quhet tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Në vend të shenjës mund të qëndrojë cilado shenjë për pabarazimin ose.

Bashkësia e vlerave për të cilat të paktën njëri prej pabarazimeve kalon në pabarazi të saktë numerike quhet bashkësia e zgjidhjeve të tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Çdo numër i atillë quhet zgjidhje e tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur.

## 5.2. Tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur

Unioni i intervaleve (формула) ose (формула) është (формула)

Unioni i intervaleve të lartpërmendura të paraqiten grafikisht

Disjunksioni prej dy (ose më shumë) pabarazimeve lineare me një të panjohur, domethënë (формула) ose (формула), quhet tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Në vend të shenjës (формула) mund të qëndrojë cilado shenjë për pabarazimin (формула) ose (формула).

Bashkësia e vlerave për të cilat të paktën njëri prej pabarazimeve kalon në pabarazi të saktë numerike quhet bashkësia e zgjidhjeve të tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Çdo numër i atillë quhet zgjidhje e tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Shembulli 2.

Zgjidhe tërësinë e pabarazimeve lineare me një të panjohur: a) b) c) d.m.th., bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të parë në tërësinë e pabarazimeve lineare me një të panjohur është intervali (формула), ndërsa te pabarazimi i dytë është (формула).

Bashkësia e zgjidhjeve të tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur është unioni i bashkësisë së zgjidhjeve të çdo pabarazie në veçanti, domethënë (формула).

Bashkësia e zgjidhjeve është paraqitur te boshti numerik është (цртех),

Domethënë bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimeve te tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur janë intervalet

dhe , përkatësisht. Domethënë, tërësia e pabarazimeve lineare me një të panjohur është unioni prej të dy intervaleve .

Paraqitja gjeometrike e bashkësisë së zgjidhjeve të tërësisë së pabarazimeve lineare me një të panjohur te boshti numrik është .

Të zgjidhim edhe shembuj të përbërë të detyrave të cilat sillen në sistem të pabarazimeve lineare me një të panjohur, por edhe të tërësisë së sistemeve të pabarazimeve lineare me një të panjohur.

### Shembulli 3. Zgjidhe pabarazimin (формула)

Vijimisht pabarazimin e sjellim në dy sisteme të pabarazimeve lineare, domethënë (формула) ose (формула) (thyesa është numër pozitiv nëse numëruesi dhe emëruesi kanë shenja të njëjta). Është e qartë se bëhet fjalë në tërësinë e dy sistemeve të pabarazimeve lineare me një të panjohur

Prandaj, i njehsojmë bashkësitë e zgjidhjeve të dy sistemeve dhe pastaj caktojmë unionin e dy bashkësive të zgjidhjeve, e cila do të jetë zgjidhje e pabarazimit.

Domethënë, (формула) bashkësia e zgjidhjeve të sistemit (формула) është intervali (формула), ndërsa bashkësia e zgjidhjeve të sistemit (формула) është bashkësi e zbrazët (формула). Kështu, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit është intervali (формула)

Përpiku ta paraqesësh bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik!

### Shembulli 4. Zgjidhe pabarazimin

Pabarazimin (формула) e sjellim në dy sisteme të pabarazimeve dhe atë (формула) ose (формула)

(prodhimi i dy numrave është negativ nëse shumëzuesit kanë shenja të kundërta

Është e qartë se bëhet fjalë në tërësinë prej dy sistemeve të pabarazimeve lineare me një të panjohur.

Pastaj i zgjidhim edhe dy sisteme të pabarazimeve (формула):

(формула), domethënë bashkësia e zgjidhjeve është intervali (формула)

(формула), domethënë bashkësia e zgjidhjeve është e zbrazët (формула)

Domethënë, bashkësia e zgjidhjeve të pabarazimit të dhënë është intervali (формула)

o Përpiqu ta paraqesësh bashkësinë e zgjidhjeve te boshti numerik!

Në fillim të kësaj njësie modulare sqaruam se si zgjidhen pabarazime me vlerë absolute. Tani me ndihmën e një shembulli do të sqarojmë edhe një mënyrë për zgjidhjen e pabarazimeve lineare me vlerë absolute.

Shembulli 5.

Zgjidhi pabarazimet me vlerë absolute:

a) Prej përkufizimit për vlerë absolute kemi (формула) që është njëjtë me zgjidhjen e sistemit të pabarazimeve lineare, (формула) d.m.th., bashkësia e zgjidhjeve është intervali (формула)

o Përpiqu ta paraqesësh bashkësinë e zgjidhjeve te boshti numerik!

b) Ngjashëm sikurse te detyra paraprake kemi: domethënë intervali , që është njëjtë me zgjidhjen e sistemit të pabarazimeve lineare me një të panjohur

Shembulli 6. Zgjidhi pabarazimet me vlerë absolute:

a); b)

a) Pabarazimin (формула) e paraqesim në formën (формула). Fitohet sistem pabarazimesh (

o Përpiku ta paraqesësh bashkësinë e zgjidhjeve te boshti numerik!

b) Pabarazimin (формула) e paraqesim në formën (формула)

Fitohet sistem pabarazimesh (формула)

o Përpiku ta paraqesësh bashkësinë e zgjidhjeve te boshti numerik!

Detyra për punë të pavarur:

1. Zgjidhe sistemin e pabarazimesh me një të panjohur: a) b) c) ç)
2. Zgjidhe pabarazimin: a); b).
3. Zgjidhe pabarazimin: a); b)
4. Zgjidhe pabarazimin me vlerë absolute: a) b) c) ç) d) dh)

$$\text{г) } \frac{|x-4|}{5} \leq 2; \quad \text{д) } |x+1| \leq 2-3x; \quad \text{е) } 3x+|x+1| \leq 2.$$

## 6. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Kontrolllo se numri (формула) ëa shtë zgjidhje e barazimit (формула)
2. Zgjidhe barazimin: (формула)
3. Për cilën vlerë të parametrin a barazimi (формула) ka zgjidhje (формула)
4. Zgjidhe pabarazimin me vlerë absolute (формула)
5. Një numër është tri herë më i madh se numrit i dytë, ndërsa shuma e tyre është 84. Caktoji ata numra.
6. Provo se ky çift pabarazimesh a janë ekuivalent: (формула) dhe (формула)
7. Zgjidhe pabarazimin linear (формула)
8. Cakto shenjën e funksionit (формула). Pastaj cakto zeron e funksionit.
9. Zgjidhe sistemin e pabarazimeve (формула)
10. Zgjidhe pabarazimin me vlerë absolute (формула)

# 6

## FUNKSIONI LINEAR SISTEMI BARAZIMESH LINEARE ME DY TË PANJOHURA



### QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

Duke mësuar njësinë modulare, nxënësi duhet të aftësohet:

- të përkufizojë dhe njohë funksion linear;
- të bëjë grafikun e funksionit linear;
- të caktojë vetitë e funksionit linear;
- të caktojë paralelizmin e drejtëzave të fituara si grafik të funksioneve lineare varësisht prej koeficientit;
- të zgjidhë sistem prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura me metoda të ndryshme;
- të diskutojë zgjidhjen e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura me shfrytëzimin e rregullave të Kramerit;
- të zgjidhë probleme praktike të cilat sillen në zgjidhjen e sistem barazimesh me dy të panjohura
-

## **PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 6**

**225. Funksioni linear. Grafiku i funksionit linear**

**228. Vetitë e funksionit linear**

**235. Sistem prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura**

**239. Zgjidhja e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura me metodën e koeficientëve të kundërt**

**241. Zgjidhja e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura: Metoda e Gausit dhe metoda grafike**

**245. Rregullat e Kramerit për zgjidhjen e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura**

**249. Zbatimi i sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura**

**252. Detyra për përsëritje të njësisë modulare**

## 1.1. Funksioni linear

T'i shqyrtojmë këta shembuj:

**Shembulli 1.** Një fëmijë posa i lindur peshon 2,5 kg. Sa do të peshojë pas  $x$  ditëve prej lindjes, nëse dihet se në 2 muajt e parë pas lindjes rritja mesatare ditore e peshës së fëmijës është 0,05 kg?

Është e qartë se për  $x$  ditë pasha e fëmijës do të zmadhohet për  $0.05x$  kg. Nëse pashën e fëmijës në ditën  $x$  pas lindjes së tij e shënojmë me  $T$ , atëherë  $T = 0.05x + 2.5$ .

Domethënë, peshën e fëmijës e paraqesim si funksion prej vjetërsisë së tij  $x$ , ku (формула) ditë.

**Shembulli 2.** Një thupër e nikelit e gjatë 1 m është nxehur në temperature prej  $t_0$  C. Të caktohet gjatësia e saj  $L$ .

Thupra e gjatë të nikelit 1 m në  $00C$  me nxemje për  $10C$  zgjatet për 0,0013 cm. Nëse nxehet në  $t_0C$  ajo do të zgjatet  $0.0013t$  cm. Gjatësia e saj do të jetë  $L = 0.0013t + 100$ .

Domethënë, gjatësinë e thuprës e paraqesim si funksion të temperaturës  $t$  me të cilan e nxejmë thuprën.

Funksionet e fituara te të dy shembujt janë funksione lineare.

- Funksionet e formës  $y = 2x + 3$ ,  $f(x) = -3x + 5$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -x$  janë funksione lineare.

- Te funksioni  $y = 2x + 3$ , koeficienti para argumentit është 2, anëtari i lire është 3.

Ndërsa tani funksioni,  $y = 2x$  koeficienti para argumentit është 2, por anëtari i lirë është 0.

Mendo dhe përgjigju:

- o Për cilët numra është përkufizuar funksioni linear?

- o Cila është bashkësia e vlerave të funksionit linear?

Të japim edhe dy shembuj të funksionit linear:

Shembulli 3.

- a) Funksionin linear e hasim në fizikë gjatë të mësuarit e lëvizjes drejtvizore uniforme ku rruga e kaluar  $x(t) = vt$  njehsohet si funksion prej kohës  $t$ , por  $v$  është shpejtësia e lëvizjes.
- b) Funksion linear kemi edhe te lëvizja e nxituar drejtvizore, ku është dhënë varësia (формула) prej kohës  $t$ , por  $v_0$  është shpejtësia fillestare e lëvizjes, por  $a$  është nxitimi.

Funksioni i formës (формула) ku  $a, b$  janë konstantë (çfarëdo numra realë, por  $x$  është ndryshore ose argument quhet funksion linear. Koeficienti para argumentit është  $a$ , por  $b$  është anëtar i lire.

Domeni (bashkësia e përkufizimit) (формула) dhe bashkësia e vlerave (формула) të funksionit linear është bashkësia e numrave realë (формула)

1. Le të jetë dhënë funksioni linear (формула). Cakto: a) b) c)

#### 1.2. Grafiku i funksionit linear

Të studiohet vijimi i një funksioni, domethënë të caktohet bashkësia e përkufizimit të tij dhe të shqyrtohet se si ai ndryshon vlerën e tij kur rritet argument i tij. Më lart vërejtëm shembuj të funksioneve lineare. Për grafikët e tyre, më saktë për grafikun e funksionit linear është kjo e saktë:

- Grafiku i funksionit linear është bashkësia (формула)
- Bashkësia (формула) gjeometrikisht paraqitet te sistemi kënddrejtë koordinativ i Dekartit në rrafsh
- Grafiku i funksionit linear është drejtëz. Prej aksiomës: “Nëpër dy pika kalon një dhe vetëm një drejtëz”, të vizatuarit e funksionit linear bëhet me ndihmën e dhënies së dy pikave që shtrihen te drejtëza.

#### Shembulli 4.

Ta vizatojmë grafikun e funksionit linear (формула). Grafiku është bashkësia (формула). Hapat për të vizatuar grafikun e funksionit linear (формула) janë

Bashkësia e përkufizimit të funksionit linear është bashkësia e numrave realë (формула). Prandaj për argumentin e funksionit linear zgjedhim çfarëdo dy numra realë 0 dhe 1. Për numrat e zgjedhur realë i gjejmë vlerat e funksionit (формула). Pastaj, e paraqesim funksionin linear (формула) në mënyrë tabelare

2. Fitojmë dy pika që shtrihen te grafiku i funksionit linear (формула), por ato janë (формула) dhe (формула)

3. I bartim pikat A dhe B te sistemi kënddrejtë koordinativ i Dekartit dhe e vizatojmë drejtëzën

Mendo dhe përgjigju:

o Si quhet boshti x, por si boshti y?

o Si quhet pika O (0,0)?

o Cilat janë koordinatat e pikave që shtrihen në boshtin e abshisës x, kurse cilat janë koordinatat e pikave që shtrihen te boshti y?

2. Vizato grafikët e këtyre funksioneve lineare: (формула)

**Detyra për punë të pavarur:**

**1. Le të jetë dhënë funksioni linear. Njehso (формула**

**a); b); c)**

**2. Për këto funksione lineare:**

**a); b); c) cakto koeficientët para argumentit dhe anëtarin e**

**3. Vizato grafikët e këtyre funksioneve lineare:**

**a); b); c).**

**4. Për cilën vlerë të parametrin  $k$  funksioni (формула) kalon nëpër pikë**

**5. Gjeje funksionin linear (формула) nëse për atë është e saktë (формула) dhe Çfarë vëren?**

**2. Vetitë e funksionit linear**

**Pasi e futëm funksionin linear, këtu do t'i përkushtohemi vetive të tij. Për funksionin linear e dimë se:**

**• Funksioni me formën (формула), ku,  $a$ ,  $b$  janë konstantë (çfarëdo numra realë), por  $x$  është ndryshore ose argument quhet funksion linear.**

**Koeficienti para argumentit është  $a$ , por  $b$  është anëtar i lirë.**

**• Domeni (bashkësia e përkufizimit) (формула) dhe bashkësia e vlerave (формула) të funksionit linear është bashkësia e numrave realë (формула)**

**Shembulli 1. Te vizatimi në të njëjtin sistem koordinativ janë vizatuar funksionet lineare**

Funksioni i parë linear (формула) i pren të dy boshtet koordinative në fillimin e koordinatave.

Funksioni i dytë linear  $y = -2x + 6$  e pret boshtin e abshisave në pikën (формула), por të ordinatave në pikën (формула).

❖ Prerjet e funksionit linear  $y = ax + b$  me boshtet koordinative mund t'i caktojmë edhe analitikisht, pa e vizatuar grafikun e tij.

Prerja e grafikut të funksionit linear (формула) me boshtin e abshisave  $x$  është pika e formës (формула). Kjo do të thotë se funksioni është i barabartë me zero, domethënë (формула) dhe (формула) fitohet si zgjidhje e të panjohurës  $x$  të barazimit linear (формула)

Fitojmë se pika me koordinata (формула) është prerja e grafikut të funksionit linear  $y = ax + b$  me abshisën  $x$ . Vlera e argumentit për të cilën funksioni është i barabartë me zero quhet zero e funksionit.

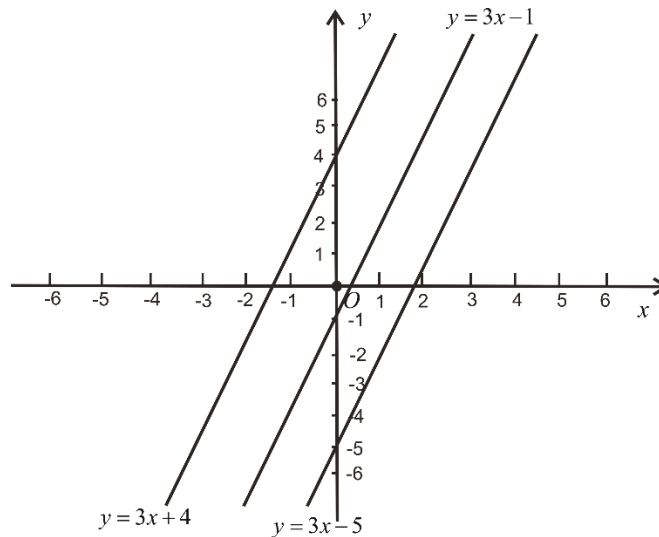
❖ Prerja e grafikut të funksionit linear  $y = ax + b$  me boshtin e ordinatave është pike e formës  $(0, y)$ . Kjo do të thotë se për  $x = 0$  fitohet (формула). Domethënë, pika me koordinata  $(0, b)$  është prerje e grafikut të funksionit linear  $y = ax + b$  me boshtin e ordinatave  $y$ .

1. Cakto prerjet me boshtet koordinative të funksioneve lineare:



Të gjendet zero e funksionit të çdonjërës prej funksioneve të dhëna lineare.

Shembulli 2. Në të njëjtin sistem koordinativ i vizatojmë grafikët e funksioneve lineare (формула). I fitojmë këta grafikë

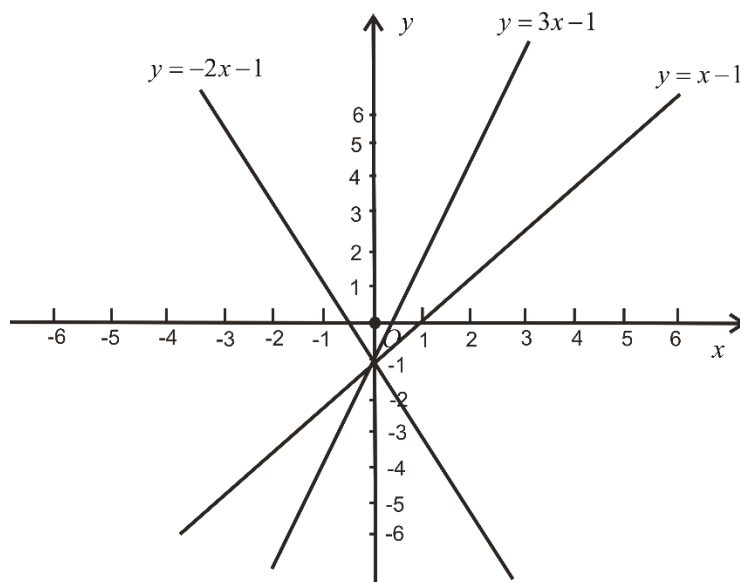


o Shqyrtoji këto tri drejtëza dhe si është raporti i tyre reciprok?

Me siguri përfundove se të tri drejtëzat janë paralele. Kjo nuk është rastësisht, pasi kur koeficientët para argumentit janë të barabartë, atëherë grafikët e funksioneve lineare janë drejtëza paralele.

2 Cakto parametrin  $a$  për të cilin grafiku i funksionit linear (формула) është paralel me grafikun e funksionit (формула). Cilin funksion linear e fitove?

Shembulli 3. T'i vizatojmë në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve lineare (формула). I fitojmë këta grafikë

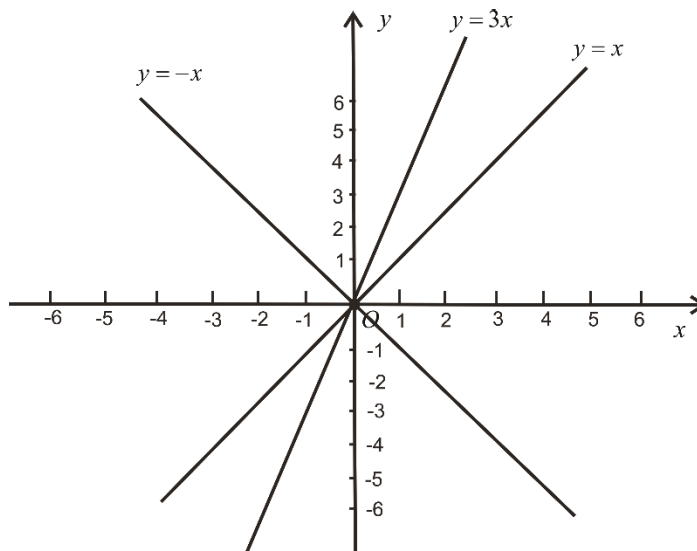


Me siguri përfundove se të tri drejtëzat priten në një pikë dhe atë në pikën  $(0, -1)$ .

Kjo nuk është rastësisht, pasi kur anëtarët e lire janë të barabartë, atëherë grafikët e funksioneve lineare priten në pikën  $(0, b)$  në boshtin e ordinatave  $y$ .

3. Cakto parametrin  $a$  për të cilin grafiku i funksionit linear  $y = (a - 3)x + a$  e pret boshtin e ordinatave në të njëjtën pikë me grafikun e funksionit  $y = -3x + 1$ . Cilin funksion linear e fitove?

Shembulli 4. T'i vizatojmë në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve



o Shqyrtoji grafikët e funksioneve lineare. Çfarë konstaton për grafikët e tyre?

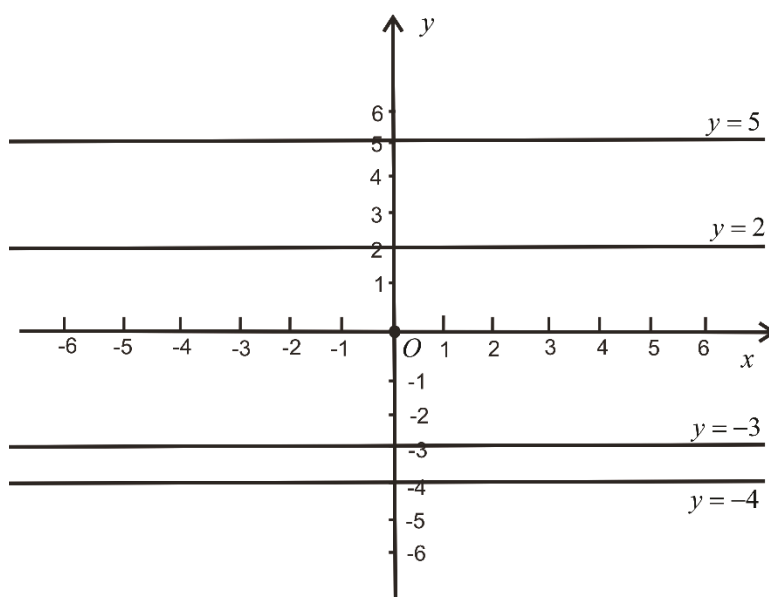
Me siguri konstatove se të tri drejtëzat kalojnë nëpër fillimin e koordinatave  $O(0,0)$

Kjo nuk është rastësisht, pasi kur anëtarët e lire janë të barabartë me zero, atëherë grafikët e funksioneve lineare

kalojnë nëpër fillimin e koordinatave  $O(0,0)$ .

4. Cakto parametrin  $a$  për të cilin grafikët e funksionit linear (формула) kalojnë nëpër fillimin e koordinatave (формула). Cilin funksion linear e fitove?

Shembulli 5. T'i vizatojmë në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve  $y = -3$ ,  $y = 2$ ,  $y = 5$ ,  $y = -4$  :



- o Me siguri përfundove se të katër drejtëzat janë paralele me boshtin e abshisës  $x$ .

Kjo ndodh kur koeficienti para argumentit është zero d.m.th., për  $a = 0$  funksioni linear e ka formën  $y = b$ . Funksioni i këtillë quhet funksion konstant

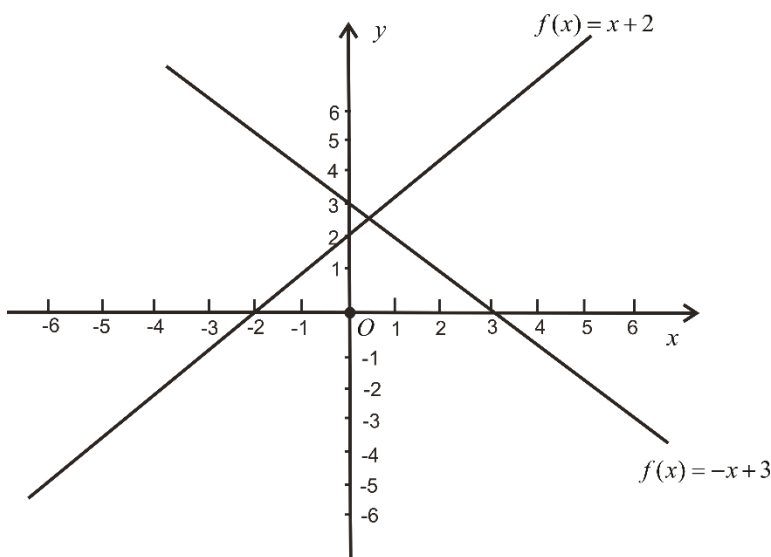
- o 5. Cakto parametrin  $a$  për të cilin funksioni linear (формула) është funksion konstant. Cilin funksion linear e fitove?  
Mendo dhe përgjigju:

Le të jenë dhënë funksionet lineare (формула). Për funksionin linear (формула), vlen se (формула). Vërejmë se nëse rritet argumenti, rritet edhe vlera e funksionit linear (формула). Deri tani për funksionin linear (формула), vlen. Vërejmë se nëse rritet argumenti, vlera e funksionit linear bie.

Kjo nuk është rastësisht, pasi funksioni i dhënë linear (формула) a rritet ose bie, varet prej shenjës së koeficientit para argumentit

Prandaj a quhet edhe koeficienti i drejtimit.

6. T'i vizatojmë funksionet lineare (формула) (цртеж)



Prej grafikëve të funksioneve të dhëna lineare (формула) përfundohet se kur koeficienti i drejtimit është numër real pozitiv (формула), atëherë funksioni monotonisht rritet, por për koeficienti i drejtimit është numër negativ (формула) funksioni monotonisht bie.

6. Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoji grafikët e këtyre funksioneve lineare: (формула). Cilët prej tyre kanë grafikë të cilët janë drejtëza paralele? Cilët grafikë priten në pikën e njëjtë të boshtit të ordinatave? Cilët grafikë rriten monotonisht, por cilët bien monotonisht?



Prerja e funksioneve lineare (формула) me boshtin e abshisës  $x$  quhet funksion zero

Grafikët e dy funksioneve lineare (формула) janë paralele, nëse koeficientët e tyre të drejtimit janë të barabartë ndërmjet veti d.m.th.,  $a =$

Grafikët e funksioneve lineare (формула) priten në të njëjtën pikë të boshtit të ordinatës, nëse kanë anëtarë të lire të njëjtë d.m.th.,  $b =$

Grafikët e funksioneve lineare (формула) kalojnë nëpër fillimin e koordinatave, nëse anëtari i tij i lire është 0 d.m.th.,  $b = 0$

Për monotoninë e funksionit linear (формула) mund të themi

- monotonisht rritet (формула) nëse d.m.th., për çfarëdo (формула)
- monotonisht zvogëlohet (формула) nëse d.m.th., për çfarëdo (формула)

Funksioni linear (формула) është funksion konstant nëse (формула)

Detyra për punë të pavarur:

1. Për funksionet lineare:

a) b) c)

cakto prerjet me boshtet e koordinatave!

2. Është dhënë funksioni linear  $y = (k + 1)x - 3$ . Cakto parametrin  $k$ , për të cilin:

a) funksioni linear ka zero  $x = 3$ ;

b) grafiku i funksionit linear është paralel me simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë;

c) funksioni linear rritet;

ç) funksioni linear zvogëlohet;

d) funksioni linear është funksionon konstant;

3. funksioni linear rrallë funksioni  $y = (2k + 1)x - 1$  për disa vlera të parametrin  $k$  kalon nëpër fillimin e koordinatave?

4. Për cilën vlerë të parametrin  $k$  grafikët e të dy funksioneve lineare  $y = (2k + 1)x - k$ ,  $y = 2x - e$  prejnë boshtin e ordinates në pikën e njëjtë?

5. Për cilën vlerë të parametrin  $k$  grafikët e të dy funksioneve lineare  $y = (2k + 1)x - k$ ,  $y = (2 - k)x - 1$  janë drejtëza paralele?

### 3. Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura

#### 3.1. Koncepti për barazim linear me dy të panjohura

Koncepti barazi, identitet dhe barazim tanimë janë të mësuara. Këtu përsëri kthehemi te barazimet.

- Barazimet (формула), janë barazime lineare me dy të panjohura  $x$  dhe  $y$
- Për barazimin linear me dy të panjohura (формула) zgjidhje te bashkësia e numrave natyrorë (формула) janë çifte të renditura  $(4,2)$ ,  $(6,5)$ ..., në bashkësinë e numrave të plotë (формула) janë çifte të renditura  $(4,2)$ ,  $(6,5)$ ,  $(0,-4)$ ,  $(-2,7)$   $\mathbb{Z}$
- Vërehet se barazimi linear me dy të panjohura ka pakufi shumë zgjidhje d.m.th., ai është i papërcaktuar.

#### 1. Të caktohen disa zgjidhje të barazimit linear me dy të panjohura (формула) në (формула)

Barazimi linear me dy të panjohura është barazim i llojit (формула) ku (формула) numrat (формула) quhen koeficient para të panjohurës, numri  $c$  është anëtar i lire, por (формула) dhe (формула) janë të panjohura të barazimit linear me dy të panjohura.

Për zgjidhjet e barazimit linear me dy të panjohura d.m.th., për formën normale të barazimit linear me dy të panjohura e saktë është:

Të zgjidhet barazimi linear me dy të panjohura domethënë të caktohet çifti i renditur i numrave realë të lejuar (формула) për të cilët barazimi  $ax + by = c$ , bëhet gjykim i vërtetë d.m.th., i saktë (формула).

Barazimi linear me dy të panjohura ka pakufi shumë zgjidhje d.m.th., ai është i papërcaktuar.

Vërejtje: Mënyrat për fitimin e barazimit ekuivalent me barazimin linear me dy të panjohura janë identike me mënyrat e dhëna për barazimin linear me një të panjohur te njësia modulare paraprake

Shembulli 1. Barazimi linear me dy të panjohura (формула) është ekuivalent me barazimi linear me dy të panjohura (формула). Barazimi i fundit linear me dy të panjohura është në formën normale (të përgjithshme)

2, Barazimi vijues linear me dy të panjohura (формула) mund të sillet në formën normale (të përgjithshme)

### 3.2. Koncepti për sistemin e barazimeve lineare me dy të panjohura

Shpeshherë te detyrat problemore kërkohen zgjidhjet e përbashkëta të dy barazimeve me dy të panjohura.

Bashkësia e dy barazimeve me dy të panjohura, për të cilat kërkohen zgjidhje të përbashkëta, quhet sistem prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura me formën (формула) (flasim për konjunksionin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura), ku (формула). Numrat (формула) quhen koeficientët para të panjohurës, por numrat (формула) quhen anëtarë të lire të sistemit

### Shembulli 2

Kastrioti dhe Beni kanë shkuar së bashku në treg, Kastrioti ka blerë 2 kg mollë dhe 3 kg kumbulla dhe ka shpenzuar 190 denarë.

Beni ka blerë prej mollëve të njëjta 3 kg dhe prej kumbullat e njëjta 5 kg dhe ka shpenzuar 300 denarë. Sa denarë kushton 1 kg mollë, ndërsa sa 1 kg kumbulla?

$$2x + 3y = 190$$

Μένδο dhe πλργραφφ:

ο Γφιτημονλ σιστεμι πρεφ δψ βαραζιμεσε λινεαρε με δψ τλ πανφοηυρα α κα ζγφιδηφε τλ σετμε?

Πλρ ζγφιδηφεν ε σιστεμιτ πρεφ δψ βαραζιμεσε λινεαρε με δψ τλ πανφοηυρα λσητλ ε σακτλ κφο

Zgjidhje e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura është çdo çift i renditur (формула)

prej numrave realë të lejuar për të cilët të dy barazime te sistemi (формула) kalojnë në gjykime të vërteta d.m.th., (формула)

Sistemi mund të ketë zgjidhje të vetme (sistemi është përcaktuar), të mos ketë zgjidhje (sistemi është kundërthënës) ose të ketë pakufi shumë zgjidhje (sistemi është i papërcaktuar).

❖ Forma (формула) e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura quhet forma normale ose e përgjithshme e sistemit të barazimeve me dy të panjohura.

❖ Dy sisteme prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura janë ekuivalent në të njëjtën fushë të përkufizimit, nëse çdo zgjidhje e njërit sistem është zgjidhje edhe e sistemit tjetër.

❖ Sistemi ekuivalent me të dhënin fitohet kur cilido barazim të sistemit zëvendësohet me barazimin ekuivalent.

❖ Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura, nëse nuk është në formën e përgjithshme, atëherë me shfrytëzimin e të dhënit mund të sillet në formën normale (të përgjithshme).

Shembulli 3. Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura (формула) është në formën normale ose të përgjithshëm, por mund ta sjellim në këtë mënyrë:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 3/2 \\ \frac{x+y}{3} = -2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 6 \\ x+y = -6 \end{cases}$$

3. Cilat prej këtyre çifteve të renditura është zgjidhje e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura

4. Këto sisteme prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura silli në formën normale: a) b)

Detyra për punë të pavarur:

1. Cakto disa çifte të numrave të plotë të cilët janë zgjidhje të sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura

2. Këtë barazim linear me dy të panjohura silli në formën normale (të përgjithshme)

3. Cili prej këtyre çifteve të renditura është zgjidhje e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohu

4. Këto sisteme të dy barazimeve lineare me dy të panjohura silli në formën normale (të përgjithshme):

$$\text{a) } \begin{cases} 3(x+y) - \frac{y}{7} = \frac{2}{5} \\ \frac{x-y}{2} + 3(x+y) = \frac{5}{7} \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} 2\frac{x-y}{7} + \frac{x+y}{5} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-2y}{5} - \frac{1}{7} = \frac{y}{2} \end{cases}.$$

## **4. Zgjidhja e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura: metoda e zëvendësimit dhe metoda e koeficientëve të kundërt**

### **4.1. Metoda e zëvendësimit**

Metoda e zëvendësimit për zgjidhjen e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura e shfrytëzojmë vetëm te sistemet të cilat janë në formën normale (të përgjithshme) (формула). Nëse nuk janë, së pari sistemin e barazimeve lineare me dy të panjohura duhet ta sjellim në formën normale (të përgjithshme) të sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura.

Sistemin e barazimeve lineare me dy të panjohura e zgjidhim me metodën e zëvendësimit ashtu që prej njërit barazim shprehet njëra prej të panjohurave, të cilën e zëvendësojmë te barazimi tjetër i sistemit duke fituar sistem ekuivalent me të dhënurit.

**Shembulli 1.** Sistemin e barazimeve lineare me dy të panjohura (формула) ta zgjidhim me metodën e zëvendësimit (формула)

Çifti i renditur (1,-2) është zgjidhje e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura.

1. Këto sisteme të barazimeve lineare me dy të panjohura zgjidhi me metodën e zëvendësimit: a) b)

### **4.2. Metoda e koeficientëve të kundërt**

Metodën e koeficientëve të kundërt ose metodën e barazimit për zgjidhjen e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura e shfrytëzojmë vetëm te sistemet të cilat janë në formën normale (të përgjithshme) (формула) Nëse nuk janë, së pari sistemin e barazimeve lineare me dy të panjohura duhet ta sjellim në formën normale (të përgjithshme) në sistem të barazimeve lineare me dy të panjohura.

prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura e zgjidhim me metodën e koeficientëve të kundërt ose me metodën e barazimit, kështu koeficientët para njërës të panjohur te dy barazimet duhet t'i transformojmë në numra të kundërt. Pastaj të dy barazimet i mbledhim. Fitojmë barazim linear me një të panjohur, të cilën e zgjidhim dhe zgjidhjen e fituar për atë të panjohur e zëvendësojmë te njëra prej barazimeve fillestare, për të fituar zgjidhjen e të panjohurës së dytë.

Shembulli 2. Sistemin e barazimeve lineare me dy të panjohura (формула) ta zgjidhim me metodën e koeficientëve të kundërt ose me metodën e barazimit. Vërehet se koeficientët para të panjohurës janë numra të kundërt. I mbledhim të dy anët e barazimit dhe barazimi e fituar e shkruajmë si barazim të parë të sistemit, por për barazim të dytë e marrim cilado prej barazimeve fillestare. Kështu, fitojmë sistem që është ekuivalent me sistemin e dhënë (формула)

Çifti i renditur (формула) është zgjidhje e sistemit të dhënë prej dy barazimeve me dy të panjohura.

2. Këto sisteme të barazimeve lineare me dy të panjohura zgjidhi me metodën e koeficientëve të kundërt ose me metodën e barazimi: a) b)

Shembulli 3. Sistemi (формула) është sistem i barazimeve lineare me dy të panjohura. Ai zgjidhet me ndihmën e futjes së ndryshores ndihmëse (формула). Me ndryshoret e reja, i njëjti transformohet në dy barazimeve lineare me dy të panjohura (формула), që zgjidhet me ndonjërin prej metodave dhe fitohet zgjidhja (формула)

3. Zgjidhe sistemin (формула) me futjen e ndryshoreve ndihmëse

**Detyra për punë të pavarur:**

**1. Zgjidhi këto sisteme me njërën prej të dy metodave: a) b) c) ç**

**2. Zgjidhi këto sisteme me futjen e ndryshoreve ndihmëse a) b)**

**5. Zgjidhja e sistemit prej dy barazimeve me dy të panjohura. Metoda e Gausit**

### **5.1. Metoda e Gausit**

**Transformimet elementare të cilat zbatohen te sistemeve prej barazimeve lineare me dy të panjohura për fitimin e sistemeve ekuivalente janë:**

**a) zëvendësimi i vendeve të barazimeve;**

**b) shumëzimi i njërës prej barazimeve me numër i ndryshueshëm prej zeros dhe shtuarja e atij te barazimi tjetër.**

**Le të jetë dhënë sistemi i barazimeve lineare me dy të panjohura në formën normale: (формула)  
Metoda e Gausit për zgjidhjen e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura përbëhet prej eliminimit gradualisht të njërës prej të panjohurave te sistemi. Prandaj edhe kjo metodë është e njohur si metoda e eliminimit të Gausit. Prej sistemit fillestar me transformimet elementare fitohet sistem tek i cili te njëra prej barazimeve është eliminuar njëra prej të panjohurave. Sistemi i fituar është ekuivalent me sistemin fillestar.**

Shembulli 1. Për zgjidhje e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura (формула) do ta zbatojmë metodën e Gausit

a) barazimin e parë e shumëzojmë me -1 dhe e shtojmë te barazimi i dytë, (формула)  
E eliminojmë ndryshoren;

b) të dytën e pjesëtojmë me -3 dhe e fitojmë zgjidhjen për y (формула)

c) Zëvendësohet vlera e y te barazimi i parë dhe fitohet vlera e të panjohurës x, (формула)

Zgjidhja e barazimit është (1,1).

Jo patjetër të eliminohet e panjohura x, mund të eliminohet edhe e panjohura y, (формула)

Vërejtje: Nëse sistemi i dhënë i barazimeve lineare me dy të panjohura nuk është në formën normale, për ta zbatuar metodën e Gausit, është e nevojshme ta sjellim sistemin në formën normale.

1. Me metodën e Gausit zgjidhi këto sisteme të barazimeve lineare me dy të panjohura:

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{5} - y = -1 \\ x + \frac{y}{2} = 6 \end{cases}.$$

## 5.2. Zgjidhja grafike e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura

E dimë se funksioni prej formës është funksion linear, grafiku i të cilit është drejtëz, ndërsa tani sistemi i barazimeve lineare me dy të panjohura në formën normale është

❖ Zgjidhja grafike e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura përbëhet prej të shprehurit të të panjohurës  $y$  si funksion e varur prej  $x$  të të dy barazimet dhe të vizatuarit e dy funksioneve lineare.

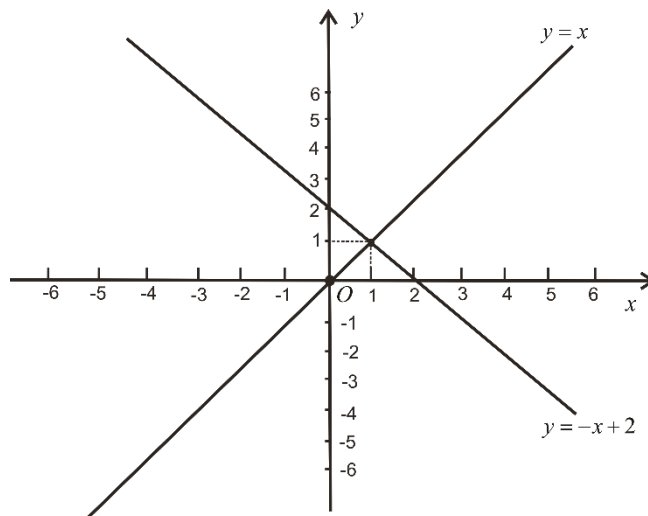
Vërejtje: Për ta zbatuar këtë metodë, është e nevojshme që sistemi i dhënë i barazimeve lineare me dy të panjohura të jetë në formën normale, në të kundërtën sistemin e dhënë e transformojmë në sistem ekuivalent prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura në formën normale.

Shembulli 2.

Grafikisht ta zgjidhim këtë sistem të barazimeve lineare me dy të panjohura (формула). Hapat për zgjidhjen janë:

a) Te sistemi edhe të dy barazimet e shprehim  $y$ ,

b) Në të njëjtin sistem koordinativ i vizatojmë dy funksionet lineare, (упрех)



c) Prerja e të dy drejtëzave është pika (1,1), e cila është zgjidhje e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura.

Me metodën grafike zgjidhja e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura fitohet si prerje e të dy drejtëzave, të cilat janë grafikët e funksioneve të dhëna lineare, nëse sistemi ka zgjidhje të vetme.

❖ Nëse ka pafund shumë zgjidhje, atëherë grafikët do të jenë drejtëza të cilat puthiten. Sistemi nuk do të ketë zgjidhje nëse drejtëzat janë paralele

2. Me metodën grafike të zgjidhen këto sisteme prej dy barazimeve me dy të panjohura: a) b)

Detyra për punë të pavarur:

1. Me metodën e Gausit të zgjidhen këto sisteme prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura: a) b) c)

2. Me metodën grafike të zgjidhen këto sisteme prej dy barazimeve me dy të panjohura: a) b)



Prej sistemit të fundit vërehet se fitohen vlerat e këtyre determinantëve (формула

Ato do t'i shënojmë me (формула) Përfundojmë se sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura mund të zgjidhet me ndihmën e determinantëve.

Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura (формула) mund të zgjidhet me njehsimin e determinantës (формула).

Zgjidhjen e vetme e fitojmë me formulat (формула), të cilat quhen rregulla të Kramerit, ku (формула

## Shembulli 2

Ta zgjidhim sistemin prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura (формула) me rregullat e Kramerit:

a) Vlera e determinantës (формула)

b) Zgjidhjet janë (формула)

c) Çifti i renditur (2,2) është zgjidhja e sistemit (формула)

2. Zgjidhi këto sisteme me ndihmën e rregullave të Kramerit: a) b)

### 6.3. Diskutimi për zgjidhjen e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura

E dimë se sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura mund të ketë zgjidhje të vetme (sistem i përcaktuar), pafund shumë zgjidhje (sistem i papërcaktuar) dhe të mos ketë zgjidhje (sistem kundërthënës).

Për sistemin prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura (формула)

rregullat e Kramerit do t'i shënojmë në këtë formë (формула).

Tani mund ta diskutojmë zgjidhjen e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura

Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura ka zgjidhje të vetme (sistem të caktuar), (формула) nëse (формула) (sistemi ka zgjidhje të vetme, nëse raporti prej koeficientëve para njëres të panjohur nuk është e barabartë me raportin e koeficientëve para të panjohurës tjetër).

Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura ka pafund shumë zgjidhje (sistem i papërcaktuar) nëse

(формула) (raporti prej koeficientëve para njëres të panjohur është e barabartë me raportin e koeficientëve para të panjohurës së dytë) dhe:

a) Sistemi nuk ka zgjidhje (sistem kundërthënës) nëse të paktën njëra prej determinantëve (формула) është e ndryshueshme prej zeros d.m.th., (формула) d.m.th., (формула) (sistemi nuk ka zgjidhje nëse raporti prej koeficientëve para njëres të panjohur është e barabartë me raportin e koeficientëve para të panjohurës së dytë, por nuk janë të barabarta me raportin e anëtarëve të lirë).

b) Sistemim ka pafund shumë zgjidhje (sistem i pacaktuar) nëse dhe të dy determinantët (формула) janë zero d.m.th., (формула) d.m.th., (формула)

(sistemi ka pafund zgjidhje nëse raporti prej koeficientëve para njërës të panjohur është e barabartë me raportin e koeficientëve para të panjohurës së dytë, por nuk janë të barabarta me raportin e anëtarëve të lirë).

Shembulli 3. Ta diskutojmë zgjidhjen e këtij sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura (формула)

Determinantë janë: (формула)

- Sistemi ka zgjidhje të vetme (формула) për (формула) d.m.th., (формула)

- Sistemi ka pafund shumë zgjidhje ose nuk ka zgjidhje kur (формула) d.m.th., (формула)  
Për determinantët e sistemit janë, sistemi ka pafund shumë zgjidhje

Për  $a = 1$  determinantët të sistemit janë (формула), sistemi nuk ka zgjidhje

Diskutimi mund të jetë edhe pa njehsimin e determinantëve:

- Zgjidhje të vetme sistemi ka për (формула)

- Pafund shumë zgjidhje, nëse (формула)

- Nuk ka zgjidhje, nëse (формула)

3. Diskuto zgjidhjen e këtyre sistemeve a) b)

**Detyra për punë të pavarur:**

- 1. Njihso këto determinantë të rendit të dytë: a) b) c)**
- 2. Zgjidhi këto sisteme me ndihmën e rregullave të Krameri: a) b**
- 3. Diskuto zgjidhjen e këtyre sistemeve: a) b**
- 7. Zbatimi i sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura**

**Sistemi prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura zbatohet te detyrat prej jetës reale, detyra prej teknikës dhe detyra nga shkenca. Do të jepen disa shembuj.**

**Shembulli 1. Sot babai dhe djali së bashku kanë 65 vjet. Pas dy vjet babai do të jetë 2 herë më i vjetër se djali. Sa vjet ka babai, ndërsa sa djali në moment**

**Vitet e babait do t'i shënojmë me  $x$ , kurse vitet e djalit me  $y$ . Për ta parashtruar sistemin prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura do të na ndihmojë kjo skemë  
Skema në moment pas 2**

**(tani)**

**Babai  $x$     $x + 2$**

**Djali  $y$     $y + 2$**

**Në bazë të skemës dhe tekstit të detyrës mund të konstatojmë**

**1) Në moment babai dhe djali e kanë këtë barazim  $x + y = 65$**

**2) Pas 2 vjet barazimi e paraqet lidhjen ndërmjet babait dhe djalit është**

) E fitojmë sistemin

Sistemi zgjidhet me ndonjërin prej metodave paraprakisht të dhëna për zgjidhje dhe ai ka zgjidhje (44,21

Si përgjigje të kërkesës së detyrës kemi: në moment, babai ka 44 vjet, kurse djali 21 vjet

1. Shuma e viteve të gjyshit dhe nipit është 80 vjet. Para 5 viteve, gjyshi ka qenë 13 herë më i vjetër se gjyshit. Nga sa vjet ka çdonjëri prej tyre?

Shembulli 2. Dy motoçikletistë nisen njëri përballë tjetrit prej dy qyteteve A dhe B të larguar ndërmjet tyre 300 km. Motoçiklisti që niset prej qytetit A niset 1 orë më vonë prej motoçiklistit prej qytetit B dhe pas 2 orë ata takohen në gjysmë të rrugës. Nëse motoçiklisti që niset prej qytetit A e zvogëlon shpejtësinë për 15 km/orë, por tjetri e zmadhon shpejtësinë për 10 km/orë, atëherë ata nisen njëkohësisht dhe do të takohen në gjysmë të rrugës për 2,5 orë. Me çfarë shpejtësie vozit çdonjëri prej tyre?

Motoçiklisti që niset prej qytetit A e ka shpejtësinë  $x$  km/orë, kurse motoçiklisti që niset prej qytetit B ka shpejtësi prej  $y$  km/orë. Që të mund të formojmë sistem prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura e vizatojmë këtë vizatim (уравнения)

1 orë më vonë

$x$  km/orë  $y$  km/orë

Në momentin kur motoçiklisti niset prej qytetit A niset 1 orë më vonë prej motoçiklistit prej qytetit B dhe pas 2 orë ata takohen në gjysmë të rrugës, e fitojmë këtë barazim:  $2x + 3y = 100$ . Nëse motoçiklisti që niset prej qytetit A e zvogëlon shpejtësinë për 15km/orë, por tjetri e zmadhon shpejtësinë për 10km/orë ato do nisen njëkohësisht dhe do të takohen në gjysmë të rrugës për 2,5 orë fitohet barazimi:  $2.5(x-15) + 2.5(y + 15) = 300$ . E fitojmë sistemin, (формула) që ka zgjidhje (75,50). Fitojmë: në momentin, motoçiklisti prej qytetit A vozit me shpejtësi 75 km/orë, por motoçiklisti prej qytetit B vozit me shpejtësi 50 km/orë

2. Treni i udhëtarëve prej Shkupi niset në ora 7 në drejtim të Novi Sadit. Dy orë më vonë në të njëjtën kahe niset treni i shpejtë, që e arrin trenin e udhëtarëve në ora 12

. Treni i shpejtë prej Novi Sadi arrin në ora 18, kur treni i udhëtarëve është larguar 160 km nga Novi Sadi. Me çfarë shpejtësie lëvizin të dy trenat? Kur do të arrijë treni i udhëtarëve në Novi Sad?

Sa është largësia ndërmjet Shkupit dhe Novi Sadit?

Shembulli 3. Herësi i dy numrave natyrorë është 2 dhe mbetja 9. Nëse i pjesëtueshmi zmadhohet për 5 dhe pjesëtohet me pjesëtuesin e njëjtë fitohet pjesëltim pa mbetje me herës 3. Sa janë ata numra?

Të pjesëtueshmin le ta shënojmë me  $x$ , kurse pjesëtuesin me  $y$ . Barazimi i parë është: (формула).

Nëse i pjesëtueshmi zmadhohet për 5 dhe pjesëtohet me pjesëtuesin e njëjtë fitohet pjesëtim pa mbetje me herës 3, fitohet barazimi i dytë: (формула). E fitojmë sistemin (формула), që ka zgjidhje (формула). I pjesëtueshmi është 37, kurse pjesëtuesi është 14.

3. Ndryshimi i dy numrave është 75, por herësi i tyre është 4. Cilët janë ata numra?

Shembulli 4. Dy punëtorë Sajmiri dhe Halili mund ta kryejnë një punë për 12 ditë. Pas punës së përbashkët prej 5 ditësh njëri punëtor sëmuret, ashtu që tjetri, duke punuar vetë, e kryen punën për 17,5 ditë. Për sa ditë mund ta kryejë punën çdo punëtor, nëse punon vetë?

Sajmiri le ta kryejë vetë punën për  $x$  ditë, kurse Halili për  $y$  ditë. Sipas të dhënave të detyrës e formojmë sistemin:

Me zëvendësimin (формула) fitohet sistemi: (формула)

Me zgjidhjen e këtij sistemi fitohen zgjidhjet (формула).

Duke u kthye te zëvendësimi prapa fitohet se Sajmiri e kryen punën vet për (формула) ditë, por Halili për (формула) ditë.

4. Një rezervuar mbushet me dy gypa. Të dy gypat së bashku, rezervuarin e mbushin për 12 orë

Detyra për punët të pavarur:

1. Nëse numëruesin dhe emëruesin e një thyese i zmadhojmë për 2, atëherë fitohet thyesa (формула). Nëse numëruesi dhe emëruesi zbritet 2, atëherë fitohet thyesa (формула). Cila është thyesa?
2. Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 15. Ndryshimi ndërmjet numrit dyshifror të shkruar me shifrat e njëjtë por në renditje të anasjelltë dhe numrit dyshifrorë të dhënë është 9. Për çfarë numër dyshifrorë bëhet fjalë?
3. Një fshatar ka ruajtur pula dhe dele. Së bashku kanë pasur 27 koka dhe 84 këmbë. Sa pula, ndërsa sa dele ka pasur fshatari
4. Herësi i dy numrave është 174, por mbetja 2. Ndryshimi prej të pjesëtueshmit i shumëzuar 2 dhe pjesëtuesi i shumëzuar me 250 është 298. Cilët janë ata numra?
5. Dy automobila janë nisur prej qytetit A nga qyteti B me shpejtësi prej 60 km/orë dhe 90 km/orë. Tri orë pas nisjes së automobilin të parë prej qytetit A niset automobila i dytë, atëherë njëkohësisht arrijnë në qytetin B. Pas sa orë ka vozitur çdonjëri prej të dy automobilave? Sa është largësia ndërmjet të dy qyteteve?
6. Sot ndryshimi ndërmjet viteve të nënës dhe vajzës është 28 vjet. Pas pesë vjet nëna do të jetë 5 herë më e vjetër se vajza. Nga sa vjet kanë nëna dhe vajza sot?
7. Një rezervuar mund të mbushet nëpërmjet 2 gypave. Nëse gypi i parë është i hapur 4 orë, i dyti 3 orë, mbushet me (формула) e rezervuarit. Nëse gypi i parë është hapur 2 orë, por i dyti 1 orë, atëherë rezervuari do të mbushet (формула) e rezervuarit. Për sa orë mund të mbushet rezervuari me çdo gyp në veçanti?
8. Nga Shtipi dhe Kavadari të larguar 60 km lëvizin dy biçikletist njëri kah tjetri. Biçikletisti i parë është nisur 10 minuta para të dytit. Pas 50 minuta prej nisjes së biçikletistit të dytë largësia e tyre ka qenë 6 km. Në 30 minutat vijuese prej tejkalimit kanë qenë të larguar 3,8 km. Me cilat shpejtësi kanë lëvizur biçikletistët?

## 8. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Është dhënë funksioni linear  $y = (k - 1)x - (3 - k)$ . Cakto parametrin  $k$ , për të cilin:
- a) funksioni linear ka zero  $x = 1$ ;
  - b) grafiku i funksionit linear është paralel me simetralen e kuadrantit të dytë dhe të katërt;
  - c) funksioni linear rritet;
  - ç) funksioni linear zvogëlohet;
  - d) funksioni linear është funksion konstant.

2. Për cilën vlerë të parametrin  $k$  grafikët e të dy funksioneve lineare  $y = (3k - 1)x - (k - 3)$ ,  $y = 2x + k$  e prejnë boshtin e ordnatës në pikën e njëjtë?

3. Këto sisteme silli në formën normale: a) b)

4. Sistemin zgjidhe (формула) me metodën e zëvendësimit.

5. Sistemin zgjidhe me metodën e koeficientëve të kundërt.

6. Sistemin zgjidhe (формула) me metodën e Gausit.

7. Sistemin zgjidhe (формула) me metodën grafike.

8. Sistemin zgjidhe (формула) me rregullat e Kramerit.

9. Diskuto zgjidhjen varësisht prej parametrin  $k$  për sistemin (формула)

10. a) Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 7.

Ndryshimi ndërmjet numrit dyshifror dhe numrit dyshifror të shkruar me të njëjtat shifra por në rendin e anasjelltë është 27. Cili është ai numër?

b) Në disponim kemi dy lloje të alkoolit 25% dhe 75%. Nga sa litra duhet të merret prej çdonjërit për të fituar 50 alkool prej 50%?



# 7

## FIGURAT GJEOMETRIKE NË RRAFSH



### QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

Duke mësuar njësinë modulare, nxënësit duhet të aftësohen:

- ➤ të dallojnë konceptet e thjeshta dhe të nxjerra;
- ➤ t'i kuptojnë raportet ndërmjet pikave dhe drejtëzave në rrafsh;
- ➤ t'i përkufizojnë figurat e rrafshëta;
- ➤ të konstatojnë dhe të shfrytëzojnë veti të figurave të rrafshëta në problemet praktike.

## PËRMBAJTJA E NJËSISË MODULARE 7

257. Konceptet themelore dhe të

262. Raporti reciprok i pikës dhe drejtëzës. Raporti reciprok ndërmjet dy drejtëzave në rrafsh

267. Figurat gjeometrike në rrafsh: gjysmëdrejtëza dhe këndi

273. Figurat gjeometrike në rrafsh: segmenti dhe shumëkëndëshi

280. Figurat gjeometrike në rrafsh: vija rrethore dhe rrethi

285. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

Gjeometria është degë e matematikës e cila llogaritet si shkencë për figurat. Ajo është njëra prej shkencave më të vjetra, e cila paraqitet në Egjiptin, Babilon dhe në Greqinë antike të lashtë, si nevojë për matje praktike të tokës, ku koncepti për matje, syprinë dhe vëllim janë të njohur qysh prej shekullit 6 p.e.r. Konstrukione gjeometrike kanë shfrytëzuar edhe indianët në shekullin 3 p.e.r. kur pavarësisht prej tyre, Euklidi ka dhënë formën aksiomatike dhe prandaj quhet gjeometria e Euklidit. Gjatë shekujve ajo është përsosur dhe përparimi i saj rezultoi me formën e saj të sotshme, si fushë e gjerë për shqyrtimin dhe punën e shkencëtarëve dhe praktikantëve.

## 1. Konceptet themelore dhe të nxjerra dhe gjykimet

### 1.1. Konceptet themelore dhe të nxjerra

Gjatë të mësuarit e gjeometrisë udhëhiqemi prej parimit: prej të njohurës nga e panjohura. Prandaj, futja e ndonjë koncepti të ri gjeometrik bëhet me shfrytëzimin tani më koncepteve të njohura gjeometrike. Qëndrimi i këtillë me të cilin futet koncepti i ri gjeometrik quhet përkufizim.

Përkufizimi është fjali nëpërmjet të cilës përcaktojmë ndonjë koncept me ndihmën tani më të koncepteve.

Në gjeometri dallojmë dy lloje të koncepteve gjeometrike: koncepte themelore dhe të nxjerra. Konceptet themelore janë koncepte prej të cilave fillon ndërtimi i gjeometrisë së Euklidit dhe ato futen pa përkufizim, por futja e tyre shpesh është me përshkrim të konceptit ose me shfrytëzimin e shembujve.

Koncepte të nxjerra janë ato koncepte të cilat përkufizohen dhe te përkufizimet e tyre shfrytëzohen konceptet themelore, por edhe konceptet e nxjerra të cilat paraprakisht janë përkufizuar.

Si koncepte themelore në rrafsh të cilat përvetësohen pa përkufizim janë: pika, drejtëza dhe largësia, por edhe koncepti rrafsh gjithashtu është koncept themelor, i cili nuk përkufizohet. Gjithashtu e dimë se:

- Pikat shënohen me shkronjat e mëdha latine (формула),...
- Drejtëzat shënohen me shkronjat e vogla latine (формула),...
- Rrafshet shënohen me shkronjat greke (формула),...
- Nëse A dhe B përcaktojnë pikë të njëjtë, atëherë shkruajmë (формула) (lexohet “puthitet me”).

Shembulli 1.

a) Segmentin si koncept të nxjerrë e përkufizojmë me këtë përkufizim: “Pjesë prej drejtëzës të kufizuar me dy pika, që i përmban ato dhe të gjitha pikat që shtrihen ndërmjet tyre”.

Vërejmë se për të përkufizuar koncept të nxjerrë “segment”, janë shfrytëzuar konceptet themelore pike dhe drejtëz.

b) Vija rrethore si koncept i nxjerr përkufizohet me këtë përkufizim: “Bashkësia e pikave të rrafshit të cilat gjenden në largësi të barabartë prej një pikë fikse O në rrafsh”.

Vërejmë se për të përkufizuar koncept të nxjerrë “vija rrethore” janë shfrytëzuar konceptet themelore bashkësi, pikë dhe largësi. Edhe koncepti bashkësi në matematikë është koncept themelor, që nuk përkufizohet.

Në vend të bashkësisë së pikave shpeshherë shfrytëzohet termi vend gjeometrik i pikave. Vijën rrethore dhe segmentin i llogarisim për figura rrafshore. Pikën dhe drejtëzën gjithashtu i llogarisim për figura rrafshore gjeometrike. Pikën dhe drejtëzën gjithashtu i llogarisim për figura në rrafsh.

❖ Koncepte themelore janë: pika, drejtëza, rrafshi dhe largësia.

❖ Çdo vend gjeometrik i pikave të rrafshit quhet figurë rrafshore gjeometrike ose shkurtimisht vetëm figurë.

❖ Koncepte themelore janë konceptet të cilat përkufizohen me shfrytëzimin e koncepteve themelore dhe koncepteve të nxjerra të cilat paraprakisht janë të përkufizuara.

Në përgjithësi çdo vend gjeometrik quhet figurë gjeometrike.

1. Përmend përkufizime të koncepteve të nxjerra: gjysmëdrejtëza, gjysmërrafshi dhe këndi.

## 1.2. Gjykimet themelore dhe të nxjerra

Vetitë dhe raportet e figurave gjeometrike janë shprehur me gjykime. Në gjeometri dallojmë dy lloje të gjykimeve: gjykime themelore dhe të nxjerra.

Gjykime themelore ashtu të quajtura aksioma janë gjykime të cilat i përvetësojmë pa vërtetim. Aksiomat zakonisht i shënojmë me  $A_1, A_2, A_3, \dots$

Aksiomat të cilat janë të nevojshme për ndërtimin e gjeometrisë janë aksiomat prej gjeometrisë së Euklidit. Ato janë:

Aksioma 1: Te çdo drejtëz shtrihen pafund shumë pika, por ekzistojnë edhe pika të cilat nuk shtrihen te drejtëza e njëjtë.

Aksioma 2: Çdo drejtëz është plotësisht e përcaktuar me dy pika.

Për dy pika A dhe B themi se janë ose të ndryshme (me shënim (формула)) ose puthiten (me shënim (формула), që do të thotë se bëhet fjalë për pikën e njëjtë me shënime të ndryshme

Përveç koncepteve pika dhe drejtëza në rrafshin gjeometrik shfrytëzohen edhe koncepti largësi, që tanimë është përmendur më lart. Largësinë ndërmjet dy pikave A dhe B e shënojmë me (формула).

Për këtë koncept themelore si pika i përvetësojmë këto aksioma:

Aksioma 3: Largësia prej pikës A deri te pika B është numër real pozitiv ose zero d.m.th., (формула). Nëse (формула), atëherë (формула). Nëse (формула), atëherë (формула)

Aksioma 4: Për çfarëdo dy pika A dhe B largësia prej A deri te B është e barabartë me largësinë prej B deri tek A d.m.th., (формула).

Aksioma 5: Për çfarëdo tri pika A,

B dhe C, largësia (формула) është më e vogël ose e barabartë me shumën e largësive (формула) dhe (формула) d.m.th..

2 Vizato vizatim që i përgjigjet (формула) dhe (формула) në pajtim me Aksiomën 5! (формула)

Koncepti largësi na mundëson të futim dhe përkufizojmë konceptin “shtrihet ndërmjet”:

Për një pikë C themi se shtrihet ndërmjet dy pikave A dhe B, nëse të tri pikat A, B dhe C janë të ndryshme dhe është e saktë (формула).

Është e saktë:

❖ Pikat që shtrihen në drejtëzën e njëjtë quhen pika kolineare.

❖ Pikat që shtrihen në rrafshin e njëjtë quhen pika komplanare.

Për konceptin “shtrihet ndërmjet” është e saktë kjo aksiomë:

Aksioma 6: Nëse një pikë shtrihet ndërmjet dy pikave të tjera, atëherë të tri pikat janë kolineare. Nëse A, B dhe C janë tri pika të ndryshme kolineare, atëherë pika A shtrihet ndërmjet pikave B dhe C ose pika B shtrihet ndërmjet pikave A dhe C ose pika C shtrihet ndërmjet pikave A dhe B.

Vërejtje: Aksiomat e Euklidit do t'i shfrytëzojmë edhe te njësitë e ardhshme mësimore.

Gjykimet e nxjerra të ashtuquajtura teorema, janë gjykime të cilat duhet të vërtetohen me shfrytëzimin e aksiomave ose gjykimeve të nxjerra (por paraprakisht të vërtetuara. Teoremat zakonisht i shënojmë me T1, T2, T3,...

❖ Aksiomat janë gjykime themelore të cilat i përvetësojmë pa vërtetim.

❖ Teoremat janë gjykime të nxjerra të cilat i përvetësojmë për të vërtetar pasi që i kemi vërtetuar me ndihmën e aksiomave ose tani me gjykime paraprakisht të vërtetuara

Shembulli 2. Shembull për teoremën.

Teorema: Te çdo drejtkëndësh diagonalet janë të barabarta ndërmjet veti.

Vërtetësia e teoremave vërtetohet. Çdo teoremë mund të shkruhet në formë të implikacionit (формула) d.m.th., në formën kushtore ku p është supozimi, kurse q është përfundimi. Te supozimi janë dhënë kushtet të cilat shfrytëzohen gjatë vërtetimit, por te përfundimi është dhënë ajo që duhet të vërtetohet

Shembulli 3. Teorema te Shembulli 2 është shprehur në formën kushtore:

Teorema: Nëse katërkëndëshi është drejtkëndësh, atëherë diagonalet e tij janë të barabarta.  
Supozimi p është: Katërkëndëshi është drejtkëndësh.

Përfundimi q është: Diagonalet e tij janë të barabarta.

Për teoremat (формула) të dhëna në formën kushtore ((формула)), mund ta shkruajmë edhe gjykimin e saj të anasjelltë (формула), e cila jo gjithmonë është teoremë. Nëse gjykimi i anasjelltë është teoremë atë e quajmë teorema e anasjelltë e të dhënës. Nëse janë teoremë edhe (формула) dhe (формула), atëherë të dy teoremat mund t'i shkruajmë së bashku me ekuivalencën d.m.th., në formën kushtore (формула)  
Mendo dhe përgjigju:

o Cili ligj logjik është shfrytëzuar?

Nëse nuk është e saktë njëri prej gjykimeve (формула) ose (формула), atëherë mund të fitojmë teoremën të shkruar në formën (формула).

Vërejtje: Teorema e shkruar si ekuivalencë (формула) vërtetohet edhe në të dy kahet d.m.th., vërtetohet teorema (формула), por edhe teorema (формула)

Shembulli 4. a) Teorema: Nëse një numër plotpjesëtohet me 15, atëherë ai numër plotpjesëtohet me 3 dhe 5.

Teorema është dhënë në formën (формула) dhe ne nuk mund ta formulojmë edhe gjykimin e anasjelltë (формула

“Nëse një numër plotpjesëtohet me 3 dhe 5, atëherë ai plotpjesëtohet me 15”.

Gjykimi i anasjelltë është i saktë (edhe vetë është teoremë) dhe paraqet teoremë të anasjelltë të teoremës së dhënë.

Prandaj të dy teoremat mund t'i shkruajmë me ekuivalencën:

Teorema: Një numër plotpjesëtohet me 15 nëse dhe vetëm nëse është i plotpjesitueshëm me 3 dhe 5.

b) Për teoremën vijuese të dhënë në formën (формула):

Teorema: Nëse dy numra janë çift, atëherë shuma e tyre është numër çift, ne mund ta formulojmë edhe gjykimin e anasjelltë (формула), “Nëse shuma e dy numrave është numër çift, atëherë ata numra janë çift”.

Gjykimi i anasjelltë nuk është i saktë d.m.th., nuk është teoremë.

Mendo dhe përgjigju:

o Pse?

3. Shpreh disa teorema sipas zgjedhjes tënde.

4. Për teoremën: nëse trekëndëshi është barakrahas, atëherë ai ka dy kënde të barabarta shprehe gjykimin e anasjelltë. Gjykimi a është teoremë? Nëse përgjigja është vërtetuar, atëherë të dy teoremat shprehi me ekuivalencë.

Përveç formës kushtore, teoremat mund të shprehen edhe në formën kategorike. Në formën e atillë është teorema prej Shembullit 1.

E mundshme është teorema prej kushtores të shprehet në formën kategorike dhe anasjelltas.

5. Kujtohu në teoremën në formën kushtore dhe të njëjtën shprehe në formën kategorike.

6. Kujtohu në teoremën në formën kategorike dhe të njëjtën shprehe në formën kushtore. Cakto supozimin dhe përfundimin e teoremës.



Për të paktën tri pika që i takojnë drejtëzës së njëjtë thuhet se janë pika kolineare. Nëse të paktën tri pika nuk i takojnë drejtëzës së njëjtë quhen pika jokolineare.

o Vizato pesë pika kolineare!

o Vizato pesë pika jokolineare!

Për raportin reciprok të pikës dhe drejtëzës do jepen këto aksioma, të cilat u përmendën te pjesa paraprake, si aksioma të gjeometrisë së Euklidi:

A1: Te çdo drejtëz shtrihen pafund shumë pika, por ekzistojnë edhe pika që nuk shtrihen në drejtëzën e njëjtë.

Te figura 1 është dhënë drejtëza  $a$  dhe tri pika A, B dhe C. Pikat A dhe B i takojnë drejtëzës  $a$  d.m.th., (формула), por pika C nuk i takon drejtëzës  $a$  d.m.th., (формула). Përveç pikave A dhe B, te drejtëza  $a$  ka pafund shumë pika. Kuptohet, përveç pikës C ekzistojnë edhe pika të tjera të cilat nuk i takojnë drejtëzës  $a$ .

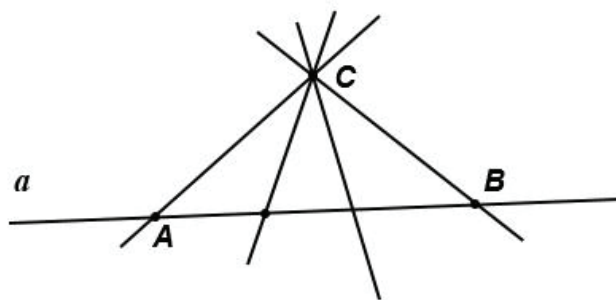
Figura 1

A2: Çdo drejtëz është plotësisht përcaktuar me dy pika.

Kjo vërehet prej figurës paraprake, drejtëza  $a$  është plotësisht e përcaktuar me pikat A dhe B. Drejtëzën  $a$  mund ta shënojmë edhe me shenjën (формула) ose (формула). Këto teorema do t'i vërtetojmë:

Teorema 1: Nëpër një pikë kalojnë pafund shumë drejtëza.

Vërtetimi: Le të jetë dhënë drejtëza  $a$  dhe prej aksiomës A2 ajo është plotësisht e përcaktuar me dy pika



1. Duke e vërejtur figurën 3, përcakto vlerën e vërtetësisë së këtyre gjykimeve

Figura 3

2. Sa drejtëza mund të tërhiqen nëpër tri pika A, B dhe C? Përgjigja të sqarohet!

3. Në sa pika mund të priten tri drejtëza? Përgjigja të sqarohet!

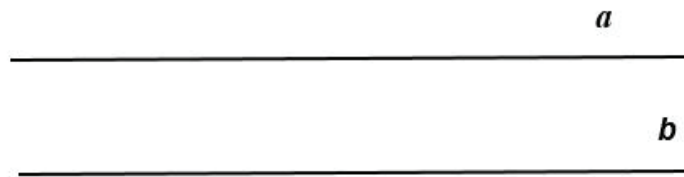
2.2. Raporti reciprok i dy drejtëzave në rrafsh

o Të vizatohet rrafshi dhe të shënohet! Të vizatohet dy drejtëza në rrafsh.

Si mund të jetë pozita e tyre reciproke në rrafsh

Me siguri vëren se dy drejtëza a dhe b në rrafsh e kanë këtë pozitë reciproke:

Drejtëzat a dhe b nuk kanë pika të përbashkëta (формула) d.m.th., ato janë paralele si te figura 4:



Слика 4

Shkruajmë: (формула) lexohet “drejtëza  $a$  është paralele me drejtëzën  $b$ ”.  
Është e njohur edhe aksioma e Euklidi:

Aksioma 7: Nëpër pikën  $A$  që nuk shtrihet në drejtëzën  $a$  kalon vetëm drejtëza  $b$  e cila është paralele me drejtëzën  $a$ .

4. Për Aksiomën 7 bëj vizatim!

❖ Drejtëzat  $a$  dhe  $b$  kanë vetëm një pikë të përbashkët (формула) d.m.th., ato priten si te figura 5:

Figura 5

❖ Drejtëzat  $a$  dhe  $b$  kanë pafund shumë pika të përbashkëta d.m.th., ato puthiten si te figura 6:

Figura 6

Shkruajmë: (формула) lexohet “drejtëza  $a$  puthitet me drejtëzën  $b$ ”.

Mendo dhe përgjigju:

o Si është raporti reciprok i dy drejtëzave nëse kanë dy pika të përbashkëta?

Përgjigjen na jep kjo teoremë:

**Teorema 3:** Nëse dy drejtëza kanë dy pika të përbashkëta, atëherë të dy drejtëzat puthiten.

**Vërtetimi:** Nëse e shfrytëzojmë A2 se çdo drejtëz është plotësisht e përcaktuar me dy pika, atëherë qartë është se dy drejtëza kanë dy pika të përbashkëta, atëherë të gjitha pikat i kanë të përbashkëta. Domethënë, të dy drejtëzat puthiten d.m.th., të gjitha pikat prej njërës drejtëz i takojnë drejtëzës tjetër.

**Mendo dhe përgjigju:**

o Sa më së shumti pika të përbashkëta mund të kenë dy drejtëza të ndryshme?

Me siguri vëren në pajtim me atë që u tha paraprakisht se: dy drejtëza të ndryshme mund të kenë më së shumti një pikë të përbashkët.

Është e qartë se:

Dy drejtëza në rrafsh ose janë paralele ose priten ose puthiten.

5. Vizato një drejtëz a dhe pika (формула). Sa drejtëza nëpër pikën A mund të tërhiqen të cilat janë paralele me drejtëzën a? Vizato vizatimin!

6. Vizato një drejtëz a. Sa drejtëza mund të vizatohen paralele me drejtëzën a?

Bëj vizatim!

7. Vizato një drejtëz a dhe pika (формула). Sa drejtëza nëpër pikën A mund të tërhiqen të cilat priten me drejtëzën a? Sa prej tyre janë drejtëza normale në drejtëzën a? Bëje vizatimin!

**Detyra për punë të pavarur:**

1. Vërteto se ekzistojnë të paktën tri drejtëza të cilat kalojnë nëpër pikën e njëjtë.

2. Për çdo pike ekzistojnë drejtëza që kalojnë nëpër atë!

Për çdo pike ekzistojnë drejtëza që nuk kalojnë nëpër atë!

A janë të sakta?

3. Sa drejtëza mund të tërhiqen nëpër 5 pika të ndryshme? Përgjigja të sqarohet dhe të bëhet vizatim!

4. Në sa pika mund të priten 2 drejtëza? Shpjegoni përgjigjen dhe bëni një vizatim!

5. Sa rrafshe përcaktojnë 4 pika të cilat nuk janë kolineare? Përgjigja të sqarohet!



2. Vizato një drejtëz dhe në atë të shënohen tri pika. Sa gjysmëdrejtëza janë përcaktuar me ato tri pika?

3. Vizato tri pika të cilat nuk janë kolineare dhe të tërhiqen drejtëza nëpër çdo dy pika prej tyre. Sa gjysmëdrejtëza përcaktojnë ato?

### 3.2. Këndi

Vizato dy gjysmëdrejtëza  $a$  dhe  $b$  me pike të përbashkët  $O$ .  $a$  b  $O$   
Mendo dhe përgjigju:

o Te çdo gjysmëdrejtëz shëno nga një pikë  $A$  dhe  $B$ . Cila figurë gjeometrike fitohet? Emërtoji këndin.

o Si quhen gjysmëdrejtëzat  $OA$  dhe  $OB$ ? Si quhet pika  $O$ ?

### Figura 10

Këndi emërtohet si (формула) ose kënd , figura 10.

Figura e formuar prej dy gjysmëdrejtëzave me fillim të përbashkët, së bashku me pjesën e rrafshit të kufizuar me ato quhet kënd;

Pjesa e rrafshit të kufizuar me gjysmëdrejtëzat të një këndi quhet zonë e këndit dhe shënohet me hark rrethor. Gjysmëdrejtëzat  $OA$  dhe  $OB$  quhen krahët e këndit, pika  $O$  quhet kulmi i këndit

Në praktikë këndet shpesh maten në shkallë, por për matjen e këndeve ka edhe njësi matëse njësi radian.

Njësia matëse themelore për matjen e këndit është shkalla këndore d.m.th., 10 lexohet “një shkallë”.

Një kënd shkallor (10) është masa e këndit (формула), që është pjesë e këndit të drejtë. Njësi më të vogla janë minuta dhe sekonda d.m.th., (lexohet “një minutë”) dhe (lexohet “një sekondë”). Ndërmjet tyre vlejnë këto barazi  $10 = 60'$  dhe  $1' = 60''$ ;

Një rdian (1 rad) është masa e këndit, krahët e të cilit prej çfarëdo vije rrethore me qendër në kulmin e këndit pret hark gjatësia e të cilit është e barabartë me rrezen e vijës rrethore (figura 11).

Figura 11

❖ Këndi te figura 11 quhet kënd qendror.

Këndi me kulm në qendër të vijës rrethore quhet kënd qendror.

Në përgjithësi, nëse këndi qendror ka radian, atëherë gjatësia e harkut njehsohet me formulën (формула). Nëse këndi qendror është 3600, atëherë ai korrespondon me harkun (формула). Masa radiale për këndin (формула). Prej këtu fitojmë se: (формула).

Lidhja ndërmjet shkallës dhe radianit është dhënë me këto formula (формула) ku është masa shkallore e këndit dhe është masa radiale e këndit.

Vizato dy gjysmëdrejtëza përbërëse.

Mendo dhe përgjigju:

o Si quhet ky kënd? Sa shkallë ka?

Këndi (формула), figura 12.

Këndi krahët e të cilit janë çift prej gjysmëdrejtëzave përbërëse quhet kënd shtimtar. Këndi shtimtar e ka madhësinë prej 1800.

Mendo dhe përgjigju:

o Si quhet këndi që është gjysma e këndit shtimtar? Sa shkallë ka?

Këndi (формула), figura 14.

Këndi që është gjysma e këndit shtimtar është kënd i drejtë. Këndi i drejtë ka madhësi prej 900.

Mendo dhe përgjigju:

o Si quhet këndi që është më i vogël se këndi i drejtë, por si kënd që është më i madh se këndi i drejtë? Emërtoji ato kënde te Figura 15?

o Si quhet këndi më i madh prej këndit shtimtar, por si këndi më i vogël se këndi shtimtar?

Këndi më i vogël se këndi i drejtë quhet kënd i ngushtë, por këndi më i madh se këndi i drejtë quhet kënd i gjerë;

Këndi më i madh se këndi shtimtar quhet kënd jokonveks, por këndi më i vogël se këndi shtimtar quhet kënd konveks.

Vizato dy kënde të cilat kanë krah të përbashkët, por nuk kanë zone të përbashkët.

Mendo dhe përgjigju:

o Si quhen ato? Figura 15!

Dy kënde me krah të përbashkët dhe pa zone të brendshme të përbashkët quhen kënde fqinje.

Mendo dhe përgjigju:

o Si quhen këndet fqinje të cilat formojnë kënd shtimtar? Figura 15!

271

Dy kënde fqinje të cilat formojnë kënd shtimtar quhen kënde të kundërta. Shuma e tyre është 1800.

Shpesh këndi i drejtë përkufizohet edhe në këtë mënyrë:

❖ Këndi që është i barabartë me këndin e kundërt quhet kënd i drejtë.  
Mendo dhe përgjigju:

o Si quhen dy kënde shuma e të cilave është kënd i drejtë (900)?

o Si quhen dy kënde shuma e të cilave është kënd shtimtar (1800)?

Nëse shuma e dy këndeve është 900, atëherë ato quhen kënde komplementar.

Nëse shuma e dy këndeve është 1800, atëherë ato quhen kënde suplementar.  
Mendo dhe përgjigju:

o Çdo dy kënde që janë suplementare a janë edhe kënde të kundërt?

4. Shuma e dy këndeve është e 125015', por njëri është 78027'. Cakto këndin tjetër?

5. Le të jetë dhënë këndi 127026'36". Cakto këndin komplementar të tij dhe këndin suplementar të tij.

6. Vizato një kënd shtimtar. Prej kulmit të tij në njërën anë prej rrafshit janë tërhequr 2 gjysmëdrejtëza me fillime te kulmi i këndit shtimtar. Sa çifte të këndeve fqinje kemi? Cilat prej tyre janë të kundërta?

Detyra për punë të pavarur:

1. Vizato dy drejtëza të cilat priten. Sa gjysmëdrejtëza janë përcaktuar me fillim te pikëprerja? Emërtoji! Cilat prej tyre janë përbërëse?

2. Vizato dy drejtëza të cilat janë paralele dhe një drejtëz që i pret. Sa gjysmëdrejtëza janë përcaktuar me fillim te pikëprerja? Emërtoji! Cilat prej tyre janë përbërëse?

3. Le të jenë dhënë dy kënde (формула) dhe (формула)

Njehso: (формула), por edhe këndet e tyre suplementare

4. Le të jetë dhënë këndi 78015'13". Cakto këndin e tij komplementar dhe suplementar.



Normalisht, pikat A dhe B janë pikat e skajshme të segmentit, por (формула) është largësia ndërmjet dy pikave A dhe B. Për segmentin, (формула) është gjatësia e tij. Poashtu dimë se (формула) dhe (формула) shënojnë segmentin e njëjtë, figura 16

Dy segmente të cilat kanë gjatësi të barabarta themi se janë segmente të barabarta ose të puthitshëm.

Është e qartë se dy segmente mund të krahasohen nëpërmjet gjatësive të tyre, ku të mundshme janë njëri prej të tre rasteve: (формула) ose (формула) ose (формула)

Aksioma 8 është aksiomë e rëndësishme pasi ajo na mundëson të vizatuarit e segmenteve të barabarta dhe operimi grafik me segmente vetëm me ndihmë të kompasit dhe vizorit.

1. Vizato katër pika kolineare. Sa segmente ato përcaktojnë? Emërtoji!

2. Vizato tri pika jokolineare. Sa segmente ato përcaktojnë? Emërtoji!

#### 4.2. Shumëkëndëshi

Le të jetë dhënë figura 17:

Mendo dhe përgjigju:

o Prej çka janë ndërtuar figurat te vizatimi?

Segmentet AB dhe BC kanë pikë të përbashkët B dhe për ato do të themi se janë segmente fqinje.

Figura e përbërë prej segmenteve, ku çdo dy segmente fqinje nuk shtrihen në drejtëzën e njëjtë quhet vijë e thyer. Pikat e skajshme të segmentit quhen kulmet e vijës së thyer. Segmentet prej të cilave është ndërtuar vija e thyer quhen brinjët e vijës së thyer.

Kulmet e vijës së thyer janë fqinje nëse shtrihen në brinjën e njëjtë të vijës së thyer. Brinjët e vijës së thyer janë fqinje nëse shtrihen në brinjën e njëjtë të vijës së thyer. Brinjët e vijës së thyer janë fqinje nëse kanë kulm të përbashkët.

Vija e thyer mund të jetë vijë e thyer e hapur ose e mbyllur.

Shqyrto figurën 17 dhe përgjigju në pyetje:

o Çfarë paraqet pika A për vijën e thyer, e çfarë paraqet segmenti AB për vijën e thyer?

o Cila vijë e thyer është e hapur, kurse cila është vijë e thyer e mbyllur?

o Cilat kulme janë fqinje të kulmit C të vijës së thyer të parë, kurse cilat te vija e thyer e dytë?

o Cilat brinjë janë BC fqinje të brinjës te vija e thyer e parë, kurse cilat tek e dyta?

Vija e thyer e mbyllur e cila nuk ka brinjë fqinje që priten quhet vijë poligonale.

Shuma e gjatësive të brinjëve të vijës së thyer quhet perimetri i vijës së thyer.

Shembulli 1. Perimetri i vijës së thyer të hapur është  $P = (\text{формула})$ , por të vijës së thyer mbyllur është  $P = (\text{формула})$

Shembulli 2. Te figura paraprahe vija poligonale është vijë e thyer e mbyllur ABCDE.

Vija poligonale e ndan rrafshin në dy zona: zona e brendshme dhe e jashtme.

Zona e kufizuar me vijën poligonale quhet zona e brendshme, por pjesa tjetër e rrafshit është zona e jashtme.

Figura e formuar prej një vije poligonale së bashku me zonën e brendshme quhet shumëkëndësh.

Shembulli 3. Te figura 17 shumëkëndësh është ABCDE.

Mendo dhe përgjigju:

o Sa brinjë, kulme, kënde të brendshme dhe të jashtme ka shumëkëndëshi ABCDE?

o Sa brinjë, kulme, kënde të brendshme dhe të jashtme ka trekëndëshi, ndërsa sa katërkëndëshi?

T'i analizojmë shumëkëndëshat te figura 18:

Figura 18

Vërehet se te shumëkëndëshi i parë ABCDE gjatë marrjes të çfarëdo segmenti, pika e skajshme të të cilit shtrihen në brendësinë e shumëkëndëshit ose te brinjët e tij tërësisht gjendet pjesa e brendshme e shumëkëndëshit.

Ai quhet shumëkëndësh konveks. Te shumëkëndëshi i dytë ABCDE kemi se jo çdo segment shtrihet tërësisht te shumëkëndëshi. Shumëkëndëshi i dytë quhet shumëkëndësh jo konveks.

Shumëkëndëshi tek i cili, cilido segment, pikat e skajshme të të cilit shtrihen në brendësinë e shumëkëndëshit ose te brinjët e tij tërësisht gjendet në pjesën e brendshme të shumëkëndëshit quhet shumëkëndësh konveks.

Nëse ekziston ndonjë segment, pikat e skajshme të të cilit shtrihen në brendësinë e shumëkëndëshit ose te brinjët e tij, që tërësisht nuk shtrihet në brendësinë e shumëkëndëshit, atëherë ai shumëkëndësh quhet shumëkëndësh jo konveks.

Vërejtje: Te shumëkëndëshi konveks, nëse tërheqim drejtëz tek e cila shtrihet çfarëdo brinjë e shumëkëndëshit, atëherë gjithë shumëkëndëshi do të shtrihet në njëin gjysmërrafsh kufiri i të cilit është drejtëza. Te shumëkëndëshat jo konveks nuk ndodh kjo.

3. Vizato tre shumëkëndësha konveks dhe dy shumëkëndësha jo konveks!

Le të jetë dhënë një shumëkëndësh te kjo figure 19:

Mendo dhe përgjigju:

o Emërtoji të gjitha segmente te figura!

o Cilat prej tyre janë diagonale të shumëkëndëshit ABCDE?

o Numëroji diagonalet që mund të tërhiqen prej kulmit A!

o Numëroje numrin e përgjithshëm të diagonaleve që mund të tërhiqen prej të gjitha kulmeve te shumëkëndëshi i dhënë!

Segmenti pikat e skajshme të të cilit shtrihen te kulmet jofqinje të një shumëkëndëshi quhet diagonalja e shumëkëndëshit.

Numri i diagonaleve që mund të tërhiqen prej një kulmi te çdo shumëkëndësh njihsohet me formulën (формула)  $n$  është numri i brinjëve të shumëkëndëshit.

Numri i përgjithshëm i diagonaleve që mund të tërhiqen në një shumëkëndësh mund të njihsohet me formulën (формула), ku  $n$  është numri i brinjëve të shumëkëndëshit

4. Njehso numrin e diagonaleve që mund të tërhiqen prej një kulmi te pesëkëndëshi, por edhe numrin e përgjithshëm të diagonaleve te pesëkëndëshi.

5. Sa diagonal mund të tërhiqen prej një kulmi, ndërsa sa është numri i përgjithshëm i diagonaleve te trekëndëshi?

6. Te një shumëkëndësh prej një kulmi mund të tërhiqen 10 diagonale. Për cilin shumëkëndësh bëhet fjalë?

7. Në një shumëkëndësh mund të tërhiqen gjithsej 9 diagonale. Për cili shumëkëndësh bëhet fjalë? Le të jetë dhënë një shumëkëndësh te kjo figurë 20:

Figura 20

Shumëkëndëshi ABCD është katërkëndësh dhe ai ka 4 kulme, 4 brinjë, 4 kënde të brendshme dhe 4 të jashtme. Dihet se shuma e këndeve të brendshme është 3600.

Si e dimë atë? Nëse e tërheqim njëren diagonale, atëherë katërkëndëshi ndahet në dy trekëndësha.

Shuma e këndeve të brendshme të çdo trekëndëshi është 1800, atëherë fitohet se shuma e këndeve të brendshme te katërkëndëshi është 3600.

Mendo dhe përgjigju:

o Emërtoji këndet e brendshme të katërkëndëshit ABCD!

o Emërtoji këndet e jashtme të katërkëndëshit!

Në mënyrë identike me ndarjen e çdo shumëkëndëshi në trekëndësja me tërheqjen e diagonaleve prej një kulmi fitohen (формула) trekëndësja, atëherë për shumën e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit me  $n$  brinjë fitohet formula (формула)

Për shumën e këndeve të jashtme të shumëkëndëshit ABCD kemi (формула)

Për çfarëdo shumëkëndësh me  $n$  brinjë fitohet formula (формула)

Shuma e këndeve të brendshme të çdo shumëkëndësh njehsohet me formulën (формула)

Shuma e këndeve të jashtme të çdo shumëkëndësh është 3600.

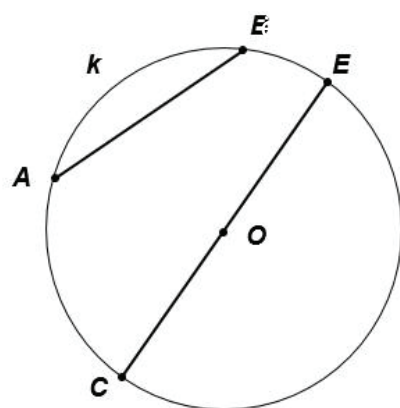
8. Njehso shumën e këndeve të brendshme të shtatëkëndëshi.

9. Shuma e këndeve të brendshme të një shumëkëndësh është 5400. Për cilin shumëkëndësh bëhet fjalë?

Detyra për punë të pavarur:

1. Pika O le të jetë mesi i segmentit AB dhe të segmentit A1B1, ku të katër pikat shtrihen në drejtëzën e njëjtë. Vërteto se (формула)!

2. Numëro sa segmente përcaktojnë pesë pika kolineare. Emërtoji! Të krahasohen gjatësitë e tyre! A mund të nxirren disa përfundime prej krahasimit të gjatësive të tyre?



1. Në një vijë rrethore një kordë është e gjatë 12 cm, por largësia qendrore deri ajo është 8 cm. Sa është rrezja e vijës rrethore?

Është dhënë figura 22

Figura 22

Drejtëza a ka një pikë të përbashkët (формула) dhe drejtëzën e quajmë tangjentë e vijës rrethore. Mund të vërehet se largësia prej qendrës deri te tangjenta a është e barabartë me rrezën e vijës rrethore r. Drejtëza b ka dy pika të përbashkëta me vijën rrethore (формула) dhe ajo drejtëz quhet sekantë. Largësia prej qendrës të vijës rrethore deri te sekanta b është më e vogël se rrezja e vijës rrethore r, ndërsa tani drejtëza c nuk ka pika të përbashkëta me vijën rrethore. Largësia prej qendrës së vijës rrethore deri te drejtëza c është më e madhe se rrezja e vijës rrethore r.

Largësia prej qendrës së vijës rrethore deri te çfarëdo drejtëz quhet lartësi qendrore e asaj drejtëze.

Drejtëza e cila me vijën rrethore ka një pikë të përbashkët quhet tangjentë e vijës rrethore. Largësia qendrore e çfarëdo qoftë tangjente të vijës rrethore është e barabartë me rrezën e vijës rrethore.

Drejtëza e cila me vijën rrethore ka dy pika të përbashkëta quhet sekantë e vijës rrethore. Largësia qendrore e çfarëdo

sekante të vijës rrethore është më e vogël se rrezja e vijës rrethore.

Largësia qendrore e çfarëdo drejtëze që me vijën rrethore nuk ka pika të përbashkëta është më e madhe prej rrezes së vijës rrethore.

. Vizato vijë rrethore (формула) dhe pesë drejtëza. Dy prej tyre le të jenë tangjenta, dy sekante dhe njëra nuk ka pika të përbashkëta me vijën rrethore

Shënoje largësinë qendrore për çdonjërin prej drejtëzave të vizatuara. Është dhënë vija rrethore  $k(O, r)$  te figura 23,

Figura 23

Te figura janë dhënë tri (формула)

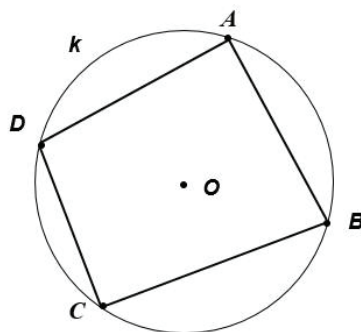
Kulmi  $A$  i këndit (формула) shtrihet te vija rrethore, prandaj këndi (формула) quhet kënd periferik. Këndi (формула) është kënd qendror. Këndi (формула) nuk është as qendror, as kënd periferik, pasi kulmi i tij  $M$  nuk shtrihet as te qendra e vijës rrethore, as te vija rrethore.

Këndi me kulm te vija rrethore, krahët e të cilit e prejnë vijën rrethore, quhet kënd periferik.

Çdo kënd qendror është dy herë më i madh se këndi periferik i konstruktuar mbi të njëjtin hark rrethor.

3. Këndi qendror le të jetë (формула). Sa është këndi periferik (формула) i konstruktuar mbi të njëjtin hark?

Ta shqyrtojmë këtë figurë 24:



Katërkëndëshi ABCD është brendashkruar te vija rrethore (формула).

Mendo dhe përgjigju:

o Çfarë paraqesin brinjët e katërkëndëshit ABCD për vijën rrethore k?

Katërkëndëshi brinjët e të cilit janë korda te vija rrethore e njëjtë quhet katërkëndësh kordiak.

Ta shqyrtojmë këtë figurë 25:

Figura 25

Vija rrethore  $k(O, r)$  është jashtëshkruar rreth katërkëndëshit ABCD.

Mendo dhe përgjigju:

o Çfarë paraqesin drejtëzat të cilat shtrihen brinjët e katërkëndëshit ABCD për vijën rrethore k?

283

Katërkëndëshi brinjët e të cilit shtrihen te drejtëzat të cilat janë tangjenta të vijës rrethore të njëjtë quhet katërkëndësh tangjencialë.

Te çdo katërkëndësh tangjencial shuma e brinjëve të kundërt është i barabartë.

4. Njehso këndet e brendshme të një katërkëndëshi kordiak, nëse ato qëndrojnë  $1 : 2 : 3 : 4$

5. Katrori a është katërkëndësh tangjencial? Përgjigja të sqarohet!

Detyra për punë të pavarur:

1. Të vërtetohet: Nëse  $AB$  dhe  $A_1B_1$  janë dy diametra të një vije rrethore, atëherë  
(формула)  
dhe (формула)!

2. Këndi ndërmjet kordës së vijës rrethore dhe tangjentës së tërhequr në njërin prej pikave të skajshme të kordës është e barabartë me këndin periferik që i përgjigjet mbi atë kordë.  
Vërteto!

3. Në një vijë rrethore një kordë është e gjatë 24 cm, por largësia qendrore deri tek ajo 9 cm. Sa është rrezja e vijës rrethore?

4. Shuma e një këndi qendror dhe periferik mbi të njëjtin hark rrethor le të jetë  $136047'24''$ .  
Sa është çdonjëri prej tyre?

5. Rreth trekëndëshit (формула) është jashtashkruar vija rrethore (формула). Këndet (формула). Simetralja e këndit (формула) e pret vijën rrethore në pikën  $D$ . Të njehsohen këndet e katërkëndëshit  $ABCD$ .

6. Rombi a është katërkëndësh tangjencial? Përgjigja të sqarohet!





# PERIMETRI DHE SYPRINA E FIGURAVE TË RRAFSHËTA



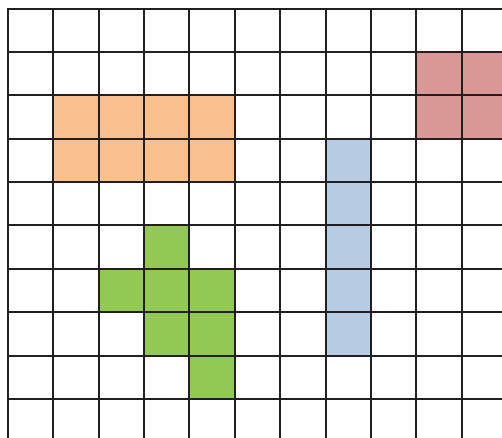
## QËLLIMET E NJËSISË MODULARE

Duke mësuar njësinë modulare, nxënësi do të aftësohet:

- ➤ të caktojë syprinën e paralelogramit (drejtkëndësh, katror, romb, romboid);
- ➤ të njehsojë syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit;
- ➤ të njehsojë rrezen e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar të trekëndëshit;
- ➤ të zbarojë teoremën e Pitagorës, teoremën e Euklidit dhe teoremën e Talesit të trekëndëshit kënddrejtë;
- ➤ të njehsojë syprinën dhe perimetrin e trapezit;
- ➤ të dallojë katërkëndësh tangjencial dhe kordiak;
- ➤ t'i shfrytëzojë vetitë e katërkëndëshit tangjencial dhe kordiak;
- ➤ të njehsojë syprinën dhe perimetrin e shumëkëndëshit;
- ➤ të njehsojë syprinën dhe perimetrin e rrethit dhe pjesëve të rrethit;
- ➤ të dijë të shfrytëzojë formula për perimetër dhe syprinë në problem praktik.

- 289. Perimetri i shumëkëndëshit. Perimetri dhe syprina e katrorit dhe drejtkëndëshit
- 295. Perimetri dhe syprina e paralelogramit
- 301. Perimetri dhe syprina e trekëndëshit
- 311. Perimetri dhe syprina e trapezit dhe trapezoidit
- 317. Katërkëndëshi kordiak dhe tangjencial
- 322. Perimetri dhe syprina e shumëkëndëshit të rregullt
- 326. Perimetri dhe syprina e rrethit
- 330. Perimetri dhe syprina e pjesëve të rrethit
- 335. Detyra për përsëritje të njësisë modulare





❖ Syprina e figurës së dhënë nuk varet prej vendpozitës ku gjendet figura.

Për syprinën e shumëkëndëshit janë të sakta këto aksioma:

Syprina  $S$  e një shumëkëndëshi është numër pozitiv ose zero d.m.th.,  $S \geq 0$ .

Shumëkëndëshat e puthitshëm kanë syprina të barabarta;

Syprina e shumëkëndëshit të përbërë prej dy ose më shumë shumëkëndësh të cilët nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta është e barabartë me shumën e syprinave të atyre shumëkëndëshave;

Syprina e katrorit me brinjë 1 cm dhe 1 cm<sup>2</sup>.

Njësia matëse për syprinën në SI është metër katrori (m<sup>2</sup>).

Shumëkëndëshi me katër brinjë (katër kulme, katër kënde) quhet katërkëndësh.

Katërkëndësha janë, për shembull, katrori, drejtkëndëshi dhe trapezi, të cilët i dimë prej shkollës fillore.

Shuma e gjatësive të katërkëndëshit të dhënë quhet perimetër të katërkëndëshit.

Brinjët e katërkëndëshit shpesh i shënojmë me shkronja të vogla latine, por nëse të njëjtët janë shënuar me  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  për njehsimin e perimetrit të katërkëndëshit e kemi këtë formulë  $P = a + b + c + d$

## 1.1. Katrori

Figura 3. Katërkëndëshat

❖Katrori është katërkëndësh ku katër brinjët dhe këndet janë të barabarta ndërmjet veti. Duke ditur shumën e këndeve të brendshme të një katërkëndëshi është 3600 madhësia e çdonjërit prej këndeve të katrori është 900 d.m.th., të katrori të gjitha këndet janë të drejtë.

Figura 4. Katrori

Nëse çdonjërin brinjëve të katrorit e shënojmë me  $a$  atëherë perimetrin e katrorit do ta njehsojmë me formulën  $P = 4a$ .  
syprina e katrorit njehsohet me formulën  $S = 4a^2$ .

Nëse diagonalen e katrorit e shënojmë me  $d$ , syprinën e tij, gjithashtu, mund ta njehsojmë me formulën  $S$  (формула)

Formula e fundit vijon prej teoremës së njohur të Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë, përkatësisht prej trekëndëshin kënddrejtë katet e të cilit janë dy brinjë të katrorit, por hipotenuza është diagonalja e katrorit, sipas teoremës së Pitagorës vlen barazia: (формула) d.m.th.,

Shembulli 1. Katrori i dhënë me brinjë  $a = 6$  cm. Të njehsojmë perimetrin dhe syprinën e katrorit

P (формула) S (формула)

Perimetri i katrorit është 24 cm, ndërsa syprina është 36 cm<sup>2</sup>.

Shembulli 2. Njehso për sa do të ndryshojë perimetri, kurse për sa syprina e katrorit, nëse brinja e tij:

a) zmadhohet dy herë,

b) zvogëlohet dy herë.

Brinja e katrorit le të jetë  $a$ . Perimetri i tij është  $P = 4a$ , ndërsa syprina është  $S = a^2$

a) Nëse brinja e katrorit zmadhohet dy herë, domethënë gjatësia e brinjës është  $2a$ , atëherë perimetri do të jetë  $P = 4(2a) = 8a$ , ndërsa syprina do të jetë  $S = (2a)^2 = 4a^2$

Përfundojmë se me zmadhimin e brinjës së katrorit dy herë, perimetri i tij do të zmadhohet gjithashtu dy herë, ndërsa syprina e tij do të zmadhohet katër herë.

b) Nëse brinja e katrorit zvogëlohet dy herë, gjatësia e saj është (формула), pra, atëherë perimetri do të jetë  $P$  (формула), ndërsa syprina do të jetë  $S$  (формула)

Me zvogëlimin e brinjës së katrorit dy herë, perimetri i tij do të zvogëlohet gjithashtu dy herë, ndërsa syprina e tij do të zvogëlohet katër herë.

Shembulli 3. Njehso perimetrin e katrorit me diagonale  $d = 6$  cm.

Për ta njehsuar perimetrin e katrorit, është e nevojshme gjatësia e brinjës

a. Prej teoremës së Pitagorës, (формула) d.m.th., (формула) pra prej kushtit të detyrës (формула) d.m.th.,  $P$  (формула)

1. Sa është syprina e arës në formë të katrorit me:

a) brinja 250 m; b) diagonalja 500 m.

2. Për një oborr në formë të katrorit me brinjë 15 m duhet të rrethohet me tre rreshta tel. Sa metra tel është i nevojshëm?

## 1.2. Drejtkëndëshi

❖ Drejtkëndëshi është katërkëndësh ku katër këndet janë të drejtë.

Figura 5. Drejtkëndëshi

Te drejtkëndëshi brinjët e përballta janë të barabarta dhe paralele.  
Perimetri dhe syprina e drejtkëndëshit njihsohet me këto formula

Nëse brinjët e drejtkëndëshit i shënojmë me  $a$  dhe  $b$ , atëherë

Perimetri i drejtkëndëshit është  $P = 2a + 2b$

Syprina e drejtkëndëshit njihsohet me formulën  $S =$  (формула)

Te drejtkëndëshi ABCD në vizatim janë tërhequr diagonalet AC dhe BD.  
Pse (формула)?

Nëse e vërejmë vizatimin, me siguri vëreni se trekëndëshat (формула) dhe (формула) janë të puthitshëm pasi (формула). Prej puthitshmërisë së trekëndëshave do të vijojë se (формула), si brinjë përgjegjëse e trekëndëshave të puthitshëm.

Me këtë vërtetuar se:

Te çdo drejtkëndësh diagonalet janë të barabarta ndërmjet veti.  
Vlen edhe gjykimi i anasjelltë i cili do të mund të merret edhe si indic për drejtkëndëshin

d e t ë j n i r b e h d d t e l a n o g a i d r ë P

S h e m b u l l i 4 . N j e h s o  
s y p r i n ë n d h e  
p e r i m e t r i n e  
d r e j t k ë n d ë s h i t m e  
b r i n j ë a = 7 c m d h e  
b = 5 c m P  
( φ o p m y л a ) S  
( φ o p m y л a )

S h e m b u l l i 5 . N j e h s o  
p e r i m e t r i n d h e  
d i a g o n a l e t e  
d r e j t k ë n d ë s h i t  
s y p r i n a e t ë c i l i t  
ë s h t ë 4 8 c m 2 , p o r  
n j ë r a b r i n j ë e k a  
g j a t ë s i n ë 8 c m S  
( φ o p m y л a ) P  
( φ o p m y л a )

3 . P r o n a r i i n j ë s h t ë p i e  
p ë r p u s h i m n ë o b o r r i n e  
t i j k a p i s h i n ë n ë f o r m ë  
t ë d r e j t k ë n d ë s h i t m e  
d i m e n s i o n e 50 m d h e 15 m.  
R r e t h p i s h i n ë s d u h e t t ë  
b ë h e t s h t e g m e g j e r ë s i  
p r e j 20 0 c m . S a ë s h t ë  
s y p r i n a e s h t e g u t ? S a  
m e t r a d u h e t t ë k a l o j ë  
p r o n a r i r r e t h p i s h i n ë n  
d u k e l ë v i z u r d e r i t e  
t e h u i p i s h i n ë s ?

Det p a a r u r :

N j e p s a p e i m e t s i p p e n a n i t i g a j a

a) zmadhohet tri herë,

z b g ë l d h e .

N j e p s o i m e t d h p k a t ë d i a g o n e

N j e p s o i m e t d h p k a t ë d i a g o n e s o s y p i n i t .

ë 9 c m , k u r s e t j e t r a h e e  
z m a d h o j m ë p ë r 2 c m ,  
s y p r i n a e  
d r e j t k ë n d ë s h i t d o t ë  
z v o g ë l o h e t p ë r 18 c m 2 .  
N j e h s o b r i n j ë n e  
d r e j t k ë n d ë s h i t .  
8 . D y p l l c m m e t r a s h ë s i  
s h k r i h e n n ë p l l a k ë t ë r e  
t ë m e t a l i t m e t r a s h ë s i  
t ë n j ë j t ë n ë f o r m ë t ë  
k a t r o r i t . S a ë s h t ë e

9. Një nxënës prej copës së letrës në formë të katrorit me brinjë 5 cm duhet të presë një drejtkëndësh me brinjë 4 cm dhe 1 cm. Sa është syprina e figurës që duhet të hidhet pas prerjes së drejtkëndëshit? Prej çfarë katërkëndështa përbëhet figura?

10. Dy vëllezër duhet të ndajnë një arë në formë të katrorit me brinjë 250 m në këtë mënyrë: çdo brinjë të arës duhet ta ndajnë në raport 2 : 3 dhe t'i lidhin pikat e ndarjes ashtu që përsëri të fitohet katror. Arën në formë të katrorit të fituar duhet ta fitojë njëri prej vëllezërve, por tjetri 4 pjesët që ngelin. Cili prej të dy vëllezërve ka marrë pjesën më të madhe?

11. Njihso syprinën e figurës. a) b)

## 2. Perimetri dhe syprina e paralelogramit

Paralelogrami është katërkëndësh me dy çifte të brinjëve paralele.

Figura 6. Paralelogrami

Për paralelogram

in ekzistojnë shumë indice, sipas të cilave mund të konstatohet katërkëndëshi i dhënë a është paralelogram ose jo. Nëse te një katërkëndësh dy brinjët e përballta janë paralele dhe të barabarta, atëherë ai katërkëndësh është paralelogram.

Për njehsimin e perimetrit është e saktë kjo formulë:

Nëse brinjët e paralelogramit i shënojmë me a dhe b, atëherë: perimetrit e paralelogramit e njehsojmë me formulën:

$$P = 2a + 2b$$

Ta nxjerrim formulën për njehsimin e syprinës së paralelogramit. Do ta shqyrtojmë paralelogramin ABCD me brinjë a dhe b si te figura 7.

Le të jetë DD1 lartësia e lëshuar prej kulmit D kah brinja AB, por C1 është lartësia e lëshuar prej kulmit C nga e njëjta brinjë. Të dy lartësitë kanë gjatësi të barabartë që e shënojmë me ha

Figura 7.

Trekëndëshat ADD1 dhe BC1 janë të puthitshëm (përpiqu të tregoni vetë!), për shkak se syprina e paralelogramit ABCD dhe syprina e drejtkëndëshit D1C1CD janë të barabarta:

$$S(\text{формула}) = S(\text{формула}) + S(\text{формула}) = S(\text{формула}) + S(\text{формула}) = S(\text{формула})$$

Pasi syprina e drejtkëndëshit (формула) është S (формула), njëjtë do të jetë edhe syprina e paralelogramit ABCD.

Domethënë, syprinën e paralelogramit e njehsojmë me formulën: S (формула)  
Në të njëjtën mënyrë, nëse i shqyrtojmë brinjën b dhe lartësinë e lëshuar kah brinja b, do të vimë te kjo formulë, analoge me parapraken:

Domethënë, duhet të mbash mend këtë

Nëse brinjët e paralelogramit i shënojmë me  $a$  dhe  $b$  dhe nëse lartësia e lëshuar kah brinja  $a$  është shënuar me  $h_a$ , kurse lartësia e lëshuar kah brinja  $b$  është shënuar me  $h_b$  atëherë:

syprinën e paralelogramit e njehsojmë me formulën:  $S$  (формула)

Shembulli 1. Njehso perimetrin dhe syprinën e paralelogramit me brinjë 6 cm dhe 9 cm, nëse lartësia e lëshuar kah brinja  $a$  është 4 cm. Sa është gjatësia e lartësisë e lëshuar kah brinja  $b$ ?

Nga kushti i detyrës kemi se: (формула)  $P$  (формула)  $S$  (формула)  
Perimetri i paralelogramit është 30 cm, kurse syprina e tij është 24 cm<sup>2</sup>.

Për ta njehsuar gjatësinë e lartësisë kah brinja  $b$  do ta shfrytëzojmë barazimin  $S$  (формула). Me zëvendësimin e madhësive të njohura te barazia e fundit kemi: (формула) prej ku (формула)

Gjatësia e lartësisë (формула) është (формула)

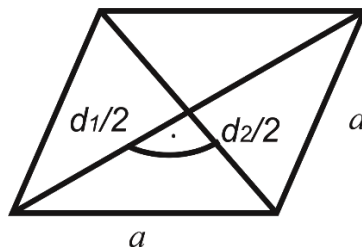
Shembulli 2. Njehso lartësitë dhe perimetrin e paralelogramit me brinjë  $a = 16$  cm, syprina e të cilit është 48 cm<sup>2</sup>, por njëra brinjë është dy herë më e madhe prej tjetrës  $S$  (формула)

1) Nëse brinja e dhënë është më e vogël, atëherë (формула) dhe (формула), pra perimetri është  $P$  (формула)

2) Nëse brinja e dhënë është më e madhe, atëherë (формула) dhe (формула), pra perimetri është  $P$  (формула)

1. Agimi ka pasur livadh në formë të paralelogramit me brinjë 250 m dhe lartësi që i përgjigjet kësaj brinje 100m. Njehso syprinën e livadhit? Sa është syprina e shprehur në hektarë?

Paralelogrami tek i cili të gjitha brinjët janë të barabarta quhet romb. Të përkujtohem se edhe katrori është paralelogram me katër brinjë të barabarta, tek i cili të gjitha këndet janë të drejta. Kështu, katrorin mund ta shqyrtojmë si romb me katër kënde të drejta.



Слика 8. Ромб

Për rombin vlejné këto indice:

Diagonalja e rombit është simetralja e këndeve përkatëse të kundërta.

2. Përpiqu ta vërtetosh këtë indic për rombin

Për njehsimin e perimetrit dhe syprinës së rombit të sakta janë këto formula:

Nëse brinjën e rombit e shënojmë me  $a$ , perimetrin e rombit do ta njehsojmë me formulën:

$$P = 4a$$

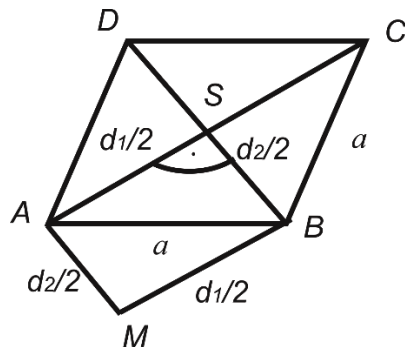
Syprinën e rombit mund ta njehsojmë në të njëjtën mënyrë sikurse edhe syprinën e paralelogramit: nëse  $a$  është brinja e rombit,  $h$  është lartësia e rombit, syprina e tij është:

$$S = (формула)$$

Te rombi është karakteristike se diagonalet e tij janë reciprokisht normale. T'i shënojmë diagonalet me  $d_1$  dhe  $d_2$ .

Syprina e rombit mund të njehsohet edhe me këtë formulë:  $S$  (формула)

Ta vërtetojmë formulën e fundit. Do ta shqyrtojmë rombin te figura 9.



Syprina e rombit ABCD është shumë prej syprinave të katër trekëndëshave kënddrejtë ku është ndarë rombi me diagonalet e tij. Do ta konstruktojmë ashtu AMBS dhe (формула Ky katërkëndësh do të jetë paralelogram me kënde të drejta te kulmi S dhe kulmi M, që do të thotë edhe dy këndet e tjera do të jenë të drejta, domethënë katërkëndëshi AMBS është drejtkëndësh. Syprina e tij është  $S_1$  (формула

Trekëndëshat (формула) dhe (формула) janë të puthitshëm, pra do të kemi syprina të barabarta

Në të njëjtën mënyrë mund ta konstruktojmë drejtkëndëshin me brinjë SC dhe SB syprina e të cilit do të jetë  $S_2$  (формула)

Shuma e syprinave të dy paralelogrameve  $S_1 + S_2$ , do të jetë e barabartë me syprinën e rombit. Kështu, për syprinën e rombit fitojmë  $S$  (формула).

Vërejtje: Pas të mësuarit e formulave për syprinën e trekëndëshit, formulën e fundit për syprinën e rombit do të munda ta vërtetoni edhe në tjetër mënyrë.

Shembulli 3.

Syprina e rombit është  $60 \text{ cm}^2$ , por lartësia e tij është  $5 \text{ cm}$ . Njihso perimetrin e rombit. Prej formulës  $S =$  (формула) e njehsojmë brinjën e rombi: (формула)  $P$  (формула)

Shembulli 4. Perimetri i rombit është  $48 \text{ cm}$

Brinja e rombit është  $12 \text{ cm}$ , por lartësia e tij është  $6 \text{ cm}$ . Njihso diagonalet te rombi nëse njëra diagonale është dy herë më e madhe se tjetra.

Syprina e rombit ABCD është shumë prej syprinave të katër trekëndëshave kënddrejtë ku është ndarë rombi me diagonalet e tij. Do ta konstruktojmë ashtu AMBS dhe (формула). Ky katërkëndësh do të jetë paralelogram me kënde të drejta te kulmi S dhe kulmi M, që do të thotë edhe dy këndet e tjera do të jenë të drejta, domethënë katërkëndëshi AMBS është drejtkëndësh. Syprina e tij është  $S_1$  (формула). Trekëndëshat (формула) dhe (формула) janë të puthitshëm, pra do të kemi syprina të

Në të njëjtën mënyrë mund ta konstruktojmë drejtkëndëshin me brinjë SC dhe SB syprina e të cilit do të jetë  $S_2$  (формула)

Shuma e syprinave të dy paralelogrameve  $S_1 + S_2$ , do të jetë e barabartë me syprinën e rombit. Kështu, për syprinën e rombit fitojmë  $S$  (формула).

Vërejtje: Pas të mësuarit e formulave për syprinën e trekëndëshit, formulën e fundit për syprinën e rombit do të munda ta vërtetoni edhe në tjetër mënyrë.

Shembulli 3. Syprina e rombit është  $60 \text{ cm}^2$ , por lartësia e tij është  $5 \text{ cm}$ . Njihso perimetrin e rombit.

Prej formulës  $S =$  (формула) e njehsojmë brinjën e rombi: (формула)  $P$  (формула)

Shembulli 4. Perimetri i rombit është  $48 \text{ cm}$ . Brinja e rombit është  $12 \text{ cm}$ , por lartësia e tij është  $6 \text{ cm}$ . Njihso diagonalet te rombi nëse njëra diagonale është dy herë më e madhe se tjetra.

### 3. Perimetri dhe syprina e trekëndëshit

❖ **Trekëndëshi është shumëkëndësh me tri brinjë. Nëse kulmet e trekëndëshit i shënojmë me  $A, B, C$ , më së shpeshti brinjën përballë kulmit  $A$  e shënojmë me  $a$ , brinja përballë kulmit  $B$  e shënojmë me  $b$ , brinja përballë kulmit  $C$  e shënojmë me  $c$ .**

*Figura 10.*

#### 3.1. Trekëndëshi brinjëndryshëm

**Nëse të gjitha brinjët e trekëndëshi kanë gjatësi të ndryshme e quajmë trekëndësh brinjëndryshëm.**

**Mbaj mend:**

*Perimetri i trekëndëshit me brinjë  $a, b, c$ , është  $P = a + b + c$*

*Ta nxjerrim formulën për njehsimin e syprinës së trekëndëshit.*

*Figura 11.*

*Do ta shqyrtojmë paralelogramin  $ABCD$  të figura 11. Syprina e tij është  $S$  (формула). Me diagonalen  $AC$  e paralelogramit është ndarë në dy trekëndësha të puthitshëm: (формула) dhe (формула), pra syprina e çdonjërit prej tyre do të jetë gjysma prej syprinës së paralelogramit, domethënë  $S$  (формула)*

Nëse lartësitë e lëshuara kah brinjët  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i shënojmë, përkatësisht me (формула), syprinën e trekëndëshit do ta njehsojmë me njëren prej këtyre formulave

$S$  (формула)  $S$  (формула)  $S$  (формула)

Nëse e dimë gjatësinë të çdonjërës prej brinjëve të trekëndëshit, syprinën e trekëndëshit mund ta njehsojmë edhe me këtë formulë:  $S$  (формула)

ku  $s$  është gjysmëperimetri i trekëndëshit, domethënë (формула). Kjo formulë njihet si formula e Heronit për syprinën e trekëndëshit.

Shembulli 1. Njehso perimetrin dhe syprinën e trekëndëshit me brinjë 26 cm, 28 cm dhe 30 cm. Perimetri i trekëndëshit është:  $P$  (формула)

Pra, i kemi të njohur të tri brinjët e trekëndëshit, syprinën mund ta njehsojmë me formulën e Heronit  
(формула)  $S$  (формула)  $S$  (формула)

Shembulli 2. Syprina e trekëndëshit është 72 cm<sup>2</sup>, por lartësitë te trekëndëshi janë me gjatësi 8 cm, 6 cm dhe 9 cm. Njehso perimetrin e trekëndëshit.  $P$

Prej formulës për syprinën e trekëndëshit S

(формула) kemi (формула)

Në mënyrë analoge S (формула) S (формула)

Perimetri i trekëndëshit është P (формула)

1. Livadhi në formë të trekëndëshit brinjëndryshëm me brinjë 180 m, 240 m dhe 160 m. Njehso syprinën e livadhit! Sa metra rrugë duhet të kalosh për ta rrethuar livadhin?

### 3.2. Trekëndëshi barakrahas

Trekëndëshi tek i cili dy brinjë kanë gjatësi të njëjtë e quajmë trekëndësh barakrahas. Brinjët me gjata të barabarta i quajmë krahët e trekëndëshit, por brinjën e tretë e quajmë baza e trekëndëshit barakrahas.

Figura 13. Trekëndëshi barakrahas

Bazën e trekëndëshit barakrahas më së shpeshti e shënojmë me a, kurse krahët me b. Perimetri i trekëndëshit barakrahas është:

$$P = a + 2b.$$

Për njehsimin e syprinës së trekëndëshit barakrahas i shfrytëzojmë formulat të cilat shfrytëzohen për njehsimin e syprinës së trekëndëshit brinjëndryshëm, domethënë S (формула) S (формула) si edhe formula e Heronit.

### Shembulli 3

Njihso perimetrin dhe syprinën e trekëndëshit barakrahas me bazën 8 cm dhe krahun 12 cm.

Cakto gjatësinë e çdonjërës prej lartësive të trekëndëshi.  
Perimetri i trekëndëshit është:  $P$  (формула)

Pasi i dimë gjatësitë e të tri brinjëve të trekëndëshi, por nuk e kemi të njohur asnjërën prej lartësive, syprinën e trekëndëshit do ta njehsojmë me

formulën e Heronit (формула)  $S$  (формула)  $S$  (формула)

Nga ana tjetër,  $S$  (формула)  $S$  (формула)

Shembulli 4. Njihso perimetrin e trekëndëshit barakrahas me bazën 6 cm dhe lartësinë të lëshuar kah baza 4 cm.

2 Nardi duhet të njehsojë syprinën e pjesës së sipërme të pllakës në formë të trekëndëshit barakrahas me bazën 12 cm dhe këndi pranë bazës 300. Sa ka fituar Nardi?

### 3.3. Trekëndëshi barabrinjës

Trekëndëshin, tek i cili të gjitha brinjët janë të barabarta, e quajmë trekëndësh barabrinjës.

Për perimetrin vlen kjo:

Nëse brinjën e trekëndëshit barabrinjës e shënojmë me  $a$ , perimetri i tij është:  $P = 3a$

Figura 15. Trekëndëshi barabrinjës

Lartësitë të lëshuara prej brinjëve të trekëndëshit barabrinjës janë të barabarta dhe do t'i shënojmë me  $h$ . Syprinën e trekëndëshit barabrinjës mund ta njehsojmë duke zbatuar formulën  $S$  (формула)

Ta njehsojmë gjatësinë e lartësisë të trekëndëshi barabrinjës. E zbatojmë teoremën e Pitagorës: (формула)

Ta nxjerrim tani formulën për syprinën e trekëndëshit barabrinjës për të cilin e dimë vetëm gjatësinë e brinjës:  $S$  (формула)  $S$  (формула)

Prej këtu, për njehsimin e syprinës së trekëndëshit barabrinjës, do të shfrytëzojmë:

Nëse brinjën e trekëndëshit barabrinjës e shënojmë me  $a$ , syprina e tij njihet sipas formulës:  
 $S$  (формула)

Shembulli 5. Njehso perimetrin dhe syprinën e trekëndëshit barabrinjës me brinjën 8 cm.  
Zgjidhje:  $a = 8$  cm  $P$  (формула)  $S$  (формула)

3 Petriti dhe Lindita duhet të njehsojnë syprinën e dy trekëndëshave të ndryshëm. Petriti ka marrë trekëndëshin barabrinjës me brinjë 5 cm, por Lindita trekëndësh barakrahas me bazën 6 cm dhe lartësi kah baza 5 cm. Cili trekëndësh ka syprinë më të madhe, i Petritit ose i Linditës?

### 3.4. Trekëndëshi kënddrejtë

Trekëndëshi që ka kënd të drejtë e quajmë trekëndësh kënddrejtë.

Figura 16. Trekëndëshi kënddrejtë

Të vërejmë se te trekëndëshi kënddrejtë me kënd të drejtë te kulmi  $C$  i lartësisë e lëshuar kah brinja  $b$  puthitet me brinjën  $a$  dhe anasjelltas, lartësia e lëshuar kah brinja  $a$  puthitet me brinjën  $b$ . Prandaj, syprina e trekëndëshit kënddrejtë është  $S$  (формула)

Për trekëndëshin kënddrejtë vlejné të dy teoremat e njohura: teorema e Euklidit dhe teorema e Pitagorës (të cilën e keni mësuar në shkollën fillore, por ne e zbatojmë disa here). Në vazhdim këto teorema do t'i japim me vërtetim

Teorema e Euklidi: Nëse  $p$  dhe  $q$  janë projeksionet e kateteve  $a$  dhe  $b$  mbi hipotenuzën  $c$  të trekëndëshit kënddrejtë, por  $h$  është lartësia e lëshuar kah hipotenuza, atëherë vlen barazia: (формула) (figura 17).

Teorema e Euklidit është nxjerrë si rezultat i ngjashmërisë së dy trekëndëshave kënddrejtë të cilët fitohen me tërheqjen e lartësive kah hipotenuza c të trekëndëshi kënddrejtë i shqyrtuar.

Vërtetimi: Pikërisht, nëse (формула) është lartësia e lëshuar kah hipotenuza të trekëndëshi kënddrejtë ABC, atëherë trekëndëshat (формула) dhe (формула) janë kënddrejtë. Përveç kësaj këndi te kulmi B dhe këndi te kulmi A janë komplementarë, njëjtë sikurse edhe këndi te kulmi B dhe (формула), prej ku përfundojmë se (формула) dhe (формула) këndet te kulmi A janë të barabarta.

Në të njëjtën mënyrë tregojmë se (формула) edhe (формула) këndet te kulmi B janë të barabarta, që do të thotë (формула) dhe (формула) kanë kënde përgjegjëse të barabarta, pra ata janë trekëndësha të ngjashëm.

Brinjët e tyre përkatëse janë proporcionale, domethënë vlen barazia:

$$h : p = q : h$$

prej ku fitojmë: (формула)

me të cilën e vërtetuar teoremën e Euklidit.

Teorema e Pitagorës: Nëse a dhe b janë katete, kurse c hipotenuzë të trekëndëshi kënddrejtë, atëherë vlen barazia (формула)

Ta vërtetojmë teoremën e Pitagorës.

Figura 18.

Vërtetimi: Do ta shqyrtojmë trekëndëshin kënddrejtë të figura 18

Le të jenë p dhe q projeksionet e kateteve mbi hipotenuzën. (формула) dhe (формула) janë të ngjashëm (këndet përgjegjëse janë të barabarta), që do të thotë kanë brinjë proporcionale, domethënë vlen barazia

(формула) prej ku (формула)

. Prej ngjashmërisë së trekëndëshave (формула) dhe (формула) vijon  $q : a = a : c$ , domethënë

Mbi hipotenuzën c konstruktojmë katror. Nëse e vazhdojmë lartësinë e lëshuar

kah hipotenuza (формула), katrorin do ta ndajmë në dy drejtkëndësha syprinat e të  
janë (формула) dhe përgjegjëse (формула) dhe (формула)

Syprina e katrorit është,  $c^2$ ,  
e barabartë me shumën e syprinave të drejtkëndëshave të cilat katrori është ndarë  
(figura 18), domethënë (формула) me të cilën e vërtetuar teoremën.

4. Perimetri i trekëndëshit barakrahas kënddrejtë me hipotenuzë 4 cm është (формула).  
Njehso syprinën e trekëndëshit!

3.5. Vija rrethore e brendashkruar te trekëndëshi dhe vija rrethore e jashtashkruar rreth  
trekëndëshit

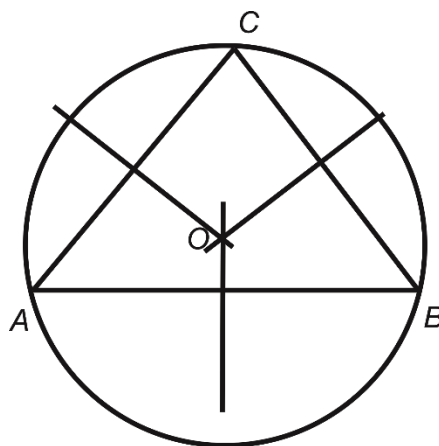
Simetralet e këndeve të trekëndëshi i dhënë priten në një pikë. Ajo pikë është qendra e  
vijës rrethore e cila çdonjërin prej brinjëve të trekëndëshit e prek (prej pjesën e  
brendshme) dhe e njëjta quhet vija rrethore e brendashkruar në trekëndësh.

Figura 19. Vija rrethore e brendashkruar në trekëndësh

Nëse  $r$  është rrezja e vijës rrethore të brendashkruar te një trekëndësh, por  $s$  është gjysmë perimetri i  
trekëndëshit, domethënë (формула). Syprina e trekëndëshit është  $S$

Te trekëndëshi barabrinjës me brinjë  $a$ ,  $r$

Simetralet tani të brinjëve të çfarëdo trekëndësh gjithashtu priten në një pikë e cila paraqet qendrën e  
vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit, domethënë vija rrethore e cila kalon nëpër kulmet e  
trekëndëshit.



Слика 20. Опишана кружница околу триаголник

Nëse me  $R$  e shënojmë rrezën e vijës rrethore të jashtashkruar, por me  $a, b, c$ , janë brinjët e trekëndëshi, për syprinën e trekëndëshit vlen:  $S$

Te trekëndëshi barabrinjës me brinjë  $a$ ,

Shembulli 6. Njehso syprinën e trekëndëshit me brinjë 6 cm, 9 cm dhe 10 cm, nëse rrezja e vijës rrethore të brendashkruar të trekëndëshi është 4 cm.  $S$

Shembulli 7. Njehso rrezën e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit kënddrejtë me katete 3 cm dhe 4 cm.

Syprina e trekëndëshit kënddrejtë është  $S$  (формула)

Hipotenuzën do ta njehsojmë me teoremën e Pitagorës: (формула)  $S$  (формула)

Të vërejmë se rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar të trekëndëshi kënddrejtë është dy herë më e vogël se hipotenuza, domethënë diametri të vija rrethore e jashtashkruar rreth trekëndëshit kënddrejtë është i barabartë me hipotenuzën. Ky gjykim që vlen te çdo trekëndësh kënddrejtë dhe është i njohur si teorema e Talesit për trekëndëshin kënddrejtë.

Teorema e Talesit për trekëndëshin kënddrejtë: nëse  $A, B, C$  janë tri pika të vijës rrethore tek e cila  $AB$  është diametri, atëherë këndi (формула) është i drejtë.

Teorema e Talesit për trekëndëshin kënddrejtë: nëse A, B, C janë tri pika të vijës rrethore tek e cila AB është diametri, atëherë këndi (формула) është i drejtë.

Teorema e fundit është rast special prej teoremës së Talesit sipas së cilës këndi periferik te vija rrethore është dy herë më e vogël se këndi qendror mbi të njëjtin hark rrethor.

5. Për trekëndëshin me brinjë 21 cm, 17 cm dhe 10 cm të caktohet rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar dhe brendashkruar

Detyra për punë të pavarur:

1. Skico trekëndësh barakrahas dhe shënoji brinjët. Njehso syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit barakrahas me bazën 6 cm dhe krahun 5 cm.
2. Njehso syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit barabrinjës me lartësi 9 cm.
3. Njehso perimetrin e trekëndëshit tek i cili të dy brinjët kanë gjatësi 7 cm dhe 9 cm, kurse syprina e trekëndëshit është (формула)
4. Skico trekëndësh kënddrejtë dhe shënoji brinjët. Njehso syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit kënddrejtë me katete 3 cm dhe 4 cm.
5. Krahu i trekëndëshit barakrahas është 17 cm, por lartësia e lëshuar kah baza është 15 cm. Njehso syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit.
6. Brinjët e një trekëndëshi janë 24 cm, 25 cm dhe 7 cm. Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar te trekëndëshi dhe rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit.
7. Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar dhe rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit barabrinjës me brinjë 10 cm.
8. Baza e një trekëndëshi barakrahas është 12 cm, por krahu është 10 cm. Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar dhe rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit.
9. Njehso hipotenuzën te trekëndëshi kënddrejtë me syprinë 270 cm<sup>2</sup>, nëse katet qëndrojnë si 5 : 3.
10. Njehso syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit kënddrejtë që paraqet figure e vendosur në mur, por tek i cili projeksionet e kateteve mbi hipotenuzën janë 16 cm dhe 9 cm.
11. Sajmiri e ka fotografinë në mur në formë të trekëndëshit barakrahas. Perimetri i trekëndëshit është 78 cm, por ndryshimi i brinjës te fotografia e cila e luan rolin e krahut dhe brinja rolin e bazës është 6 cm. Të njehsohet sa është syprina e fotografisë së Sajmirit!
12. Klara prej fletës së letrës ka prerë trekëndësh me brinjë të cilat qëndrojnë 2 : 3 : 4, pastaj te trekëndëshi është brendashkruar vija rrethore me reze (формула) cm. Njehso brinjët e trekëndëshit të Klarës!

√



T'i shqyrtojmë këta shembuj të zgjidhur

Shembulli 1. Njehso syprinën e trapezit me baza 12 cm dhe 8 cm dhe lartësi 7 cm. (формула)  $S$  (формула)

Shembulli 2. Njehso perimetrin dhe syprinën e trapezit barakrahas me baza 16 cm dhe 10 cm dhe krah 5 cm.

Perimetri i trapezit është:  $P$  (формула)

Figura 22. Trapezi barakrahas

Për ta njehsuar syprinën e trapezit është e nevojshme ta caktojmë lartësinë e trapezit. Prej trekëndëshit kënddrejtë me katetë  $h$  dhe  $x$  dhe hipotenuzë  $c$ , sipas teoremës së Pitagorës vlen: (формула), ku (формула)  $S$  (формула)  
Për trapezin barakrahas të sakta janë këto teorema, të cilat përshkruajnë vetitë e trapezit barakraha dhe shpeshherë shfrytëzohen në detyra problemore konkrete:

Teorema: Këndet që shtrihen në krahun e njëjtë të trapezi barakrahas janë suplementare.

1. Vërtetoje teoremën paraprake.

Për trapezin barakrahas të sakta janë edhe këto dy veti:

Teorema: Këndet që shtrihen te baza e njëjtë të trapezit barakrahas janë të barabarta ndërmjet veti.

**Teorema:** Diagonalet e trapezit barakrahas janë të barabarta ndërmjet veti.

Trapezi që ka një kënd të drejtë quhet trapez kënddrejtë. Te trapezi kënddrejtë lartësitë puthiten me njërin krah të trapezit.

Figura 23. Trapezi kënddrejtë

Shembulli 3. Njehso perimetrin dhe syprinën e trapezit kënddrejtë me baza 12 cm dhe 19 cm dhe krah 7 cm dhe 9 cm. P (формула)

Lartësia te trapezi kënddrejtë është i barabartë me krahun më të vogël. Prandaj (формула) S (формула),.

2. Trapezi kënddrejtë ka brinjë jo paralele me gjatësi 17 cm dhe 8 cm, por perimetri 94 cm. Njehso syprinën e tij!

T'i shqyrtojmë edhe këta shembuj:

Shembulli 4. Njehso syprinën e trapezit me diagonale 13 cm dhe 15 cm, nëse lartësia e tij është 12 cm. Është dhënë,

Tërheqim segment që është paralel dhe i barabartë me diagonalen (формула). Kështu, e fitojmë trekëndëshin AEC. Brinja  $x = a + b$ .

Me shfrytëzimin e teoremës së Pitagorës i fitojmë gjatësitë e AH dhe HE prej trekëndëshave kënddrejtë (формула) dhe (формула)

Nga ana tjetër (формула).

Prej këtu syprina e trapezit do të jetë e barabartë me: S

Shembulli 5. Njehso syprinën e trapezit me baza 30 cm dhe 19 cm dhe krah 13 cm dhe 20 cm.

Janë dhënë bazat  $a = 30$  cm,  $b = 19$  cm dhe krahët  $c = 13$  cm,  $d = 20$  cm. Tërheqim segment paralel dhe të barabarta me brinjë  $c$ . Kështu, e fitojmë trekëndëshin (формула). Brinja  $x = a - b = 30 - 19 = 11$  cm.

Duke i ditur të gjitha brinjët e trekëndëshit (формула), me ndihmën e formulës së Heronit, mund ta njehsojmë syprinën.

Për gjysmë shumën e brinjëve të tij kemi:  $s$  (формула)  $S$  (формула) (формула) E dimë se syprinën e (формула) mund ta njehsojmë si  $S$  (формула), ku  $h$  është lartësia e (формула), por njëkohësisht është dhe lartësia e trapezit. Prandaj (формула) $S$  (формула)

Prej këtui, për syprinën e trapezit do të kemi:  $S$  (формула)

3. Njehso syprinën e trapezit me baza 19 cm dhe 2 cm dhe diagonale 17 cm dhe 10 cm.

## 4.2. Trapezoidi

❖ Katërkëndëshi që nuk ka brinjë paralele quhet trapezoid.

Figura 24. Trapezoidi

Syprinën e trapezoidit mund ta njehsojmë si shumë të syprinave të trekëndëshave të cilët do ta ndajmë trapezoidin (varësisht prej asaj cilat elemente na janë dhënë). Për shembull, me një rreth prej diagonaleve trapezoidin e ndajmë në dy trekëndësha. Me të dy diagonalet trapezoidi është ndarë në katër trekëndësha.

Shembulli 6. Njehso syprinën e trapezoidit me diagonale (формула), nëse kulmet A dhe C janë larguar prej diagonales 7 cm dhe 6 cm, përkatësisht.

Syprina e trapezit do të jetë shumë prej syprinave të trekëndëshave (формула) dhe (формула) për të cilët diagonalja (формула) është brinjë e përbashkët. Largësia prej kulmit A deri te diagonalja (формула) në realitet është lartësia kah brinja (формула) e trekëndëshi (формула).

Në mënyrë analoge, largësia prej pikës C deri te (формула) është lartësia e trekëndëshit (формула).

(Bëje skicën!)

Syprina e trapezoidit është:  $S = S(\text{формула}) + S(\text{формула})$

## 4.3. Deltoidi

❖ Katërkëndëshi që ka dy çifte të brinjëve fqinje me gjatësi të barabarta quhet deltoid. Te deltoidi diagonalet janë reciprokisht normale. Diagonalja më e gjatë është simetrale e diagonales më të shkurtër të deltoidit.

Syprina e deltoidit me diagonale dhe njehsohet me formulën

Kjo formulë thjeshtë vërtetohet. Ta shqyrtojmë deltoidin te figura 26

Syprina  $S$  e deltoidit është shumë e syprinave të trekëndëshave (формула) dhe (формула). Diagonalja (формула) është brinja e përbashkët për të dy trekëndëshat. Me pikëprerjen e të dy diagonaleve, diagonalja më e madhe është ndarë by pjesë, gjatësitë e të cilës janë shënuar me  $x$  dhe  $y$ .

Figura 26

Pasi diagonalet te deltoidi janë reciprokisht normale, segmentet me gjatësi  $x$  dhe  $y$  do të jenë lartësitë e lëshuara kah brinja (формула) të trekëndëshave (формула) dhe (формула), përkatësisht. Për syprinat e çdonjërit prej trekëndëshave do të kemi:  $S$  (формула)  $S$  (формула)

Prej për syprinën e deltoidit kemi:

Të përkujtohem se diagonalet edhe te rombi janë reciprokisht normale dhe formulën e fundit e shfrytëzuam gjithashtu për njehsimin e syprinës së rombit.

Shembulli 7. Njehso perimetrin dhe syprinën e deltoidit me brinjë 8 cm dhe 5 cm dhe diagonalet 6 cm dhe 9 cm

Perimetri i deltoidit është: P

Syprina e deltoidit është: S

2. Brinjët e deltoidit janë (формула) cm dhe (формула) cm, por diagonalja e cila nuk është boshti i simetrisë së deltoidit është 8 cm. Të njehsohet syprina e deltoidit.

Detyra për punë të pavarur:

1. Trapezi me bazë 34 cm dhe lartësi 15 cm e ka syprinën 360 cm<sup>2</sup>. Njehso bazën tjetër të trapezit. Sa është gjatësia e vijës së mesme të trapezit?

2. Njehso bazat te trapezi të cilat ndryshojnë për 7 cm, nëse syprina e trapezit është 75 cm<sup>2</sup>, por lartësia është 6 cm

3. Trapezi kënddrejtë i ka krahët 17 cm dhe 8 cm, por perimetri i tij është 94 cm. Njehso syprinën e trapezit

4. Njehso perimetrin dhe syprinën e trapezit me baza 24 cm dhe 10 cm dhe krah 15 cm dhe 13 cm.

5. Nardi ka oborr në formë të trapezit barakrahas me syprinë prej 330 m<sup>2</sup> dhe bazë 30 m dhe 14 m. Sa metra duhet të kalojë Nardi për ta rrethuar oborrin?

8. Sajmiri ka dashur të bëjë fluturuese prej teli në formë të deltoidit me syprinë 840 cm<sup>2</sup>, me diagonalen më të vogël 30 cm dhe me brinjë më të vogël 25 cm. Për këtë qëllim duhet të marrë tel për brinjët e deltoidit. Sa duhet të



Kur shqyrtojmë katërkëndësh tangjencial, vija rrethore tangjentet e të cilës janë brinjët e katërkëndëshit është brendashkruar vija rrethore te katërkëndëshi.

Shembulli 1. Njehso perimetrin e katërkëndëshit tangjencial ABCD me brinjë (формула) dhe (формула)

Katërkëndëshi është tangjencial, që do të thotë: (формула) pra, perimetri është  $P$  (формула)

Konstato cilat prej llojeve të katërkëndëshave të cilat i mësuam paraprakisht: paralelogram (katror, drejtkëndësh, romb, romboid), trapez dhe deltoid mund të jetë tangjencialë, përkatësisht katërkëndësh kordiak.

Katrori është katërkëndësh tek i cili këndet e përballta janë suplementare, por gjithashtu shuma e gjatësive janë të barabarta. Katrori mund të jetë edhe tangjencial dhe katërkëndësh kordiak, domethënë te katrori mund të brendashkruhet vija rrethore dhe rreth katrorit mund të jashtashkruhet vija rrethore. Qendrat e vijave rrethore të brendashkruara dhe jashtashkruara te katrori puthiten dhe gjenden te prerja e diagonaleve të katrorit. Kjo do të thotë se diagonalja është diametër e vijës rrethore të jashtashkruar, por diametri i vijës rrethore të brendashkruar është i barabartë me gjatësinë e brinjës së katrorit.

Drejtkëndëshi është katërkëndësh rreth të cilit mund të jashtashkruhet vija rrethore, domethënë drejtkëndëshi mund të jetë katërkëndësh kordiak.

Drejtkëndëshi nuk e kënaq vetinë e shumave të brinjëve të përballta që janë të barabarta, që do të thotë katërkëndëshi nuk është katërkëndësh tangjencial dhe në atë nuk mund të brendashkruhet vija rrethore. Qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth drejtkëndëshit shtrihet te prerja e diagonaleve.

Diagonalja është diametër i vijës rrethore të jashtashkruar.

Te rombi mund të brendashkruhet vija rrethore, kurse rreth rombit nuk mund të jashtashkruhet vija rrethore, domethënë rombi mund të jetë tangjencial, por jo edhe katërkëndësh kordiak. Me të vërtetë, te rombi këndet e përballta janë të barabarta, por jo edhe suplementare. Qendra e vijës rrethore të brendashkruar është te prerja e diagonaleve, por diametri i vijës rrethore është e barabartë me brinjën e rombit.

Romboidi nuk është katërkëndësh tangjencial as kordiak (të vërejmë se këndet e përballta te romboidi janë të barabarta, por jo suplementare; gjithashtu, shuma e brinjëve të përballta nuk janë të barabarta).

Jo çdo trapez është katërkëndësh kordiak, përkatësisht tangjencial.

Por, ekzistojnë trapeze rreth të cilave mund të jashtashkruhet vija rrethore, sikurse edhe trapeze te të cilat mund të brendashkruhet vija rrethore, si edhe trapezet te të cilat mund të brendashkruhet vija rrethore, domethënë ekzistojnë trapeze kordiake dhe tangjenciale.

Deltoidi është katërkëndësh tek i cili mund të brendashkruhet vija rrethore. Në realitet deltoidi është tangjencial, por nuk është edhe katërkëndësh kordiak.

Pasi te deltoidi brinjët fqinje dy nga dy janë të barabarta, kjo do të thotë se shuma e gjatësive të brinjëve të përballta do të jenë të barabarta.

Shembulli 3. Te drejtkëndëshi me perimetër 184 cm brinjët qëndrojnë sikurse 15 : 8. Njehso rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth drejtkëndëshit.

Diamteri i vijës rrethore të jashtashkruar rreth drejtkëndëshit është i barabartë me diagonalen e drejtkëndëshit. Diagonalen do ta njehsojmë me zbatimin e teoremës së Pitagorës.

Rrezja e vijës rrethore të brendashkruar rreth drejtkëndëshit është  $R = 34$  cm.

Shembulli 4. Te vija rrethore me rreze 6 cm është brendashkruar katrori, por te katrori është brendashkruar vija rrethore. Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar.

Vija rrethore me rreze 6 cm është jashtashkruar vija rrethore rreth katrorit dhe diametri i saj është i barabartë me diagonalen e katrorit (bëje skicën vetë!), që do të thotë se diagonalja e katrorit është  $d = 12$  cm.

Diametri i vijës rrethore të brendashkruar te katrori është i barabartë me brinjën e katrorit  $a$ .

Sipa teoremës së Pitagorës, ndërmjet brinjës dhe diagonales së katrorit vlen barazia:

1. Njehso brinjën e rombit dhe syprinën e vijës rrethore të brendashkruar te rombi, nëse syprina është  $600 \text{ cm}^2$  dhe raporti i diagonaleve të tij është

2. Njehso syprinën e rrethit që është jashtashkruar rreth trapezit barakrahas, bazat e të cilit janë  $14 \text{ cm}$  dhe  $2 \text{ cm}$ , por krahu  $10 \text{ cm}$ .

Detyra për punë të pavarur:

1. Te vija rrethore është brendashkruar drejtkëndësh me brinjë  $12 \text{ cm}$  dhe  $5 \text{ cm}$ . Njehso rrezen e vijës rrethore. Njehso perimetrin dhe syprinën e katrorit, brinjët e të cilit janë tangjenta të së njëjtës vijë rrethore.

2. Te vija rrethore me rreze  $6 \text{ cm}$  është brendashkruar katror. Njehso perimetrin dhe syprinën e katrorit. Sa është rrezja e vijës rrethore të brendashkruar te katrori?

3. Vija rrethore e brendashkruar në romb me brinjë  $14 \text{ cm}$  është brendashkruar drejtkëndësh me brinjë  $6 \text{ cm}$ . Njehso diagonalen e drejtkëndëshit, si edhe syprina e tij.

4. Brinjët e një rombi janë tangjenta të vijës rrethore me rreze  $5 \text{ cm}$ . Njehso syprinën e këtij katërkëndëshi tangjencial tek i cili diagonalet qëndrojnë si  $3 : 4$ .

5. Njehso rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trapezit barakrahas me baza  $14 \text{ cm}$  dhe  $2 \text{ cm}$  dhe krahu  $10 \text{ cm}$ . Njehso syprinën e trapezit.

6. Te trapezi me baza  $15 \text{ cm}$  dhe  $9 \text{ cm}$  është brendashkruar vija rrethore. Njehso perimetrin e trapezit.

7. Sajmiri ka vizatuar rreth dhe Brenda ka brendashkruar trekëndësh barabrinjës me brinjë  $9 \text{ cm}$ . Pastaj, njehso syprinën e katrorit të brendashkruar në rrethin e njëjtë. Sa ka fituar për syprinën e katrorit

## 6. Syprina dhe perimetri i shumëkëndëshit të rregullt

Shumëkëndëshi, tek i cili të gjitha brinjët dhe të gjitha këndet janë të barabarta, quhet shumëkëndësh i rregullt.

Shembulli 1. Trekëndëshi barabrinjës është shumëkëndësh i rregullt (trekëndësh). Katrori është katërkëndësh i rregullt. Shumëkëndëshi te figura 29 është gjashtëkëndësh i rregullt, ndërsa shumëkëndëshi te figura 30 nuk është shumëkëndësh i rregullt.

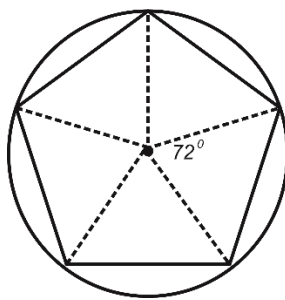
Figura 29. Figura 30.

• Perimetri i  $n$ -këndëshit të rregullt me brinjë  $a$  njehsohet me formulën  $P$  (формула).

Pse?

- Trekëndëshi i rregullt me brinjë  $a$  e ka perimetrin  $P = 3a$ .
- Katrori me brinjë  $a$  e ka perimetrin  $= 4a$ .
- $n$ -këndëshi i rregullt me gjatësi të barabartë  $a$ , pra shuma prej gjatësive të të gjitha brinjëve është  $P = na$ .

Të vizatojmë pesëkëndësh të rregullt në këtë mënyrë (figura 31): te rrethi do të skicojmë 5 kënde të barabarta me madhësi  $360/5 = 72^\circ$ . Pikat ku krahët e këtyre këndeve e prejnë vijën rrethore do t'i lidhim. Me këtë fituam shumëkëndësh me 5 brinjë, domethënë pesëkëndësh. Trekëndëshat te të cilët është ndarë pesëkëndëshi i rregullt te Figura 30 janë trekëndësh barakrahas, të puthitshëm njëri me tjetrin (kanë nga dy brinjë të barabarta si rreze të vijës rrethore dhe këndet ndërmjet tyre janë të barabarta). Prandaj, të gjitha brinjët te pesëkëndëshi janë të barabarta, domethënë kemi pesëkëndësh të rregullt.



Слика 31. Правилен петагольник

Çdo njëri prej këndeve me madhësi 720 që është kënd qendror te rrethi, quhet kënd qendror te shumëkëndëshi.

Pesëkëndëshi ABCDE te figura 32 është pesëkëndësh i rregullt. Këndi qendror është 720. ABCDE 1

Figura 32. Pesëkëndëshi i rregullt

o Çfarë mund të përfundojmë në rastin e përgjithshëm

Këndi qendror të  $n$ -këndëshit të rregullt njehsohet me formulën: (формула)  
Për shumëkëndësat e rregullt vlen ky gjykim:

Rreth çdo shumëkëndëshi të rregullt mund të jashtashkruhet vija rrethore.

Te shumëkëndëshi i rregullt mund të brendashkruhet vija rrethore.

Qendrat e vijave rrethore të brendashkruara dhe jashtashkruara puthiten në një pikë  $S$  e cila quhet qendra e shumëkëndëshit të rregullt.

Qendra e shumëkëndëshit të rregullt është kulmi i këndit qendror te shumëkëndëshi i rregullt.

Figura 33. Vija rrethore e brendashkruar dhe jashtashkruar në dhe rreth shumëkëndëshit të rregullt

Te figura 33 mund të vërejmë se pesëkëndëshi i rregullt është ndarë në pesë trekëndësha të

puthitshëm (формула). Si janë këta trekëndësha? Nëse këndi qendror e pesëkëndëshit të rregullt është 720, atëherë sa janë dy këndet e tjera te çdonjëri prej trekëndëshave.

- Ta shqyrtojmë trekëndëshin (формула). Ky trekëndësh është barakrahas.

Pasi që për brinjët e tij vlen: (формула), kur  $R$  është rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar rreth pesëkëndëshit të rregullt. Kjo do të thotë se brinjët janë krahët e (формула), ndërsa brinja është baza e trekëndëshit

(формула) e quajmë trekëndësh karakteristik të pesëkëndëshit të rregullt

1. Vizato gjashtëkëndësh të rregullt dhe diskuto për trekëndëshin karakteristik të tij.
2. Vizato tetëkëndësh të rregullt dhe diskuto për trekëndëshin karakteristik

Te  $n$ -këndëshi i rregullt, trekëndëshi karakteristik është trekëndësh barakrahas ku për krahët e trekëndëshit vlen (формула), ku  $O$  është qendra e shumëkëndëshit, domethënë kanë gjatësi të barabarta me rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar  $R$ , ndërsa lartësia e trekëndëshit barakrahas e lëshuar kah baza (apotema) (формула), domethënë ka gjatësi me rrezen e vijës rrethore të brendashkruar  $r$ .

Figura 34. Trekëndëshi karakteristik

- Syprina e trekëndëshit karakteristik  $ABC$  njehsohet si gjysma e prodhimit të një brinje të trekëndëshit dhe lartësia e lëshuar tek ai: (формула)

Duke pasur parasysh se  $n$ -këndëshin e rregullt mund ta ndajmë në  $n$ -trekëndështa të puthitshëm (ata janë trekëndëshat karakteristik), vijon se syprina e  $n$ -këndëshit të rregullt njehsohet sipas formulës:

$S_n$ -këndëshi (формула)

Paraprakisht treguam se perimetri i  $n$ -këndëshit të rregullt njehsohet sipas formulës  $P = na$ , prej ku vijon se syprina e  $n$ -këndëshit të rregullt mund të njehsohet edhe sipas formulës:  $S_n$ -këndëshi (формула)

ku h është lartësia e lëshuar kah baza te trekëndëshi karakteristik, Kjo lartësi quhet apotema te trekëndëshi karakteristik.

Shembulli 2. Njehso syprinën dhe perimetrin e dymbëdhjetëkëndëshit të rregullt me brinjë  $a = 3$  cm dhe rrezja e vijës rrethore të brendashkruar  $a = 3$  cm.

Perimetri i  $n$ -këndëshit të rregullt njehsohet sipas formulës  $P = na$ . Te dymbëdhjetëkëndëshi i rregullt,  $n = 12$ . Prej këtu (формула)

Për syprinën, nëse e marrim parasysh formulën  $S_n$ -këndëshi (формула), kemi  $S_n$ -këndëshi (формула)

Dhe nëse marrim parasysh se  $r = h$ , kemi: (формула)

Shembulli 3. Është dhënë vija rrethore me rreze  $R = 5$  cm. Njehso syprinën dhe perimetrin e gjashtëkëndëshit të rregullt të brendashkruar në atë.

Nëse kemi gjashtëkëndësh të rregullt, atëherë trekëndëshi karakteristik është trekëndësh barabrinjës:  $3600 : 6 = 600$ . Vija rrethore është brendashkruar rreth gjashtëkëndëshit, që do të thotë krahët e trekëndëshit karakteristik janë  $R = 5$  cm. Trekëndëshi karakteristik te gjashtëkëndëshi i rregullt është barabrinjës, që do të thotë brinja e gjashtëkëndëshit është  $a = 5$  cm.

Për perimetrin e gjashtëkëndëshit të rregullt kemi:  $P$  (формула).

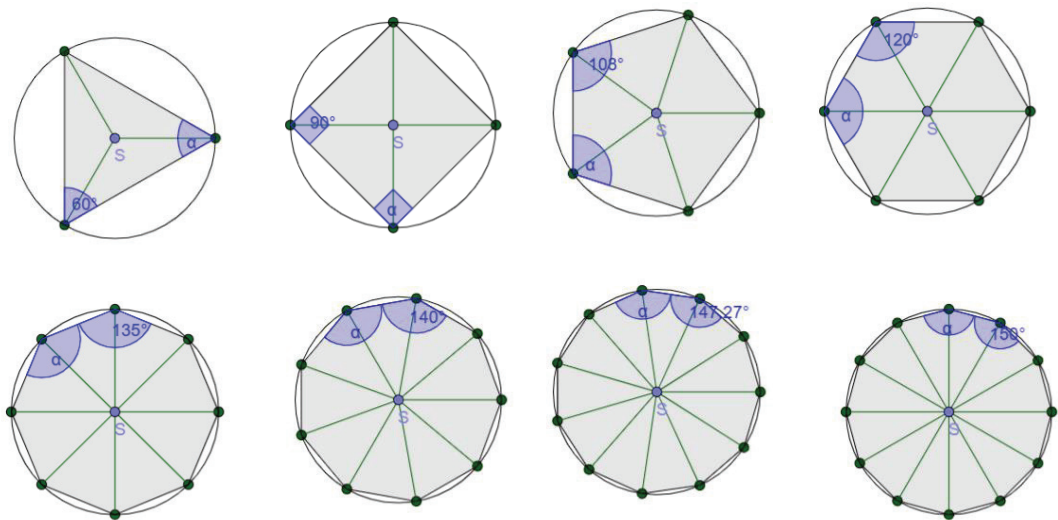
Për njehsimin e syprinës së gjashtëkëndëshit të rregullt është e nevojshme ta njehsojmë apotemën, që te trekëndëshi barabrinjës është (формула). Apotema në këtë rast do të jetë (формула). Syprina e gjashtëkëndëshit të rregullt do të jetë (формула)

Shembulli 4. Njehso syprinën dhe perimetrin e tetëkëndëshit të rregullt, nëse vija rrethore e jashtashkruar rreth tetëkëndëshit është me rreze  $R = 10$  cm, por vija rrethore e brendashkruar është me rreze  $r = 6$  cm.

Nëse vija rrethore e brendashkruar te tetëkëndëshi i rregullt është me rreze  $r = 6$  cm vijon se apotema e trekëndëshit karakteristik të tetëkëndëshit të rregullt është  $h = 6$  cm.

Prej teoremës së Pitagorës kemi:





Слика 35. Правилни многуаголници

Të vizatojmë disa shumëkëndështa të rregullt, ashtu që numri i brinjëve do të zmadhohet.

Figura 35. Shumëkëndëshat e rregullt

- Me zmadhimin e numrit të brinjëve të shumëkëndëshit të rregullt, shumëkëndëshi aq më shumë afrohet afër vijës rrethore.
- Me zmadhimin e numrit të brinjëve, gjatësia e brinjës së shumëkëndëshit të rregullt zvogëlohet, por zmadhohet apotema e trekëndëshit karakteristik, duke u afruar aq më shumë deri te rrezja e vijës rrethore.
- Me zmadhimin e numrit të brinjëve perimetri i shumëkëndëshit të rregullt afrohet deri te perimetri i vijës rrethore.
- Me zmadhimin e numrit të brinjëve të shumëkëndëshit të rregullt syprina afrohet deri te syprina e rrethit.

Le të jenë dhënë dy vija rrethore (формула) dhe (формула)

Raporti i syprinës dhe diametrit të rrethit është konstant dhe është (формула).

❖ Perimetrat e dy vijave rrethore qëndrojnë sikurse rrezet e tyre, domethënë  $P'(формула) P$  (формула)

❖ Syprinat e dy vijave rrethore qëndrojnë sikurse katrorët e rrezeve të tyre, domethënë  $S'(формула) S$  (формула)

Shembulli 1. Njehso perimetrin dhe syprinën e rrethit me diametër  $d = 8$  cm.

Nëse diametri është  $d = 8$  cm, atëherë për perimetrin e vijës rrethore do të kemi  $P$

Për syprinën e rrethit, do ta njehsojmë së pari rrezën: (формула) Prej këtua

Shembulli 2. Njehso perimetrin e vijës rrethore nëse rrethi është me syprinë  $S$

Nëse syprina e rrethit është  $S$  (формула), prej formulës  $S$  (формула) kemi:

Shembulli 3. Është dhënë trekëndësh barabrinjës me brinjë  $a = 6$  cm. Njehso perimetrin dhe syprinën e rrethit e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar te trekëndëshi.

Të vizatojmë trekëndësh barabrinjës, të jashtëshkruajmë dhe brendashkruajmë vijë rrethore

Figura 36. Trekëndëshi barabrinjës me vijë rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar

Te trekëndëshi barabrinjës me zbatimin e teoremës së Pitagorës fitohet se rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit është (формула), kurse rrezja e vijës rrethore të brendashkruar është (формула). Prandaj (формула) dhe (формула) Prej këtua për perimetrin do të kemi:  $P_{\text{brend}}$ (формула)  $P_{\text{jasht}}$   
Ndërsa për syprina:  $S_{\text{brend}}$ (формула)  $S_{\text{jasht}}$  (формула)

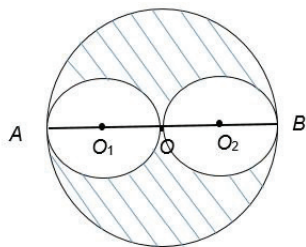
Shembulli 4. Numrat matës të perimetrit dhe syprinës së një rrethi janë të barabarta. Sa është rrezja?

Nëse numrat matës të perimetrit dhe syprinës së një rrethi janë të barabartë, kjo do të thotë se:

Shuma e perimetrave të dy vijave rrethore është 28 cm, por ndryshimi i rrezeve të tyre është 4 cm. Njehso syprinat e rrathëve!

Detyra për punë të pavarur:

1. Njehso perimetrin e rrethit, syprina e të cilit është e barabartë me shumën e syprinave të rrathëve me rreze prej 3 cm dhe 4 cm.
2. Është dhënë katrori me diagonale 10 cm. Njehso perimetrin e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar me ato vija rrethore.
3. Janë dhënë dy vija rrethore rrezet e të cilave qëndrojnë si 2 : 3. Si qëndrojnë perimetrat e tyre, e si qëndrojnë syprinat e tyre
4. Një vijë rrethore e ka rrezen 3 cm. Syprina e rrethit të dhënë me tjetër rreth qëndrojnë si 9 : 16. Njehso rrezen e vijës tjetër rrethore
5. Syprina e një rrethi është katër herë më e madhe prej syprinës së rrethit tjetër. Sa herë është më e madhe rrezja e rrethit të parë prej rrezes së rrethit të dytë
6. Agimi dhe Teuta kanë vizatuar dy rrathë me të këto të dhëna: syprinat e të dy rrathëve rrezet e të cilave qëndrojnë si 2 : 3 ndryshojnë për 25 cm<sup>2</sup>. Njehso perimetrin dhe syprinën e çdonjërit prej atyre rrathëve, që i kanë vizatuar Agimi dhe Teuta!
7. Te rrethi është brendashkruar trekëndëshi barabrinjës me brinjë 9 cm. Njehso perimetrin dhe syprinën e rrethit.
8. Merita ka vizatuar vijë rrethore dhe brenda ka brendashkruar trekëndësh barabrinjës me brinjë 9 cm. Pastaj te vija rrethore ka brendashkruar katror. Sa do të jetë syprina e katrorit të brendashkruar?
9. Njehso syprinën e pjesës së hijezuar nëse (формула) dhe (формула).





Shembulli 3. Njehso gjatësinë e harkut rrethor që është pjesë e vijës rrethor me rreze 24 cm dhe korrespondon me këndin qendror prej  $24024^\circ$

Së pari madhësinë e këndit duhet ta shprehim në shkallë (minutat duhet t'i shndërrojmë në shkallë). (формула)

1. Të njehsohet gjatësia e harkut rrethor si pjesë e vijës rrethore me rreze 16 cm që i përgjigjet këndit qendror  $= 46052'$ .

## 8.2. Syprina e unazës rrethore

❖ Pjesa prej rrafshit që është kufizuar me dy vija rrethore koncentrike quhet unazë rrethore (figura 38).

Figura 38. Unaza rrethore

Syprina e unazës rrethore është e barabartë me ndryshimin e syprinave të dy rrathëve të cilët e kufizojnë unazën rrethore. Nëse rrezet e vijave rrethore i shënojmë me  $R$  dhe  $r$ , syprina e unazës rrethore do të jetë  $S$  (формула)

Ndryshimin  $R = r$  e quajmë trashësia e unazës rrethore.

Shembulli 4. Njehso syprinën e unazës rrethore të formuar prej vijave rrethore me rreze 12 cm dhe 9 cm. Sa është trashësia e unazës rrethore  $S$  (формула)  $S$  (формула)  
Trashësia e unazës rrethore është (формула)

Shembulli 5. Njehso trashësinë e unazës rrethore me syprinë (формула), nëse më e vogla prej vijave rrethore të cilat e formojnë unazën e ka rrezën 7 cm

Rrethi me rreze  $r = 7$  cm (rrethi më i vogël) e ka syprinën (формула), që do të thotë rrethi më i madh e ka syprinën (формула), domethënë (формула), pra rrezja e rrethit më të madh është 12 cm.

Trashësia e unazës rrethore është 5 cm

2. Syprina e unazës rrethore është (формула), por perimetri i rrethit më të madh është 16 cm. Sa është trashësia e unazës rrethore?

### 8.3. Syprina e sektorit rrethor

❖ Pjesa e rrethit me rreze  $r$  e kufizuar me një kënd qendror dhe harkut rrethore  $l$  që i përgjigjet këndit qendror quhet sektor rrethor.

Figura 39. Sektori rrethor

Vërejtje: Te figura 39 vërehet se ekzistojnë dy sektorë rrethorë, pjesa e ngjyrosur dhe e pangjyrosur e rrethit.

Nëse sektori rrethor është kufizuar me këndin qendror  $10^\circ$ , syprina e tij do të jetë

Sektori rrethor me këndin qendror do ta ketë syprinën  $S$  (формула)

Shembulli 6. Njehso syprinën e sektorit rrethor që është kufizuar me këndin qendror  $27020'$  te vija rrethore me rreze  $r = 8$  cm. (формула)  $S$  (формула)

Shembulli 7. Sektori rrethor me rreze 11 cm e ka syprinën 62,8 cm<sup>2</sup>. Cili kënd qendror i përgjigjet sektori rrethor? Njehso gjatësinë e harkut përgjegjës.  
(формула) S (формула) S

3. Njehso syprinën e sektorit rrethor me rreze 7 cm dhe kënd qendror 55026'.  
Sa është gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet atij këndi qendror?

#### 8.4. Syprina e segmentit

❖ Pjesa prej rrethit të kufizuar me një kordë të rrethi dhe harkut rrethor mbi atë kordë, quhet segment rrethor.

Figura 40. Segmenti rrethor

Vërejtje: Te figura 40 vërehet se ekzistojnë dy segmente rrethore, pjesa e ngjyrosur dhe e pangjyrosur e rrethit.

Syprina e segmentit rrethor është ndryshimi i syprinës së sektorit rrethor që i përgjigjet këndit qendror përkatës të harkut rrethor që e kufizon segmentin rrethor dhe syprinës së trekëndëshit barakrahas baza e të cilit është korda që e kufizon segmentin rrethor, por krahët janë me gjatësi  $r$ .

Shembulli 8. Njehso syprinën e segmentit rrethor te vija rrethore me rreze  $r = 10$  cm, që e pret kordën me gjatësi 16 cm, që i përgjigjet këndit qendror  $= 730' 45''$ . Krahun e trekëndëshi barakrahas është 10 cm, por baza është 16 cm. Lartësia e trekëndëshi do të njehsohet me zbatimin e teoremës së Pitagorës: (формула)

Syprina e trekëndëshit është:  $S$  (формула)

Syprina e sektorit rrethor është:  $S$  (формула)  $S$  (формула)  
 Syprina e segmentit rrethor është (формула)

4. Rreth trekëndëshit barabrinjës me brinjë 45 cm është jashtashkruar vija rrethore. Njehso syprinën e segmentit rrethor që është kufizuar me brinjën e trekëndëshit dhe harkut.

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso gjatësinë e harkut rrethor që është pjesë e vijës rrethore me rreze 17 cm dhe korrespondon me këndin qendror prej  $450^\circ$ .
2. Njehso gjatësinë e harkut rrethor që është pjesë e vijës rrethore me rreze 12 cm dhe korrespondon me këndin qendror prej  $46015'$ .
3. Çfarë këndi qendror i përgjigjet harku rrethor me gjatësi 5,5 cm, nëse rrezja e vijës rrethore është 3,4 cm?
4. Syprina e një unaze rrethore është (формула), por rrethi i tij më i vogël e ka perimetrin (формула). Njehso trashësinë e unazës rrethore.
5. Unaza rrethore me trashësi 6 cm e ka syprinën (формула). Njehso rrezet e vijave rrethore të cilat formojnë unazë rrezore.
6. Gota në formë të cilindrit e ka gjatësinë e jashtme të fundit prej 10 cm, kurse syprina e fundit është  $4,75 \text{ cm}^2$ . Sa është trashësia e gotës?
7. Njehso syprinën e sektorit rrethor që është pjesë e rrethit me rreze 12 cm dhe korrespondon me këndin qendror prej  $450^\circ$ .
8. Njehso syprinën e sektorit rrethor që është pjesë e rrethit me rreze 12 cm dhe korrespondon me këndin qendror prej  $46012'$ .
9. Njehso rrezën, si edhe syprinën e rrethit, nëse sektori rrethor i përgjigjet këndi qendror prej  $640^\circ$  e ka syprinën (формула)
10. Njehso këndin qendror që i përgjigjet sektorit rrethor me syprinë me (формула), i përgjigjet sektorit rrethor me rreze 8 cm.





Zgjidhje dhe udhëzime për zgjidhje:

#### Njësia modulare 1

1

1. b), ç).

2. a) I merr të dy vlerat e vërtetësisë, domethënë te disa njerëz dimri është koha vjetore më e mirë, ndërsa për disa nuk është më e mirë.

b) Nuk mund të vendoset pyetje për vërtetësi.

c) Fjala nuk është menduar.

ç) Nuk mund të parashtrohet pyetja për vërtetësi.

3.a) Nuk është i vërtetë.

b) Vërtet.

c) Nuk është e vërtetë.

ç) Vërtetë.

4.a). (форма) Shkupi është kryeqyteti i Republikës së Maqedonisë së Veriut = T

b).

c). (Numri 24 plotpjesëtohet me 6) = T

ç)

5

2

1.a) Sot nuk është e premtë b)

c) 10 nuk është numër negativ: ç).

2. a) Metri nuk është njësia matëse themelore për gjatësi

b) Numri 9 nuk është pjesëtues i 37,

ç)

3. a); 5 është numër natyror dhe

b); 5 është numër natyror dhe 5 është numër natyror

c); ç). dhe 5 është numër natyror

4. a); b);

c); ç).

5. Numri 5 është numër i thjeshtë; Numri 5 është numër tek.

6. a); b); c)

ç). Numri 2 është numër negativ

7.a); b) ose ose

c); ç). ose ose

8. a); b); c)

ç).

9.a); b)

c);

ç). Syprina e një shumëkëndëshi është numër negativ

10.

a); Numri 36 plotpjesëtohet me 6

b) Bashkësia e numrave natyrorë shënohet me

c);

ç) për

a) Ose paralelogrami nuk ka asnjë çift të brinjëve paralele ose

b); Ose ose

c); Ose ose

ç). Ose paralelogrami nuk ka asnjë çift të brinjëve paralele

3

1. a); 1 Nëse, atëherë lumi Danub kalon nëpër Shkup  
b); Nëse lumi Danub kalon nëpër Shkup, atëherë lumi Danub kalon nëpër Shkup  
c); Nëse lumi Danub kalon nëpër Shkup, atëherë 2 është numër iracional  
ç). 1 Nëse 2 është numër iracional, atëherë
  2. a); b);  
c); ç).
  3. a); b);  
c); ç).
  4. ç) Nëse, atëherë quhet implikacion
  5. a); b)  
c); ç).
  6. a); 1 është numër pozitiv nëse dhe vetëm nëse  
b); nëse dhe vetëm nëse  
c); nëse dhe vetëm nëse  
ç). nëse dhe vetëm nëse 1 është numër pozitiv
  7. a); b)  
c); ç).
  8. a); b);  
c);  
ç). Syprina e drejtkëndëshit me dimensione a dhe b është numri
  9.  
a); b);  
c); ç).
  10. a)
- 339
- b);  
c);  
ç)

- б)  $\tau(\neg(\perp \vee \top) \Leftrightarrow \perp) = \perp$ ;  
 в)  $\tau((\neg \top \Rightarrow \top) \vee \neg \perp) = \top$ ;  
 г)  $\tau((\perp \Leftrightarrow \top) \vee (\neg \perp \Rightarrow \neg \top)) = \perp$ .

4

1.

- а)  $\tau(\neg p \wedge r \Leftrightarrow \neg(r \wedge q) \Rightarrow p) = \perp$ ;  
 б)  $\tau((p \vee \neg r) \Rightarrow \neg(q \Leftrightarrow p)) = \top$ .

3а  $\tau(p) = \perp$ ;  $\tau(q) = \top$ ;  $\tau(r) = \perp$ .

2.

а)

- 1) Ако  $(p) \models \top$ ,  $(\neg p) \models \top$ .  
 2) Ако  $(p) \models \perp$  atëherë  $(\neg p) \models \top$ .

б)

- 1) Ако  $(p) \models \top$ , atëherë  $(\neg p) \models \perp$ .  
 2) Ако  $(p) \models \perp$  atëherë  $(\neg p) \models \top$ .

в)

- 1) Ако  $(p) \models \top$ , atëherë  $(\neg p) \models \perp$ .  
 2) Ако  $(p) \models \perp$  atëherë  $(\neg p) \models \top$ .

г)

- 1) Ако  $(p) \models \top$ , atëherë  $((\neg p) \models \perp)$ .  
 2) Ако  $(p) \models \perp$  atëherë  $((\neg p) \models \top)$ .

3.

- а)  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ; б)  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ .

| $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ | $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\top$                                  | $\top$                                                |
| $\top$                                  | $\top$                                                |
| $\top$                                  | $\top$                                                |
| $\top$                                  | $\top$                                                |

5

1. Udhëzim: Shfrytëzo tabelën e vërtetësisë.
2. Udhëzim: Shfrytëzo tabelën e vërtetësisë.

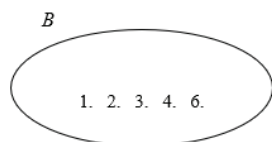
6

1.

a)  $A = \{T, E, K, H, И, K, A\}$ ,

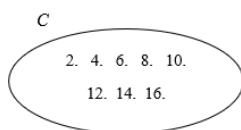


б)  $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,

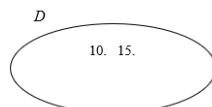


в)

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$ ,



г)  $D = \{10, 15\}$ ,



2.

г)  $\{3, 5, 8\} \subset A$ .

3.

- а) еквивалентни;
- б) еднакви и еквивалентни.

4.

г)  $x = 2, y = 3$ .

5.

а)  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ;

б)  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ .

# 7

1. а)  $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = B$ ; б)  $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ ;  
в)  $(A \setminus B) \cup C$ ; г)  $A \cap (B \setminus C)$ .
2.  $A = \{a, b, c, d, e, i\}$ ,  $B = \{d, e, f\}$ ,  $C = \{a, c, d, e, i, f, g, h, k\}$  и  $A \cap B = \{d, e\}$ .
3.  $\{1, 3\} = \{1, 3\}$ .
4. а)  $A \times B = \{(a, 1), (a, b), (2, 1), (2, b), (3, 1), (3, b)\}$ ;  
б)  $B \times A = \{(1, a), (1, 2), (1, 3), (b, a), (b, 2), (b, 3)\}$ .
5. а)  $A \cap B = \{-3\}$ ; б)  $A \setminus B = \{-4, -2, -1\}$ ;  
в)  $P(A \setminus B) = \{\emptyset, \{-4\}, \{-2\}, \{-1\}, \{-4, -2\}, \{-4, -1\}, \{-2, -1\}, \{-4, -2, -1\}\}$ ;  
г)  $B \setminus A = \{3\}$ .
6. б)  $C = \{x \mid x - \text{парен} \wedge x < 12\}$ ,  $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x - 5 = 0\}$ .
7. а)  $\overline{A} = \{*, \Delta, -5\}$ ; б)  $\overline{C} = \{\Delta, 2, \pi, a\}$ ;  
в)  $\overline{C} \cup \overline{B} = \{\Delta, 2, \pi, a\}$ ; г)  $\overline{(A \setminus B)} = \{*, \Delta, -5, \pi\}$ .
8. а)  $x = 3$ ,  $y = 5$ ; б)  $x = 2$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .
9.  $A = \{1, b, \pi\}$ ,  $B = \{\square, a\}$ .
10. а)  $\emptyset \setminus A = \emptyset$ ; б)  $A \cup (A \cap B) = A$ .

# 8

1. а)
2.  $M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
3. а)  $\top$  б)  $\perp$  в)  $\top$ .
4. а)  $\top$  б)  $\perp$  в)  $\top$ .

# 9

1. б)
- 2.

|                 |         |         |         |        |         |
|-----------------|---------|---------|---------|--------|---------|
| $x$             | -2      | -1      | 0       | 1      | 2       |
| $\tau(-2x+5=3)$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\top$ | $\perp$ |

3. a)  $(2 \cdot 2 = 5) \wedge (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0)$ ;      б)  $(2 \cdot 2 \neq 5) \Rightarrow (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0)$ ;      в)  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0) \Leftrightarrow (3 \geq -2)$ .

4.  $\perp$

6. a), в)  $\emptyset$

7.  $A = \{1, 3, 5\}$

8.  $\{-2, \Delta, \theta\}$

9. C

## Njësia modulare 2

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1</b></p> <p>1. a) E saktë; b) E pasaktë; c) E saktë.</p> <p>2. a); b); c).</p> <p>3. a) b) c)</p> <p>4. a) b) c).</p> <p>5. a) 1000; b) 775; c) 900000; ç) 7000000.</p> <p>6. a) 847; b) 517; c) 26; ç) 1038; д) 834.</p> <p>7. 1209.</p> <p>8. Agimi ka shpenzuar 3380 denarë, por I kanë ngelur 8620 denarë.</p> <p>9. 30 000 denarë.</p> <p>10. <math>750 \cdot 408 = 306000</math></p> | <p><b>2</b></p> <p>1. a); b); c).</p> <p>2. a) b) c)</p> <p>3. a); b); c).</p> <p>4. a) numër i thjeshtë; b) numër i përbërë; c) numër i përbërë.</p> <p>5. 3.</p> <p>7. 6,72.</p> <p>8. a) PMP (42,20,30) = 2, SHVP (42,20,30) = 420; b) PMP (12,18,25) = 2, SHP (12,18,25) = 900.</p> <p>9. Reciprokisht të thjeshtë janë: b) dhe c).</p> <p>15. 585,180.</p> <p>16. 3 metra</p> <p>17. 360 orë ose 15 ditë.</p> <p>18. 3 pako të barabarta.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>3</b></p> <p>1. a) e pasaktë b) e saktë c) e pasaktë ç) e pasaktë d) e saktë dh) e saktë e) e psaktë</p> <p>2. 1258, -987,8746,203, -1223; -1223&lt;-987&lt;203&lt;1258&lt;8746.</p> <p>3. 1258,0,987,8746,203,1223;<br/>0&lt;203&lt;987&lt;1223&lt;1258&lt;8746.</p> <p>4. a) + 68 b) + 90 c) -89 ç) -31 d) + 40 dh) -36 e) + 7 f) -7.</p> <p>5. a) <math>-5 : (-1) + (-8) \cdot (3 - (-2) \cdot 6) = -115</math> b) <math>-7 - (-2) \cdot (-1 + (-10) : 2) = -19</math> c) <math>(5 \cdot (-2) - (-3)) \cdot (-7) = -91</math></p> <p>6. a) -1 b) 13.</p> <p>9. 120.</p> <p>10. Më e ftohtë është dita e parë, por më e ngrohët është dita e katërt.</p> <p>11. -1,0,1,2,3,4,5.</p> | <p><b>4</b></p> <p>1. Edhe të dy pjesët e ditës dhe natës</p> <p>2. a) 0; b) 2; c) -1,1.</p> <p>3. a) b) c).</p> <p>4..</p> <p>5. a); b).</p> <p>6. a)_b)_c).</p> <p>7..</p> <p>8..</p>                         |
| <p><b>5</b></p> <p>1. a) b) c) ç) d) dh)</p> <p>3. Shuma është 35 000 denarë. I pari ka marrë 7 000 denarë, por i dyti 15 000 denarë.</p> <p>4. 30 nxënës.</p> <p>5. 12583465</p> <p>6. Plani i Orgesit nuk është realizuar.</p> <p>7. 186 000 l,124 000 l,1395 kg.</p> <p>8.. 9 11</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p><b>6</b></p> <p>1. 0,(6); 0,875; 1,(714285); -3,7.</p> <p>2. <math>1\frac{1}{4}, \frac{11}{20}, \frac{7}{30}, 1\frac{5}{9}</math></p> <p>3. a) 25,6716 б) 101,24 в) 191,365.</p> <p>4. a) -6,92; 13,827.</p> |
| <p><b>7</b></p> <p>1. Упатство:<br/> <math>\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2}, \sqrt{7} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2}, \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}.</math></p> <p>2. a) 1,21 б) 4,28.</p> <p>3. (7,9), (0,8], <math>(-\infty, 5)</math>, <math>[-3, +\infty)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p><b>8</b></p> <p>1. a) 284 б) 129 в) <math>3\frac{13}{44}</math> г) 31,135.</p> <p>2. НЗД (250,220,210)=10, НЗС (250,220,210)=115 500.</p>                                                                    |

|                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>4. a) <math>[-2, 2]</math> б) <math>[-2, 5)</math> в) <math>(-5, 7)</math>.</p> <p>6. 8 кг.</p> <p>7. 4π.</p> | <p>3.</p> <p>4..</p> <p>5..</p> <p>Janë të fundshme, por të pafundshme janë</p> <p>6. a) б).</p> <p>7. 42 500 denarë</p> <p>8. 154,8 metra tel.</p> <p>9. Në ora 11.</p> <p>10. Rruga ka qenë 350 km, ka shpenzua (формула) litra naftë dhe ka shpenzuar 3080 denarë.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Njësia modulare 3

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1</b></p> <p>1. а) неточно; б) неточно; в) точно.</p> <p>2. а) <math>x = 0</math>; б) <math>x = 1</math>; в) <math>x = -1</math>; г) <math>x = 3</math>.</p> <p>3. а) <math>-27 \frac{x^3 \cdot y^6}{z^9}</math>; б) <math>8 \frac{c^9}{a^3 b^6}</math>; в) <math>36a^{32}</math></p> <p>4. а) <math>7 \cdot 10^5</math>; б) <math>5 \cdot 10^4</math>; в) <math>10^6</math>.</p> <p>5. а) <math>x = 2</math> б) <math>x = \frac{4}{3}</math> в) <math>x = 10</math>.</p> | <p><b>2</b></p> <p>1. а) koeficient vlera kryesore<br/>б) koeficient vlera kryesore<br/>с) koeficient vlera kryesore</p> <p>2. а); б); с).</p> <p>3. а); б);<br/>с)</p> <p>4. а) б) с)<br/>ç) д)</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                        | <p>4. а) <math>2a^2b</math> б) <math>8a^4b^6</math> в) <math>5x^2y</math><br/>г) <math>x^3y^3</math> д) 1.</p>                                                                                                    |
| <p><b>3</b></p> <p>1. а) <math>x^5 + 2x^3 + 2x + 6</math><br/>б) <math>2a^3 + a^2b - b^3</math></p> <p>2. а) <math>\frac{1}{2}xy - x^2y^2</math><br/>б) <math>2a + 2b + \frac{1}{2}ab - 2a^2b^2</math></p> <p>3. <math>m = 2, n = -3, p = 1</math></p> | <p><b>4</b></p> <p>1. а) ;<br/>б) ;<br/>в) ;<br/>2. а) б) ;<br/>в) ;<br/>г) .</p> <p>3. Udhëzim: а) Grupoj i anëtarët: edhe në këtë mënyrë katrori i trinomit do të sillet në katror të binomit. а) б) ; в) ;</p> |
| <p><b>5</b></p> <p>1. а) <math>-3x^2 - 4xy - 2y^2</math>;<br/>б) <math>-8x^2y - 5xy^2 + 2y^3</math>.</p> <p>2. а) <math>2a^3 - a^2 - 8a + 4</math>;<br/>б) количник <math>a^3 - a^2 - \frac{2}{3}a</math> и остаток -1;</p>                            | <p><b>6</b></p> <p>1. а) <math>x^3 \cdot (16x - y)</math>;<br/>б) <math>2y \cdot (-x + 10a)</math>;<br/>в) <math>\frac{5}{3}x^5 \cdot (4x^{10} + 2x^5 - 1)</math>.</p>                                            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>в) количник <math>-x^3 - 2x^2 + 2x - 4</math> и остаток <math>\frac{9}{2}x - 7</math>;</p> <p>г) количник <math>4y^3 - 3y^2 + y - \frac{39}{4}</math> и остаток <math>-\frac{37}{16}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p>2. а) <math>(x^2 + y^2)(2a - b)</math><br/> б) <math>(2a - b)(-b)</math>;<br/> в) <math>(y^2 - y - 1)(x - 1)(x + 1)</math>.<br/> г) <math>(y - 4)(b + a)</math></p> <p>3. а) <math>(2 - ax^2)(2 + ax)</math>;<br/> б) <math>3(3x - y)(5x - 2y)</math>;<br/> в) <math>(a - 3)(x - 5 + y)</math>.<br/> г) <math>(7b - 3c)(4a - 3)</math></p> <p>4. а) <math>(x + 2)(x^2 + 3x - 4)</math><br/> б) <math>7a^2b(a + c)(b - 2d)</math><br/> в) <math>(x + y)(y^2 - 3y + 1)</math></p>                                                                                                  |
| <p><b>7</b></p> <p>1. а) <math>(x - 5y)(x + 5y)</math>;<br/> б) <math>(x - 3 - 9y)(x - 3 + 9y)</math>;<br/> в) <math>(x + 3y - 5)(x - 3y + 7)</math>;<br/> г) <math>(n - 5m)(5n - m)</math>.</p> <p>2. а) <math>(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)</math>;<br/> б) <math>(1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)</math>;<br/> в) <math>(4x^2 - 3y)(16x^4 + 12x^2y + 9y^2)</math>.</p> <p>3. а) <math>(3 - y)(3 + y)(2x - 1)</math>;<br/> б) <math>(2x - 3)(2x + 3)(y + 1)(y^2 - y + 1)</math><br/> в) <math>(a - 1)^2(a + 1)(a^2 + a + 1)</math></p> <p>4. а) <math>4(a - 1)(a^2 + a + 1)</math>;<br/> б) <math>(2b - 3a)(4b^2 + 6ab + 9a^2 + 2b + 3a)</math><br/> в) <math>(9 + x^2)(3 + x)(3 - x)</math></p> | <p><b>8</b></p> <p>1. а) <math>(x - 9)^2</math>; б) <math>\left(3a - \frac{1}{2}b\right)^2</math> в) <math>(3b - 5)^2</math></p> <p>2. а) <math>2(a + 1)^2</math>; б) <math>\frac{1}{2}(a + 4)^2</math>;<br/> в) <math>\frac{1}{3}(x - 3)^2</math>.</p> <p>3. а) <math>5(a - b - 1)(a - b + 1)</math>;<br/> б) <math>\left(x + \frac{1}{4} - y\right)\left(x + \frac{1}{4} + y\right)</math>;<br/> в) <math>(3x - y - 1)(3x - y + 1)</math>.</p> <p>4. а) <math>-(b - c)^2(b + c)^2</math>;<br/> б) <math>(x + y + z)(x + y - z)</math>;<br/> в) <math>-(5y^2 - 2x^2)^2</math>.</p> |
| <p><b>9</b></p> <p>1. а) <math>x^2y</math>; б) <math>(x - 3y)</math>;</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>10</b></p> <p>1. а) <math>x \neq 1 - y</math>; б) <math>b \neq \frac{2}{7}</math>; в) <math>\forall x \in \mathbb{R}</math>;</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>в) <math>(a-b)(a+b)</math>.</p> <p>2. а) <math>12x^2y^2z^3</math>; б) <math>4(x-2y)(x+2y)^2</math></p> <p>в) <math>a(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)</math>.</p> <p>3. а) НЗД <math>a^2+a+1</math>;<br/>НЗС <math>4x(a-1)(a^2+a+1)</math>;</p> <p>б) НЗД <math>(x-2)</math>;<br/>НЗС <math>(x-2)(x+2)(3x+4)(x^2+4)(x^2-4x+4)</math>;</p> <p>в) НЗД <math>(3-x)</math>;<br/>НЗС <math>-(3-x)^3(3+x)(9+x^2)(1-2x)</math>;</p> | <p><math>a \neq 0 \wedge b \neq 0</math></p> <p>г)</p> <p>2. а) <math>\frac{3}{5xz}</math>; б) <math>\frac{3x}{x-2y}</math>; в) <math>\frac{ay-2y}{x}</math></p> <p><math>(x+y)(x^4+y^4)</math></p> <p>г)</p> <p>д) <math>\frac{x+y-z}{x-1}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>11</b></p> <p>1. а) <math>\frac{3b-2a}{3b}</math>; б) 0.</p> <p>2. а) <math>\frac{2}{(a-b)}</math>; б) <math>\frac{x}{2y(x-2y)}</math>.</p> <p>3. а) 1; б) <math>1-a</math>; в) <math>x+y</math>.</p> <p>4. а) <math>\frac{1}{x^2(x+2)^2}</math>; б) <math>\frac{(1+a)^3}{(a+3)^6}</math>.</p> <p>5. <math>\frac{1}{(1-a)(a+3)}</math></p>                                                                           | <p><b>12</b></p> <p>1. а) <math>x^{10}</math>; б) <math>x^6</math>.</p> <p>2. а) 37 б) 0 в) 20 г) 7</p> <p>3. <math>\frac{2}{3}x^4y^2</math></p> <p>4. -21</p> <p>5. а) <math>xy\left(y-\frac{17}{20}x\right)</math> б) <math>-4a^2+25</math>.</p> <p>6. а) <math>3x+2</math> б) <math>2x^2+3x+4</math></p> <p>7. а) <math>(a+3)(a-2)(a+2)</math><br/>б) <math>3(a+3)(a^2+3a+9)</math></p> <p>8. <math>\frac{a-1}{a+1}</math>, <math>a \neq -1</math>; б) <math>a-1</math>; в) <math>\frac{1}{3x^2-y^2}</math>.</p> <p>9. а) -1 б) <math>4b-1</math>.</p> <p>10. а) <math>\frac{x+18}{x^2-9}</math>; б) 2; в) <math>-\frac{1}{2}x^2</math>.</p> <p>11. а) <math>\frac{ab(a+2b)}{2}</math> б) <math>\frac{16a-21}{3(a-3)}</math>.</p> |

## Njësia modulare 4

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1</b></p> <p>1. a)<br/> <math>1220m^3 = 1220000 dm^3 = 122 \cdot 10^4 dm^3</math><br/>         б) <math>1220dm^3 = 1,22m^3</math><br/>         в) 1260 ml<br/>         г) 15,68 dl</p> <p>2. 108 km/h</p> <p>3. a) 25 000 <math>g / m^3</math> б)<br/> <math>25 \cdot 10^{-3} g / cm^3 = 0,025 g / cm^3</math></p> <p>4. <math>5 \cdot 10^5 cm^2</math></p> <p>5. a) <math>0,25m^3</math> б) 250 литри</p> <p>6. a) 8100s б) 71h 13min 44s</p> <p>7. 2035,06kg</p>                                                                                                                           | <p><b>2</b></p> <p>1. a) 108/49 б) 136<br/>         c) 108/490 ç) 1,36<br/>         d) 3/10 dh) 3/10</p> <p>2.</p> <p>3.</p> <p>4. 16kg miell</p> <p>5. 2080 denarë, 1360 denarë, 960 denarë, 3000 denarë, përkatësisht.</p> <p>6. 3200 den., 2400 den., 1800 den, përkatësisht</p> |
| <p><b>3</b></p> <p>1, përkatësisht 12kg, 8kg, 6kg, 4kg, 3kg. Masa e domateve të blera dhe çmimi i tyre janë proporcionale të zhdrejta. Masa e domateve të blera dhe shuma e përgjithshme janë të drejta proporcionale.</p> <p>2. 16 tonelata, 32 tonelata dhe 56 tonelata. Varësia proporcionale e zhdrejtë</p> <p>3. 15 kamionë për dy ditë, 10 kamionë për 3 ditë, 5 kamionë për 6 ditë, 3 kamionë për 10 ditë, 2 kamionë për 15 ditë. Varësia proporcionale e zhdrejtë.</p> <p>4. Proporcionale e drejtë: a), b), c), d). Proporcionale e zhdrejtë: ç), dh).</p> <p>5. a) 1000, 1500, 2500;</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>4</b></p> <p>1. 420kg<br/>         2. 54 ditë<br/>         3. 15t<br/>         4. Puna tjetër do të kryhet për dy ditë, e gjithë puna për 4 ditë.<br/>         5. 15 ditë</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p><b>5</b></p> <p>1. 640 drunj<br/>         2. 181 500 denarë<br/>         3. 24 ditë<br/>         4. 2 000 000 denarë</p>                                                                                                                                                         |

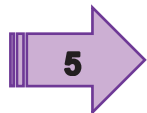
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div data-bbox="175 176 313 279"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>21,43%</li> <li>648 denarë</li> <li>793,65 denarë</li> <li>350 cm</li> <li>Mentori ka zgjidhur 60% prej detyrave, duhet të zgjidhë edhe 9 detyra që të ketë të zgjidhur 80%.</li> <li>Gjithë përzierja është 1100kg, pjesa e dytë është 275kg, por pjesa e tretë është 605kg.</li> <li>25 nxënës kanë bërë test kontrollues.</li> </ol> | <div data-bbox="796 176 934 279"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>24 000 denarë</li> <li>320 uniforma</li> <li>130 uniforma</li> <li>46,3 l/m<sup>2</sup></li> <li>8475 denarë</li> <li>2800 bukë</li> <li>3250</li> </ol>                                                                                                                                                                                                               |
| <div data-bbox="175 835 313 938"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>6%</li> <li>2 vjet</li> <li>33280 denarë</li> <li>160 000 denarë</li> <li>480 denarë</li> <li>365 ditë</li> <li>24 000 denarë</li> <li><math>K = 55\,000, i = 3080</math></li> <li><math>K = 149949, i = 2699</math></li> <li><math>K = 120020, i = 1480</math></li> </ol>                                                              | <div data-bbox="796 835 934 938"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>32 056 denarë, 33 101 denarë dhe 34 843 denarë</li> <li>18 000 denarë</li> <li>210 937,5 denarë</li> <li>8 ditë</li> <li>Çmimi i ri është 7480 denarë.</li> <li>62,5kg</li> <li>20 700 denarë dhe 24 150 denarë</li> <li>37,5% të shkëlqyeshëm, 25% shumë mirë, 18,75% mirë, 12,5% mjaftueshëm</li> <li>2,6 tonelata</li> <li>15 273 denarë</li> <li>4 vjet</li> </ol> |

## Njësia modulare 5

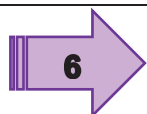
|                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <div data-bbox="175 1599 313 1703"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) и в).</li> <li>a) и в).</li> <li>a) -4.</li> <li>б) и в).</li> </ol> | <div data-bbox="691 1599 829 1703"> </div> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>x = -3</math> или <math>x = 3</math>; б) <math>x = -10</math> или <math>x = 10</math>;<br/>в) <math>x = -5</math> или <math>x = 5</math>;</li> </ol> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. a) ose; b) ose; c) ose<br/> 5. a); b) c)<br/> ç)<br/> 6. a) Për (Формула) barazimi është i zgjidhshëm; për (Формула) barazimi është i pamundshëm.<br/><br/> b) Për (Формула) barazimi është i zgjidhshëm; Për (Формула) barazimi ka pafund shumë zgjidhje<br/> 7. a) b)<br/> ç) ose<br/> 2. a) ose b) ose<br/> c ose; ç) ose</p> | <p>г) <math>x = \frac{20}{7}</math> или <math>x = -4</math>.<br/><br/> 2. а) <math>x = 0</math> или <math>x = 3</math>; б) <math>x = -\frac{5}{2}</math> или <math>x = \frac{3}{4}</math>;<br/> в) <math>x = \frac{5}{3}</math> или <math>x = 3</math>; г) <math>x = 0</math> или <math>x = 10</math>.<br/><br/> 3. <math>x = -\frac{1}{2}</math> или <math>x = \frac{3}{8}</math>.</p>                                       |
| <div data-bbox="174 799 315 907" data-label="Image"></div> <p>1. a) b)<br/> 2, ndërsa numri është<br/> 3, ndërsa numri është.<br/> 4. 4 mg.<br/> 5. <math>36x =</math>.<br/> 6. Çmimi i rregullt i librit është 500 den.</p>                                                                                                           | <div data-bbox="685 799 826 907" data-label="Image"></div> <p>1. a).<br/> 2. Të zgjidhet pabarazimi:<br/> a),<br/> b) Pabarazimi nuk ka zgjidhje;<br/> c);<br/> ç),<br/> 3. Të zgjidhen pabarazimet lineare:<br/> a),<br/> b),<br/> c),<br/> ç),<br/> 4.<br/> 5. Numri i plotë më i madh që e kënaq pabarazimin është -3<br/> 6. Funksioni është pozitiv nëse.<br/> Funksioni është negativ nëse. Zero e funksionit është</p> |

|  |                                                                                                                                                                                                                        |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>6. Функцијата <math>f(x)</math> е позитивна ако <math>x &gt; 5</math>.<br/> Функцијата <math>f(x)</math> е негативна ако <math>x &lt; 5</math>. Нула на<br/> функцијата <math>f(x)</math> е <math>x = 5</math>.</p> |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

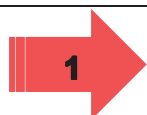


1. а)  $x < -\frac{2}{3}$ ;      б)  $x > \frac{2}{5}$ ;
- в) 1. а); б);
- с) Системи i pabarazimeve nuk ka zgjidhje; ç)
2. а); б).
3. а); б); в); г); д); е); ж); з); и); ј); к); л); м); н); о); п); қ); р); с); т); у); в); ф); х); ц); ч); ш); щ); џ);
4. а); б); в); г); д); е); ж); з); и); ј); к); л); м); н); о); п); қ); р); с); т); у); в); ф); х); ц); ч); ш); щ); џ);
5. а)  $x \in (-\infty, 5)$ ; б)  $x \in (5, +\infty)$ ; в)  $x = 5$ ;
6. а)  $x \in (-\infty, 5)$ ; б)  $x \in (5, +\infty)$ ; в)  $x = 5$ ;
7. а)  $x \in (-\infty, 5)$ ; б)  $x \in (5, +\infty)$ ; в)  $x = 5$ ;
8. а)  $x \in (-\infty, 5)$ ; б)  $x \in (5, +\infty)$ ; в)  $x = 5$ ;
9. а)  $x \in (-\infty, 5)$ ; б)  $x \in (5, +\infty)$ ; в)  $x = 5$ ;
10. а)  $x \in (-\infty, 5)$ ; б)  $x \in (5, +\infty)$ ; в)  $x = 5$ ;



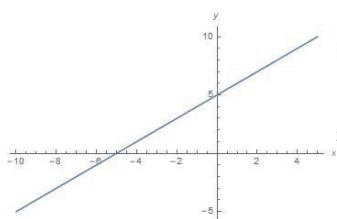
1. да
2.  $\frac{33}{16}$
3.  $a=1$
4.  $2, \frac{4}{3}$
5. 63, 21
6. не се
7.  $(-\infty, 20]$
8.  $f(x) > 0, x \in (-\infty, 7); f(x) < 0, x \in (7, +\infty)$ , нула во  $x=7$ .
9.  $(-\infty, \frac{1}{2})$
10.  $(-\infty, -7] \cup [13, +\infty)$

## Njësia modulare 6

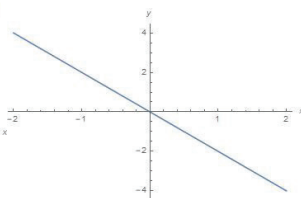


1. а)  $f(-1)=8$     б)  $f(0)=3$     в)  $f(p)=-5p+3$ .
2. а) -2,1      б)  $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$       в) 1,0.

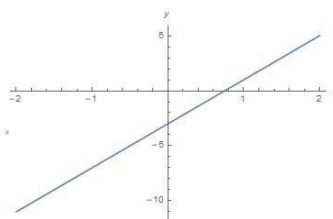
3. a)



б)



в)



4.  $k=1$ .

5.  $f(x) = -2x + 1$ .

6. a) Grafikët e funksioneve lineare janë paralele

7. b) Grafikët e funksioneve lineare kalojnë nëpër fillimin e koordinatave

8. c) Grafikët e funksioneve lineare kalojnë nëpër pikën  $(0, -3)$ .

**2**

1. a)  $(2, 0), (0, 1)$  б)  $(\frac{3}{5}, 0), (0, -3)$  в)  $(\frac{1}{7}, 0), (0, -\frac{1}{7})$ .

2. a)  $k=0$  б)  $k=0$  в)  $k>-1$  г)  $k<-1$  д)  $k=-1$

3. не

4.  $k=1$

5.  $k=\frac{1}{3}$

**3**

1.  $(0, 3), (-1, 2), \dots$

2.  $3x - 3y = 2$

3.  $(1, 1)$

4. a)  $\begin{cases} 105x + 100y = 14 \\ 49x + 35y = 10 \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 34x - 6y = 35 \\ 14x - 63y = 10 \end{cases}$ .

**4**

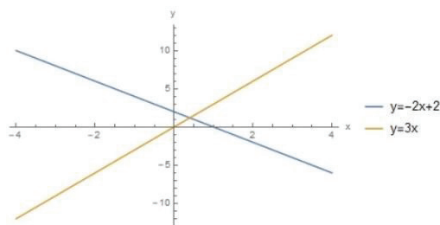
1. a)  $(1, 1)$  б)  $(-82, -18)$  в)  $(\frac{19}{126}, \frac{23}{18})$

г)  $(1\frac{7}{16}, \frac{3}{16})$ .

2. a)  $(5\frac{1}{4}, 21)$  б)  $(4\frac{1}{20}, -\frac{9}{20})$ .

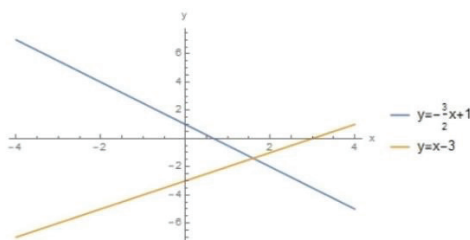
**5**

1. a)  $(1, 1)$  б)  $(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5})$  в)  $(1\frac{7}{16}, \frac{3}{16})$ .



2. a)

б)



**6**

1. a)  $\frac{2}{5}$  б)  $-9,02671$  в)  $\frac{a^2}{a-1}$ .

2. a)  $(9,21)$  б)  $(1\frac{13}{35}, -1\frac{6}{7})$ .

3. a)  $3a - 2$  sistemi ka zgjidhje të vetme  $x = a, y = -a$ .  $3a = -2$  ) ka pafund shumë zgjidhje

б)  $3a$  sistemi ka zgjidhje të vetme

$$x = \frac{3}{a+3b}, y = \frac{3b-a}{a+3b}. 3a = -3b$$

**7**

1. 79

2. 78

3. 12 pula dhe 15 derra.

4. 524,3.

5. 9 orë dhe 6 orë, 540 km.

6. 30 dhe 2.

7. 8 orë dhe 12 orë.

8. 30 km/h dhe 28,8 km/h.

**8**

1. a)  $k=2$  б)  $k=0$  в)  $k>1$  г)  $k<1$  д)  $k=1$ .

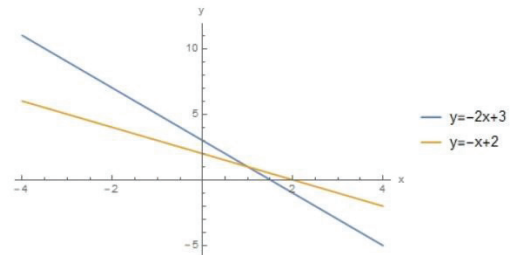
2.  $k=3/2$

3. a)  $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 2x-5y=-7 \end{cases}$

4.  $(3\frac{1}{7}, -4\frac{2}{7})$

5.  $(21,5; 19,5)$

6.  $(3\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$



7.

8.  $(1,1)$

9.  $3a \neq 1$  ka zgjidhje të vetme. Për  $k=1$  nuk ka zgjidhje

10. a) 52 б) Prej të dyve nga 25 litra.

## Njësia modulare 7:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1</b></p> <p>2. Pika dhe drejtëza.</p> <p>4. a) Supozimi: Një numër plotpjesëtohet me 6;<br/>Përfundimi: ai numër plotpjesëtohet me 2 dhe 3;<br/>b) Supozimi: Trapezi është barakrahas;<br/>Përfundimi: Diagonalet e tij janë të barabarta.<br/>c) Supozimi: Katërkëndëshi është paralelogram;<br/>Përfundimi: Diagonalet e tij janë të barabarta.</p> <p>5. Udhëzim: a) dhe b) ekziston teoremë e anasjelltë; c) Gjykimi i anasjelltë nuk është teoremë.</p> <p>6. a) Forma kushtore; b) Forma kategorike.</p> <p>7. Supozimi: Numri plotpjesëtohet me 2 dhe 5. Përfundimi: Numri plotpjesëtohet me 10.<br/>Forma kategorike: Numri plotpjesëtohet me 2 dhe 5 plotpjesëtohet me 10.</p> <p>8. Forma kushtore: Nëse katërkëndëshi është kordiak, atëherë këndet e kundërta të tij janë suplementare. Supozimi: Katërkëndëshi është kordiak. Përfundimi: Këndet e përballta janë suplementare.</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>2</b></p> <p>3. 1, 5, 6, 8 или 10 прави<br/>4. 1 точка<br/>5. 1 или 4.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p><b>3</b></p> <p>1. 4 gjysmëdrejtëza, 2 çifte të gjysmëdrejtëzave përbërëse.<br/>2. 8 gjysmëdrejtëza, 4 çifte të gjysmëdrejtëzave përbërëse.<br/>3. Suplementi i është (Формула), por i ð është (Формула) 13'13"<br/>4. dhe<br/>5. (формула)<br/>6. Suplementar.</p> |
| <p><b>4</b></p> <p>2. 10 segmente,<br/>3. 3 segmente, formojnë trekëndësh,<br/>4. 12 diagonale prej një kulmi dhe 90 numri i përgjithshëm i diagonaleve,<br/>5. 18-këndëshi,<br/>6. 14400<br/>7. tetëkëndësh</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p><b>5</b></p> <p>3. 15 cm<br/>4. 45° 35' 48"<br/>5. 120°, 80°, 100°, 60°.</p>                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>6</b></p> <p>1. Nëse katërkëndëshi është kordiak, atëherë këndet e tij të përballta janë suplementare.<br/>Supozimi: Katërkëndëshi është kordiak.<br/>Përfundimi: Këndet e përballta janë suplementare</p> <p>2.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                        |

Заклучок: Спротивните агли се суплементни.

2.1, 4, 6.

3.  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ .

4.  $103^\circ 36'$ ,  $76^\circ 24'$ .

5. 6-аголник

6.  $54^\circ$ ,  $81^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $162^\circ$ .

7. 10-аголник, 7 дијагонали.

8. 8 cm

9. Периферниот агол е  $48^\circ 18' 07''$ , а централниот  $96^\circ 36' 14''$ .

10.  $114^\circ 35'$ ,  $54^\circ 26'$ .

## Модуларна единица 8:

**1**

1. а) Периметарот ќе се зголеми 3 пати, а плоштината 9 пати.

б) Периметарот ќе се намали 3 пати, а плоштината 9 пати.

2.  $L = 36\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $P = 162 \text{ cm}^2$

3.  $L = 36 \text{ cm}$ ,  $d = 9\sqrt{2} \text{ cm}$

4.  $L = (12 + 12\sqrt{2}) \text{ cm}$ ,  $P = (27 + 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2$

5.  $L = 24\sqrt{3} \text{ cm}$

6.  $L = 42 \text{ cm}$ ,  $P = 108 \text{ cm}^2$

7. 21cm и 14cm

**2**

1. 1,2cm и 0.8cm

2. 12cm

3. Дијагоналите се 25cm и 39cm

4.  $L = 204 \text{ cm}$ ,  $P = 2204 \text{ cm}^2$

5.  $40,5 \text{ cm}^2$

6.  $P = 120 \text{ cm}^2$

**3**

3.  $P = 30 \text{ cm}$  Udhëzim: Prej formulës së Heronit kemi (формула), d.m.th.. (формула) prej ku vërejmë se (формула), duhet ta shkruajmë si prodhim prej shumëzuesve të cilët paraqiten tek ana e majtë. Për (формула) barazimi nuk është plotësuar, por është plotësuar për (формула)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>8. <math>r = 3cm</math>, <math>R = 6,25cm</math></p> <p>9. <math>c = 6\sqrt{34}cm</math></p> <p>10. <math>L = 60cm</math>, <math>P = 150cm^2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>4</b></p> <p>1. <math>b = 14cm</math>, <math>m = 24cm</math></p> <p>2. <math>a = 16cm</math>, <math>b = 9cm</math></p> <p>3. <math>P = 276cm^2</math></p> <p>4. <math>L = 62cm</math>, <math>P = 204cm^2</math></p> <p>5. Udhëzim: me diagonalentrapezoidi është ndarë në dy trekëndësha, syprinat e të cilëve mundi t'i njehsoni me formulën e Heronit</p> <p>6. <math>L = 32cm</math>, <math>P = (12 + 12\sqrt{7})cm^2</math></p> <p>7. <math>L = 128cm</math></p> | <p><b>5</b></p> <p>1. <math>R = 6,5cm</math>, <math>L = 52cm</math>, <math>P = 169cm^2</math></p> <p>2. <math>r = 3\sqrt{2}cm</math>, <math>L = 24\sqrt{2}cm</math>,<br/><math>P = 72cm^2</math></p> <p>3. <math>d = 14cm</math>, <math>P = 24\sqrt{10}cm^2</math></p> <p>4. <math>d_1 = 12cm</math>, <math>d_2 = 16cm</math>, <math>P = 96cm^2</math></p> <p>5. <math>r = 4\sqrt{2}cm</math>, <math>P = 64cm^2</math></p> <p>6. <math>L = 48cm</math></p> <p>7. <math>P = 18cm^2</math></p>                                                                                   |
| <p><b>6</b></p> <p>1. <math>L = 21cm</math>, <math>P = 42cm^2</math></p> <p>2. <math>L = 88cm</math>, <math>P = 132cm^2</math></p> <p>3. <math>L = 40\sqrt{3}cm</math>, <math>P = 200\sqrt{3}cm^2</math></p> <p>4. Këndi qendror dhe i jashtëm janë nga 400, këndi i brendshëm është 1400.</p>                                                                                                                                                                             | <p><b>7</b></p> <p>1. <math>L = 10\pi cm</math></p> <p>2. <math>L_1 = 10\pi cm</math>, <math>P_1 = 25\pi cm^2</math>,<br/><math>L_2 = 5\sqrt{2}\pi cm</math>, <math>P_2 = \frac{25}{2}\pi cm^2</math></p> <p>3. <math>L_1 : L_2 = 2 : 3</math>, <math>P_1 : P_2 = 4 : 9</math></p> <p>4. <math>R = 4cm</math></p> <p>5. <math>R_1 = 2R_2</math></p> <p>6. <math>L_1 = 4\sqrt{5}\pi cm</math>, <math>P_1 = 20\pi cm^2</math>,<br/><math>L_2 = 6\sqrt{5}\pi cm</math>, <math>P_2 = 45\pi cm^2</math></p> <p>7. <math>L = 6\sqrt{3}\pi cm</math>, <math>P = 27\pi cm^2</math></p> |

**8**

1.  $l = \frac{17\pi}{4} \text{ cm}$
2.  $l = 3,1\pi \text{ cm}$
3.  $\alpha = 92^{\circ}44'$
4. 4cm
5. 13cm и 7cm
6.  $18\pi \text{ cm}^2$
7.  $P = 18,5\pi \text{ cm}^2$
8.  $r = 14 \text{ cm}$ ,  $P = 196\pi \text{ cm}^2$
9.  $\alpha = 146^{\circ}15'$
10.  $P = \frac{162\pi - 243\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2$

**9**

1. Brinjët janë 7cm и 4cm.
2.  $L = 34 \text{ cm}$
3.  $P = \frac{128}{3} \text{ cm}^2$
4.  $P = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$
5.  $a = 32 \text{ cm}$ ,  $b = 28 \text{ cm}$ ,  $P = 64\sqrt{3} \text{ cm}^2$
6.  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $h = 12 \text{ cm}$
7.  $P = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$
8.  $L = 388,7 \text{ cm}$ ,  $P = 8316 \text{ cm}^2$
9.  $L = 10\pi \text{ cm}$
10.  $r = 14 \text{ cm}$
11.  $r = 2\sqrt{13} \text{ cm}$



