Билјана Златановска
Лимонка Коцева Лазарова
Марија Митева
Теута Јусуфи - Зенку

МАТЕМАТИКА

ЗА I ГОДИНА

СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Струки:

Геолошко-рударска и металуршка, Градежно-геодетска, Графичка, Економско-правна и трговска, Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска, Угостителско-туристичка, Хемиско технолошка

МАТЕМАТИКА
ЗА I ГОДИНА
СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Струки:
Геолошко-рударска и металуршка, Градежно-геодетска, Графичка, Економско-правна и трговска, Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска, Угостителско-туристичка, Хемиско технолошка

Автори: Билјана Златановска
Лимонка Коцева Лазарова
Марија Митева
Теута Јусуфи Зенку

Рецензенти:
Ѓорѓи Маркоски
Билјана Јованова
Јагода Танушоска

Илустратор
Авторите

Јазичен лектор
Слаѓан Спасовски

Стручна редакција
Џеваир Беќири

Уредник
Џеваир Беќири

Графичко и техничко уредување
Леон Џинго
Евгенија Павлова – АРС СТУДИО

Место и година на издавање
Скопје, 2022

Тираж:

Печати:

Издавач
Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија
Ул. „Св. Кирил и Методиј“ бр. 54, 1000 Скопје

Со одлука за одобрување на учебникот по предметот Математика, прва година, средно стручно образование, струка: Геолошко-рударска и металуршка, Градежногеодетска, Графичка, Економско-правна и трговска, Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска, Угостителско-туристичка, Хемиско технолошка, број 26-97/1 од 15.04.2022 година, донесена од Националната комисија за учебници.

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е наменета пред сè за учениците од средните стручни училишта во Република Северна Македонија во кои се изучуваат струките: геолошко – рударска и металуршка, градежно – геодетска, графичка, економско – правна и трговска, електротехничка, машинска, сообраќајна, угостителско – туристичка, текстилно – кожарска, хемиско - технолошка и други, како основен учебник по предметот математика, но истата може да послужи како одлична литература за секој што сака да ги изучува модуларните единици опфатени во книгата.

Во книгата се разработени модуларните единици:

- Математичка логика и множества;
- Реални броеви;
- Алгебарски рационални изрази;
- Пропорционалност на величини;
- Линеарни равенки, линеарни неравенки и системи линеарни неравенки;
- Линеарна функција и системи линеарни равенки со две непознати;
- Геометриски фигури во рамнина;
- Периметар и плоштина на рамнински фигури.

Содржината во секоја од модуларните единици е во согласност со Наставната програма која е предвидена да се обработува на часовите по математика во средните стручни училишта.

Секоја модуларна единица е поделена на наставни единици. Наставните единици се целини оформени согласно конкретна содржина која се обработува и истите не се строго наменети за обработка на еден час. Наставникот може една наставна целина да ја распореди на два или повеќе часови.

На почетокот на секоја модуларна единица се наведени целите кои треба да се постигнат со изучувањето на модуларната единица, пропишани од Министерството за образование и наука и Бирото за развој на образованието.

Во секоја од наставните целини јасно се наведени новите поими кои се обработуваат, како и врските помеѓу нив, а истите се проследени со соодветни примери и решени задачи. На крајот од секоја единица дадени се задачи за самостојна работа, а на крајот на секоја модуларна единица се дадени задачи за повторување на модуларната единица. Решавајќи ги овие задачи учениците полесно ќе ги совладаат новите содржини кои ги изучуваат.

На крајот од книгата се дадени одговори и упатства на задачите за самостојна работа, како и на задачите за повторување на модуларната единица.

Ќе бидеме среќни како автори, ако оваа книга ти помогне во совладувањето на математиката и во постигнувањето на солиден успех.

Од авторите

СОДРЖИНА

1

МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да определува логичка вредност на елементарни и сложени искази;
- да користи логички закони;
- да претставува множества на различни начини;
- да извршува операции со множества и да докажува некои закони;
- да одредува множества решенија на едноставни исказни функции.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 1

1. Поим за исказ

Во секој јазик постојат различни видови реченици, и тоа: декларативни реченици, прашални реченици, заповедни реченици, итн.

Размисли и одговори!

- Дали сите реченици се осмислени?
- Дали сите тврдења се точни?

Честопати се среќаваме со реченици од видот: „Главен град на Италија е Рим“. Со оваа реченица е искажано тврдење што е вистинито. Со реченицата пак „Главен град на Италија е Венеција“ е искажано тврдење што не е вистинито.

Овие реченици се декларативни и за секоја од нив има смисла да се постави прашањето дали е вистинито или не е вистинито тврдењето што е искажано со нив. Ваквите видови реченици се од посебна важност во математиката бидејќи имаат точно определена вистинитост. Со ваквите реченици се дефинираат исказите во математиката.

Да го дефинираме поимот исказ.

- ❖ Основен поим во математичката логика е исказ.
- ❖ Декларативната (расказната) реченица која има смисла и којашто е или вистинита или невистинита се вика **исказ**.

- ❖ Исказите, претежно се запишуваат со мали букви од латинската азбука: $p, q, r, s, ...$ и ги нарекуваме исказни променливи.

Пример 1

1. Реченицата p: „Бројот 55 е парен број“, е исказ и е неточен исказ.
2. Реченицата q:„Јаболкото е највкусно овошје“, не е исказ. Оваа реченица има смисла, за некои луѓе јаболкото е највкусно овошје, а за некои луѓе не е највкусно. Значи нема единствена вистинитосна вредност.
3. Реченицата r: „Триаголникот се шета низ паркот“, не е исказ. Очигледно е дека оваа реченица нема смисла.

- ➢ Речениците што започнуваат со: „Мислам дека...“, „Сакам...“, „Имам желба...“, „Дали...“, итн. не се искази.

Размисли и одговори!

- Зошто овие реченици не ги сметаме за искази?

Пример 2 Одреди кои од следните реченици се искази:

а) Колку е часот? – оваа реченица не е исказ, бидејќи е прашална реченица.
б) Триаголникот вози велосипед – оваа реченица не е исказ, бидејќи нема смисла.
в) $2x+3<4$ за $x=1$ - оваа реченица е исказ.
г) $2\cdot 5+14=24$ – оваа реченица е исказ.

1.1. Определување на логичка вредност

Со оглед на тоа што за секој исказ можеме да кажеме дали е вистина (точен) или лага (неточен), ние можеме да дефинираме вистинитосна вредност на исказ.

!

- Со помош на функцијата τ (се чита „тау“), се означува **логичката (вистиносната) вредност** на даден исказот.
  На пример, со $\tau(p)$ се означува **вистиносната вредност на исказот** p.

Ги воведуваме ознаките:

Т - за точно (се чита „те“) и $\perp$ - за неточно (се чита „нете“). Ако исказот p е вистинит означуваме $\tau(p)=$ Т и ќе читаме „тау од p е те“, а кога исказот p е невистинит ќе пишуваме $\tau(p)=\perp$ и ќе читаме „тау од p е нете“,

Пример 3 Реченицата r: „$2<3$ “, е исказ и е вистинит исказ, т.е. $\tau(r)=$ Т .

Пример 4 Одреди ја вистиносната вредност на следните искази:

а) 3 е природен број; б) $3^3=27$;
в) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$; г) $2^2\neq 4$.

а) $\tau(3 \text{ е природен број})=$ Т ; б) $\tau\left(3^3=27\right)=$ Т; в) $\tau\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}\right)=\perp$; г) $\tau\left(2^2\neq 4\right)=\perp$.

Задачи за самостојна работа

1. Одреди кои од речениците се искази:
а) Мислам дека утре ќе врне снег. б) Железото е метал.
в) Планината игра оро. г) 0 е природен број.

2. Објасни зошто не се искази речениците:

а) Зимата е најубаво годишно време.

б) Имам желба реката Вардар да минува низ Охрид.

в) Бројот 3 вози кола.

г) Те молам отвори ја вратата!

3. Одреди кои од следните искази се вистинити:

а) $2-7=7-2$;   б) $\frac{1}{2}=0,5$;   в) Годината има 13 месеци;   г) $3\cdot 2<10-3$.

4. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) p : Скопје е главен град на Република Северна Македонија;

б) $q : (3)^3=(-3)^3$;   в) r : Бројот 24 е делив со бројот 6;   г) $s : -3<-2$.

5. Одреди ја вистинитосната вредност за секој од исказите во следната табела (користејќи ги ознаките $\top$ и $\bot$):

x	**-2**	**-1**	**1**	**2**
$\tau(x<3)$				
$\tau(x^2=4)$				
$\tau(x+1>2)$				

2. Негација. Конјункција. Дисјункција. Исклучна дисјункција

Познато е дека во секој јазик постојат повеќе сврзници кои се употребуваат за градење на сложени реченици. Знаеме дека од две или повеќе прости или проширени реченици, со помош на сврзниците може да се состават сложени реченици.

Сврзници постојат и во математиката со кои поврзуваме два или повеќе искази. Посебно важни сврзници што се употребуваат во математиката се: „и“, „или“, „ако..., тогаш“, „ако и само ако“, „или-или“ и негацијата „не“.

Размисли и одговори!

- Можеме ли два исказа да ги поврземе со некој од горе наведените сврзници?
- Какви реченици добиваме?

!

- Со помош на исказите и сврзниците „и“, „или“, „ако... тогаш“, „ако и само ако“, „или-или“ и негацијата „не“ може да се формираат сложени реченици кои што се искази. Овие искази се нарекуваат **сложени искази**.
- **Елементарни или прости искази** се исказите што не содржат ниту еден од горенаведените сврзници, ниту негацијата не.

Пример 1 Исказите p: „Бројот 55 е парен број“ и q: „Бројот 56 е парен број“ се елементарни искази. Додека пак исказот r :„Бројот 55 е парен број и бројот 56 е парен број“ е сложен исказ добиен од исказите p,q поврзани со сврзникот “и”.

1 Направи сложен исказ од следните два искази p: „Бројот 5 е прост број“ и q: „Бројот 5 е парен број“ со примена на сврзникот:

а) и; б) или; в) ако ... тогаш; г) ако и само ако.

2 Кои од следниве искази се елементарни, а кои сложени искази?

а) Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра.

б) Квадратот е правилен четириаголник или е паралелеограм.

в) 5 е прост број.

г) Бројот е делив со 5 ако завршува на цифрата 5 или 0.

д) Реката Вардар извира во Вруток.

Забелешка: Елементарните искази имаат точно определена вистинитосна вредност. Вистинитосната вредност на сложениот исказ зависи од вистинитосните вредности на елементарните искази од кои е составен и од сврзникот кој притоа е употребен.

2.1. Негација

Да дефинираме негација.

!

- Нека е даден исказот p. Исказот „не p “ (се означува со $\neg p$) се вика **негација на** p
  „Не p “ е исказ којшто е невистинит кога p е вистинит, додека исказот „Не p “ вистинит е кога p е невистинит.

Обично зборот „не“ стои до глаголот, па затоа $\neg p$ се чита „3 не е парен број“, (наместо „Не 3 е парен број“).

Да видиме како ќе формираме негација од даден исказ p.

Пример 2 Негацијата на исказот „Денес е понеделник“ е „Денес не е понеделник“ или „Не е точно дека денес е понеделник“.

Вистиносната вредност на негацијата може да ја претставиме и со помош на таблица.

p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤

Пример 3 Да ги негираме следните искази:

а) Сара игра тенис; б) $5>7$; в) $3|9$.

а) $\neg$(Сара игра тенис) = Сара не игра тенис.

б) $\neg(5>7)=5\leq 7$;

в) $\neg(3|9)=3\nmid 9$.

Пример 4 Да ги негираме следните искази и да ја одредиме нивната вистиносна вредност:

а) $p: 3\neq 3$; б) $q: -2\leq 3$; в) r: Бројот 6 е прост број.

а) $\neg p: 3=3,\ \tau(\neg p)=$ ⊤.

б) $\neg q: -2>3,\ \tau(\neg q)=\perp$.

в) $\neg r$: Бројот 6 не е прост број, $\tau(\neg r)=$ ⊤.

3 Да се негираат следните искази и да се одреди нивната вистиносна вредност:

а) Бројот 7 е парен број; б) Секој четириаголник е трапез;

в) $2+3=5$; г) Бројот 17 е делив со 4.

д) $2>-1$; ѓ) Бројот 5 е делител на бројот 100.

2.2. Конјункција

Да дефинираме конјункција.

- **Конјункција** се нарекува сложениот исказ добиен од два елементарни исказа со помош на сврзникот „и“.
  Нека p и q се два елементарни исказа, тогаш конјункцијата на p и q ја означуваме со $p \wedge q$ (се чита „ p и q “).

Пример 5 Конјункцијата на исказите p: 7 е цел број; и q: 7 е непарен број е: $p \wedge q$: 7 е цел број и 7 е непарен број.

Од дефиницијата за конјункција, како и од пример 5, можеш да забележиш дека конјункцијата е всушност сложен исказ, кој е добиен со сврзување на два прости искази со сврзникот „и“.

- Конјункцијата е исказ кој е вистинит ако и двата исказа се вистинити, во сите други случаи е невистинит.

Вистиносната вредност на конјункцијата може да ја претставиме и со помош на таблица.

p	q	$p \wedge q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥

Пример 6 Нека се дадени исказите: $p: 2^3$ е сложен број, $q: \frac{1}{2} > 8$ и $r: x+5=10-2$ за $x=3$. Формирај ги исказите:

а) $p \wedge q$; б) $p \wedge r$; в) $q \wedge r$, а потоа одреди ја нивната вистиносна вредност.

а) $p \wedge q: 2^3$ е сложен број и $\frac{1}{2} > 8$, $\tau(p \wedge q) = \tau(p) \wedge \tau(q) = \top \wedge \perp = \perp$.

б) $p \wedge r: 2^3$ е сложен број и $x+5=10-2$ за $x=3$, $\tau(p \wedge r) = \tau(p) \wedge \tau(r) = \top \wedge \top = \top$.

в) $q \wedge r: \frac{1}{2} > 8$ и $x+5=10-2$ за $x=3$, $\tau(q \wedge r) = \tau(q) \wedge \tau(r) = \perp \wedge \top = \perp$.

4 Да се одреди вистиносната вредност на следните конјункции:

а) $(2>5) \wedge (3<9)$; б) $(3\frac{2}{5} = 2) \wedge (4-1=4)$; в) $(3+2=4) \wedge (9-5=4)$;

г) Бројот 17 е делив со 4 и бројот 5 е помал од 0.

2.3. Дисјункција

Да дефинираме дисјункција.

> ❖ **Дисјункција** се нарекува сложениот исказ добиен од два елементарни искази со помош на сврзникот „или“.
> Нека p и q се два елементарни исказа, тогаш дисјункцијата на p и q ја означуваме со $p \vee q$ (се чита „ p или q “).

Пример 7 Дисјункцијата на исказите p: 16 е парен број и q: 16 е делив со 4 е: $p \vee q$: 16 е парен број или 16 е делив со 4.

За вистинитосната вредност на сложениот исказ формиран со користење на логичката операција дисјункција важи следново:

> ❖ Дисјункцијата е исказ кој е невистинит ако и двата исказа се невистинити, во сите други случаи е вистинит.

Вистиносната вредност на дисјункцијата може да ја претставиме и со помош на таблица:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

Пример 8 Нека се дадени исказите: $p: 4\cdot 3 = 7-4$, $q: 4\cdot 3\cdot 0 = 6$ и r: 4 е цел број.

Формирај ги исказите:

а) $p \vee q$; б) $p \vee r$; в) $q \vee r$,

а потоа одреди ја нивната вистиносна вредност.

а) $p \vee q: 4\cdot 3 = 7-4$ или $4\cdot 3\cdot 0=6$, $\tau(p \vee q) = \tau(p) \vee \tau(q) = \perp \vee \perp = \perp$.

б) $p \vee r: 4\cdot 3 = 7-4$ или 4 е цел број, $\tau(p \vee r) = \tau(p) \vee \tau(r) = \perp \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$.

в) $q \vee r: 4\cdot 3\cdot 0 = 6$ или 4 е цел број, $\tau(q \vee r) = \tau(q) \vee \tau(r) = \perp \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$.

5 Да се одреди вистиносната вредност на следните дисјункции:

а) $(12 > 5) \vee (x^2 = 1$ за $x = 3)$; б) $(\frac{5}{8} + 2\frac{1}{8} = \frac{31}{8}) \vee (6{,}39 - 1\frac{1}{4} = 3)$;

в) $(3\cdot 2 - 1 = 5) \vee (6^2 = 36)$ г) 0,5 е ирационален број или 5 е рационален број.

6 Нека p, q и r се следните искази:

p: Шарпланинецот е македонско куче;

q: Јас имам мал двор;

r: Јас имам голем шарпланинец.

Напиши ги следните симболички искази како реченици:

а) $p \wedge q \wedge r$; б) $(p \vee \neg q) \wedge r$; в) $\neg q \wedge r$.

2.4. Исклучна дисјункција

Да дефинираме исклучна дисјункција.

!

❖ **Исклучна дисјункција** се нарекува сложениот исказ добиен од два елементарни искази со помош на сврзникот „или-или“.
Нека p и q се два елементарни исказа, тогаш исклучната дисјункција на p и q ја означуваме со $p \veebar q$ (се чита „или p или q “).

Пример 9 Исклучна дисјункција на исказите $p: 4 \neq 2$ и $q: \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ е:

$p \veebar q$: или $4 \neq 2$ или $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

За вистинитосната вредност на сложениот исказ формиран со исклучната дисјункција, треба да го знаеш следното:

!

❖ Исклучната дисјункција е исказ кој е вистинит ако двата исказа имаат различна вистинитосна вредност, во останатите два случаи е невистинит.

Вистиносната вредност на исклучната дисјункција може да ја претставиме и со помош на вистинитосна таблица.

p	q	$p \veebar q$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Пример 10 Нека се дадени исказите: $p: 2+7 \leq 5 \cdot 4$, $q: 7 \mid 21$ и $r: 3x \neq 21$ за $x = 7$.

Формирај ги исказите:

а) $p \veebar q$; б) $p \veebar r$; в) $q \veebar r$;

а потоа одреди ја нивната вистиносна вредност.

а) $p \veebar q$: или $2+7 \le 5 \cdot 4$ или $7|21$, $\tau(p \veebar q) = \tau(p) \veebar \tau(q) = \top \veebar \top = \perp$.

б) $p \veebar r$: или $2+7 \le 5 \cdot 4$ или $3x \ne 21$ за $x = 7$, $\tau(p \veebar r) = \tau(p) \veebar \tau(r) = \top \veebar \perp = \top$.

в) $q \veebar r$: или $7|21$ или $3x \ne 21$ за $x = 7$, $\tau(q \veebar r) = \tau(q) \veebar \tau(r) = \top \veebar \perp = \top$.

7 Да се одреди вистиносната вредност на следните искази:

а) $(2<6) \veebar (2|6)$; б) $(2+3=5) \veebar (5-3=2)$;

в) $(3 \cdot 2+1=5) \veebar (6^2=45)$; г) Или 3|9 или 3|8.

Задачи за самостојна работа:

1. Запиши ги негациите на исказите:

а) Денес е петок; б) $-3 \ge 5$; в) 10 е негативен број; г) $\frac{1}{5} \ne \frac{1}{3}$.

2. Запиши ги негациите на следните искази, а потоа одреди ја вистинитосната вредност на добиените искази:

а) p: Метар е основна мерна единица за должина;

б) q: Бројот 9 е делител на 37;

в) $r: 2+7 \ne 9$; г) $s: 7<3$.

3. Нека се дадени исказите p: 5 е природен број, $q: -2>3$ и $r: 3|9$. Формирај ги конјункциите:

а) $p \wedge q$; б) $p \wedge p$; в) $q \wedge r$; г) $r \wedge p$.

4. Нека се дадени исказите p: 8 е прост број, $q: x+3=5$ за $x=1$ и $r: 2 \nmid 7$. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $p \wedge \neg q$; б) $r \wedge \neg p$; в) $(\neg p \wedge \neg r) \wedge q$; г) $\neg(p \wedge q) \wedge r$.

5. Нека е дадена реченицата: „Бројот 5 е прост и непарен број“. Одреди ги елементарните искази во реченицата.

6. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\tau(5>3 \wedge 3|18)$; б) $\tau(3^2=6 \wedge 2^3=6)$;

в) $\tau\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{10} \wedge \frac{1}{5}<\frac{1}{2}\right)$; г) $\tau(\text{Бројот } -2 \text{ е негативен број} \wedge -2=2)$.

7. Нека се дадени исказите $p: |-3|=-3$, $q: \frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ и $r: 5 \ge 7$. Формирај ги дисјункциите:

а) $p \vee q$; б) $p \vee p$; в) $q \vee r$; г) $r \vee p$.

8. Нека се дадени исказите p: Квадратот со страна a има плоштина a^2, $q: 5-7=-2$ и $r: 2^2 \cdot 2^3 = 2^6$. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $p \vee \neg q$; б) $r \vee \neg p$; в) $(\neg p \vee \neg r) \vee q$; г) $\neg(p \vee q) \vee r$.

9. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\tau(5\,|\,25 \vee 2 \nmid 20)$; б) $\tau(7+3 \neq 10 \vee 3 > -1)$; в) $\tau\left(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \vee 4^2 = 8\right)$;

г) $\tau(\text{Плоштината на еден многуаголник е негативен број} \vee |-2| = 2)$.

10. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $(3 \neq 2 \wedge 2 < -1) \vee (\text{Бројот 36 е делив со 6})$;

б) $\left(\frac{5}{5} = 1 \vee 5 - 6 = 1\right) \wedge \left(\frac{2}{3} < \frac{1}{2}\right)$;

в) $(10 = 5 \cdot 2 \wedge 6 > 6) \vee \neg(6^2 = 36)$;

г) $\neg\left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \vee -2 > 3\right) \wedge (x + 5 = 7 \text{ за } x{=}2)$.

11. Нека се дадени исказите p: Паралелограмот нема ниту еден пар на паралелени страни, $q: 14 \neq 2 \cdot 7$ и $r: 7 - 7 = 0$. Формирај ги исклучните дисјункции:

а) $p \veebar q$; б) $r \veebar r$; в) $q \veebar r$; г) $r \veebar p$.

3. Импликација и еквиваленција

3.1. Импликација

Од зависно-сложените реченици во математичката логика од посебно значење се и условните реченици. Со условната дел-реченица се дава условот под кој се врши или ќе се изврши дејството во главната реченица. Со помош на условните речници се дефинира импликацијата во математичката логика.

Да дефинираме импликација.

!

❖ **Импликација** се нарекува сложениот исказ добиен од два елементарни искази со помош на сврзникот „ако ... тогаш“.
Нека p и q се два елементарни исказа, тогаш импликацијата на исказите p и q ја означуваме со $p \Rightarrow q$ (се чита „Ако p, тогаш q“, „Од p следува q“, „p имплицира q“, итн.).

Пример 1 Импликацијата на исказите $p: 2{+}0{=}2$ и $q: 2\,|\,14$ е: $p \Rightarrow q$: Ако $2{+}0{=}2$, тогаш $2\,|\,14$.

!

❖ Импликацијата е исказ кој е невистинит ако првиот исказ е вистинит додека вториот е невистинит, во сите други случаи е вистинит.

Вистинитосната таблица на импликацијата $p \Rightarrow q$ е дадена со следнава таблица:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

Пример 2 Нека се дадени исказите: p: 15 е делив со 5, $q: 5 > -2$ и $r: -2x = 5$ за $x=2$. Формирај ги исказите:

а) $p \Rightarrow q$; б) $p \Rightarrow r$; в) $q \Rightarrow r$;

а потоа одреди ја нивната вистиносна вредност.

а) $p \Rightarrow q$: Ако 15 делив со 5 тогаш, 5>-2, $\tau(p \Rightarrow q) = \tau(p) \Rightarrow \tau(q) = \top \Rightarrow \top = \top$.

б) $p \Rightarrow r$: Ако 15 е делив со 5, тогаш -2x=5 за x=2, $\tau(p \Rightarrow r) = \tau(p) \Rightarrow \tau(r) = \top \Rightarrow \perp = \perp$.

в) $q \Rightarrow r$: Ако 15 е делив со 5, тогаш -2x=5 за x=2, $\tau(q \Rightarrow r) = \tau(q) \Rightarrow \tau(r) = \top \Rightarrow \perp = \perp$.

1 Да се одреди вистиносната вредност на следните импликации:

а) $(2 < 5) \Rightarrow (2 \mid 17)$; б) $(2 + 3 \neq 5) \Rightarrow (5 - 3 \neq 2)$;

в) $(3 \cdot 2 - 1 = 5) \Rightarrow (6^2 = 36)$; г) Ако 3|7 тогаш 3|8.

Во математичката логика со импликацијата се поврзани три нови сложени искази. Имено, ако е дадена импликацијата $p \Rightarrow q$, тогаш можеме да ги формираме следните сложени искази:

$q \Rightarrow p$ - конверзија од $p \Rightarrow q$;

$\neg p \Rightarrow \neg q$ - инверзија од $p \Rightarrow q$;

$\neg q \Rightarrow \neg p$ - контрапозиција од $p \Rightarrow q$.

2 Состави ги вистинитосните таблици на конверзијата, инверзијата и контрапозицијата на импликацијата $p \Rightarrow q$.

3 Нека p, q и r се следниве искази:

p - Тој ќе купи нов автомобил.

q - Тој ќе прави забава.

r - Тој ќе добие на лотарија.

Напишете ги следниве реченици како симболички изрази:

а) Ако добие на лотарија, тогаш ќе купи нов автомобил и ќе прави забава;

б) Ако не купи нов автомобил, тогаш нема да прави забава;

в) Ако не добие на лотарија или не купи нов автомобил, тогаш нема да прави забава.

Во форма на импликација во математиката се запишани голем број на математички тврдења и теореми.

4 Формулирај две теореми кои ги знаеш од претходно, а кои се искажани во форма на импликација.

3.2. Еквиваленција

Со дефинирање на импликација во две насоки се дефинира нова логичка операција која се вика еквиваленција. Дефинирањето на импликацијата $p \Rightarrow q$ како и на обратната импликација $q \Rightarrow p$, овозможува дефинирање на еквиваленцијата.

Да дефинираме еквиваленција.

!

- **Еквиваленција** се нарекува сложениот исказ добиен од два елементарни искази со помош на сврзникот „ако и само ако“.
  Нека p и q се два елементарни исказа, тогаш еквиваленцијата на p и q ја означуваме со $p \Leftrightarrow q$ (се чита „ p ако и само ако q “ „ p е еквивалентно со q “, „ p тогаш и само тогаш кога q “, итн.).

Пример 3 Еквиваленцијата на исказите $p: \frac{1}{2}$ е рационален број и $q: \text{НЗД}(12, 16) = 4$ е: $p \Leftrightarrow q: \frac{1}{2}$ е рационален број ако и само ако $\text{НЗД}(12, 16) = 4$.

За вистинитосната вредност на сложениот исказ формиран со еквиваленција, важи следното:

!

- Еквиваленцијата е исказ што е вистинит кога двата исказа имаат иста вистинитосна вредност, во останатите два случаи е невистинит.

Вистиносната вредност на еквиваленцијата може да ја претставиме и со помош на таблица.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊤

Пример 4 Нека се дадени исказите: $p: \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$, $q: 3^2 > 2^3$ и $r: -2\cdot 3 = -6$.

Формирај ги исказите:

а) $p \Leftrightarrow q$; б) $p \Leftrightarrow r$; в) $q \Leftrightarrow r$;

а потоа одреди ја нивната вистиносна вредност.

а) $p \Leftrightarrow q: \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$ ако и само ако $3^2 > 2^3$, $\tau(p \Leftrightarrow q) = \tau(p) \Leftrightarrow \tau(q) = \perp \Leftrightarrow \top = \perp$.

б) $p \Leftrightarrow r: \frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$ ако и само ако $-2\cdot 3 = -6$, $\tau(p \Leftrightarrow r) = \tau(p) \Leftrightarrow \tau(r) = \perp \Leftrightarrow \top = \perp$.

в) $q \Leftrightarrow r: 3^2 > 2^3$ ако и само ако $-2\cdot 3 = -6$, $\tau(q \Leftrightarrow r) = \tau(q) \Leftrightarrow \tau(r) = \top \Rightarrow \top = \top$.

5 Да се одреди вистиносната вредност на следните еквиваленции:

а) $(2<6) \Leftrightarrow (2\,|\,6)$; б) $(2+3 \neq 5) \Leftrightarrow (5-3 \neq 2)$;

в) $(3\cdot 2 - 1 = 5) \Leftrightarrow (6^2 = 36)$; г) 3|7 ако и само ако 3|8.

6 Нека p, q и r се следниве искази:

p - Тој е одличен ученик.

q - Тој е популарен меѓу другарите.

r - Тој оди на сите забави.

Напишете ги следниве симболички изрази како реченици:

а) $q \Leftrightarrow (p \wedge r)$; б) $q \Leftrightarrow r$; в) $\neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee r)$.

!

- Негацијата ($\neg$), конјункцијата ($\wedge$), дисјункцијата ($\vee$), исклучната дисјункција ($\veebar$), импликацијата ($\Rightarrow$) и еквиваленцијата ($\Leftrightarrow$) се викаат логички операции.

Задачи за самостојна работа:

1. Нека се дадени исказите $p: \frac{1}{4} = 0,25$, q: Реката Дунав минува низ Скопје; и $r: \sqrt{2}$ е ирационален број. Формирај ги импликациите:

а) $p \Rightarrow q$; б) $q \Rightarrow q$; в) $q \Rightarrow r$; г) $r \Rightarrow p$.

2. Нека се дадени исказите $p: \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$, $q: 2x = 4$ за $x = -2$ и r: Бројот 9 е сложен број. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $p \Rightarrow \neg q$; б) $\neg p \Rightarrow r$; в) $(\neg p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow q$; г) $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$.

3. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\tau(3 > -2 \Rightarrow -2 < 1)$; б) $\tau(2 \neq 3 \Rightarrow -5 = 5)$;

в) $\tau(2^6 = 12 \Rightarrow 7^2 = 14)$; г) $\tau(2 + 0 = 2 \Rightarrow 2 - 0 = -2)$.

4. Заокружи го точниот исказ:

а) Ако p тогаш q се нарекува негација;

б) Ако p тогаш q се нарекува еквиваленција;

в) Ако p тогаш q се нарекува дисјункција;

г) Ако p тогаш q се нарекува импликација.

5. Одреди ја вистинитосната вредност на следните изрази:

а) $(\top \wedge \perp) \vee \perp$; б) $\neg(\top \vee \top) \wedge \perp$;

в) $(\perp \wedge \top) \Rightarrow \neg \perp$; г) $(\perp \vee \perp) \Leftrightarrow (\neg\top \wedge \neg \perp)$.

6. Нека се дадени исказите $p: -1$ е позитивен број, $q: 4 > 2$ и $r: 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Формирај ги еквиваленциите:

а) $p \Leftrightarrow q$; б) $q \Leftrightarrow q$; в) $q \Leftrightarrow r$; г) $r \Leftrightarrow p$.

7. Нека се дадени исказите p: Збирот на аглите во четириаголникот е 360^0, $q: |3 + 2| = 5$ и $r: 2 \mid 48$. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $p \Leftrightarrow \neg q$; б) $r \Leftrightarrow \neg p$; в) $(\neg p \Leftrightarrow \neg r) \vee q$; г) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow r$.

8. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\tau(3 \mid 20 \Leftrightarrow 3 - 2 \cdot 1 = 1)$; б) $\tau\left(3 = 3 \Leftrightarrow 2 = \frac{6}{3}\right)$; в) $\tau(-2 > 2 \Leftrightarrow 6^2 = 12)$;

г) $\tau\left(\text{Плоштината на правоаголникот со димензии } a \text{ и } b \text{ е бројот } a \cdot b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right)$.

9. Нека се дадени исказите $p: 5 - 5 \cdot 0 = 0$, $q: \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ и r: Спротивните страни на паралелограмот се еднакви меѓу себе.
Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $p \veebar \neg q$; б) $r \veebar \neg p$; в) $(\neg p \veebar \neg r) \Rightarrow q$; г) $\neg(p \Leftrightarrow q) \veebar r$.

10. Одреди ја вистинитосната вредност на следните изрази:

а) $(\top \Leftrightarrow \top) \wedge \bot$;   б) $\neg(\bot \veebar \top) \Leftrightarrow \bot$;

в) $(\neg \top \Rightarrow \top) \vee \neg \bot$;   г) $(\bot \Leftrightarrow \top) \veebar (\neg \bot \Rightarrow \neg \top)$.

11. Нека p, q и r се следниве искази:

p - Тој е програмер.

q - Тој гледа криминалистички филмови.

r - Тој учествува во квизови.

Напишете ги следниве реченици како симболички изрази:

а) Ако тој учествува во квизови и гледа криминалистички филмови, тогаш тој е програмер.

б) Ако тој не учествува во квизови и не гледа криминалистички филмови, тогаш тој не е програмер.

в) Ако тој гледа криминалистички филмови, тогаш тој учествува во квизови; и ако тој не гледа криминалистички филмови, тогаш тој е програмер.

4. Исказни формули

Сложен аритметички израз е изразот $-25 + 2 \cdot (25 - 5 : 5)$, каде броевите се поврзани со аритметичките операции собирање (+), одземање (-), множење (·) и делење (:).

Размисли и одговори!

- Дали со исказните променливи *p, q, r, …* и логичките операции негација ($\neg$), конјункција ($\wedge$), дисјункција ($\vee$), исклучна дисјункција ($\veebar$), импликација ($\Rightarrow$) и еквиваленција ($\Leftrightarrow$) можеме да составиме сложен логички израз?
- Доколку може, дај пример!

Да дефинираме исказни формули.

1) Исказните променливи $p, q, r, s, \ldots$ итн. и константите Т и $\perp$ се исказни формули.
2) Ако A и B се исказни формули, тогаш и $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ и $(A \underline{\vee} B)$ се исказни формули.
3) **Исказните формули** може да се формираат само со помош на конечен број примени на правилата 1) и 2).

Сложените искази кои во математичката логика се викаат **исказни формули** можат да бидат вистинити или невистинити.

При формирањето на сложените исказни формули се користат повеќе логички операции. Како и во аритметиката, така и во математичката логика, важно е да се знае по кој редослед се извршуваат логичките операции. Тоа овозможува при запишувањето на сложените исказни формули да се користат помалку загради.

Во врска со редоследот на логичките операции треба да се знае следново:

❖ Ако во исказната формула се среќаваат сите логички операции и притоа не се среќаваат загради, тогаш редоследот на логичките операциии е следниот:
1) $\neg$; 2) $\wedge$; 3) $\vee$; 4) $\underline{\vee}$; 5) $\Rightarrow$; 6) $\Leftrightarrow$.

Пример 1 Да ги разгледаме исказите:

p : Денес врнеше дожд; q - Денес врнеше снег.

Од овие искази ќе ги формираме исказите:

$\neg(p \vee q)$: Не е точно дека денес врнеше дожд или снег.

$\neg p \wedge \neg q$: Денес не врнеше дожд и денес не врнеше снег.

За формираните искази ќе ги формираме таблиците на вистинитост. Имаме:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
Т	Т	$\perp$	$\perp$	Т	$\perp$	$\perp$
Т	$\perp$	$\perp$	Т	Т	$\perp$	$\perp$
$\perp$	Т	Т	$\perp$	Т	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	Т	Т	$\perp$	Т	Т

Забележуваме дека во сите четири случаи, вистинитосната вредност на $\neg(p \vee q)$ е иста со вистинитосната вредност на $\neg p \wedge \neg q$. Ова значи дека сложениот исказ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ е вистинит за секоја вредност на исказите p и q.

При испитување на вистинитосната вредност на дадена исказна формула, треба да се знае по колку вистинитосни вредности треба да има секоја исказна променлива која што се среќава во формулата.

> ❖ Ако во исказната формула имаме n исказни променливи, тогаш за секоја исказна променлива во вистинитосната таблица треба да има 2^n вистинитосни вредности.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 2 Да ја разгледаме вистинитосната вредност на исказната формула $p \Rightarrow (p \vee q)$. Со помош на вистинитосна таблица, почитувајќи го редоследот на логичките операции имаме:

$\vee$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	⊥	T	T
⊥	T	T	T
⊥	⊥	⊥	T

$\Rightarrow$

- Забележуваме дека во овој пример имаме две исказни променливи и тоа p и q, затоа имаме $2^2 = 4$ вистинитосни вредности за секоја променлива.

Исказната формула во пример 2 е точна за секоја вистинитосна вредност на сите исказни променливи што се среќаваат во неа.

Исказните формули можеме да ги групираме во три групи:

!

- ❖ Исказните формули што се вистинити за сите вредности на исказните променливи се викаат **тавтологии.**
- ❖ Исказните формули што се невистинити за сите вредности на исказните променливи се викаат **контрадикции.**
- ❖ Исказните формули што се вистинити за едни вредности на исказните променливи, а за други се невистинити се викаат **неутрални исказни формули.**

Пример 3 Определи ја вистинитосната вредност за секоја од исказните формули:

а) $p \Rightarrow \neg r \Leftrightarrow \neg(r \vee q) \Rightarrow p$; б) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (q \vee p)$,

за $\tau(p) = \bot$; $\tau(q) = \top$; $\tau(r) = \bot$.

а)

$$\begin{aligned} \tau\left(p \Rightarrow \neg r \Leftrightarrow \neg(r \vee q) \Rightarrow p\right) &= \bot \Rightarrow \neg\bot \Leftrightarrow \neg(\bot \vee \top) \Rightarrow \bot = \\ &= \bot \Rightarrow \top \Leftrightarrow \neg\top \Rightarrow \bot = \\ &= \top \Leftrightarrow \bot \Rightarrow \bot = \\ &= \top \Leftrightarrow \top = \\ &= \top \end{aligned}$$

б) Обиди се сам!

Пример 4 За даден исказ p да се определи вистинитосната вредност на секој од следните формули:

а) $p \veebar \top$; б) $(\top \vee p) \Leftrightarrow \bot$; в) $p \wedge \top$; г) $(p \Rightarrow \neg\bot) \Rightarrow \top$.

а) Исказот p може да биде вистинит или невистинит, т.е. $\tau(p) = \top$ или $\tau(p) = \bot$,

1) Ако $\tau(p) = \top$, тогаш $\tau(p \veebar \top) = \top \veebar \top = \bot$.

2) Ако $\tau(p) = \bot$, тогаш $\tau(p \veebar \top) = \bot \veebar \top = \top$.

б) Слично како под а) имам: $\tau(p) = \top$ или $\tau(p) = \bot$,

1) Ако $\tau(p) = \top$, тогаш $(\top \vee p) \Leftrightarrow \bot = (\top \vee \top) \Leftrightarrow \bot = \top \Leftrightarrow \bot = \bot$.

2) Ако $\tau(p) = \bot$, тогаш $(\top \vee p) \Leftrightarrow \bot = (\top \vee \bot) \Leftrightarrow \bot = \top \Leftrightarrow \bot = \bot$.

в) и г) Обиди се сам!

Пример 5 Со помош на вистинитосна таблица да се докажи дека следните исказни формули се тавтологии:

а) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$;

б) $p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.

а) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$

Значи, исказната формула е тавтологија.

б) Обиди се сам!

Пример 6 Докажи дека следните формули се логички еквивалентни:

а) $q \vee \neg p$ и $p \Rightarrow q$; б) $p \wedge (p \vee q)$ и p.

а) Формираме нова исказна формула со помош на логичка операција за еквиваленција, со тоа формираме нова исказна формула $q \vee \neg p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.

Ако последната исказна формула е тавтологија, тогаш почетните дадени искази се логички еквивалентни.

p	q	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$p \Rightarrow q$	$q \vee \neg p \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Следува, исказните формули $q \vee \neg p$ и $p \Rightarrow q$ се логички еквивалентни.

б) Обиди се сам!

Задачи за самостојна работа:

1. Определи ја вистинитосната вредност за секоја од исказните формули:

а) $\neg p \wedge r \Leftrightarrow \neg(r \wedge q) \Rightarrow p$; б) $(p \veebar \neg r) \Rightarrow \neg(q \Leftrightarrow p)$.

за $\tau(p)=\perp$; $\tau(q)=\top$; $\tau(r)=\perp$.

2. За даден исказ p определи ја вистинитосната вредност на секоја од следните формули:

а) $p \vee \top$; б) $p \Rightarrow (\neg p \wedge \top)$; в) $p \Leftrightarrow \perp$; г) $(\top \Rightarrow p) \veebar \neg \top$.

3. Докажи дека следните формули се логички еквивалентни:

а) $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$; б) $p \vee (p \wedge q)$ и p.

4. Состави вистинитосна таблица на следните исказни формули:

а) $(p \vee r) \Rightarrow (p \wedge q)$; б) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; в) $((p \Rightarrow q) \vee r) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

5. Логички закони

Во претходната наставна единица дефинираме исказна формула и разгледавме каква може да биде таа во поглед на нејзината вистинитосна вредност: тавтологија, контрадикција или неутрална исказна формула.

Потсети се и одговори!

- Што е исказна формула?
- Што е тавтологија, а што контрадикција?
- Што е неутрална исказна формула?

Од сите видови исказни формули, тавтологиите имаат посебно значење.

❖ Секоја тавтологија се вика **логички закон** или **закон на мислењето**.

❖ **Некои поважни логички закони се:**

1. Комутативен закон за конјункција $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$;
2. Комутативен закон за дисјункција $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$;
3. Асоцијативен закон за конјункција $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$;
4. Асоцијативен закон за дисјункција $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$;
5. Дистрибутивен закон за конјункција во однос на дисјункција $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
6. Дистрибутивен закон за дисјункција во однос на конјункција $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
7. Закон за апсорпција на дисјункцијата кон конјункцијата $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$;
8. Закон за апсорпција на конјункцијата кон дисјункцијата $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$;
9. Закон за исклучување на третото $p \vee \neg p$;
10. Закон за непротивречност $\neg(p \wedge \neg p)$;
11. Закон за двојна негација $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$;
12. Закон за замена на импликација $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$;
13. Закон за замена на еквиваленција $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$;
14. Закон за замена на еквиваленција $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$;
15. Де Морганови закони:
    а) Закон за негација на конјункцијата $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;
    б) Закон за негација на дисјункцијата $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Пример 1 Со примена на вистиносната таблица да се докаже дека формулите 1, 2 и 3 се тавтологии.

За исказната формула $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ имаме:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤

Следи, исказната формула $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ е тавтологија.
На сличен начин се покажува дека за дисјункцијата важи комутативниот закон и дека важи асоцијативниот закон за конјункцијата.

1 Со примена на вистиносната таблица да се докаже дека формулите 5, 6 и 14 се тавтологии.

Пример 2 Да ја трансформираме формулата $\neg(p \Rightarrow q)$ така што нема да содржи импликација.

Со користење на логичките закони имаме,

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg\neg p \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

- Кои логички закони се искористени при трансформирањето?

2 Со користење на логичките закони трансформирај ги следните формули:

а) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$; б) $\neg(p \Leftrightarrow q)$.

Пример 3 Со користење на логичките закони да извршиме негација на исказот:

Бројот 2 е прост број и бројот 2 е парен број.

Овој исказ симболички можеме да го запишеме како $p \wedge q$, каде p: бројот 2 е прост број; q: бројот 2 е парен број.

Со користење на еден од Де Моргановите закони добиваме, $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$, или ако го прочитаме со зборови:

Бројот 2 не е прост број или бројот 2 не е парен број.

- Кој Де Морганов закон е искористен овде?

3 Изврши негација на следните искази:

а) $2 = 5$ или $2 = 5 - 3$; б) $3 + 5 = 8$ и $3 = 8 - 5$; в) Ако $3 + 7 = 10$ тогаш $7 = 10 - 3$.

Пример 3 Да ги разгледаме следните импликации:

а) Ако $3 + 7 = 10$ тогаш $7 = 10 - 3$ и б) Ако $3 + 7 = 10$ тогаш $7 > 5$.

И двете импликации се вистинити, но меѓу нив има разлика. Кај импликацијата под а) заклучокот $7 = 10 - 3$ следува од претпоставката $3 + 7 = 10$. Кај оваа импликација, заклучокот директно следува од претпоставката и заклучокот е секогаш вистинит кога е вистинита претпоставката. Тогаш велиме дека **заклучокот логички следува од претпоставката**. За секоја ваква импликација велиме дека е **логичко следство**.

За импликацијата под б) ова не можеме да го заклучиме.

!

- Вистинитите импликации кај кои заклучокот логички следува од претпоставката ги викаме **логичко следство.**
- Секоја теорема може да се запише во вид на ваква импликација $p \Rightarrow q$, каде p е претпоставка на теоремата, а q е заклучок на теоремата.

4 Кои од следните импликации се логичко следство:
а) Ако бројот 225 е делив со 9 тогаш бројот 225 е делив со 3;
б) Ако $9-5=4$ тогаш $-1<0$.

Кога некој ќе заклучи дека од одредено множество искази, одреден исказ „логички следува“, тогаш имаме дедуктивно заклучување. Исказите од кои се тргнува се викаат **претпоставки** или **хипотези,** а исказот којшто следува од нив се вика **заклучок** или **последица**.

Ако изведувањето на заклучокот зависи само од оние својства на хипотезите и заклучоците кои можат да се изразат кога исказите се претставени со исказни букви и логички операции, тогаш имаме **исказно изведување на логички заклучок.**

За изведување на логички заклучок во исказната логика се користат многу логички закони од кои ние ќе спомeнеме само неколку од нив**:**

❖ **Правила за изведување заклучоци се:**

1. Модус поненс $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$;
2. Модус толенс $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$;
3. Хипотетичен силогизам $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
4. Правило за контрапозиција $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$.

Ќе решиме неколку практични примери од правилата за изведување на заклучоци:

Пример 4 Да изведеме логички заклучок од следните искази:

Надвор врне дожд;
Ако надвор врне дожд, понеси чадор.

Овде исказите можеме да ги означиме со исказни букви и користење на логички операции. Така ќе имаме:

p : Надвор врне дожд;

$p \Rightarrow q$: Ако надвор врне дожд, понеси чадор.

Значи ние како претпоставки ги имаме исказите: p и $p \Rightarrow q$.

Оттука со користење на правилото за заклучување Модус поненс $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$, како заклучок ќе го изведеме исказот q.
Значи, заклучокот е: Понеси чадор.

5 Изведи логички заклучок од следните искази:
Многу ќе учам за тестот по математика.
Ако учам многу за тестот по математика, ќе добијам оцена 5.

Кое правило за изведување на логички заклучок го искористи?

Пример 5 Да изведеме логички заклучок од следните искази:

Ако е празник, училиштето е затворено;
Училиштето не е затворено.
Овде исказите можеме да ги означиме со исказни букви и користење на логички операции. Така ќе имаме:

$p \Rightarrow q$: Ако е празник, училиштето е затворено;

каде исказот p : Празник е. Исказот q : Училиштето е затворено.

$\neg q$: Училиштето не е затворено.

Значи ние како претпоставки ги имаме исказите: $p \Rightarrow q$ и $\neg q$.
Оттука со користење на правилото за заклучување Модус толенс $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$, како заклучок ќе го изведеме исказот $\neg p$.
Значи, заклучокот е: Не е празник.

6 Изведи логички заклучок од следните искази:
Ако е топло ќе одиме на прошетка.
Нема да одиме на прошетка.
Кое правило за изведување на логички заклучок го искористи?

Пример 6 Да изведеме логички заклучок од следните искази:

Ако одам да пливам, тогаш долго ќе останам на сонце.
Ако долго останам на сонце, тогаш ќе изгорам.
Исказите од кои треба да изведеме логички заклучок можеме да ги означиме со исказни букви и со користење на логички операции. Така ќе имаме:
$p \Rightarrow q$: Ако одам да пливам, тогаш долго ќе останам на сонце.
$q \Rightarrow r$: Ако долго останам на сонце, тогаш ќе изгорам.
Со користење на правилото за хипотетички силогизам следува дека заклучокот ќе биде:
$p \Rightarrow r$: Ако одам да пливам, тогаш ќе изгорам.

Пример 7 Да изведеме логички заклучок од следните искази:

Ако ја исчистам собата, мајка ми нема да биде лута.

Ако со исказни променливи ги запишеме елементарните искази, имаме:

p - Ќе ја исчистам собата.

q - Мајка ми ќе биде лута.

Оттука, исказот: Ако ја исчистам собата, мајка ми нема да биде лута, ќе го запишеме како $p \Rightarrow \neg q$.

Користејќи го правилото за контрапозиција, еквивалентен исказ ќе биде: $\neg(\neg q) \Rightarrow \neg p$, т.е. $q \Rightarrow \neg p$ или искажано со зборови: Ако мајка ми е лута, тогаш нема да ја исчистам собата.

7 Изведи логички заклучок од следните искази:

Ако добијам добра оцена по физика, ќе одам да гледам филм.

Ако гледам филм, ќе одам со другарите на сладолед.

Кое правило за изведување на логички заклучок го искористи?

Задачи за самостојна работа:

1. Провери дали следните исказни формули се логички закони:
   а) $p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$; б) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$; в) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;
   г) $(p \Rightarrow q) \vee p \Rightarrow q$; д) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$; ѓ) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.
   Доколку се работи за логички закон, дали го препознаваш ?
2. Со примена на вистиносната таблица да се докаже дека формулите 8, 9 и 15 се тавтологии.
3. Со користење на логичките закони трансформирај ги следните формули:
   а) $\neg(\neg p \Leftrightarrow q)$; б) $\neg(\neg p \Rightarrow q)$.
4. Изврши негација на следните искази:
   а) Железото е метал или железото не е во течна состојба;
   б) $2+5 \neq 8$ и $2 = 8-5$;
   в) Ако бројот 9 е сложен број тогаш бројот 9 е делив со бројот 3.
5. Искажи 3 импликации кои се логичко следство и 3 кои не се!
6. Изведи логички заклучок од следните искази:
   Ако сум добар математичар, тогаш лесно ќе научам програмирање.
   Јас сум добар математичар.
   Кое правило за логичко заклучување го искористи?
7. Изведи логички заклучок од следните искази:
   Ако цените на производите растат, тогаш куповната моќ на луѓето се намалува.
   Куповната моќ на луѓето се зголемува.
   Кое правило за логичко заклучување го искористи?
8. Изведи логички заклучок од следните искази:
   Ако добие на лотарија, тогаш ќе си купи нов компјутер.
   Ако си купи нов компјутер, тогаш ќе ги почести другарите.
   Кое правило за логичко заклучување го искористи?

6. Поим за множество, подмножество, еднакви и еквивалентни множества

Поимот множество е основен поим во теоријата на множества и не се дефинира, туку сметаме дека интуитивно се подразбира што е тоа множество. Под поимот множество се подразбира збир или колекција на објекти кои најчесто имаат некое заедничко својство.

Множествата вообичаено се означуваат со големи букви од латиницата: $A, B, C, \dots \quad \mathbb{N} \ \mathbb{Z} \ \mathbb{Q} \dots$, додека елементите на множеството се означуваат со мали букви од латиницата: $a, b, c, \dots$.

За едно множество ќе сметаме дека е еднозначно определено, ако за секој објект можеме да кажеме дали припаѓа или не му припаѓа на тоа множество. Во врска со припадноста на даден елемент на едно множество ги воведуваме следните ознаки.

Ако елементот a припаѓа на множеството A се означува $a \in A$. Ако елементот b не припаѓа на множеството A се означува $b \notin A$.

- На кои начини може да биде зададено едно множество?

1) Задавање на множествата со набројување на неговите елементи. При овој начин елементите на дадено множество се наведуваат во големи загради и притоа редоследот на елементите во заградите не е важен.
2) Задавање на множествата со наведување на својството на неговите елементи. Ако во општ случај го означиме произволниот елемент со x, а одредено својство го означиме со $P(x)$, тогаш множеството може описно да биде зададено со $\{x \mid P(x)\}$.
3) Задавање на множествата со помош на Венови дијаграми. Со овој начин на задавање, множествата се претставуваат како дел од рамнината ограничен со затворена линија.

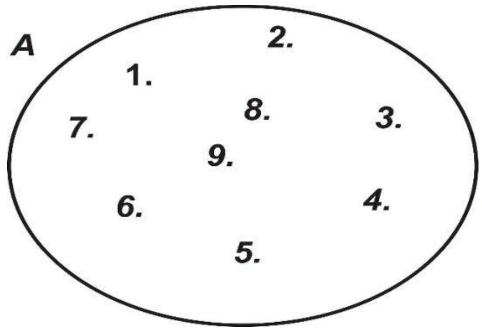
Во врска со различните начини на задавање на множествата да ги разгледаме следниот пример:

Пример 1 Множеството A од сите природни броеви помали од 10, зададено е:

а) табеларно: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

б) описно: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \qquad 0\}$ (се чита „A е множество од сите елементи x, при што x е природен број и x е помало од 10“)

в) Венов дијаграм:



Можеме да се заклучи следното:

!

- Едно множеството може да биде зададено на повеќе начини: табеларно, описно или со Венов дијаграм.

1 Запиши ги табеларно и со Венов дијаграм множествата: $A=\{x\in N\,|\,3\le x<9\}$, $B=\{x\in N\,|\,x\le 5\}$ и $C=\{x\,|\,x$ е број од првата десетка на втората стока$\}$.

Пример 2 Да го запишеме описно множеството $A=\{2,4,6,8\}$.
Даденото множество описно можеме да го запишеме на следниот начин:
$A=\{x\,|\,x$ е парен помал од 10$\}$, но можеме да го запишеме и како
$A=\{x\,|\,x$ е цифра од бројот 2468$\}$. Забележуваме дека едно исто множество може да биде претставено описно на повеќе начини.

!

- Едно множество A е **подмножество** на друго множество B, ако и само ако, секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B. Се означува $A\subseteq B$.
- Ако сите елементи од множеството A се елементи на множеството B, а множеството B има барем еден елемент што не припаѓа на A, тогаш се вели дека A е **вистинско подмножество** на B и се означува $A\subset B$.

Пример 3 Множеството $A=\{2,\ 3,\ 4\}$ е вистинско подмножество на множеството $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ т.е. $A\subseteq B$ и уште повеќе, $A\subset B$. Множеството $C=\{2,3\}$ е подмножество и на множеството A и на множеството B, т.е. $C\subseteq A$ и $C\subseteq B$. Уште повеќе, C е вистинско подмножество на множествата A и B.

Забелешка: Секое множество е подмножество само на себе.

2 Запиши ги табеларно сите подмножества на множеството $M=\{n|n\in\mathbb{N}\text{ и } n|12\}$.

Пример 4 Да го запишеме табеларно множеството $N=\{x|x \text{ е парен број делител на } 9\}$.

Можеме да согледаме дека не постои таков број, т.е. парен број кој е делител на 9, што значи множеството N не содржи елементи. Запишуваме $N=\varnothing$.

!

- Множеството, кое не содржи елементи се вика **празно множество** и се означува со $\varnothing$. Празното множество е подмножество од секое множество.
- Два множества A и B се **еднакви множества** ако секој елемент на множеството A е и елемент на множеството B и секој елемент на множеството B е елемент и на множеството A. Се означува $A=B$, т.е. ($A=B$ ако и само ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$).
- Две множества A и B се **еквивалентни** ако имаат еднаков број на елементи. Означуваме $A\cong B$.

Пример 5

Множествата $A=\{\text{понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота, недела}\}$ и $B=\{x\mid x \text{ е ден во седмицата}\}$ се еднакви множества т.е. $A=B$ и исто така се еквивалентни т.е. $A\cong B$.

Треба да запомниш дека:

!

- Множество чии што елементи се сите подмножества од множеството A се нарекува **партитивно множество** на множеството A и се означува со $P(A)$.

Пример 6 Партитивно множество на множеството $A=\{x,\ y,\ z\}$ е множеството $P(A)=\{\varnothing,\ \{x\},\ \{y\},\ \{z\},\ \{x,y\},\ \{x,z\},\ \{y,z\},\ \{x,y,z\}\}$.

3 Запиши го партитивното множество на множеството цифри од бројот 2263.

Задачи за самостојна работа:

1. Дадените множества запиши ги табеларно и со Венов дијаграм:

а) $A=\{x \mid x \text{ е буква од зборот ТЕХНИКА}\}$;

б) $B=\{x \mid x \in \mathbb{N} \qquad\qquad x \neq 5\}$;

в) $C=\{x \mid x \in \mathbb{N} \qquad\qquad \text{ен} \wedge x<18\}$;

г) $D=\{x \mid x \in \mathbb{N} \qquad\qquad 30\}$.

2. Нека е дадено множеството $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Кои од следните тврдења се вистинити:

а) $2 \subset A$; б) $\{3\} \in A$; в) $\{4, 5, 6\} \in A$; г) $\{3, 5, 8\} \subset A$.

3. Одреди кои од дадените множествата се еднакви, а кои еквивалентни:

а) $A=\{x \mid x - \text{прост број} \wedge x<10\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$;

б) $C=\{x \mid x \in \mathbb{N} \qquad\qquad <7\}$, $D=\{2, 3, 4, 5, 6\}$;

4. Изберете го точното тврдење за x и y така што множествата $A=\{x, 3, 5, 7\}$ и $B=\{2, 5, y, 7\}$ да бидат еднакви:

а) $x=y$; б) $x=5,\ y=2$; в) $x=2,\ y=7$; г) $x=2,\ y=3$.

5. Запиши го партитивното множество за множеството:

а) $A=\{1, 2, 3\}$; б) $B=\{a, b, c, d\}$.

7. Дефинирање на операции со множества со помош на логички операции

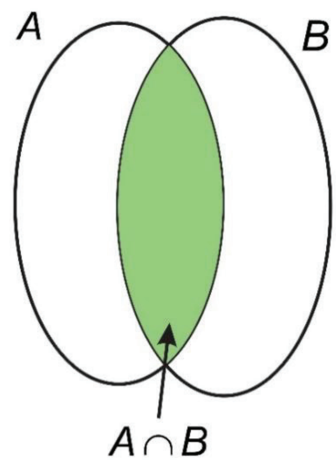
Негацијата ($\Leftrightarrow$), конјункцијата ($\wedge$), дисјункцијата ($\vee$), исклучната дисјункција ($\underline{\vee}$), импликацијата ($\Longrightarrow$) и еквиваленцијата ($\Longleftrightarrow$) се логички операции т.е. операции со искази.

Многу слично како кај исказите, така и кај множествата можат да се дефинираат операции. Во практиката најчесто се среќаваме со проблеми во кои треба истовремено да ги разгледуваме елементите кои им припаѓаат на две или повеќе множества, заеднички елементи на две или повеќе множества, му припаѓаат на едно, а не му припаѓаат на друго множество и слично.

Пресек на множества

- **Пресек на две множества** A и B е множество од сите заеднички елементи на множествата A и B и се означува со $A \cap B$.
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$
- Две множества A и B ги нарекуваме **дисјунктни**, ако нивниот пресек е празно множество, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Множеството $A \cap B$ зададено со Венов дијаграм е:



Да ги разгледаме следните примери:

Пример 1

Пресекот на множествата $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land 1 < x \leq 25\}$ е множеството $A \cap B = \{4, 9, 16, 25\}$.

Пример 2 Множествата $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x > 5\}$ се дисјунктни, бидејќи $A \cap B = \varnothing$.

1 Запиши го пресекот на множествата $A = \{0,1,2,9,10,12,15\}$ и $B = \{5,6,7,8,9,10\}$.

- Да ја разгледаме вистинитосната таблица на конјункцијата и таблицата за припадност на елементите во пресекот:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

A	B	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

- Што можеш да заклучиш?

➢ Од горе искажаното, јасно е дека пресекот на две множества A и B е множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

2 Нека се дадени множествата $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ и $B = \{i, c, d, k\}$. Запиши го пресекот $A \cap B$.

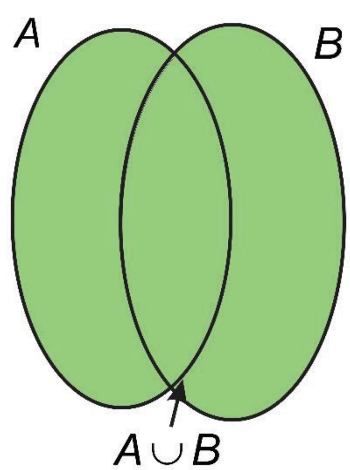
Унија на множества

!

❖ **Унија на две множества** A и B е множество од сите елементи, кои припаѓаат на барем едно од множествата A и B, се означува со $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Множеството $A \cup B$ зададено со Венов дијаграм е:



Пример 3 Унијата на множествата $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $B=\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x<9\}$ е множеството $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12\}$.

- Да ја разгледаме вистинитосната таблица на дисјункцијата и таблицата за припадност на елементите во унијата:

p	q	$p \vee q$	A	B	$A \cup B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\in$	$\in$	$\in$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

- Што може да се заклучи?

3 Нека се дадени множествата $A=\{*, \Delta, 0, 1, \square\}$ и $B=\{\top, \perp, *, \Delta\}$. Запиши ја унијата $A \cup B$.

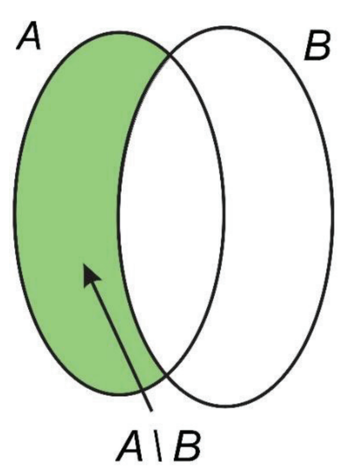
Разлика на множества

!

- **Разлика** на множество A со множество B е множество од сите елементи што припаѓаат на множеството A, а не припаѓаат на множеството B. Се означува со $A \setminus B$.

$$A \setminus B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Множеството $A \setminus B$ зададено со Венов дијаграм е:



Пример 4 Разликите $A \setminus B$ и $B \setminus A$ на множествата $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 8\}$ и $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11\}$ се множествата $A \setminus B = \{4, 6, 8\}$ и $B \setminus A = \{9, 10, 11\}$, соодветно.

4 Одреди ја разликата на множеството $A = \{0,1,2,9,10,12,15\}$ со множеството $B = \{7,8,9,10,11,12\}$.

5 Напиши ја разликата на множеството $A = \{0,1,2,9,10\}$ со множеството $B = \{7,8,9,10\}$.

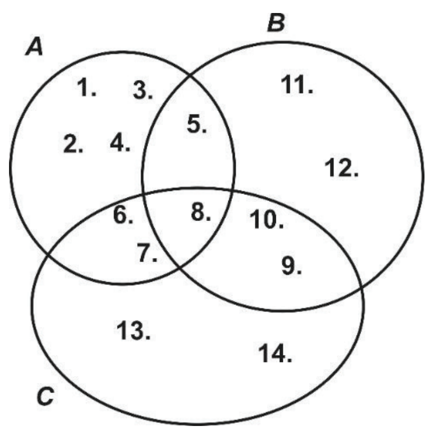
- Да ја разгледаме вистинитосната таблица на исказните формули и таблицата за припадност на елементите во разликата на две множества:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	A	B	$A \setminus B$	$B \setminus A$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

- Што може да се заклучи?

- Од гореискажаното јасно е зошто разликата на множеството A со множеството B е множество дефинирано со $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

6 Од дадениот дијаграм да се определат множествата: $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \setminus (B \cup C)$.



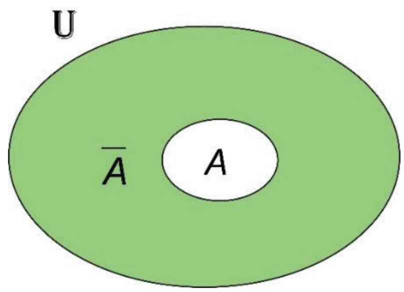
Комплемент на множество

!

❖ Комплемент на множеството A во множеството $\mathbb{U}$ ($A \subset \mathbb{U}$) е множеството од сите елементи што припаѓаат на множеството $\mathbb{U}$, а не припаѓаат на множеството A и се означува со $\overline{A_U}$.

$\mathbb{U}$ се нарекува универзално множество.

Множеството $\overline{A_U}$ зададено со Венов дијаграм е:



Пример 5 Комплементот на множеството $A = \{2, 4, 7, 9\}$ во множеството $U = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ е множеството $\overline{A_U} = \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$.

- Да ја разгледаме вистинитосната таблица на негацијата и таблицата за припадност на елементите во комплементот на едно множество:

p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤

A	$\overline{A}_U$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

- Што може да се заклучи?

- Од горе искажаното комплементот на множеството A во множеството $\mathbb{U}$ е множество дефинирано со $\overline{A_U} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$.

7 Нека се дадени множествата $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10\}$, $U = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 100\}$ и $B = \{10,\ 20,\ 30,\ \ldots, 100\}$. Запиши ги множествата $\overline{A_U}$, $\overline{A_B}$ и $\overline{B_U}$.

Декартов производ на множества

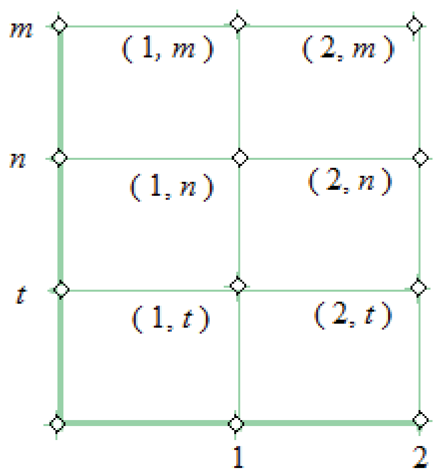
❖ **Декартов производ на две множества** A и B е множество од сите подредени парови во кои првиот елемент припаѓа на множеството A, а вториот елемент на множеството B. Се означува со $A \times B$.
Значи, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Слично, Декартов квадрат на множеството A, кое се означува со $A^2 = A \times A$ е Декартовиот производ на непразното множество A со самото себе, т.е. $A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$.

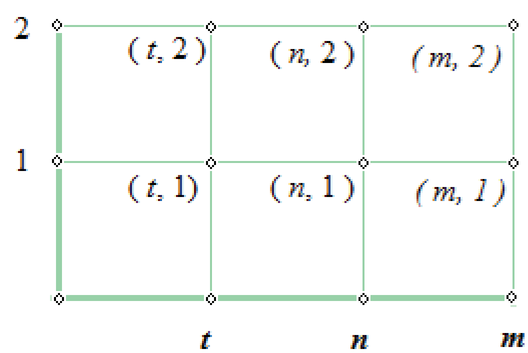
Пример 6 Декартовите производи $A \times B$ и $B \times A$ на множествата $A = \{1, 2\}$ и $B = \{t, n, m\}$ се:

$A \times B = \{(1,t),(1,n),(1,m),(2,t),(2,n),(2,m)\}$ и $B \times A = \{(t,1),(t,2),(n,1),(n,2),(m,1),(m,2)\}$

Илустрирани со координативна шема се:



$A \times B$



$B \times A$

7 Запиши го Декартовиот производ $A \times B$ на множествата $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{2, 3\}$.

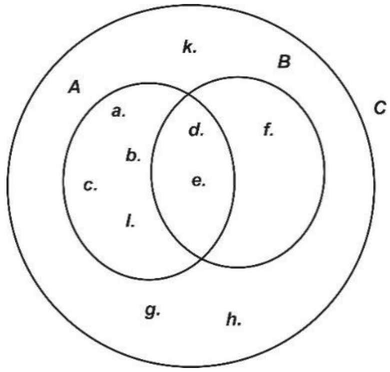
8 Пресметај го Декартовиот квадрат $A^2 = A \times A$ за множеството $A = \{x \mid x \mid 10\}$.

Задачи за самостојна работа:

1. Дадени се множествата $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x < 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ и $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 16\}$. Одреди ги множествата:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $(A \setminus B) \cup C$; г) $A \cap (B \setminus C)$.

2. Од дадениот Венов дијаграм да се определат множествата: A, B, C и $A \cap B$.



3. Дадени се множествата $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ и $C=\{1, 5, 7\}$. Докажи ја точноста на равенството: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. Ако $A=\{a, 2, 3\}$, $B=\{1, b\}$, одреди ги Декартовите производи:

а) $A \times B$ б) $B \times A$.

5. Дадени се множествата $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -4 \le x < 0\}$ и $B=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 - 9 = 0\}$.

Определи ги множествата:

а) $A \cap B$ б) $A \setminus B$ в) $P(A \setminus B)$ г) $B \setminus A$.

6. Определи кои од следните парови множества се дисјунктни:

а) $A=\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \le 7\}$, $B=\{x \mid, x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x < 5\}$;

б) $C=\{x \mid x - \text{парен} \wedge x < 12\}$, $D=\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x - 5 = 0\}$.

7. Дадени се универзалното множество $U=\{*, \Delta, 2, -5, \pi, a\}$ и подмножествата $A=\{a, 2, \pi\}$, $B=\{-5, \Delta, *, \pi\}$ и $C=\{*, -5\}$. Определи ги множествата:

а) $\overline{A}$ б) $\overline{C}$ в) $\overline{C} \cup \overline{B}$ г) $\overline{(A \setminus B)}$.

8. Определи за која вредност на променливите x и y важат равенствата:

а) $(x, 5) = (3, y)$ б) $(2, y) = \left(x, \frac{1}{2}\right)$.

9. Одреди ги множествата A и B од кои е добиен Декартовиот производ $A \times B = \{(1, \square), (1, a), (b, \square), (b, a), (\pi, \square), (\pi, a)\}$.

10. Запиши еднакви множества на множествата:

а) $\varnothing \setminus A$ б) $A \cup (A \cap B)$.

8. Закони за операции со множества

Од првиот дел на ова глава запознаени сме со неколку логички закони или закони на мислењето, и тоа: комутативен закон за конјункцијата и дисјункцијата, асоцијативен закон за конјункцијата и дисјункцијата, итн.

Од претходно искажаното видовме дека операциите со множества се тесно поврзани со логичките операции.

Исто како во математичката логика, така и во теоријата на множества постојат закони за операции со множества.

Станува збор за истите логички закони кои се применети во теоријата на множества на следниот начин:

Исказ → множество

Конјункција на искази →пресек на множества

Дисјункција на искази →унија на множества

Негација на исказ →комплемент на множество.

Некои поважни закони за операции со множества се:

1. Комутативен закон за пресекот $A \cap B = B \cap A$;
2. Комутативен закон за унијата $A \cup B = B \cup A$;
3. Асоцијативен закон за пресекот $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
4. Асоцијативен закон за унијата $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5. Дистрибутивен закон на пресекот во однос на унијата $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6. Дистрибутивен закон на унијата во однос на пресекот $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7. Закон за двоен комплемент $(A^C)^C = A$;
8. $A \cup A^C = U$;
9. $A \cap A^C = \varnothing$;
10. $A \cup \varnothing = A$;
11. $A \cap U = A$;
12. Де Морганови закони:
    а) Закон за комплемент на пресекот $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$;

    б) Закон за комплемент на унијата $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;
13. Дистрибутивен закон за Декартовиот производ во однос на пресекот

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

14. Дистрибутивен закон за Декартовиот производ во однос на унијата

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

15. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$;
16. $(A\times B)\cup(C\times D)\subseteq(A\cup C)\times(B\cup D)$.

Пример 1 Да го докажеме комутативниот закон за пресекот: $A\cap B=B\cap A$.

I – начин:

Со примена на исказните формули и логичкиот закон за комутативност на конјункцијата имаме:

$$x\in A\cap B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in B \wedge x\in A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in B\cap A.$$

Следува дека $A\cap B=B\cap A$.

II– начин:

Со примена на таблицата за припадност на елементот во множеството имаме:

A	B	$A\cap B$	$B\cap A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Од табелата се гледа дека последните две колони се исти, со што се докажува еднаквоста на множествата, т.е. комутативниот закон за пресекот $A\cap B=B\cap A$.

Пример 2 Да го докажеме дистрибутивниот закон за Декартовиот производ во однос на унијата $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

Нека

$$(x,y)\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B\vee y\in C)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C\Leftrightarrow(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C).$$

1 Докажи го својството 5.

Задачи за самостојна работа

1. Да се докажат својствата 4, 6, 12 а) и 16.
2. Дали е точно равенството $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$?

9. Исказни функции, множества решенија

Досега се запознавме со исказните формули, тавтологиите и логичките закони.

Размисли и одговори!

- Што е исказна формула?
- Која исказна формула ја викаме тавтологија?
- Како поинаку ги викаме тавтологиите?

Пример 1 Знаеме дека реченицата "$2+x=10$" не е исказ, но реченицата "$2+x=10$ за $x=5$" е невистинит исказ. Реченицата "$2+x=10$ за $x=8$" е вистинит исказ.

Првата реченица "$2+x=10$" е реченица со променлива која за секој реален број станува исказ. Ваквите реченици имаат посебно значење во математичката логика и нив ги нарекуваме **исказни формули или предикати.** Бидејќи исказните функции се функции, значи тие имаат дефинициона област на која се дефинирани. Видовме од примерот дека во реченица "$2+x=10$" ако додадеме "за $x=5$" поминува во невистинит исказ, а со додавање на "за $x=8$" поминува во вистинит исказ. Значи исказната функција за некои броеви од своето дефиниционо множество поминува во **вистинит**, а за некои во **невистинит исказ**.

Може да се заклучи следново:

!

- Ако реченицата со променлива станува исказ за секоја вредност на променливата од некое дадено множество M , тогаш за таа реченица велиме дека е **исказна функција** или **предикат.**
- За множеството M велиме дека е дефинициона област на исказната функција, а елементите од тоа множество **допуштени вредности на променливата.**
- Ако $M_1 \subseteq M$ ги содржи точно елементите од M за кои исказната функција е вистинит исказ, тогаш за M_1 велиме е **множество на решенија на исказната функција**. Секој елемент од M_1 се вика **решение на исказната функција.**

Пример 2 Исказна функција е реченицата $x^2 = 4$. Решение на исказната функција $x^2 = 4$ над $M = \mathbb{Z}$ е $M_1 = \{-2, 2\}$.

1 Кои од следните реченици се исказни функции:

а) $x+2=6, x\in\mathbb{N}$ б) $x+2<6, x\in\mathbb{Z}$ в) $x+2=y, x=5$.

2 Одреди го множеството решенија на исказната функција $5\,|\,x$ дефинирана на множеството $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Пример 3 Во множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$ е дефинирана исказната функција $P(x): x^2 = 4$. Вистинитосната вредност на исказот $P(2)$ е $\tau(P(2)) = T$, а на $\neg P(-3)$ е $\tau(\neg P(-3)) = T$. Обиди се сам да определиш $\tau(P(3)),\ \tau(P(-2)),\ \tau(\neg P(1))$.

3 Нека се дадени исказните функции $P(x): x<11$ и $Q(x): 3\,|\,x$ дефинирани во множеството на природни броеви $\mathbb{N}$. Утврди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $\neg P(2) \vee Q(8) \Rightarrow P(2)$; б) $\neg(P(9) \wedge \neg Q(3))$; в) $\neg Q(10) \Leftrightarrow P(7)$.

!

- Со користење на зборовите “секој” (или “сите” или “кој било”) или “постои” (или “некој”), исказната функција поминува во исказ, вистинит или невистинит.

- Зборот “секој” во математиката се означува со симболот $\forall$ и се вика **универзален квантор или универзален квантификатор.**
- Зборот “некој” во математиката се означува со симболот $\exists$ и се вика **егзистенцијален квантор или егзистенцијален квантификатор.**

Пример 4 Исказот “Постои цел број x за кој $x^2=16$”, може да го запишеме со симболи $(\exists x\in\mathbb{Z})\,x^2=16$. Овој исказ е вистинит бидејќи постојат цели броеви $x=4$ и $x=-4$ за кои е точно $4^2=16$ и $(-4)^2=16$.

4 Следните искази запиши ги со симболи:

а) За секој природен број n точно е $n+1>n$;

б) Постои рационален број y за кој е точно $y^2=8$.

Потоа, определи ја нивната вистинитосна вредност.

5 Следните искази запишани со симболи, запиши ги со реченици:

а) $(\exists x\in\mathbb{R})\,x^2=x\cdot x$;

б) $(\forall x\in\mathbb{Q})\,3x=x+x+x$.

Потоа, определи ја нивната вистинитосна вредност.

- Да напоменеме дека како квантификатор се користи и симболот $\exists!$, кој ги заменува зборовите “постои единствен”.

Пример 5 Исказот $(\exists! x\in\mathbb{Z})\,x^2=16$ означува “Постои единствен цел број x за кој е точно $x^2=16$”, што значи дека постои само еден цел број x за кој е точно равенството $x^2=16$. Ова се разликува од исказот “Постои цел број x за кој $x^2=16$” од пример 3 запишан со симболи $(\exists x\in\mathbb{Z})\,x^2=16$, каде не мора да биде само еден цел број, туку можат да бидат и два. И додека исказот во пример 3 е вистинит исказ, исказот $(\exists! x\in\mathbb{Z})\,x^2=16$ е невистинит исказ.

Задачи за самостојна работа:

1. Кои од следните реченици се исказни функции:
   а) $x+2>6, x\in\mathbb{Z}$; б) $x-2<6, \forall x\in\mathbb{Z}$; в) $2x=y, x=5, y=-1$.
2. Одреди го множеството решенија на исказната функција “x е парен број” дефиниран во множеството $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$.
3. Нека се дадени исказните функции $P(x,y): x+y\le 12$ и $Q(x,y): x-y=3$ дефинирани во множеството на природни броеви $\mathbb{N}$. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:
   а) $\neg P(2,1)\vee Q(8,5)\Rightarrow P(2,2)$; б) $\neg(P(9,1)\wedge\neg Q(2,3))$; в) $\neg Q(1,10)\Leftrightarrow P(3,7)$.
4. Определи ја вистинитосната вредност на следните искази:
   а) $(\exists x\in\mathbb{Q})\,2x=x\cdot x$; б) $(\forall x\in\mathbb{N})\,3x=x^3$; в) $(\exists! x\in\mathbb{Z})\,x-1=-5$.

5. Дајте три примери на исказни функции. На секој од нив определи го нивното множество решенија.
6. Дајте три реченици кои се искази со примена на кванторите $\exists!$, $\exists$ и $\forall$. Потоа определете им ја вистинитосната вредност.

10. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Определи кои од следните реченици се искази:

а) Излези надвор! б) $2>3$; в) Крушата е највкусно овошје.

2. Определи ја вистинитосната вредност за исказот во следната табела (користејќи ознаките Т и $\perp$):

x	-2	-1	0	1	2
$\tau(-2x+5=3)$					

3. Нека се дадени исказите $p: 2\cdot 2\neq 5$, $q: \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ и $r: 3<-2$. Да се формираат исказите:

а) $\neg p\wedge q$; б) $p\Rightarrow q$; в) $q\Leftrightarrow \neg r$.

4. Да се определи вистинитосната вредност за исказната формула $\neg p\Leftrightarrow (r\wedge q)\Rightarrow (p\vee\neg r)$ за $\tau(p)=\perp$, $\tau(q)=\text{T}$ и $\tau(r)=\text{T}$.
5. Со помош на вистинитосната таблица да се докаже дека следната формула е тавтологија: $p\Leftrightarrow q\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$.
6. Дадени се множествата: $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \quad \leq 3\}$ и $C=\{x \mid x\in\mathbb{N} \quad 9\}$. Да се определат множествата:

а) $(A\setminus C)\cap B$; б) $P(A\setminus B)$; в) $(A\cap B)\setminus(A\cup B)$.

7. Да се определи множеството A од Декартовиот производ $(B\cup C)\times A=\{(*,3), (2,1), (\Delta,5), (*,1), (2,3), (\Delta,3), (*,5), (2,5), (\Delta,1)\}$.
8. Дадени се универзалното множество $U=\{-2, 0, 3, \theta, b, \Delta\}$ и подмножествата $A=\{-2, \theta, b\}$ и $B=\{0, \Delta, b, 3\}$. Да се определи множеството $\overline{(B\setminus A)}$.
9. Ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, да се определи множеството: $(A\cap B)\cup C$.
10. Да се докаже законот за комплемент на унијата:

2 РЕАЛНИ БРОЕВИ

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да ги користи операциите со природни броеви;
- да дефинира прост и сложен број, да разложува природен број на прости множители и да определува НЗС и НЗД на природни броеви;
- да ги користи операциите во множеството на цели броеви;
- да дефинира и решава задачи со апсолутна вредност;
- да дефинира и споредува рационални броеви;
- да проширува и скратува дропки;
- да извршува операции со дропки;
- да запишува децимален број во дропка и обратно;
- да дефинира ирационален број и апсолутна вредност од реален број;
- да претставува реални броеви на бројна оска;
- да дефинира и претставува геометриски и описно интервали;
- да сведува корен во нормален вид;
- да решава практични задачи.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 2

1. Множество на природни броеви: операции и својства на операциите

Природните броеви настанале поради потребата од броење. Со нив го претставуваме резултатот од броењето на елементите во едно конечно множество.

За природните броеви точно е следново:

- Природните броеви ги запишуваме со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0;
- Природниот број петстотини дваесет и седум запишан со цифри го има обликот 527;
- Природниот број сто и седум запишан со цифри го има обликот 107;
- Природниот број седумстотини и дваесет го има обликот 720.

○ Запиши ги со цифри природните броеви двесте седумдесет и пет, илјада педесет и еден, две илјади седумстотини и осум!

- Природни броеви се: 1, 2, 3, 4, 5, ... ;
- Множеството на природни броеви го означуваме со буквата $\mathbb{N}$ т.е. тоа е множеството од облик $\mathbb{N}$ $,\ldots,n,n+1,\ldots\}$.

1.1. Воведување на природните броеви

Во низата на природни броеви може да ги воочиме следниве законитости:

- Најмалиот природен број е 1;
- Следбеник на природниот број 7 е бројот 8, а на природниот број 523 е природниот број 524;

Размисли и одговори:

○ Кој природен број е следбеник на природниот број 78, а кој на природниот број 1230?
○ Дали секој природен број има следбеник?
○ Дали множеството на природни броеви е конечно множество?

- Претходник на природниот број 25 е природниот број 24, а на природниот број 2054 е природниот број 2053;

Размисли и одговори:

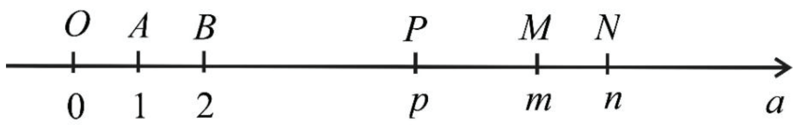
○ Кој природен број е претходник на природниот број 125, а кој на природниот број 2050?
○ Кој природен број е претходник на природниот број 1? Дали секој природен број има свој претходник?

○ Дали е точен исказот „0 е природен број“?

- Бројот 0 не е природен број т.е. $0 \notin \mathbb{N}$;

- Ако на множеството на природни броеви го додадеме бројот 0 тогаш го добиваме **проширеното множество на природни броеви**, кое го означуваме со $\mathbb{N}_0$ т.е. множеството има облик $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1, ...\}$.

Природните броеви можеме да ги претставиме и геометриски со бројна оска a (како на цртежот), која е насочена права, на која е зададена една фиксна точката O како почеток и избрана една единечна отсечка $\overline{OA}$ како единечна должина 1.



Од бројната права a се воочува дека на точката O е придружен бројот 0, на точката A е придружен природниот број 1, на точката B е придружен природниот број 2, на точката N е придружен природниот број n итн. Значи, на секој природен број може да се придружи по една точка од бројната оска a.

- Кои природни броеви се придружени на точките P и M?

Ако ја гледаме бројната оска a тогаш воочуваме дека природниот број 1 е полево од природниот број 2 т.е. $1 < 2$ (се чита: 1 е помал од 2). Но, природниот број 2 е подесно од природниот број 1 т.е. $2 > 1$ (се чита: 2 е поголем од 1). Бројот 0 се наоѓа полево од сите природни броеви, затоа бројот 0 е помал од сите природни броеви.

Следниве искази се точни:

- $1 \leq 2$ (се чита: 1 е помал или еднаков на 2);
- $2 \geq 1$ (се чита: 2 е поголем или еднаков на 1);
- $2 \geq 2$ (се чита: 2 е поголем или еднаков на 2);
- $2 \leq 2$ (се чита: 2 е помал или еднаков на 2);
- Но, не е точен исказот $2 < 2$. Не е точен ниту исказот $2 > 2$.

Според бројната оска a, природниот број m е полево од природниот број n тогаш запишуваме $m < n$. Кога ќе запишеме $m \leq n$ тогаш означуваме дека $m < n \vee m = n$.

1 Кои од следниве искази се точни:

а) $25 > 12$; б) $25 \geq 75$; в) $15 < 12 \wedge 15 > 3$; г) $5 \leq 2 \vee 5 > 3$.

Треба да го знаеш следното:

!

- Множеството на природни броеви е $\mathbb{N}=\{1,2,3,...,n,n+1,...\}$, додека пак проширеното множество на природни броеви е $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,4,...,n,n+1,...\}$.
- Во множеството на природни броеви, секој природен број има следбеник.
- Не постои најголем природен број во множеството на природни броеви.
- Множеството на природни броеви не е конечно множество, туку е бесконечно множество.
- Ако природниот број m е полево од природниот број n на бројната оска a тогаш запишуваме $m<n$.
- Исказот $m\leq n$ значи $m<n \vee m=n$.
- Природните броеви можеме да ги подредиме т.е. $1<2<3<...<n<...$.
- Бројот 0 не е природен број и тој е помал од сите природни броеви.

1.2. Операции и својства на операциите во множеството на природни броеви

Операции што ќе ги дефинираме во множеството на природни броеви се: собирање, множење, одземање и делење.

Собирање: На подреден пар на природни броеви (m,n) му се придружува природен број k како нивен збир т.е. $(m,n)\xrightarrow{+}k=m+n$ т.е. на секој подреден пар на природни броеви (m,n) му се придружува единствен природен број k како нивен збир. Природните броеви m и n се викаат собироци.

2 Пресметај: а) $256+782$; б) $(257+129)+526$; в) $456+(125+128)$.

Познато е дека, збирот на кои и да било природни броеви е повторно природен број т.е. $m,n\in\mathbb{N}, m+n\in\mathbb{N}$. Значи можеме да кажеме дека, операцијата собирање е внатрешна (целосна) операција во множеството на природни броеви т.е. множеството на природни броеви е затворено во однос на операцијата собирање.

Размисли и одговори:

- Дали се точни равенствата:

а) $122+523=523+122$ б) $(255+464)+789=255+(464+789)$?

За операцијата собирање во множеството на природни броеви за кои било природни броеви $m, n, k \in \mathbb{N}$ важат следниве својства:

- комутативно својство за собирање природни броеви $m+n=m+n$;
- асоцијативно својство за собирање природни броеви $(m+n)+k=m+(n+k)$.
- Како ќе ги искажеш со зборови, комутативното и асоцијативното својство на операцијата собирање на природни броеви?
- Дали собирањето на природни броеви се дефинира на ист начин и во проширеното множество на природни броеви $\mathbb{N}_0$? Дали се точни комутативното и асоцијативното својство на собирањето во $\mathbb{N}_0$?

Секако точно е и својството:

- За секој природен број $m \in \mathbb{N}_0$ точно е $m+0=m=0+m$.

Множење*:* На подреден пар природни броеви (m,n) му се придружува природен број k како нивен производ т.е. $(m,n) \xrightarrow{\cdot} k=m \cdot n$ т.е. на секој подреден пар на природни броеви (m,n) му се придружува единствен природен број k како нивен производ. Природните броеви m и n се викаат множители.

Размисли и одговори:

- Како можеме пократко да го запишеме производот 2+2+2?
- А како ќе го запишеш 5+5+5+5 и 6+6?

3 Пресметај: а) 25·82   б) (57·29)·5   в) 16·(5·28).

Познато е дека, производот на кои и да било природни броеви е повторно природен број т.е. $m, n \in \mathbb{N}, m \cdot n \in \mathbb{N}$. Значи можеме да кажеме дека, операцијата множење е внатрешна (целосна) операција во множеството на природни броеви т.е. множеството на природни броеви е затворено во однос на операцијата множење.

Размисли и одговори:

- Дали се точни равенствата: а) 2·3=3·2   б)(5·4)·8=5·(4·8)?

За операцијата множење во множеството на природни броеви за кои било природни броеви $m, n, k \in \mathbb{N}$ важат следниве својства:

- комутативно својство за множење на природни броеви $m \cdot n = n \cdot m$,
- асоцијативно својство за множење на природни броеви $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$.

Размисли и одговори:

- Да се искажат со зборови комутативното и асоцијативното својство на операцијата множење природни броеви.
- Дали се точни равенствата:
  а) 2·(35+21)=2·35+2·21 б)(15+24)·8=15·8+28·8?
- Дали множењето на природни броеви се дефинира на ист начин и во проширеното множество на природни броеви $\mathbb{N}_0$? Дали се точни комутативното и асоцијативното својство на операцијата множење во $\mathbb{N}_0$?

Секако точно е и својството:

- За секој природен број $m \in \mathbb{N}_0$ точно е $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ и $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$.

Врската помеѓу собирањето и множењето е дадена со **дистрибутивното својство**:

- За кои било природни броеви $m, n, k \in \mathbb{N}$ точно е:

$$(m+n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k,$$
$$k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n$$
(множењето е дистрибутивно во однос на собирањето)

Асоцијативните закони за собирање и за множење ни даваат можност збирот односно производот на три природни броеви да го пресметаме без да употребуваме загради т.е. за кои било природни броеви $m, n, k \in \mathbb{N}$ точно е $(m+n)+k = m+(n+k) = m+n+k$ и $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k$.

4 Пресметај:

а) $25 + 56 \cdot 123$; б) $12 \cdot (21 + 72)$; в) $35 + 21 + 55 + 69$; г) $25 \cdot 82 \cdot 4 \cdot 5$.

Размисли и одговори:

- Дали множењето е дистрибутивно во однос на собирањето во $\mathbb{N}_0$?

5 Со примена на дистрибутивното својство докажи дека е точно равенството $(m+n) \cdot (k+p) = m \cdot k + m \cdot p + n \cdot k + n \cdot p$.

(Упатство: За докажување на равенството можеш да ја искористиш смената $a = m + n$. Дали може да ја искористиш и смената $b = k + p$?)

Одземање: Пред да ја воведеме операцијата одземање, да се потсетиме на некои претходно изучени законитости:

- Непознатата x во равенките $x + 25 = 125$ и $125 + x = 527$ се определува со одземање на познатиот собирок од збирот. Значи, за да ги решиме овие равенки треба да се воведе операцијата одземање во множеството на природни броеви;
- Разликата $25 - 15$ е природен број, но разликата $25 - 55$ не е природен број.

Од ова можеме да кажеме дека за два природни броја $m, n \in \mathbb{N}$, дефинираме **разлика** $k = m - n$ ако може да се определи трет природен број k за кој е точно $m = n + k$. Природниот број m се вика **намаленик**, а природниот број n се вика **намалител**.

Размисли и одговори:

- Дали разликата на кои било природни броеви е природен број?

За два природни броја $m, n \in \mathbb{N}$, разликата $k = m - n \in \mathbb{N}$ е природен број ако $m > n$. Ова ни покажува дека операцијата одземање во множеството на природни броеви не е внатрешна (целосна) операција туку е делумна операција во множеството на природни броеви.

6 Пресметај: а) $(956 - 782) \cdot 2$; б) $956 \cdot 2 - 782 \cdot 2$; в) $2 \cdot (156 - 82)$; г) $2 \cdot 156 - 2 \cdot 8$.

Што можеш да заклучиш?

За операцијата одземање во множеството на природни броеви е точно **дистрибутивното својство на множењето во однос на одземањето***:*

❖ За кои било природни броеви $m, n, k \in \mathbb{N}$ и $m > n$ точно е:

$$(m - n) \cdot k = m \cdot k - n \cdot k,$$
$$k \cdot (m - n) = k \cdot m - k \cdot n$$

(множењето е дистрибутивно во однос на одземањето).

Размисли и одговори:

- Дали одземањето на природни броеви се дефинира на ист начин и во проширеното множество на природни броеви $\mathbb{N}_0$? За $m, n \in \mathbb{N}_0$, кој ќе биде условот, за да биде точно $m - n \in \mathbb{N}_0$? Дали множењето е дистрибутивно во однос на одземањето во $\mathbb{N}_0$?

Операцијата множење е поврзана со операцијата **степенување**. Производот на $n \in \mathbb{N}$ еднакви множители $m \in \mathbb{N}$ се вика n - ти степен на бројот m и се обележува со $m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{n}$, каде што n се нарекува **експонент или степенов показател**, а m **се нарекува основа на степенот**. За степените точни се следниве својства:

- ❖ За природни броеви $m, n \in \mathbb{N}$, степенот $m^n > 0$.
- ❖ За природни броеви $m, n, p \in \mathbb{N}$, точно е $m^n \cdot m^p = m^{n+p}, (m^n)^p = m^{n \cdot p}, (m \cdot n)^p = m^p \cdot n^p$.

Делење: Пред да ја воведеме операцијата делење, да се потсетиме на некои претходно изучени законитости:

- Непознатата x во равенките $x \cdot 25 = 100$ и $20 \cdot x = 80$ се определува со делење на производот со познатиот множител. Значи за да ги решиме овие равенки треба да се воведе операцијата делење во множеството на природни броеви;
- Количникот 8:2 е природен број, но количникот 8:17 не е природен број.

Од ова можеме да кажеме дека за два природни броја $m, n \in \mathbb{N}$, дефинираме **количник** $k = m : n$ доколку најдеме природен број k, така што $m = n \cdot k$. Природниот број m се вика **деленик**, а природниот број n се вика **делител**.

Ова ни покажува дека операцијата делење во множеството на природни броеви не е внатрешна (целосна) операција туку е делумна операција во множеството на природни броеви.

7 Пресметај: а) $(956 - 782) : 2$; б) $956 : 2 - 782 : 2$; в) $(156 + 82) : 2$; г) $156 : 2 + 82 : 2$.

Што може да се заклучи?

За операцијата делење во множеството на природни броеви е точно дистрибутивното својство во однос на собирањето и множењето:

- ❖ За кои било $m, n, k \in \mathbb{N}$, за $m : k, n : k \in \mathbb{N}$ и $m > n$ точно е:
  $(m+n) : k = m : k + n : k$,
  $(m-n) : k = m : k - n : k$
  (делењето е дистрибутивно во однос на собирањето и одземањето).

- ○ Дали $8 : 3$ е природен број?

Очигледно дека количникот даден во претходната задача не е природен број, но тоа не значи дека не можеме да го спроведеме делењето. Ова делење се вика **делење со остаток**. При делењето на 8 со 3 се добива количник 2 и остаток 2 т.е. точно е $8 = 3 \cdot 2 + 2$.

Ова значи дека:

- За кои било природни броеви m и n постојат единствени $k,r\in\mathbb{N}_0$ при што $m=n\cdot k+r, 0\le r<n$. Бројот *k* се нарекува **количник,** а бројот *r* се нарекува **остаток при делењето** на m со n.

8 Одреди го најголемиот природен број кој при делењето со 28 дава количник 17.

(Упатство: Броеви кои при делењето со 28 даваат количник 17 можат да се запишат во облик $m=28\cdot 17+r$ каде $0\le r<28$. За бројот да биде најголем, каков треба да биде остатокот? Размисли!)

Секако, точни се својствата:

- За секој природен број $m\in\mathbb{N}$ точно е $0:m=0$, бидејќи $0=m\cdot 0$.
- Невозможно е делење на природен број со 0, затоа делење со бројот 0 не се дефинира.

!

- Операциите собирање и множење се внатрешни (целосни) операции во множеството на природни броеви т.е. множеството на природни броеви е затворено во однос на операцијата собирање и множење.
- Операциите одземање и делење на природни броеви се делумни операции во множеството на природни броеви.

Во некои задачи при пресметување се среќаваат сите операции. Затоа се поставува прашањето:

- По кој редослед ќе бидат извршени операциите за да се дојде до точен резултат?

За редоследот на извршување на операциите собирање, одземање, множење и делење во една задача, треба да се внимава на следното правило:

!

- Доколку во задачата нема загради предност на извршување имаат операциите множење и делење, пред операциите собирање и одземање. Доколку има загради, прво се извршуваат операциите во заградите.

9 Пресметај: а) $(3\cdot 81-23)\cdot 5-7\cdot(51\cdot 5-12\cdot 13)$; б) $25\cdot(3\cdot 15-99:33)-2\cdot(250:50+5\cdot 12\cdot 7)$.

1.3. Решавање на проблеми

Овде ќе поминеме на решавање на неколку проблемски задачи:

Пример 1 Еден камион растоварал чоколади во три маркети во исти ден, при што 1 кутија со чоколади сникерс содржи 20 броја, 1 кутија со чоколади Милка содржи 15 броја и 1 кутија чоколади Марс содржи 25 броја. Во првиот маркет растоварил 5 кутии чоколади сникерс, 2 кутии чоколади Милка и 1 кутија чоколади Марс. Во вториот маркет растоварил 4 кутии чоколади сникерс, 6 кутии чоколади Милка и 7 кутија чоколади Марс. Во третиот маркет растоварил 8 кутии чоколади сникерс, 5 кутии чоколади Милка и 2 кутија чоколади Марс. Колку кутии чоколади растоварил камионот во тој ден во секој маркет одделно? Каде растоварил најмногу чоколадо? Колку вкупно пари зел, истиот ден, доколку чоколадото сникерс го дал по 10 денари, чоколадото Милка по 30 денари, а чоколадо Марс по 8 денари?

Во првиот маркет се растоварени: $5 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 25 = 155$ чоколади.

Во вториот маркет: $4 \cdot 20 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 25 = 345$ чоколади.

Во третиот маркет: $8 \cdot 20 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 25 = 285$ чоколади. Значи во вториот маркет се растоварени најмногу чоколади.

Вкупно заработил: $155 \cdot 10 + 345 \cdot 30 + 285 \cdot 8 = 14180$ денари.

Пример 2 Во една аптека, сопственикот го интересирало колку профит ќе добие со продавање на најчесто продаваните таблети наменети за лечење на главоболки т.н. аналгетици: аналгин, кафетин и налгесин с. Затоа, фармацевтката требало да ги изброи кутиите што ги имало во аптеката во тој момент. Секоја кутија броела по 10 поединечни броја. Таа изброила: 20 кутии аналгин, 15 кутии кафетин и 25 кутии налгесин с. Колкав ќе биде профитот на аптеката, ако се продадат сите кутии со аналгетици, при што поединечна кутија аналгин има набавна цена од 10 денари, а се продава по 15 денари, поединечна кутија кафетин има набавна цена од 15 денари, а се продава по 25 денари и поединечна кутија налгесин с има набавна цена од 8 денари, а се продава по 15 денари? Од кој аналгетик аптеката би имала најголем профит, под услов да се продадат сите кутии со таблети?

Профит за продажба на:

- сите кутии на аналгин, $20 \cdot 10 \cdot (15 - 10) = 1000$ денари,
- кафетин $15 \cdot 10 \cdot (25 - 15) = 1500$ денари и
- налгесин с $25 \cdot 10 \cdot (15 - 8) = 1750$.

Најголем профит ќе има од продадениот налгесин с, а вкупно ќе заработи $1000 + 1500 + 1750 = 4250$ денари.

Пример 3 Таткото на неговите три деца подеднакво им поделил месечен џепарлак од 15 000 денари. По колку пари добило секое од децата?

Секое од децата добило по $15\ 000:3=5000$ денари месечен џепарлак.

Задачи за самостојна работа:

1. Кој од следниве искази е точен?
   а) $\neg(27\neq 30)$; б) $\neg(27\leq 30\Rightarrow 24>14)$; в) $27\leq 30\Leftrightarrow 24>14$.
2. Запиши ги табеларно следниве множества:
   а) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge x\leq 5\}$; б) $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\wedge 7<x\leq 15\}$; в) $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}_0\wedge x<3\}$.
3. Запиши ги пократко следните збирови:
   а) 3+3+3+3+3+3; б) 9+9+9+9; в) 10+10.
4. Следните производи престави ги како степени, а потоа пресметај ги:
   а) 2·2·2·2·2; б) 45·45; в) 12·12·12.
5. Пресметај на наједноставен начин:
   а) $156+28+344+372+100$; б) $342+75+92+258+8$;
   в) $25\cdot 9\cdot 125\cdot 4\cdot 8$; г) $500\cdot 7\cdot 250\cdot 2\cdot 4$.
6. Пресметај:
   а) $25+31\cdot 27-15$; б) $(31-15)\cdot 7+27\cdot 15$; в) $(31-15):16+125:5$;
   г) $5\cdot 889-\left(25:5+7\cdot\left(51\cdot 5-12\right)\cdot 2\right)$; д) $\left(25\cdot\left(15+69:3\right)-2\right)+\left(250-17\cdot 8\right)$.
7. Одреди го најголемиот природен број кој при делењето со 55 дава количник 21.
8. Докажи го равенството $(m+n+e)\cdot(k+p)=m\cdot k+m\cdot p+n\cdot k+n\cdot p+e\cdot k+e\cdot p$.
9. Татко му на Тони му дал 12 000 денари за купување книги за почетокот на учебната година. Тони отишол во книжарница и купил математика за 650 денари, македонски јазик за 880 денари, биологија за 500 денари, работни тетратки за секој од трите предмети по 250 денари, 5 тетратки за пишување по 120 денари и прибор по ликовна уметност за 620 денари. Колку денари потрошил Тони? Колку му останале?
10. Иван и Симона штеделе пари за себе. Кога собрале доволно отишле во продавницата за техника. Од таму купиле лаптоп за 21 000 денари, чанта за лаптоп за 2 000 денари и рутер за 5 000 денари. Им останале 2 000 денари. Колку пари имале заштедено Иван и Симона?
11. Еден градежник треба да купи одреден број на греди по цена од 408 денари за една греда. При пресметката колку пари треба да плати, тој бројот на гредите го помножил со 48 наместо со 408. Така направил грешка од 270 000. Одреди го точниот производ и бројот на гредите кој сакал да ги купи градежникот. Колку денари треба да плати за тие греди?

2. Деливост на природни броеви. Прости и сложени броеви. НЗД и НЗС

2.1. Деливост на природни броеви

Откако го воведовме множеството на природни броеви и дефинираме операции и својства на тие операции можеме да го кажеме следното:

- За кои било природни броеви m и n постојат единствени $k,r\in\mathbb{N}$ така што $m=n\cdot k+r, 0\le r<n$. Бројот k се нарекува количник, а бројот r се нарекува остаток при делењето на m со n.
- Доколку во претходното гоземеме остатокот $r=0$ тогаш го добиваме следното: за два природни броја $m,n\in\mathbb{N}$, количникот $k=m:n\in\mathbb{N}$ е природен број, ако $m=n\cdot k$.
- **Признак за деливост со бројот 2:** Еден природен број е делив со 2 доколку завршува на една од цифрите 0, 2, 4, 6, 8.
- **Признак за деливост со 5:** Еден природен број е делив со 5 доколку завршува на цифрата 0 или 5.
- **Признак за деливост со 3:** Еден природен број е делив со 3 доколку збирот на неговите цифри е делив со 3.
- **Признак за деливост со 9:** Еден природен број е делив со 9 доколку збирот на неговите цифри е делив со 9.

Пример 1 Пресметај го количникот на броевите:

а) 57 и 2; б) 30 и 5.

Сигурно се забележува дека при делењето на 57 со 2 се добива количник 28 и остаток 1 т.е. $57=28\cdot 2+1$. Но, доколку го поделиме 30 со 5 тогаш се добива количник 6 и остаток 0 т.е. $30=6\cdot 5$. При делењето на 30 со 5 можеме да кажеме дека делењето се одвива без остаток, но и дека „30 е делив со 5" или „30 се дели со 5" или „30 го содржи 5" или „30 е содржател на 5", но и „5 е делител на 30". Ова не може да се каже за делењето на 57 со 2.

Согласно примерот, нека се дадени два природни броја m и n. Ако нивниот количникот $k=m:n$ е природен број (остатокот $r=0$), тогаш можеме да запишеме $m=n\cdot k$. Во оваа ситуација ќе речеме дека $n\,|\,m$ (се чита: n е делител на m), но ова значи и " m е содржател на n".

Доколку се вратиме на примерот, тогаш можеме наместо „30 е содржател на 5" или „5 е делител на 30", да запишеме 5|30. Додека пак, за делењето на 57 со 2 се запишува $2\nmid 57$ (се чита: 2 не е делител на 57).

!

❖ За два природни броја $m, n \in \mathbb{N}$ е точно: $n \mid m \Leftrightarrow m = n \cdot k$ за некое $k \in \mathbb{N}$.

Деливоста на два природни броја ни овозможува да дефинираме парен и непарен број.

❖ Секој природен број m чиј делител е бројот 2 се вика **парен број**.
Затоа, најчесто парниот број се запишува во форма $m = 2 \cdot k$ за некое $k \in \mathbb{N}$.

❖ Секој природен број m што не се дели со бројот 2 се вика **непарен број**.
Затоа, најчесто непарниот број се запишува во форма $m = 2 \cdot k + 1$ за некое $k \in \mathbb{N}_0$.

1 Одреди ја вистинитоста на следниве искази:

а) $2 \mid 5$;   б) $5 \mid 65$;   в) $6 \mid 50 \wedge 8 \mid 70$;   г) $9 \mid 90 \Rightarrow 3 \mid 20$.

2 Определи го множеството на делители на природните броеви: а) 20; б) 11; в) 1.

2.2. Прости и сложени броеви

Од задача 2, забележуваме дека:

- Делители на природниот број 20 се 1, 2, 4, 5, 10, 20;
- Делители на природниот број 11 се 1 и 11;
- Природниот број 1 има само еден делител, а тоа е 1.

!

❖ Бројот, кој има точно два делители, 1 и самиот себе се вика **прост број**;

❖ Бројот што се дели со 1, со самиот себе и со уште барем еден број се вика **сложен број**. Поинаку кажано: Сложениот број има повеќе од два делитела;

❖ Бројот 1 не е ниту прост, ниту сложен број.

Во задача 2, бројот 20 е сложен број, а бројот 11 е прост број.

- Кои од следниве природни броеви се прости, а кои сложени броеви: 21, 99, 17, 51, 321?

Старогрчкиот математичар Ератостен (276 п.н.е – 194 п.н.е.) ја смислил постапката за издвојување на простите броеви од останатите природни броеви позната како Ератостеново сито. Ние ќе го дадеме Ератостеновото сито за првите 50 природни броеви:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Постапката е следна:

1. Бројот 2 е прост број и останува со црна боја. Секој втор природен број почнувајќи од бројот 2 е парен број т.е. тие се сложени броеви и кај нив се менува бојата во црвена боја;
2. Бројот 3 е прост број и останува со црна боја. Секој трети природен број почнувајќи од бројот 3 е делив со 3 т.е. тие броеви се сложени броеви и кај нив се менува бојата во црвена боја;
3. Бројот 5 е прост број и останува со црна боја. Секој петти природен број почнувајќи од бројот 5 е делив со 5 т.е. тие броеви се сложени броеви и кај нив се менува бојата во црвена боја;
4. Бројот 7 е прост број и останува со црна боја. Секој седми природен број почнувајќи од бројот 7 е делив со 7 т.е. тие броеви се сложени броеви и кај нив се менува бојата во црвена боја;
5. Бројот 11 е прост број и останува со црна боја. Секој единаесетти природен број почнувајќи од бројот 11 е делив со 11 т.е. тие броеви се сложени броеви и кај нив се менува бојата во црвена боја итн.
6. Со црна боја остануваат броевите 2, 3, 5, 7, 11 ,13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, кои се прости броеви.

Во задача 2. се забележува дека $20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ т.е. сложениот природен број 20 можеме да го претставиме како производ од прости множители.

Прашањето е дали ова претставување е еднозначно (единствено)? Одговорот е дека, тоа претставување е еднозначно (единствено). Можеме да се присетиме и на постапката за разложување на сложени природни броеви на множители со следната шема:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5.$$

3 Разложи ги на прости множители следниве броеви: а) 782; б) 1255; в) 223.

Нека е даден природниот број 223, кој е прост број. Проверката дека делењето на тој број со сите природни броеви помали од него не дава количник кој е природен број, ни одзема многу време. Затоа, се наметнува прашање, како најлесно и најбрзо за големи природни броеви ќе дојдеме до заклучок дека тие броеви се прости броеви? Одговорот е едноставен:

бројот го делиме само со простите броеви почнувајќи од 2, па до простиот број чиј квадрат не е поголем од бројот 223. Проверката на природниот број 223 дека е прост се сведува на проверка, дали количниците се природни броеви на бројот 223 со простите броеви 2,3,5,7,11,13,17. Тука застануваме, бидејќи $17 \cdot 17 = 289 > 223$.

Размисли и одговори:

- Дали множеството на прости броеви е конечно или бесконечно?

!

- ❖ Сложените природни броеви можеме на единствен начин да ги претставиме како производ од прости множители;
- ❖ Секој природен број што не се дели со ниту еден прост број, почнувајќи од 2, па се до простиот број чиј квадрат не е поголем од него е прост број.
- ❖ Множеството на сите прости броеви е бесконечно множество.
- ❖ Секој природен број поголем од 1 е или прост број или може да се разложи како производ од прости множители.

4 Провери кои од следните природни броеви се прости броеви: 1229, 889, 789, 2231?

2.3. НЗД и НЗС

За разјаснување на поимите НЗД и НЗС на два или повеќе броеви ќе ги разгледаме следните примери:

- За бројот 12 делители се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12. За бројот 20 делители се: 1, 2, 4, 5, 10 и 20. Елементите на множеството од нивните заеднички делители се броевите: 1, 2 и 4. Множеството на нивните заеднички делители е конечно множество. Најголемиот заеднички делител на броевите 12 и 20 е 4 и него го нарекуваме НЗД, а запишувавме $\text{НЗД}\ (12, 20) = 4$.
- Постапката за негово наоѓање е покажана со шемата:

$$\begin{array}{r|l} 12,\ 20 & 2 \\ 6,\ 10 & 2 \\ 3,\ \ 5 & \end{array}$$

$$\text{НЗД}\ (12, 20) = 4$$

- За бројот 10 содржатели се броевите: 10, 20, 30, 40, 50, 60, ..., а на бројот 15 се броевите: 15, 30, 45, 60, ... Елементите на множеството од нивните заеднички содржатели се броевите: 30, 60, 90, ... Множеството на нивните заеднички содржатели е бесконечно множество. Најмалиот заеднички содржател на броевите 10 и 15 е бројот 30 и него го нарекуваме НЗС, а запишувавме $\text{НЗС}(10,15)=30$.

  Постапката за негово наоѓање е покажана со шемата:

10, 15	2
5, 15	3
5, 5	5
1, 1	

$$\text{НЗС}(10,15)=2\cdot 3\cdot 5=30.$$

5 Определи НЗД и НЗС на броевите: а) 10 и 27; б) 125, 250 и 335; в) 81, 135 и 126.

Може да се забележи дека $\text{НЗД}(10,27)=1$.

Таквите броеви чиј НЗД е 1 се нарекуваат **заемно прости броеви.** Кај заемно простите броеви $\text{НЗС}(10,27)=10\cdot 27=270$.

6 Кои од следните броеви се заемно прости: а) 25 и 39; б) 21 и 90?

!

- Множеството од заедничките делители на два или повеќе природни броја е секогаш конечно множество.
- НЗД на два или повеќе природни броја е нивниот најголем заеднички делител. Тој се добива како производ од нивните заеднички прости множители.
- Множеството од заеднички содржатели на два или повеќе природни броја е секогаш бесконечно множество.
- Најмалиот заеднички содржател или НЗС на два или повеќе природни броја е нивниот најмал заеднички содржател.
- Два природни броја m и n се **заемно прости броеви** доколку нивниот $\text{НЗД}(m,n)=1$. Нивниот $\text{НЗС}(m,n)=m\cdot n$.

2.4. Решавање на проблеми

Во продолжение се дадени неколку решени практични задачи:

Пример 2 Докажи ги следниве тврдења:

а) Збир на два парни броја е парен број;

б) Производ на два парни броја е парен број.

Нека m_1, m_2 се два парни природни броеви. Тогаш можеме да ги претставиме во облик $m_1 = 2k_1, m_2 = 2k_2$ за некои $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.

а) Збирот $m_1 + m_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2),\ k_1 + k_2 \in \mathbb{N}$ е парен број.

б) Производот $m_1 \cdot m_2 = 2k_1 \cdot 2k_2 = 2 \cdot 2k_1k_2,\ 2k_1k_2 \in \mathbb{N}$ е парен број.

Пример 3 Докажи ги следниве тврдења:

а) $k \mid m \wedge k \mid n \Rightarrow k \mid (m+n)$;

б) $k \mid m \vee k \mid n \Rightarrow k \mid (m \cdot n)$.

а) Од $k \mid m \wedge k \mid n \Leftrightarrow m = p \cdot k \wedge n = q \cdot k,$ за некои $p, q \in \mathbb{N}$.

Тогаш $m + n = p \cdot k + q \cdot k = k(p+q), p+q \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k \mid (m+n)$.

б) Од $k \mid m \vee k \mid n \Leftrightarrow m = k \cdot p \vee n = k \cdot q$ за некои $p, q \in \mathbb{N}$.

Тогаш $m \cdot n = p \cdot k \cdot q \cdot k = k(kpq), kpq \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k \mid (m \cdot n)$.

Пример 4 Провери дали за кои и да било природни броеви *m* и *n* изразите $(m+n)^2 - (m-n)^2$ и $(m+n)^2 + (m-n)^2$ се сложени броеви.

Од $(m+n)^2 - (m-n)^2 = \cancel{m^2} + 2mn + \cancel{n^2} - \cancel{m^2} + 2mn - \cancel{n^2} = 4mn$ добиваме дека бројот е сложен број.

На ист начин, од $(m+n)^2 + (m-n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2 = 2(m^2 + n^2)$ се добива сложен број.

Пример 5 Во продавница за текстил имало два топа на ист материјал со различни дизајни, но и со различни должини од 48 метри и 36 метри. Еден вработен за потребите на своите муштерии требало да ги исече двата топа на еднакви делови. Која е најголемата должина со која продавачот може овие два топа на материјали да ги подели на еднакви должини?

На броевите 48 метри и 36 метри ќе побараме НЗД.

48, 36	2
24, 18	2
12, 9	3
4, 3	

$НЗД(48,36)=12$

Најголемата должина на која можат да се поделат двата топа материјали е 12 метри.

Пример 6 На еден меѓународен аеродром три авиони полетуваат во исти ден. Првиот се враќа на секои 2 дена, вториот се враќа на секои 3 дена, а третиот на секои 5 дена. За колку дена сите три повторно ќе полетаат во исти ден?

За броевите 2, 3 и 5 треба да се најде НЗС.

2,3,5	2
1,3,5	3
1,5	5
1	

$НЗС(2,3,5)=30$.

Трите авиони за 30 дена повторно ќе полетаат во ист ден.

Пример 7 За Осми Март во една цвеќарница, вработените треба да направат еднакви букети. Колку најмногу букети, можат да се направат од 480 гладиоли, 280 црвени ружи и 300 кринови?

За броевите 480, 280 и 300 треба да се најде НЗД.

480,450,510	2
240,225,255	5
48, 45, 51	3
16, 15, 17	

$НЗД(480,280,300)=30$.

Можат да се направат најмногу 30 букети, при што во секој букет ќе има по 16 гладиоли, 15 црвени ружи и 17 кринови.

Задачи за самостојна работа

1. Определи го множеството делители на секој од броевите: а) 125; б) 565; в) 232.
2. Разложи ги на множители следниве броеви: а) 175; б) 550; в) 1250.
3. Определи го множеството на содржатели на броевите: а) 8; б) 16; в) 23.
4. Кој од следниве природни броеви е прост, а кој сложен број: а) 257; б) 943; в) 430?
5. Да се одреди простиот број m така што бројот m^2+14 е прост број.
6. Да се провери дали за кој и да било природен број m изразите $(m+2)^2-(m-2)^2$ и $(m+7)^2+(m-7)^2$ се сложени броеви.

7. Да се најде НЗД и НЗС на броевите 18 и 24. Потоа, провери ја точноста на равенството: $\text{НЗД}(a,b)\cdot\text{НЗС}(a,b)=a\cdot b$.

8. Определи НЗД и НЗС на следните броеви: а) 42, 20 и 30; б) 12, 18 и 25.

9. Кој од следниве парови природни броеви се заемно прости:
а) 12 и 18; б) 27 и 55; в) 36 и 49.

10. Докажи ги следните тврдења:
а) Збир на два непарни броја е парен број, но нивниот производ е непарен број;

б) Збир на еден парен и еден непарен број е непарен број, но нивниот производ е парен број.

11. Докажи ги следниве тврдења:
а) $k\mid m\wedge k\mid n\wedge m>n\Rightarrow k\mid(m-n)$; б) $k\mid(m+n)\wedge k\mid n\Rightarrow k\mid(m+n)$.

12. Докажи дека за секој природен број n точно е: а) $5|(5+10^n)$ б) $5|(n^5-n)$.

13. Докажи дека збирот на кои било три последователни природни броеви е делив со бројот 3.

14. Докажи дека: ако еден број е делив со броевите 2 и 3 тогаш е делив и со бројот 6.

15. Имер и Теута требало да купат одреден број на даски за својата градежна фирма. Решиле секој од нив да купи по троцифрен број на даски така што и двата троцифрени броеви да бидат деливи со 45, а нивната средна цифра да биде 8. Одреди по колку даски треба да купи секој од нив, ако се знае дека Имер треба да купи повеќе даски од Теута.

16. Во едно стовариште имало 2 вида жица, едната со должина 15 метри, а другата со должина 18 метри. Вработен, за потребите на своите муштерии требало да ги исече двата вида жици на еднакви делови. Која е најголемата должина со која вработениот може овие два вида жици да ги подели на еднакви должини?

17. На една железничка станица четири воза тргнуваат во ист час. Првиот се враќа на секои 10 часа, вториот се враќа на секои 8 часа, третиот на секои 9 часа, а четвртиот на секои 12 часа. За колку часа сите четири воза повторно ќе тргнат во исто време?

18. За Божиќ во една слаткарница, вработените треба да направат еднакви пакетчиња од слатки. Колку најмногу пакетчиња, можат да се направат од 15 еклери, 6 тулумби и 9 баклави?

3. Цели броеви и операции со цели броеви

3.1. Цели броеви

По воведувањето на множеството на природни броеви воведуваме уште едно бројно множество, а тоа е множеството на цели броеви. За да ја постигнеме таа цел, почнуваме со следните констатации:

- За два природни броја $m, n \in \mathbb{N}$, разликата $k = m - n \in \mathbb{N}$ е природен број, ако $m > n$.
- Направивме проширување на множеството на природни броеви $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ со воведувањето на 0. Тогаш можеме да си дозволиме одземање за два природни броја $m, n \in \mathbb{N}$, каде $k = m - n \in \mathbb{N}$, ако $m \geq n$.

1 Реши ја равенката $x + 10 = 5$ во $\mathbb{N}$. Дали има решение во $\mathbb{N}$?

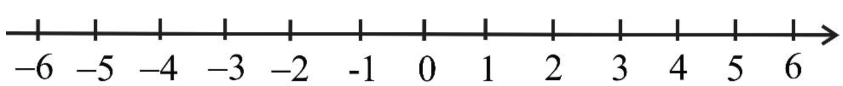
Очигледно е дека дадената равенка нема решение во множеството на природни броеви $\mathbb{N}$, ниту во проширеното множество на природни броеви $\mathbb{N}$. За таа цел ни е потребно проширување на ова множество, за да можеме да решаваме равенки од видот $x + n = m$ каде $n, m \in \mathbb{N}$ и $m < n$. Проширувањето го правиме со броевите $-1, -2, -3, \ldots$, кои се спротивни броеви на природните броеви и се нарекуваат негативни цели броеви. Множеството на негативните цели броеви го обележуваме со $\mathbb{Z}$ $-2, -3, \ldots\}$.

Ова повлекува дека природните броеви можеме да ги наречеме позитивни цели броеви и да ги обележиме со $\mathbb{Z}$ $3, \ldots\}$. Во таа смисла, бројот 0 не е ниту позитивен, ниту негативен број.

!

- ❖ **Множеството на цели броеви** ги содржи сите позитивни цели броеви, сите негативни цели броеви и бројот нула т.е. $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$.
  Множеството на цели броеви го обележуваме со $\mathbb{Z}$ $, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$.
- ❖ Точно е: $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$.

Забележуваме дека ова множество нема ниту најмал, ниту најголем елемент. Геометриското претставување на целите броеви е на бројна оска:



Со оглед на тоа што негативните броеви се полево од позитивните броеви и бројот 0, значи тие се помали и од позитивните броеви и од бројот 0. Затоа, целите броеви можеме да ги подредиме $\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots$. Спомнавме дека за негативните цели броеви велиме дека се спротивни на позитивните цели броеви, но и за позитивните цели броеви велиме дека се спротивни на негативните цели броеви.

2 Најди ги спротивните цели броеви на следниве цели броеви: 256, -1250, 89 и -5230.

3 Подреди ги, по големина, следните цели броеви: -256, 4208, 0, 1203,-4503, 256, -25.

!

Нека $m \in \mathbb{Z}$. Апсолутна вредност на целиот број m се дефинира како:

$$|m| = \begin{cases} m, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -m, & m < 0 \end{cases}$$

Пример 1 $|-5| = 5, |0| = 0, |6| = 6$ т.е. апсолутна вредност од позитивен цел број е самиот тој број, апсолутна вредност од 0 е 0 и апсолутна вредност од негативен цел број е неговиот спротивен број.

Важно е да се забележи дека:

- Спротивните цели броеви имаат иста апсолутна вредност т.е. $|-m| = |m|$, за $m \in \mathbb{Z}$.

4 Најди ги апсолутните вредности на следните цели броеви: -1250, 65, 998, -875, 0.

5 Подреди ги по големина следните цели броеви по апсолутна вредост: -125, -2546, 0,125, 36.

3.2. Операции со цели броеви

Собирање, одземање, множење и делење на цели броеви:

- Знаеме дека, $(+5)+(+7)=(+12)$, $(+7)+(-5)=(+2)$, $(+7)+(-9)=(-2)$, $(-7)+(-5)=(-12)$.

  Целите броеви се собираат на на тој начин, при што, доколку се со исти знаци се собираат апсолутните вредности на целите броеви, а знакот се препишува. Доколку се со различни знаци, од апсолутната вредност на целиот број кој е со поголемата апсолутна вредност се одзема апсолутната вредност на целиот број со помалата апсолутна вредност и знакот се препишува од целиот број со поголема апсолутна вредност.

- За одземањето имаме: $(+5)-(+7)=(+5)+(-7)=(-2)$, $(+7)-(+5)=(+7)+(-5)=(+2)$, $(+7)-(-5) \ =(+7)+(+5)=(+12)$, $(-7)-(-5)=(-7)+(+5)=(-2)$. Одземањето на цели броеви се сведува на собирање на цели броеви на тој начин, при што, на намаленикот му се додава спротивниот цел број на намалителот од разликата. Понатаму, се продолжува со собирање на цели броеви по претходно даденото правило.
- За множење имаме: $(+5)\cdot(+7)=(+35)$, $(+7)\cdot(-5)=(-35)$, $(-7)\cdot(+5)=(-35)$, $(-7)\cdot(-5)=(+35)$. Целите броеви се множат на тој начин, при што, доколку се со различни знаци тогаш се множат нивните апсолутни вредности и знакот на нивниот производ е „$-$“. Ако се со исти знаци тогаш се множат нивните апсолутни вредности и знакот на производот е „ $+$ “. Ако барем еден од множителите е 0 тогаш нивниот производ е 0.
- За делење имаме: $(+35):(+7)=(+5)$, $(+35):(-7)=(-5)$, $(-35):(+7)=(-5)$, $(-35):(-7)=(+5)$. Целите броеви се делат на тој начин, при што, доколку се со различни знаци тогаш се делат нивните апсолутни вредности и знакот на нивниот количник е „$-$ “. Ако се со исти знаци тогаш се делат нивните апсолутни вредности и знакот на количникот е „$+$ “.

6 Пресметај:

а) $(-8)-(-6)$; б) $(+25)-(-12)$; в) $(-64):(-8)$; г) $(+3)\cdot(-16)$;

д) $-5\cdot(-5+8\cdot(-2))-50:(2-(-2)\cdot 4)$.

Напомена: Најчесто, позитивните броеви ги запишуваме без знак и без загради. Негативните броеви секогаш ги пишуваме со знак, а се испуштаат само непотребните загради. Како пример е задача 5, д).

Размисли и одговори!

- Каков е збирот на два спротивни броја?

!

- За секој $m\in\mathbb{Z}, m+(-m)=-m+m=0$.
- $|m\cdot n|=|m|\cdot|n|, |m+n|\leq|m|+|n|, |m-n|=|n-m|$, за секои $m,n\in\mathbb{Z}$.
- За операциите собирање и множење со цели броеви важи комутативното својство на собирање односно на множење.

7 Реши ги равенките: $x \cdot 5 = 25$; $6 \cdot x = -36$; $x:(-5) = -5$; $25 : x = 5$; $6 \cdot x = 5$.

Знаеме дека збир, разлика и производ на кои било цели броеви е цел број. Но, дали тоа е точно за операцијата делење? Се забележува дека последната равенка $6 \cdot x = 5$ не е решлива во множеството на цели броеви, за разлика од останатите равенки.

!

- Операциите собирање, одземање и множење се внатрешни операции на множеството на цели броеви т.е. множеството на цели броеви е затворено во однос на операциите собирање, одземање и множење.
- Операцијата делење не е внатрешна операција на множеството на цели броеви т.е. множеството на цели броеви не е затворено во однос на операцијата делење. Делењето е делумна операција во множеството на цели броеви.

3.3. Решавање на проблеми

Во продолжение ќе разгледаме неколку реални примери.

Пример 2 Во еден град ноќната температурата во текот на една зимска седмица била: $-9^0, -2^0,\ 2^0,\ -5^0,\ 0^0,\ -1^0, 1^0$. Пресметај ја просечната неделна температура.

На седумте температури се бара аритметичка средина,

$$\left(-9^0 + \left(-2^0\right) + 2^0 + \left(-5^0\right) + 0^0 + \left(-1^0\right) + 1^0\right) : 7 = -2^0 .$$

Просечната зимска температура за дадената недела е -2^0.

Пример 3 Збирот на четири последователни цели броја е -22. Кои се тие броеви?

Последователните цели броеви ќе ги обележиме со $n, n+1, n+2, n+3$, каде што $n \in \mathbb{Z}$ е цел број. Тогаш:

$$\begin{aligned} &n+n+1+n+2+n+3 = -22 \\ &4n+6 = -22 \\ &4n = -28 \\ &n = -7 \end{aligned}$$

Тоа се целите броеви се $-7,\ -6,\ -5,\ -4.$

Задачи за самостојна работа:

1. Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $-2>5$; б) $0<5$; в) $|-6|=-6$; г) $|9|=-9$; д) $-7\in\mathbb{Z}$; ѓ) $\mathbb{Z}^{+}\subset\mathbb{Z}$; е) $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{+}\cup\mathbb{Z}^{-}$.

2. Најди ги спротивните броеви на следните цели броеви, а потоа истите подреди ги:

$-1258,\ 987,\ -8746, -203,\ 1223.$

3. Најди ги апсолутните вредности на следниве броеви и подреди ги по големина:

$-1258, 0,\ 987,\ -8746, -203,\ 1223..$

4. Пресметај:

а) $(+12)+(+54)$; б) $(+27)-(-63)$; в) $(-25)+(-64)$; г) $(-56)-(-25)$;

д) $(-5)\cdot(-8)$; ѓ) $(-6)\cdot(+6)$; е) $(-42):(-6)$; ж) $(+56):(-9)$.

5. Испушти ги излишните загради и знаци, а потоа пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(-5):(-1)+(-8)\cdot((+3)-(-2)\cdot(+6))$; б) $(-7)-(-2)\cdot((-1)+(-10):(+2))$;

в) $((+5)\cdot(-2)-(-3))\cdot(-7)$; г) $(12-5\cdot 7)\cdot(15-(5-4)\cdot 5-7\cdot(-2))$.

6. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $|15-17|-|-5|+|-23+25|$; б) $|x-5|-2|x-1|+3|x|$ за $x=-5$.

7. Да се провери точноста на $|m\cdot n|=|m|\cdot|n|, |m+n|\leq|m|+|n|, |m-n|=|n-m|$, за $m=-8$ и $n=-11$.

8. Докажи: а) $\dfrac{|m|+m}{2}=\begin{cases}0, & m\leq 0\\ m, & m>0\end{cases}$; б) $|-m|=|m|$; в) $|m-n|=|n-m|$.

9. Во еден град просечните месечни температури во текот на една календарска година биле: -9^0, -3^0, 2^0, 8^0, 13^0, 18^0, 29^0, 31^0, 26^0, 19^0, 10^0, 0^0. Пресметај ја просечната неделна температура.

10. Сабина пет зимски дена по ред ја мерела температурата наутро, попладне и навечер. Таа ги добила следните резултати:

Прв ден: -10^0, 3^0, -8^0;
Втор ден: -9^0, 5^0, -2^0;
Трет ден: -10^0, -3^0, -5^0;
Четврти ден: -6^0, 3^0, -9^0;
Петти ден: -7^0, 4^0, 0^0.

Потоа, ја пресметала просечната температура на секој ден посебно. Кои резултати ги добила Сабина? Кој ден бил најладен, а кој најтопол?

11. Збирот на седум последователни цели броеви е 14. Кои се тие броеви?

4. Рационални броеви

4.1. Рационални броеви

Да воведеме уште едно значајно бројно множество.

- Равенката $2 \cdot x = 1$ не е решлива во множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$.
- Равенката $m \cdot x = n$ нема секогаш решение во множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$.

За таа цел потребно е проширување на множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$ со така наречени дропки. Равенката $2 \cdot x = 1$ ќе има решение $x = \frac{1}{2}$ во новото множество. Овој број се нарекува дропка, каде што бројот 1 е броител, бројот 2 е именител на дропката, а цртата така наречена дробна црта го заменува знакот за делење „:“. Дропката е бројот $\frac{m}{n} = m : n, n \neq 0$.

Множеството што ги содржи сите дропки се нарекува множество на рационалните броеви.

Со други зборови, дропката ја нарекуваме рационален број. Дропки се: $\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{-15}{6}, \frac{5}{-2}, \ldots$.

❖ **Множество на рационалните броеви** го обележуваме со $\mathbb{Q}$ и тоа има облик $\mathbb{Q} \quad \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{N}$.

Размисли и одговори:

- Дали природните броеви се рационални броеви?
- Дали целите броеви се рационални броеви?
- Како се нарекуваат дропките $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, како дропките $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}$, а како $1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}$?
- Кои дропки немаат смисла $\frac{2}{5}, \frac{0}{2}, \frac{-15}{0}, \frac{5}{-2}$?

Пример 1 Дропките од облик $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}$ се викаат мешани броеви и се трансформираат во неправилни дропки т.е. $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, 2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Размисли и одговори:

- Правилната или неправилната дропка е поголема од 1?

!

- Секој цел број е и рационален број.
- Дропката $\frac{m}{n}$ се вика правилна (чиста) дропка, ако $m<n$, неправилна (нечиста) дропка ако $m>n$, а привидна дропка ако $n|m$.
- Изразот од облик $\frac{m}{0}$ нема смисла, бидејќи делењето со 0 не е дефинирано.

4.2. Проширување, скратување на дропки и сведување на исти именител

Знаме дека, изразот $25:5=5$, но и изразите $(25:5):(5:5)=5$ и $(25\cdot 2):(5\cdot 2)=5$ даваат исти резултати. Доколку, знакот за делење го замениме со дробна црта тогаш добиваме $\frac{25}{5}=\frac{25:5}{5:5}=\frac{25\cdot 2}{5\cdot 2}$. Значи, дропката $\frac{25}{5}$ прво ја кратиме со бројот 5, а потоа ја проширувамe со број 2 и при тоа се добива еднаква дропка на дропката $\frac{25}{5}$.

Пример 2 Ако ја земеме дропката $\frac{10}{20}$ тогаш таа може да се скрати со бројот 2 и да се добие дропката $\frac{10:2}{20:2}=\frac{5}{10}$. Но, оваа дропка $\frac{10}{20}$ може да се скрати и со бројот 5 и да се добие дропката $\frac{10:5}{20:5}=\frac{2}{4}$. Дропката $\frac{10}{20}$ може да ја скратиме и со бројот 10 и се добива дропката $\frac{10:10}{20:10}=\frac{1}{2}$. Забележуваме дека дропките $\frac{5}{10}$ и $\frac{2}{4}$ можат да се кратат и понатаму, првата со 5, а втората со 2. Но, дропката $\frac{1}{2}$ не може да се крати понатаму. Таа се нарекува нескратлива дропка, бидејќи $\text{НЗД}(1,2)=1$.

!

- Доколку броителот и именителот на дропката $\frac{m}{n}, n \neq 0$ се поделат со еден ист број $k \neq 0$ т.е. $\frac{m}{n}=\frac{m:k}{n:k}, n \neq 0$, тогаш велиме дека сме извршиле **кратење на дропката** со бројот $k \neq 0$. Добиената дропка е еднаква на почетната.
- Доколку броителот и именителот на дропката $\frac{m}{n}, n \neq 0$ се помножат со еден ист број $k \neq 0$ т.е. $\frac{m}{n}=\frac{m \cdot k}{n \cdot k}, n \neq 0$, тогаш велиме дека сме извршиле **проширување на дропката** со бројот $k \neq 0$. Добиената дропка е еднаква на почетната.
- За една дропка ќе речеме дека е **нескратлива дропка** доколку броителот и именителот се заемно прости броеви.

1 Скрати ја дропката $\frac{35}{70}$ со 7. Дали добиената дропка е нескратлива? Доколку не е, тогаш да се доведе до нескратлива дропка.

2 Прошири ги следниве дропки со бројот 3: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{5}$.

Постапката за проширување на дропки, може да се искористи за сведување на дропки на заеднички именител.

Пример 3 Нека се дадени дропките $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. Да ги сведеме на заеднички именител. За таа цел, бараме $\text{НЗС}(2,3)=6$ на именителите и секоја дропка ја прошируваме до именител 6: $\frac{1}{2}=\frac{1 \cdot 3}{6}=\frac{3}{6}, \frac{2}{3}=\frac{2 \cdot 2}{6}=\frac{4}{6}$.

3 Сведи ги дропките на исти именител:

а) $\frac{8}{9}, \frac{11}{18}, \frac{5}{6}$;   б) $1\frac{2}{3}, 2\frac{10}{15}, 3\frac{5}{6}$;   в) $\frac{2}{5}, 1\frac{5}{16}, 2\frac{5}{6}$.

4.3. Подредување на рационални броеви. Реципрочна вредност

Размисли!

Како ќе ги споредиш дропките $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$?

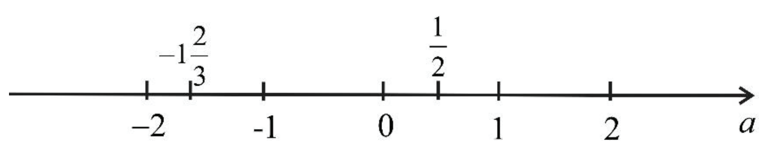
За да ги споредиме овие дропки, потребно е да ги сведеме на заеднички именител, а потоа да ги споредиме, така што од дропките со исти именители поголема ќе биде дропката што има поголем броител.

Пример 4 Дропките $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$ ги сведуваме на исти именител, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}, \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$. Ги споредуваме, $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, бидејќи $\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$.

4 Спореди ги дропките: а) $\frac{2}{15}, \frac{3}{10}$; б) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$.

5 Подреди ги по големина дропките: $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

Геометриски, рационалните броеви ги претставуваме на бројна оска a:



6 Претстави ги следниве дропки на бројна оска: $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

Од бројната оска се забележува дека, меѓу кои и да било два рационални броеви има повторно рационален број.

❖ Меѓу кои и да било два рационални броја има рационален број т.е. множеството на рационални броеви е густо подредено.

❖ За две дропки $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, n \neq 0, q \neq 0$ ќе речеме дека се еднакви $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, ако $m \cdot q = n \cdot p$.

Пример 5 Дропките $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ се еднакви, бидејќи $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

7 Провери дали се еднакви следниве дропки: а) $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$; б) $\frac{12}{15}, \frac{4}{5}$.

Размисли!

- За бројот 5, како се вика бројот $\frac{1}{5}$?

❖ За даден ненулти број m, дропката $\frac{1}{m}$ велиме дека е **реципрочна вредност на бројот** m**.**

8 Најди ги реципрочните вредности на следниве рационални броеви: $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{12}{15}, \frac{4}{5}$.

Задачи за самостојна работа:

1. Во овој момент, часовникот покажува 12 часот напладне. Запиши ги со дропка изминатиот и преостанатиот дел од денонокието.

2. За која вредност на *m* изразот нема смисла: а) $\frac{5}{m}$; б) $\frac{3}{m-2}$; в) $\frac{2m-1}{m^2-1}$.

3. Прошири ги дропките: а) $\frac{8}{9}$ со 5; б) $\frac{7}{6}$ со 2; в) $\frac{1}{2}$ со 9.

4. Следните дропки доведи ги до нескратливи: $\frac{125}{625}, \frac{81}{243}, \frac{64}{320}$.

5. Да се скратат дропките: а) $\frac{240\cdot 80\cdot 45}{16\cdot 27\cdot 125\cdot 24}$; б) $\frac{24\cdot 55\cdot 27}{64\cdot 33\cdot 42}$.

6. Спореди ги дропките: а) $\frac{5}{12}$ и $\frac{8}{9}$; б) $\frac{7}{6}$ и $\frac{7}{9}$; в) $\frac{9}{17}$ и $\frac{1}{2}$.

7. Подреди ги по големина следните дропки почнувајќи од најмалата: $-\frac{5}{12},\frac{5}{9},\frac{1}{3},-\frac{2}{5},\frac{1}{5}$ и $\frac{8}{9}$.

8. Најди ги реципрочните дропки на дадените: $\frac{5}{12},\frac{5}{9},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{5}$.

5. Операции со рационални броеви

5.1. Операции со рационални броеви

Да ги воведеме операциите собирање, одземање, множење и делење на рационални броеви.

Собирање на рационални броеви:

- Како се собираат дропки со исти именители?
- Како се собираат дропки со различни именители?

!

- Дропки со исти именители се собираат, така што збирот е дропка со ист именител како и собироците, а броителите на дропките се собираат т.е. $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}, n\neq 0$.
- Дропки со различни именители се собираат, така што дропките се сведуваат на ист именител и потоа се собираат како дропки со исти именители.
- За собирање на рационални броеви важат комутативното и асоцијативното својство на собирањето.

Пример 1 а) Да собереме две дропки со исти именители $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$.

Забележуваме дека збирот на две дропки $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$ е дропка $\frac{3}{5}$ со ист именител 5 како и дропките $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$, а броителот 3 е збир на двата броители од дропките $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$ т.е. 3=2+1.

б) Да собереме две дропки со различни именители $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\frac{4+5}{10}=\frac{9}{10}$.

Забележуваме дека, прво се бара $\text{НЗС}(2,5)=10$ на двата именители. Потоа, секоја од дропките се проширува до дропка со именител 10. На крај, собирањето се сведува на собирање на две дропки со исти именители (постапка објаснета во задачава под а)).

1 Пресметај го збирот:

а) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$; б) $\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{12}{21}+\frac{1}{3}$; в) $1\frac{3}{5}+2\frac{4}{9}+3\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}$.

Одземање на рационални броеви:

- Како се одземаат дропки со исти именители?
- Како се одземаат дропки со различни именители?

!

- Дропки со исти именители се одземаат, така што разликата е дропка со ист именител, а броителот е еднаков на разликата од броителот на намаленикот и броителот на намалителот т.е. $\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}, n\neq 0$.
- Дропки со различни именители се одземаат, така што дропките се сведуваат на ист именител и потоа се одземаат како дропки со исти именители.

Пример 2 а) Да одземеме две дропки со исти именители $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2-1}{5}=\frac{1}{5}$.

Забележуваме дека разликата на две дропки $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$ е дропка $\frac{1}{5}$ со ист именител 5 како и дропките $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$, а броителот 1 е разлика на двата броители на дропките кои ги одземаме т.е. 2-1=1.

б) Да одземеме две дропки со различни именители $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}$. Забележуваме дека, прво се бара $\text{НЗС}(3,5)=15$ на двата именители. Потоа, секоја од дропките се проширува до дропка со именител 15. На крај, разликата помеѓу дев дропки се сведува на разлика од две дропки со исти именители (постапка објаснета во задачава под а)).

2 Пресметај ја разликата:

а) $\frac{21}{91}-\frac{15}{91}$; б) $\frac{7}{8}-\frac{3}{6}$; в) $6\frac{3}{5}-2\frac{4}{9}$; г) $15-2\frac{4}{9}$.

Множење на рационални броеви:

- Како се пресметува производ на дропки?

Треба да запомниш дека:

> - Производ на дропки се пресметува, така што производот е дропка со броител што е производ од броителите на множителите, а именителот е производ на именителите на множителите т.е. $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}, \quad n,q\neq 0.$
> - За множење на рационални броеви важат комутативното и асоцијативното својство на множењето, како и дистрибутивните својства на множењето во однос на собирањето и одземањето.

Пример 3 а) Да го пресметаме производот на следниве две дропки $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$.
Забележуваме дека, производот на двете дропки е дропка со броител којшто се добива како производ на двата броители на дропките кои играат улога на множители т.е. $2\cdot 1=2$ и именител којшто се добива како производ на двата именители од дропките кои се множат т.е. $5\cdot 3=15$.

б) Следејќи ја истата постапка, производот на три дропки е $\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}=\frac{2}{45}$. Се забележува дека пред да се спроведе множењето доколку е возможно е дозволено и скратување.

3 Пресметај: а) $3\frac{2}{5}\cdot 2\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}\cdot 21$; в) $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{5}{21}$.

Делење на рационални броеви:

- Како се пресметува количник на две дропки?

❖ Количник на две дропки се пресметува, така што деленикот се множи со реципрочната вредност на делителот т.е. $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}, \quad n,p,q\neq 0$.

❖ Количникот $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}$ може да се запише и во облик $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$, кој се вика **двојна дропка**. Таа се сведува на обична дропка со следната постапка $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}$.

Размисли и одговори!

- Како се викаат m и q во двојната дропка $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$, а како n и p?
- Како можеме да кратиме во двојната дропка $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$?

Пример 4 а) Да го пресметаме количникот на следниве две дропки $\frac{2}{5}:\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$. Забележуваме дека делењето на дропката $\frac{2}{5}$ со дропката $\frac{1}{3}$ се сведува на операцијата множење на двете дропки така што деленикот $\frac{2}{5}$ се множи со реципрочната вредност $\frac{3}{1}$ на делителот $\frac{1}{3}$. Понатаму, постапката се сведува на множење на две дропки опишана во пример 3.

б) Да ја пресметаме двојната дропка $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1\cdot \cancel{4}}{\cancel{2}\cdot 3}=\frac{2}{3}$, како количник на дропките $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ само поинаку запишан. Двојната дропка се сведува на обична дропка со постапката што е дадена погоре. Броителот на обичната дропка е производ од надворешните членови на двојната дропка 1 и 4, а именителот е производ од внатрешните членови 2 и 3 на двојната дропка. При множењето е спроведено и скратување на обичната дропка.

4 Пресметај: а) $3\frac{2}{5}:2\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}:21$; в) $3\frac{2}{5}-2\frac{1}{3}:3\frac{5}{21}$; г) $\frac{1\frac{2}{5}\cdot 2\frac{3}{4}}{1\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$.

5.2. Решавање на проблеми

Да дадеме неколку реални проблеми.

Пример 5 Во еден базен се вградени четири цевки. Со едната базенот се полни за 5 часа, со втората за 9 часа, со третата за 3 часа, а со четвртата за 7 часа. Колкав дел од базенот ќе се наполни за 1 час, ако истовремено се отворат сите четири цевки?

Првата цевка за 1 час ќе наполни $\frac{1}{5}$ од базенот. Втората цевка за 1 час ќе наполни $\frac{1}{9}$ од базенот. Третата цевка за 1 час ќе наполни $\frac{1}{3}$ од базенот. Четвртата цевка за 1 час ќе наполни $\frac{1}{7}$ од базенот. Сите заедно за 1 час ќе наполнат $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{63+35+105+45}{315}=\frac{248}{315}$ дел од базенот.

Пример 6 Двајца вработени поради неизвршување на работните задачи биле казнети. Првиот вработен добил $\frac{2}{3}$ од неговата плата која изнесувала 12 000 денари, а вториот добил $\frac{2}{5}$ од својата палата која изнесувала 15 000 денари. Кој имал повеќе пари за трошење во тековниот месец?

Првиот вработен добил како плата во тековниот месец $\frac{2}{3}\cdot 12000 = 2\cdot 4000 = 8000$ денари. Вториот вработен добил $\frac{2}{5}\cdot 15000 = 2\cdot 3000 = 6000$ денари. Првиот вработен добил поголема плата во тековниот месец.

Пример 7 Една фамилија тргнала да се шета со својот автомобил. Првиот ден поминале $\frac{2}{7}$ од патот, вториот ден $\frac{3}{5}$ од патот, а третиот ден остатокот од 120 км. Колку литри нафта потрошиле, ако на секои 10 км автомобилот трошеле по $1\frac{2}{3}$ литри нафта?

Третиот ден изнесува $1-(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}) = 1-\frac{10+21}{35} = 1-\frac{31}{35} = \frac{4}{35}$ дел од патот, кој изнесува 120 км. Целиот пат е $120\cdot\frac{35}{4} = 1050$ км. За изминати 1050 км, фамилијата потрошила $1\frac{2}{3}$ (1050:10)= $\frac{5}{3}\cdot 105 = 175$ литри нафта.

Пример 8 За некоја завршена работа била поделена сума од 30 000 денари на 3 вработени на следниот начин: првиот примил $\frac{1}{5}$ од сумата, вториот 2 пати повеќе од првиот, а третиот го примил остатокот. По колку денари примил секој од нив за завршената работа?

Првиот вработен примил $\frac{1}{5}\cdot 30000 = 6000$ денари, вториот вработен примил $2\cdot 6000 = 12000$.

Третиот вработен $30000-(6000+12000) = 30000-18000 = 12000$ денари.

Задачи за самостојна работа:

1. Да се извршат назначените операции:

а) $2\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{14}+\frac{3}{4}:\frac{9}{16}-\frac{1}{2}$; б) $(3\frac{1}{3}-\frac{1}{5}):(1\frac{1}{6}+2\frac{3}{10})$; в) $\dfrac{2-1\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$;

г) $\dfrac{5+1\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{2\frac{2}{3}-\frac{1}{5}:\frac{3}{10}}$; д) $\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{7}{15}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}-2\frac{1}{3}+\frac{1}{15}}:\dfrac{3+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}$; ѓ) $(\dfrac{\frac{3}{7}+\frac{3}{14}-\frac{1}{21}}{1\frac{1}{2}-1\frac{2}{5}}-\frac{2}{3}-\frac{6}{7})\cdot\dfrac{1}{4+\frac{3}{7}}$.

2. Нека $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{m}{n}$ се кои било рационални броеви. Докажи ги следните равенства:

а) $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{m}{n}=\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{m}{n})$; б) $(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}-\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$.

3. Извесна сума на пари била поделена на 3 лица. Првото лице примило $\frac{1}{5}$ од сумата, второто лице $\frac{3}{7}$ од сумата, а третото лице 13 000 денари. Колкава била сумата, а по колку примиле првото и второто лице?

4. Во еден клас 5 ученици го повторувале класот, а тоа било $\frac{1}{6}$ од класот. Колку ученици броел класот?

5. Еден базен се полни со три цевки, а се празни со една цевка. Првата го полни базенот за 9 часа, втората за 5 часа, третата за 7 часа, а четвртата го празни за 11 часа. Колкав дел од базенот ќе се наполни за 1 час, доколку се пуштат сите цевки истовремено?

6. Онур бил врвен спортист. Затоа, тој треба да се придружува на одреден план за работа во текот на секој ден. Тој си ја поставил следната цел за едно деноноќие: $\frac{1}{4}$ ќе спие, $\frac{1}{5}$ ќе трча, $\frac{1}{9}$ ќе вежба на справи, $\frac{1}{6}$ ќе прави вежби за истегнување, $\frac{1}{8}$ ќе се релаксира и ќе јаде 1 час. Дали планот на Онур е остварлив?

7. Шабан изградил базен во дворот на својата летна вила. Базенот бил во форма на квадар со димензии на основата $6\frac{1}{5}m, 12\frac{1}{2}m, 2\frac{2}{5}m$. Тој го наполнил со морска вода до висина $1\frac{3}{5}m$. Морската вода содржи $1\frac{1}{8}\%$ сол. Колку литри вода собира базенот? Колку литри морска вода има базенот на Шабан? Колку kg сол има во водата од базенот на Шабан?

8. Разликата на реципрочните броеви на броевите $\frac{1}{5}$ и 2 подели ја со нивниот збир.

6.Децимални броеви. Операции со децимални броеви

6.1. Децимални броеви

Дропките $\frac{1}{10},\frac{33}{100},\frac{1}{1000}$ се со именител, декадна единица и нив ги нарекувавме **децимални дропки**. Нив можеме да ги запишеме како децимални броеви, $\frac{1}{10}=0,1;\frac{33}{100}=0,33;\frac{1}{1000}=0,001$.

Децималните броеви $0,3;1,25;0,123$ можеме да ги претставиме како децимални дропки, $0,3=\frac{3}{10};1,25=1\frac{25}{100};0,123=\frac{123}{1000}$.

Дропките $\frac{1}{2},\frac{33}{25},\frac{1}{5}$ можеме да ги претвориме во децимални броеви, прво со нивна трансформација во децимални дропки, а потоа децималните дропки во децимален број т.е. $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0,5;\frac{33}{25}=\frac{132}{100}=1,32;\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0,2$.

Децималниот број $5,25$ има иста вредност како и $5,250$, но и со $5,2500$; $5,250000..$.

Децималните броеви добиени од децималните дропки се конечни децимални броеви.

1 Следните дропки запиши ги како децимални дропки: $\frac{13}{20},\frac{32}{125},\frac{85}{100},\frac{7}{50}$.

2 Следните децимални броеви претстави ги како дропки: $0,52;5,125;4,8;0,45$.

!

- **Децимални дропки** се дропки со именител декадна единица.

- **Децимален број** е децимална дропка запишана без именител, каде при запишувањето се води сметка да после децималната запирка има толку цифри колку што има нули во декадната единица. Овие децимални броеви се **конечни децимални броеви.**
- Вредноста на децималниот број не се менува, ако од десната страна се допишуваат произволен број на нули.
- Секоја дропка чиј именител е делител на декадна единица можеме да ја трансформираме во децимална дропка, а потоа во конечен децимален број.

Доколку дропката не е децимална дропка, тогаш возможно е исто така да се претвори во децимален број со делење на броителот со именителот.

Пример 1 Дропката $\frac{1}{3}$ не можеме да ја трансформираме во децимална дропка, бидејќи 3 не е делител на ниту една декадна единица. Но, доколку броителот го поделиме со именителот тогаш добиваме децимален број кој е бесконечен, $\frac{1}{3}=1:3=0,3333...$.

За дропките $\frac{9}{14},\frac{1}{11},\frac{1}{6},\frac{1}{7}$ ги добиваме следните бесконечни децимални броеви $\frac{9}{14}=9:14=0,6428571428571...$, $\frac{1}{11}=1:11=0,090909...$, $\frac{1}{6}=1:6=0,166666...$,

$\frac{1}{7}=1:7=0,142857142857...$, соодветно.

Се забележува дека сите децимални броеви иако се бесконечни, сепак кај нив се појавува повторување на една или на група од цифри. Таквите децимални броеви се нарекуваат **бесконечни периодични децимални броеви.** Цифрата или групата од цифри што се повторува се нарекува **период**. Така запишувањето на овие децимални броеви е следното:

$0,3333...=0,(3)$; $0,6428571428571...=0,6(428571)$; $0,090909...=0,(09)$;

$0,142857142857...=0,(142857)$.

!

❖ Секој рационален број може да се претстави како конечен или бесконечен периодичен број.

3 Претстави ги следните рационални броеви во децимални броеви: $\frac{9}{4},\frac{4}{5},\frac{2}{9},\frac{5}{22}$.

Возможно е и бесконечните периодични децимални броеви да ги претвориме во дропки т.е. во рационални броеви.

Пример 2 Бесконечните периодични децимални броеви 2,(5) и 0,1(23) ќе ги претвориме во дропки на следниот начин:

$$2,(5)=2,5555....$$
$$x=2,55555..../\cdot 10$$
$$10x=25,555...$$
$$\underline{10x-x=25,555...-2,555...}$$
$$9x=23$$

$$0,1(23)=0,1232323...$$
$$x=0,1232323.../\cdot 10$$
$$10x=1,232323..../\cdot 100$$
$$1000x=123,2323....$$
$$\underline{1000x-10x=123,2323...\ -\ 1,2323...}$$
$$990x=122$$

$x=\frac{23}{9}=2\frac{5}{9}$ $\qquad$ $x=\frac{122}{990}=\frac{61}{495}$

4 Следните бесконечно периодични децимални броеви претстави ги како дропки: $3{,}12(5); 0{,}1(3);\ 3{,}(123)$.

6.2. Операции со децимални броеви

Децималните броеви се собираат и одземаат, така што се запишуваат еден под друг водејќи сметка за децималните запирки, како и цифрите од иста месна вредност да бидат една под друга и собирањето односно одземањето почнува од првата цифра која се наоѓа најдесно во броевите и продолжува со цифрите кои се на лево, од најдесната цифра.

Пример 3 Да ги собереме децималните броеви 8,25; 0,125;12,5

$$\begin{array}{r} 8{,}25 \\ 0{,}125 \\ +12{,}5 \\ \hline 20{,}875 \end{array}$$

Да ги одземеме децималните броеви 2,1 и 0,124

$$\begin{array}{r} 2{,}1 \\ -\ 0{,}124 \\ \hline 1{,}976 \end{array}$$

Множењето на два децимални броја е исто како што се множат природни броеви, само што се става децимална запирка во добиениот производ, така што таа одвојува толку децимални места во производот колку што е збирот на децималните места во двата множители.

Пример 4 Да ги помножиме 2,56 и 3,2.

$$\begin{array}{r} 2{,}56\cdot 3{,}2 \\ \hline 512 \\ +768 \\ \hline 8{,}192 \end{array}$$

За да можеме да спроведеме делење, потребно е делителот да биде цел број. Значи, можеме да делиме децимален број со цел број. При ова делење кога ќе го поделиме целиот дел од децималниот број тогаш во количникот ставаме децимална запирка и продолжуваме со делењето на децималниот дел од деленикот.

Доколку треба да делиме два децимални броеви тогаш потребно е деленикот и делителот да ги помножиме со декадна единица која има толку нули колку што има децимални места во делителот. Потоа делењето се сведува на делење на децимален број со цел број.

Пример 5 Да ги пресметаме следните количници: а) 2,52 : 2; б) 2,52 : 0,2.

а)

$$\begin{array}{l} 2{,}52:2=1{,}26 \\ \underline{-2} \\ =5 \\ \underline{-4} \\ \quad 12 \\ \underline{-12} \\ \quad = \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{l} 2{,}52:0{,}2=\left(2{,}52\cdot 10\right):\left(0{,}2\cdot 10\right)=25{,}2:2=12{,}6 \\ \underline{-24} \\ \quad 12 \\ \underline{-12} \\ \quad 0 \end{array}$$

5 Пресметај:

а) $(76{,}48-12{,}2):0{,}4$; б) $7{,}64+(16{,}258-12{,}2)\cdot 0{,}21$.

Задачи за самостојна работа:

1. Следните дропки запиши ги како децимални дропки: $\frac{2}{3},\frac{7}{8},1\frac{5}{7},-3\frac{7}{10}$. Кои од нив се конечни децимални броеви, а кои бесконечно периодични децимални броеви?

2. Следните децимални броеви претстави ги како нескратливи дропки: 1,25; 0,55; 0,2 (3); 1,(5).
3. Изврши ги назначените операции:
   а) $\left(22{,}5-1{,}23+0{,}123\right)\cdot 1{,}2$; б) $\left(36{,}73-11{,}42\right):0{,}25$; в) $\left(45{,}3+3{,}5\cdot 14{,}395\right):0{,}5$.
4. Пресметај ја вредноста на изразот:

   а) $\frac{0{,}8}{4{,}5}\cdot 1{,}8-(1{,}2+0{,}06):0{,}18$; б) $\frac{(2{,}7-0{,}9)\cdot 1\frac{1}{2}}{(5{,}7+2{,}3):0{,}4}+0{,}001:\frac{1}{2}-5{,}75$.

5. Рамиз со велосипед минувал 20,25 километри на час, а Мерита 15,74 километри на час. Додека пак Славче минувал 21,43 километри на час. По колку километри ќе помине секој од нив, ако возат 2,32 часа? Колку вкупно километри ќе поминат сите заедно за време од 0,8 часа?

6. Баба Данче од 1,4 kg свежи јагоди добива 1 kg слатко, а баба Венка од 1,2 kg свежи јагоди добива 1 kg слатко. По колку килограми свежи јагоди треба да купи секој од нив за да добие секој за себе 2,75 kg слатко?

7. Реални броеви

7.1. Реални броеви

Откако го воведовме множеството на рационални броеви, можеме да констатираме:

- Меѓу кои и да било два рационални броеви има рационален број т.е. множеството на рационални броеви е густо подредено.
- Рационалните броеви ги претставуваме на бројна оска.
- Квадратен корен од позитивен рационален број a симболички се запишува како $\sqrt{a}$, така што точно е $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow a = x^2$.

Дискусијата за решението на равенката $x^2 = a$ ќе ја сведеме на образложување на следниот пример 1.

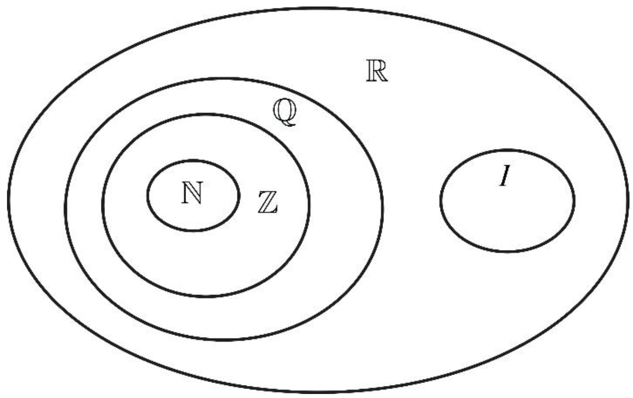
Пример 1 Равенката $x^2 = 9$ има решение во множеството на рационални броеви $x = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Q}$. Но, равенката $x^2 = 3$ нема решение во множеството на рационални броеви, $x = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

За овие видови на равенки да имаат решение, ни се наметнува потреба од воведување на ново множество кое би ги содржело овие броеви. Тоа множество се нарекува **множество на ирационални броеви** кое се обележува со $\mathbb{J}$. Ако со калкулатор ја пресметаме $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$, забележуваме дека добиваме бесконечен децимален број, кој не е бесконечен периодичен децимален број. Такви броеви се и $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \pi, -\sqrt{2}, ...$.

!

- **Ирационални броеви** се бесконечно непериодични децимални броеви.
- Унијата од рационалните и ирационалните броеви го дава множеството на **реалните броеви,** кое се обележува со буквата $\mathbb{R}$ и за нив точни се следните искази $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ и $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

Множествата $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ со помош на Венов дијаграм, можеме да ги претставиме на следниот начин:



Размисли!

- Кој број е помал: $\sqrt{5}$ или $\frac{7}{3}$?

За да ги споредиме овие два реални броја, потребно е да ги најдеме децималните броеви, $\sqrt{5} = 2.23606797...$ и $\frac{7}{3} = 2.333333...$. Значи, $\sqrt{5} < \frac{7}{3}$.

1 Подреди ги по големина следниве реални броеви: $\sqrt{5}, -\sqrt{2}, 0, -\frac{5}{6}, \frac{1}{10}$.

Значи, елементите од множеството на реални броеви можеме да ги подредуваме т.е. кои било два реални броеви a и b можеме да ги споредиме и притоа за нив ќе важи: $a < b \vee a > b \vee a = b$.

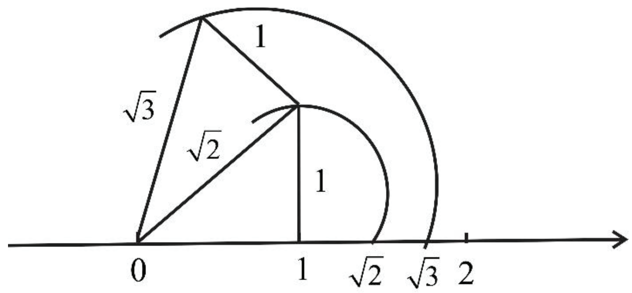
Веќе видовме дека, рационалните броеви ги претставуваме на бројна оска, но и ирационални броеви можат да се претстават на бројната оска. Претставувањето е со помош на геометриска конструкција на број.

Пример 2 Да ги претставиме следните ирационални броеви $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ на бројната оска со следниве чекори:

1. Ирационалниот број го преставуваме во облик $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$;
2. Со користење на Питагоровата теорема, заклучуваме дека треба да конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со катети од 1 единица и хипотенуза со должина $\sqrt{2}$ единици;
3. Конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со катети со должини од 1 единица со теме на правиот агол во точката со мерна единица 1;

4. Должината на хипотенузата на триаголникот е $\sqrt{2}$ единици и ја нанесуваме од точката О на десно, добивајќи ја точката што го претставува ирационалниот број $\sqrt{2}$;

За $\sqrt{3}$ претставувањето е $\sqrt{3}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}$. Геометриската конструкција на овој ирационален број ќе се спроведе со конструкција на правоаголен триаголник со должини на катетите од 1 единица и $\sqrt{2}$ единици. Хипотенузата на овој правоаголен триаголник е со должина од $\sqrt{3}$ единици. За да го конструираме $\sqrt{3}$, треба прво да се конструира $\sqrt{2}$. Геометриската конструкција на овие два ирационални броеви $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, како и на $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ се дадени на цртежот:



Напомена 1: Ирационалниот број не мора, секогаш, да го добиеме преку должина на хипотенуза од конструкцијата на правоаголен триаголник. Може да се добие и преку должина на катета од правоаголен триаголник. Таков пример е геометриската конструкција на ирационалниот број $\sqrt{8}=\sqrt{3^2-1^2}$.

Значи, ирационален број на овој начин со геометриска конструкција на број можеме да го нанесеме на бројната оска. Бројната оска се нарекува уште и **реална оска**.

!

На секоја точка од реалната оска може да се придружи точно по еден реален број и обратно, на секој реален број може да му се придружи точно по една точка од реалната оска.

2 На реална оска претстави го ирационалниот број $\sqrt{5}$.

- Дали апсолутна вредност од реален број се дефинира на ист начин како и апсолутна вредност од цел број?

Одговорот на ова прашање е да т.е. за $m\in\mathbb{R}$, апсолутна вредност од реалниот број m се дефинира како:

$$|m| = \begin{cases} m, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -m, & m < 0 \end{cases}.$$

3 Пресметај: а) $\left|-\frac{1}{2}\right|$; б) $|2,35|$; в) $|-53,1|$.

Напомена 2: Својствата што важат за апсолутните вредности од цели броеви, важат и за апсолутни вредности од реални броеви:

- Спротивните реални броеви имаат иста апсолутна вредност т.е. $|-m| = |m|$, за $m \in \mathbb{R}$.
- За секој $m \in \mathbb{R}$, $m + (-m) = -m + m = 0$.
- $|m \cdot n| = |m| \cdot |n|$, $|m+n| \leq |m| + |n|$, $|m-n| = |n-m|$, за секои $m, n \in \mathbb{R}$.

7.2. Интервали

Барањето на решение на неравенка во множеството на реални броеви не води до поимот интервал.

- Решенијата на неравенките $x+3>0$, $2-x \leq 0$, $x-5 \geq 3$, $x \in \mathbb{R}$ се подмножества од множеството на реалните броеви. Овие подмножества се нарекуваа интервали.

За интервалите имаме:

- **Интервалите** се множества од реални броеви x, кои ги задоволуваат следниве двојни неравенства $a<x<b, a \leq x<b, a<x \leq b, a \leq x \leq b$, каде реалните броеви a и b се нарекуваат **краеви на интервалите.**

Овие интервали најчесто се запишуваат и на следните начини:

- $a<x<b$ пократко (a,b), но и како $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a<x<b\}$ и се нарекува **отворен интервал**. Овде границите на интервалот не припаѓаат во него;
- $a \leq x \leq b$ пократко $[a,b]$, но и како $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ и се нарекува **затворен интервал**. Овде границите припаѓаат во интервалот;
- $a \leq x<b, a<x \leq b$ пократко $[a,b), (a,b]$, но и како $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x<b\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a<x \leq b\}$ и се нарекуваат **полуотворени интервали**.

  Кај полуотворените интервали припаѓа само едната граница во интервалот. Кај интервалот $a \leq x<b$ припаѓа на интервалот a, но не припаѓа b. Додека пак, во интервалот $a<x \leq b$ не припаѓа a, а припаѓа b.

Напомена 3: Двојно неравенство $a<x<b$ се дефинира како конјункција помеѓу две неравенства т.е. $x>a \wedge x<b$.

Интервалите не мора да бидат конечни.

Имаме и бесконечни интервали:

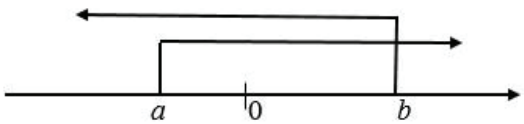
$(a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>a\}$,

$[a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\geq a\}$,

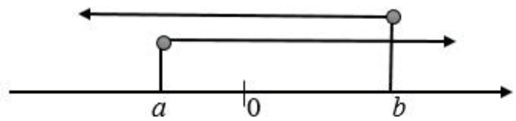
$(-\infty,b)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x<b\}$,

$(-\infty,b]=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\leq b\}$.

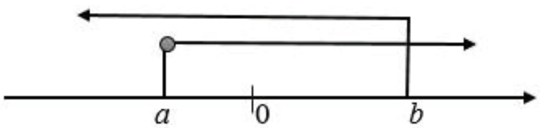
Интервалите се претставуваат и на бројна оска, на следниот начин:



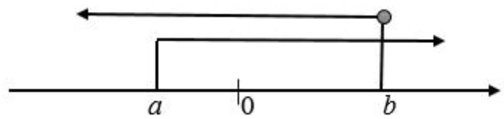
$x\in(a,b)$



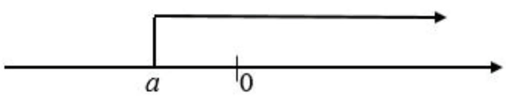
$x\in[a,b]$



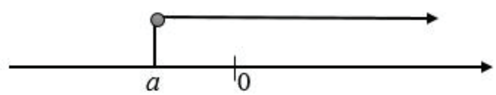
$x\in[a,b)$



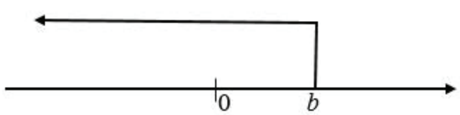
$x\in(a,b]$



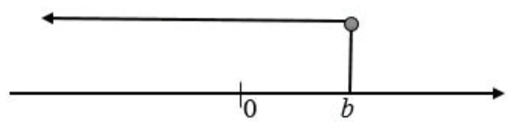
$x\in(a,+\infty)$



$x\in[a,+\infty)$

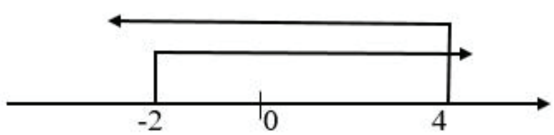


$x\in(-\infty,b)$



$x\in(-\infty,b]$

Пример 3 Кој интервал е претставен на бројната оска?



На бројната оска е претставен интервалот $(-2,4)$.

4 На бројна оска претстави ги следниве интервали:

$[0,\frac{1}{2}],[-3,2),(\frac{1}{3},5],(-\infty,5],(2,+\infty)$.

7.3. Решавање на проблеми

Да решиме неколку проблеми.

Пример 4 Ако $|a|=|b|$, дали секогаш $a=b$ за $a,b\in\mathbb{R}$?

Од $|a|=|b|$ не следува секогаш дека $a=b$, бидејќи овие броеви можат да бидат спротивни броеви. На пример, $a=5, b=-5$.

Пример 5 Какви треба да бидат $a,b\in\mathbb{R}$, за да е точно $a\cdot b>0$.

Реалните броеви a,b треба да бидат со ист знак т.е. $a,b>0\vee a,b<0$.

Пример 6 Со кој од следниве реални броеви може да се измери растојанието во километри: 20,52; -50; -75 помеѓу два града? Да се образложи одговорот.

Со 20,52 km. Растојанието секогаш е позитивен број.

Пример 7 Славко отишол да купи подни плочки и му рекол на продавачот: „Сакам да купам -5 квадрати плочки. Кои ќе ми ги препорачате?“ Продавачот му се изнасмеал на Славко. Зошто му се смеел продавачот на Славко?

Плоштината секогаш се мери и изразува со позитивен број и тоа $5\,\mathrm{m}^2$ (се чита: 5 метри квадратни).

Задачи за самостојна работа:

1. Претстави ги на бројна оска следните ирационални броеви: $\sqrt{11},-\sqrt{11},\sqrt{7},-\sqrt{12}$.
2. Пресметај: а) $|-5,35+2,34|-\left|\frac{1}{2}-2\right|$; б) $|2,35\cdot3,2-6,34|+|6,2:2|$.
3. Запиши ги пократко следниве интервали: $\{x\mid x\in\mathbb{R},7<x<9\}$, $\{x\mid x\in\mathbb{R},0<x\leq8\}$, $\{x\mid x\in\mathbb{R},x<5\}$, $\{x\mid x\in\mathbb{R},x\geq-3\}$.
4. На бројна оска претстави ги следниве интервали:
   а) $[-2,5]\cap(-3,2]$; б) $[-2,+\infty)\cap(-5,5)$; в) $[-2,7)\cup(-5,5)$.

5. Провери ја точноста на следниве тврдења:

а) $|x+y| \leq |x|+|y|$; б) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ за $x=-\frac{5}{8}; y=2,52$.

6. Еден земјоделец требало да процени колку килограми пченица има во вреќата. Тој ја направил проценката, но се двоумел дали да каже -8 kg или 8 kg. Што е точно? Да се образложи одговорот.

7. Најди го односот на квадратот на периметарот и плоштината на еден круг. Каков број доби?

8. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Пресметај: а) $(125-105)\cdot 11+256:4$; б) $-5\cdot\left(-6+5\cdot\left(-4\right)\right)+\left(-5\right):5$;

в) $\dfrac{15-1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1\frac{2}{5}+\frac{1}{5}:\frac{1}{15}}$; г) $2,56-2,5\cdot\left(1,27+6,35\ :\ \left(-0,5\right)\right)$.

2. Определи НЗД и НЗС на броевите 250, 210, 220.

3. Подреди ги по големина реалните броеви почнувајќи од најмалиот:

$\sqrt{7}; -\sqrt{11}; \frac{1}{7}; -\frac{1}{5}; 3,555; -2,5(23)$.

4. Претстави го со дропка бесконечниот периодичен број 2,12(5).

5. Следните дропки претстави ги како децимални броеви: $\frac{2}{7}, -\frac{1}{5}, \frac{5}{11}, -\frac{9}{20}$. Кој од нив се конечни, а кој бесконечни децимални броеви?

6. Определи го интервалот: а) $(-7,10]\cup(-5,12)$; б) $(-3,+\infty)\cap[-1,2]$.

7. Двајца брачни партнери дома ги донесле своите плати. Сопругата примила 25 000 денари, но пред да се врати дома потрошила 3 000 денари на фустан, 500 денари во маркет. Сопругот примил 22 000 денари и пред да ја донесе платата дома потрошил 850 денари на пазар и седнал со колегите на кафе и пиво, каде потрошил 150 денари. Колку пари двајцата донеле дома?

8. Еден земјоделец потребно било да купи жица за да ја огради својата нива со два реда на жица. Нивата му била во вид на правоаголник, така што ширината му била 25,8 метри, а должината му била половина од ширината. Колку метри жица треба да купи земјоделецот?

9. Три автобуси во 6 часот наутро истовремено тргнале од автобуската станица во три различни насоки. Првиот автобус вратил после 1 час и 5 минути и повторно тргнал на пат после 10 минути. Другиот се вратил после 56 минути и повторно тргнал после 4 минути. Третиот се вратил после 48 минути и за 2 минути повторно тргнал на пат. За кое најкратко време сите три автобуси повторно ќе тргнат од автобуската станица во исто време?

10. Една човек со својот автомобил, првиот ден поминал $\frac{2}{5}$ од патот, вториот ден $\frac{1}{7}$ од патот, а третиот ден остатокот од 260 км. Колку литри нафта потрошил, ако на секои 10 км автомобилот трошел по $1\frac{1}{3}$ литри нафта? Колку пари потрошил, ако еден литар нафта чини 66 денари?

3

АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да множи и дели степени со исти основи или исти степенови показатели;
- да знае да степенува степен;
- да дефинира и препознава моном, да препознава слични мономи и да извршува операции со мономи;
- да дефинира полином и да извршува операции со полиноми;
- да знае да ги користи формулите за бином на квадрат, разлика на квадрати, бином на куб, збир и разлика на кубови;
- да разложува полином на множители;
- да дефинира алгебарска дропка и да извршува операции со алгебарски дропки.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 3

1. Степени. Множење, делење и степенување на степен

Знаеме дека збир на исти собироци може да се запише во облик на производ. Така,

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{5\ пати} \qquad 2\,.$$

- Но, како скратено ќе запишеш производ на исти множители?

Пример 1 Да го разгледаме производот $\underbrace{\qquad}_{3\ пати}$. Производот $4\cdot4\cdot4$ накратко може да се запише како $4\cdot4\cdot4=4^3$.

За записот 4^3 велиме дека е **краток запис на производот** $4\cdot4\cdot4$.

Ваквиот краток запис на производ од исти множители се нарекува **степен**.

Во записот 4^3, 4 е **основа на степенот**, додека 3 е **степенов показател или експонент**.

Основата на степенот е множителот којшто се повторува во производот, додека степеновиот показател ни „покажува“ колку пати се множи дадениот множител којшто е земен како основа на степенот.

!

- Производот $\underbrace{\quad\ \cdots\ }_{n\ пати}$, каде што a е произволен реален број, скратено може да се запише како степен во облик a^n.

$$\underbrace{\quad\ \cdots\ }_{n\ пати} \qquad\qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{N}$$

- **Степенот** a^n е симбол или краток запис на производот од n еднакви множители a.
- Во степенот a^n, a се нарекува **основа на степенот**, додека n се нарекува степенов показател или **експонент**.

1.1. Степен со експонент цел број

!

- Секој реален број a може да се запише во облик на степен како a^1.
- По дефиниција, се зема дека степенот $a^0=1$.

Степеновиот показател на степенот не мора секогаш да биде природен број. Степен може да се дефинира и кога експонентот е произволен цел број.

!

❖ Кога степеновиот показател е негативен цел број, тогаш важи

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Според претходно кажаното, обиди се да ги решиш следните задачи:

1 Претстави ги во облик на степен следните производи:

а) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$; б) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$; в) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;

г) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; д) $(x-2y) \cdot (x-2y) \cdot (x-2y)$.

- Што забележуваш?

Во прва задача под а) дадениот производ не може да се претстави во облик на еден степен, бидејќи множителите се различни.

2 Претстави ги во облик на производ од еднакви множители, следните степени:

а) $(-5)^5$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$; в) $(a-5)^4$; г) $\left(-\frac{1}{10}\right)^1$.

Кога зборуваме за степените, неопходно е да се забележи дека во „улога“ на еднакви множители можат да бидат и негативни реални броеви. Што се случува со знакот на степените во кои основата е негативен реален број?

За полесно утврдување да ги разгледаме степените на реалниот број (-1).

$(-1)^1 = (-1)$, $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)$,
$(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$, итн.

Може лесно да се заклучи дека кога (-1) се множи парен број пати, вредноста е 1, т.е. знакот е +. Додека кога (-1) се множи непарен број пати, вредноста е (-1), т.е. знакот е $-$.

Имајќи предвид дека парните природни броеви ги запишуваме во облик $2k$, а непарните природни броеви како $2k-1$, можеме слободно да запишеме со симболи:

$(-1)^{2k} = 1$ и $(-1)^{2k-1} = -1$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

Реши ја следната задача:

3 Пресметај:

а) $(-1)^{2020}$ б) $(-1)^{2021}$

Кај степените со исти основи може да се дефинираат повеќе операции како множење, делење и степенување.

1.2. Множење на степени со исти основи

Да ги помножиме степените a^n и a^m, каде што a е произволен реален број, а $m,n \in \mathbb{Z}$.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m} = a^{m+n}.$$

- Кога се множат степени со исти основи, основата на степенот останува иста, а степеновите показатели (експоненти) се собираат, т.е.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n},\ a \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{Z}.$$

4 Пресметај ги следниве производи:

а) $y^{12} \cdot y^4$; б) $x^2 \cdot x^{-4} \cdot x^5$; в) $a^{-2} \cdot a^{-5} \cdot a^5 \cdot a^2$; г) $(x-5)^{10} \cdot (x-5)^5$.

1.3. Делење на степени со исти основи

Размисли:

- Дали делењето на степените со исти основи можеме да го сведеме на множење на степени со исти основи?

- Ако се земе предвид дека $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, тогаш секако дека делењето на степени со исти основи би се разгледувало како множење на степени со исти основи.

Да ги поделиме степените a^n и a^m, каде што a е произволен реален број, но $a \neq 0$, а $m,n \in \mathbb{Z}$.

Имаме:

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}\ .$$

!

❖ Кога се делат два степени со исти основи, основата на степенот останува иста, а степеновите показатели (експоненти) се одземаат, т.е.

$$a^n : a^m = a^{n-m},\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z}.$$

За основата на степенот a , мора да важи дека $a \neq 0$, за да се избегне случајот кога делителот е 0.

Поради тоа, понатаму без посебно нагласување ќе сметаме дека делителот е секогаш различен од 0.

Реши ја следната задача:

5 Пресметај ги следниве количници:

а) $(-2)^6 : (-2)^3$; б) $(x+2)^4 : (x+2)^6$, $x \neq -2$; в) $\frac{y^{12}}{y^4}$, $y \neq 0$.

1.4. Степенување на степени

Од дефинирањето на степените знаеме дека $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ пати} = a^n$.

- Имајќи го ова во предвид можеме да утврдиме дека:

$$\left(a^2\right)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6.$$

❖ Степенувањето на степените не е еднозначно определено.

Имено, еден степен може да биде претставен на повеќе различни начини со помош на степенувањето.

Разгледај го следниот пример:

Пример 2 $a^{18} = a^{2 \cdot 9} = \left(a^2\right)^9 = \left(a^9\right)^2$, $a^{18} = a^{3 \cdot 6} = \left(a^3\right)^6 = \left(a^6\right)^3$, $a^{18} = a^{1 \cdot 18} = \left(a^1\right)^{18} = \left(a^{18}\right)^1$.

6 Следните изрази претстави ги во облик на степен со основа y :

а) $\left(y^2\right)^7$; б) $\dfrac{\left(y^2\cdot y\right)^6}{y^3}$, $y\neq 0$; в) $\dfrac{\left(y^4\cdot y^3\right)^6}{\left(y^2\right)^4}$, $y\neq 0$.

Досега ги разгледувавме операциите множење, делење и степенување за степени со исти основи.

- Што доколку разгледаме степени со различни основи и исти степенови показатели?

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 3

$$a^2\cdot c^2=\underbrace{a\cdot a}_{2}\cdot\underbrace{c\cdot c}_{2}=(ac)\cdot(ac)=(ac)^2$$

$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{\underbrace{a\cdot a}_{2}}{\underbrace{c\cdot c}_{2}}=\left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{a}{c}\right)=\left(\frac{a}{c}\right)^2,\ c\neq 0.$$

Од дадениот пример, можеме да заклучиме дека:

- При множење на степени со различни основи, а исти степенови показатели, основите се множат, а степеновиот показател останува ист.

$$a^n\cdot b^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ пати}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ пати}=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n\ пати}=(ab)^n.$$

- Сосема слично, при делење на степени со различни основи, а исти степенови показатели, основите се делат, а степеновиот показател останува ист.

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ пати}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ пати}}=\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ пати}=\left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b\neq 0.$$

!

- Формулите:

$$(ab)^n=a^n\cdot b^n \quad \text{и} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ b\neq 0$$

се формули за степенување на производ и количник, соодветно.

7 Упрости ги изразите:

а) $\dfrac{x^5\cdot y^5}{z^{10}}$, $z\neq 0$; б) $\dfrac{3^6\cdot 10^6}{5^6}$; в) $\dfrac{3^x\cdot 24^x}{6^{2x}}$.

❖ Со користење на правилото за степенување на производ може лесно да се утврди знакот на кој било степен во кој основата е негативен реален број, бидејќи

$$(-a)^n = ((-1)\cdot a)^n = (-1)^n \cdot a^n .$$

8 Степенувај ги следните изрази:

а) $\left(\frac{2x^2 \cdot y^3}{z^4}\right)^3$, $z \neq 0$ б) $\left(-\frac{x^5 \cdot y^3}{3z^2}\right)^4$, $z \neq 0$.

1.5. Запишување на природни броеви во облик $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$

Да разгледаме неколку природни броеви кои што ќе ги запишеме во развиена форма преку единици, десетки, стотки, илјади итн.

Пример 4

$$45 = 4 \cdot 10 + 5$$
$$235 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5$$
$$4235 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 .$$

На овој начин може да биде запишан кој било повеќецифрен природен број.

Во општ случај ќе важи следното разложување преку степените со основа 10:

за двоцифрен број $\overline{a_1 a_0} = a_1 \cdot 10 + a_0$;

за трицифрен број $\overline{a_2 a_1 a_0} = a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$;

за четирицифрен број $\overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 \cdot 1000 + a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$

$\vdots$

За произволен n-цифрен број за разложување во облик на производ на природен број и степен со основа 10 се користи следниот запис:

$$\overline{a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 .$$

9 Со помош на производ од природен број и степени со основа 10, запиши ги во развиена форма следните природни броеви:

а) 89567; б) 500603; в) 1000000.

Задачи за самостојна работа:

1. Утврди ја вистинитоста на следните искази:

   а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3$; б) $(-2)^4<(-2)^3$; в) $x^5\cdot y^2<0$ ако $x<0$, $y>0$.

2. Утврди ја вредноста на x:

   а) $6^x=1$; б) $x^{1000}=1$; в) $x^{2019}=-1$; г) $(-4)^x=-64$.

3. Изврши ги назначените операции:

   а) $x^{n-2}\cdot x^2, x\neq 0$; б) $(x\cdot y^2)^5\cdot x^3$; в) $\left(\frac{x^2}{2y^4}\right)^3, y\neq 0$.

4. Пресметај:

   а) $(x^n\cdot z^2)^3\cdot x^3$; б) $(-3x^3y^2z^4)^2$; в) $(2x^3)^7:(x^2)^5$, $x\neq 0$; г) $(x^{2n}):(x^3)^{3n}, x\neq 0$.

5. Степенувај ги следните изрази:

   а) $\left(-\frac{x^2\cdot y^3}{3z^4}\cdot\frac{9z}{xy}\right)^3$, $x,y,z\neq 0$; б) $\left(3abc^4\cdot\frac{2}{3a^2b^3c}\right)^3$, $a,b,c\neq 0$;

   в) $\left(\frac{\left(2a^2\cdot a^3\right)^2}{3a^2}\cdot\left(3a^3\cdot a^5\right)^3\right)^2$, $a\neq 0$.

6. Следниве броеви претстави ги како производ на природен број со степен со основа 10.

   а) 700000; б) 50000; в) 1000000.

7. Најди ја вредноста x во следните равенки:

   а) $a^{3x}=a^6$; б) $a^{3x}\cdot a^2=a^6$; в) $\left(a^x\cdot a^3:a^4\right)^3=\left(a^6\cdot a^3\right)^3$.

8. Докажи дека $|x^n|=|x|^n$!

2. Мономи. Операции со мономи

Константи се броевите $-2,\frac{1}{3},\pi,\ldots$. Симболите $x,y,z,a,b,c,\ldots$се нарекуваат променливи и најчесто се користат за означување на различни математички објекти. Константите и променливите многу често можат да бидат поврзувани со различни математички операции: собирање, одземање, множење, делење и степенување со експонент природен број и на тој начин да формираат алгебарски изрази. Алгебарските изрази се класифицирани во зависност операциите со кои се формирани.

!

- ❖ Алгебарскиот израз формиран од константи и променливи само со примена на операциите: множење и степенување со експонент природен број се нарекува **моном**.
- ❖ Како мономи се сметаат и константите кои стојат самостојно, само променливите или изрази формирани од производ на константа и степени на променливите со експоненти природни броеви.

Пример 1

- Мономи се изразите: $-\frac{1}{2}, y, \frac{1}{3}x, 0.9, 5x^2y^5, -2xyz\ldots$, додека изразите $-3x^2a+y$; $\frac{5x^2}{3a}$; $4a^{-1}x=\frac{4x}{a}$ не се мономи.
- ○ Зошто овие изрази не се мономи?

Обиди се да ја решиш следната задача:

1 Кои од следниве изрази се мономи?

а) $-\frac{1}{2}xy^2z$; б) $\frac{2}{xy^2z}$; в) $3a+5bx$; г) $-x^5y^2z\cdot\left(-\frac{2}{3}xz^2\right)$; д) 9; ѓ) f.

Да го разгледаме мономот $8y^3bx^2$.

$$8\,\underline{y^3bx^2}$$

Коефициент на мономот — Главна вредност на мономот

Коефициент на мономот е константата 8, додека главна вредност е производот на степените на променливите.

2 Да се одреди коефициентот и главната вредност на мономот:

а) $-\frac{1}{2}xy^2$; б) xy ; в) 5; г) $3z$.

- Коефициент и главна вредност на моном може да се одредува само доколку мономот е запишан во нормален вид.
- ○ Што е нормален вид на мономот?

Нормален вид на моном е облик во кој нема повеќе од една константа и во кој сите возможни производи на степени од променливи од ист тип се извршени.

Пример 2 Така мономот $2x^2y^3z$ е моном во нормален вид, додека мономот $2x^2y^3z\cdot 3xy$ не е во нормален вид, бидејќи константите 2 и 3 можат да се помножат, како и $x^2\cdot x=x^3$ и $y^3\cdot y=y^4$. На тој начин мономот $2x^2y^3z\cdot 3xy$ во нормален вид би бил запишан како $6x^3y^4z$.

3 Запиши ги во нормален вид мономите:

а) $-\frac{1}{2}xy^2z\cdot 2xy\cdot 3z$; б) $abc^4\cdot 2c^2\cdot ab$.

- Секој моном запишан во нормален вид има свој степен.

❖ **Степен на мономот** е збирот од степеновите показатели на променливите кои ја сочинуваат главната вредност на мономот.

❖ Доколку мономот е само константа, тогаш сметаме дека неговиот степен е 0, т.е. мономот е од нулти степен.

Пример 3 Степен на мономот $8y^3bx^2$ е $3+2+1=6$.

Степен на променлива во мономот е степеновиот показател на конкретната променлива.

Во мономот $8y^3bx^2$: 3 е степенот на променливата “y”

1 е степенот на променливата “b”

2 е степенот на променливата “x”

0 е степенот на променливата “a” (0 се смета како степен на која било променлива која не е содржана во главната вредност на мономот).

4 Одреди го степенот на мономите:

а) $2x^2y^2z^2$; б) $3xy^3z$; б) ab.

❖ Мономите можат да бидат слични, спротивни или еднакви мономи.

- **Слични мономи** се мономите кои имаат исти главни вредности.

Пример 4 Така, слични се мономите $7ax^2$, $-5ax^2$, $+\frac{1}{2}ax^2$.

- **Спротивни мономи** се мономите кои имаат исти главни вредности, додека коефициентите им се спротивни броеви.

Пример 5 Спротивни мономи се мономите: $3ab$ и $-3ab$, $-\frac{5}{3}xy^2$ и $+\frac{5}{3}xy^2$.

- **Еднакви мономи** се сличните мономи кои имаат и еднакви коефициенти.

Како и кај броевите, така и кај мономите можат да се дефинираат повеќе операции: собирање, одземање, множење и делење на мономи.

2.1. Собирање и одземање на мономи

❖ Операциите собирање и одземање на мономи можат да се дефинираат само кај сличните мономи, т.е. само кај мономите кои имаат еднакви главни вредности.

!

❖ Два слични мономи се собираат (одземаат) така што коефициентите се собираат (одземаат), а главната вредност останува иста.

Одземањето на мономи се сведува на собирање на мономи, бидејќи одземањето на реални броеви е всушност собирање со нивните спротивни броеви.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 6 а) $5ax^4+\left(-2ax^4\right)+9ax^4=\left(5+\left(-2\right)+9\right)ax^4=12ax^4$;

б) $3x^4y-\left(-2x^4y\right)-9x^4y=\left(3-\left(-2\right)-9\right)x^4y=-4x^4y$.

5 Собери ги мономите $5a^2x, -ax, -2xa^2, 3xa, -a^2x$.

2.2. Множење на мономи

За операцијата множење на два мономи, точно е:

!

❖ Кои било два мономи можат да се помножат, така што се множат нивните коефициенти и нивните главни вредности.
При множењето на главните вредности, треба да се внимава на множењето на степените со иста основа, додека другите само се допишуваат како множители.

Пример 7

а) $6ab \cdot 3a^2 = (6 \cdot 3)a^{1+2}b = 18a^3b$;

б) $5x^2y^2 \cdot (-2axy^3) = (5 \cdot (-2))x^{2+1}y^{2+3}a = -10x^3y^5a$.

6 Помножи ги мономите $-3a^2bc^3$, $-abx$, $2xa^2c$.

2.3. Делење на мономи

За операцијата делење на два мономи, точно е следново:

! ❖ Кои било два мономи можат да се поделат, така што се делат нивните коефициенти и нивните главни вредности.
При делењето на главните вредности, треба да се внимава на делењето на степените со иста основа.

Пример 8 а) $3a^5b^2 : (-6a^3b^2) = (3 : (-6))a^{5-3}b^{2-2} = -\frac{3}{6}a^2 = -\frac{1}{2}a^2$;

б) $6a^3b^2c : 5ab^3 = \frac{6}{5}a^{3-1}b^{2-3}c = \frac{6}{5}a^2b^{-1}c = \frac{6a^2c}{5b}$;

в) $5x^2y^3 : (-2axy^2) = (5 : (-2))x^{2-1}y^{3-2}a^{0-1} = -\frac{5}{2}xya^{-1} = -\frac{5}{2} \cdot \frac{xy}{a} = -\frac{5xy}{2a}$.

7 Подели ги мономите $3a^2bc, -abx$.

2.4. Степенување на моном

! ❖ Моном се степенува со степенов показател природен број, така што се степенува и коефициентот и главната вредност на мономот.

Пример 9 а) $(-2ax^2y^3)^2 = (-2)^2(a)^2(x^2)^2(y^3)^2 = +4a^2x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2} = 4a^2x^4y^6$;

б) $(-3x^3y^4)^3 = (-3)^3(x^3)^3(y^4)^3 = -27x^{3\cdot 3}y^{4\cdot 3} = -27x^9y^{12}$.

Внимавајте на менувањето на знаците при степенувањето.

8 Степенувај го мономот $-3a^2b^3c$ со експонент 5.

Забелешка:

- Треба да се нагласи дека збирот, разликата на слични мономи или производот на два мономи е исто така моном.
- Степенот на моном исто така е моном.
- Количникот на два мономи не мора да биде моном, види пример 8.

9 Изврши ги наведените операции:

а) $-x^4y^2+6x^4y^2-9x^4y^2$ б) $-\frac{1}{3}xy^2z\cdot\frac{3}{4}x^2y^3z^2$

в) $3xy^6z^4:5xy^3z^2$ г) $\left(-\frac{1}{3}xy^2z\right)^2$.

Задачи за самостојна работа:

1. Да се одреди коефициентот и главната вредност на мономот:

а) $\frac{3}{5}x^6y^5z^{10}$; б) $20a^4b^2c$; в) b^2.

2. Да се сведе во нормален вид мономот:

а) $2a^2b2ab^2$; б) $\frac{1}{2}a^2b2b^3$; в) $\frac{2}{3}b^2b^6$.

Потоа најди го спротивниот моном на секој од мономите.

3. Дали се слични мономите?

а) $-2a^3b^2xab$ и $5\cdot 2abx^2a^2b^3$; б) ab^2xy^2b и $2yabbxy3b$.

4. Изврши ги назначените операции:

а) $-5ab^3\cdot\left(\frac{1}{10}a^3b\right)\cdot\left(-5a^2b^2\right)$; б) $\left(-\frac{1}{5}a^4b^2\right)^2$; в) $\frac{3}{5}x^6y^5z^{10}:\left(-\frac{9}{20}x^2yz^5\right)$.

5. Изврши ги операциите и запиши го изразот во поедноставна форма:

а) $\frac{1}{2}ab(-4a)+2b\left(-\frac{1}{2}a^2\right)+3a^2b-\left(3a^2b-5a^2b\right)$;

б) $\frac{1}{2}a\left(-2ab^2\right)^3+3b^2(-ab)^4+3\left(ab^3\right)^2a^2-2a^2b^4\left(-3a^2b^2\right)$;

в) $\left[\left(\frac{3}{4}x^2\right)\left(-2xy^2\right)+\left(\frac{1}{5}x^4y^3\right):\left(-\frac{2}{5}xy\right)\right]:(-xy)+\frac{1}{3}y(3x)^2$;

г) $\left[\left(3x^2y-\frac{5}{2}x^2y\right)^3:\left(-\frac{1}{4}x^4y^2\right)-\left(+\frac{1}{3}y\right)\left(-x^2\right)\right]\left(-xy^2\right)+\left(\frac{1}{2}xy\right)\left[\frac{5}{6}xy+\frac{1}{6}xy\right]^2$;

д) $\left\{\frac{3}{2}\left[\left(-\frac{3}{2}x^3y^2\right)^2:\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)^3-\frac{1}{3}y\right]^3\cdot(-x)^3\right\}:\left(\frac{3}{2}xy\right)^3-\frac{5}{9}\left(-x^3y+2x^3y\right)^2:\left(-x^6y^2\right)$.

3. Полиноми. Собирање и множење на полиноми

Знаеме дека, моном е производ од константи и степени на променливи со експонент природен број.

Да го разгледаме следниот пример.

Пример 1

Да ги разгледаме мономите: $P = 4xy^2$, $Q = -\frac{3}{8}x^2y$, $R = -4x^3y^2$, $T = xy$;

Изразот $P + Q = 4xy^2 + \left(-\frac{3}{8}x^2y\right)$ како и други изрази кои всушност се збир (разлика) формиран од два мономи се викаат **биноми**.

Изразот $P + Q + R = 4xy^2 + \left(-\frac{3}{8}x^2y\right) + \left(-4x^3y^2\right)$ како и други изрази кои се збирови формирани од три мономи се викаат **триноми.**

Изразот $P + Q + R - T = 4xy^2 + \left(-\frac{3}{8}x^2y\right) + \left(-4x^3y^2\right) - xy$ е **полином** бидејќи е збир од четири мономи.

!

- Збир на конечен број мономи се вика **полином** или цел **алгебарски израз**.
- Збирот на два мономи се вика **бином**, а збирот на три мономи се вика **трином**.
- Збирот на четири и повеќе мономи се вика **полином**.

Во претходната единица научи да сведуваш моном во нормален вид и да одредуваш степен на моном. Да го разгледаме следниот пример во којшто ќе одредиме степен на полином.

Пример 2 Степенот на полиномот $5x^2y + 3ab^5$ се определува на следниот начин:

$$\underbrace{5x^{2}y}_{\text{степен } 2+1=3} + \underbrace{3ab^{5}}_{\text{степен } 1+5=6}$$

степен на полиномот е 6

!

- ❖ **Полиномот е во нормален вид** доколку сите мономи се во нормален вид.
- ❖ **Степен на полином во нормален вид** е најголемиот од степените на мономите со кои е формиран полиномот.

1 Одреди го степенот на полиномите:

а) $2a+2b+\frac{1}{2}ab-2a^2b^2$; б) $-81x^2y^3-\frac{27}{2}xy^6-27y^4$.

- Во зависност од степените на мономите кои го сочинуваат полиномот, полиномите можат да бидат:

- **Хомогени полиноми** – полиномите во кои сите мономи имаат еднаков степен.

Пример 3 $\underset{\text{степен 2}}{6xy} + \underset{\text{степен 2}}{3x^2} - \underset{\text{степен 2}}{4ab}$;

- **Комплетни полиноми** – полиномите во кои се појавуваат сите степени (од најмалиот до најголемиот) на дадена променлива.

Пример 4 $\underset{\text{степен 3}}{3x^3} + \underset{\text{степен 1}}{2x} - \underset{\text{степен 2}}{5x^2} + \underset{\text{степен 0}}{7}$;

- **Подредени полиноми** – полиномите во кои се појавуваат сите степени на дадена променлива и притоа се подредени, почнувајќи од најголемиот до најмалиот степен.

Пример 5 $\underset{\text{степен 3}}{3x^3} - \underset{\text{степен 2}}{5x^2} + \underset{\text{степен 1}}{2x} + \underset{\text{степен 0}}{7}$;

2 Во зависност од степените на мономите кои го сочинуваат полиномот, какви се следните полиноми:

а) $5y^5-2y^2+y^3-6y^4-y+2$; б) $5a^5-2a^4+a^3-6a^2-a+1$; в) $-6ay^4-b^3y^2+ab^3c$.

Бидејќи секој полином е збир од конечен број мономи, сите операции со полиноми се дефинираат преку операциите со мономи.

3.1. Собирање на полиноми

Операцијата собирање на полиноми се сведува на собирање на слични мономи.

! Два полиноми се собираат така што се собираат сличните мономи од дадените полиноми.

Собирањето на полиноми ќе го објасниме со следниот пример:

Пример 6

$(x+3y)+(y-6x)-(x-y+2) = \underline{x}+3y+y-\underline{6x}-\underline{x}+y-2 =$

Ослободување од заграда без промена на знаци

промена на знаци:

$x \to -x$

$-y \to +y$

$+2 \to -2$

$= (1-6-1)x+(3+1+1)y-2 = -6x+5y-2$

3 Собери ги полиномите $5x^5-ax+a^2, 3x^2+2ax+a^2, 4ax-3x^2-2$.

3.2. Множење на моном со полином

За да ја извршуваш операцијата множење на моном со полином треба да го знаеш следното:

! Полином со моном се множи, така што секој од мономите кои го сочинуваат полиномот се множи со дадениот моном.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 7

множење

$$2xy\cdot(a+b-2cx)=2xy\cdot a+2xy\cdot b+2xy\cdot(-2cx)=2axy+2bxy-4cx^2y$$

множење

$$(4a-3bx)\cdot 2abx = 4a\cdot 2abx+(-3bx)\cdot 2abx=8a^2bx-6ab^2x^2.$$

Множењето на полином со моном, всушност се сведува на примена на дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C.$$

4 Помножи го полиномот $2x^3-x^2y+3xy^2-5y^3$ со мономот $-2x^2y$.

5 Изврши ги назначените операции:

а) $(3x^2y+2y^3)+(-3x^2y+2xy^2-y^3+2)$; б) $\left(3a^4b^2+\frac{2}{3}a^3b^3+4a^2b^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)$.

3.3. Множење на полиноми

За множење на полином со полином, точно е следното:

! Множењето на полином со полином, всушност се сведува на примена на дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето, со кое постапката се сведува на неколку примени на постапката за множење на полином со моном.

Ќе го разгледаме следниот пример, за да горенапишаното објаснување практично го примениме.

Пример 8

$$(x+y)\cdot(2x-y+1)=x\cdot(2x-y+1)+y\cdot(2x-y+1)=2x^2-xy+x+2xy-y^2+y=2x^2+xy+x+y-y^2$$

множење

б) Да го пресметаме производот на полиномите $22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$ и $4b^2+1$.

Најпрво, првиот множител, полиномот $22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$ ќе го помножиме со секој од мономите на вториот множител, биномот $4b^2+1$, т.е.

$$\left(22b^2-12b^3+8b^4-3b+5\right)\cdot 4b^2+\left(22b^2-12b^3+8b^4-3b+5\right)\cdot 1,$$

на овој начин постапката се сведува на множење на полином со моном, од каде:

$$22b^2\cdot 4b^2-12b^3\cdot 4b^2+8b^4\cdot 4b^2-3b\cdot 4b^2+5\cdot 4b^2+22b^2\cdot 1-12b^3\cdot 1+8b^4\cdot 1-3b\cdot 1+5\cdot 1$$

од каде се добива:

$$88b^4-48b^5+32b^6-12b^3+20b^2+22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$$

па со собирање на сличните мономи добиваме:

$$\underline{88b^4}-48b^5+32b^6-\underline{\underline{12b^3}}+\underline{\underline{\underline{20b^2}}}+\underline{\underline{\underline{22b^2}}}-\underline{\underline{12b^3}}+\underline{8b^4}-3b+5=$$

$$=32b^6-48b^5+96b^4-24b^3+42b^2-3b+5.$$

6 Изврши ги назначените операции, а потоа доведи ги полиномите во подреден нормален вид

а) $\left(x^5+\frac{2}{3}x^3-2x^2+4\right)\cdot\left(2x^2+1\right)$; б) $\left(x^2+1\right)\left(y-2\right)-\left(3xy+6\right)\left(\frac{1}{3}x-2\right)+2x\left(x+1\right)$.

!

❖ **Два полиноми запишани во нормален вид** со исти променливи се **идентични или еднакви** ако коефициентите пред соодветните променливи со ист степенов показател се еднакви.

Пример 9

Да ги разгледаме полиномите $\left(x^5+3x-2\right)\cdot\left(2x^2+1\right)+4\left(-\frac{1}{2}x^7+x^2\right)$ и x^5+6x^3+3x-2.

Со извршување на наведените операции во полиномот

$$\left(x^5+3x-2\right)\cdot\left(2x^2+1\right)+4\left(-\frac{1}{2}x^7+x^2\right)$$

и негово доведување во нормален вид се добива полиномот x^5+6x^3+3x-2, т.е. двата полинома се еднакви.

7 Дали полиномите $\left(3x^2y+2y^3\right)+\left(-3x^2y+2xy^2-y^3+2\right)$ и $\left(x^2+1\right)\left(y-2\right)-\left(3xy+6\right)\left(\frac{1}{3}x-2\right)+2x\left(x+1\right)$ се еднакви?

Задачи за самостојна работа:

1. Сведи го во нормален вид полиномот:
   а) $\left(x^5+6x^3+3x-2\right)-\left(4x^3+x-8\right)$
   б) $\left(\frac{1}{3}ab^2-\frac{1}{4}b^3\right)-\left(-\frac{5}{3}a^3+\frac{1}{3}ab^2\right)-\left(\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}b^3\right)+\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{5}{2}a^2b\right)$.
2. Пресметај ја бројната вредност на полиномот:
   а) $5xyz-\left(2x^2yz+5yz-\left(x^2y^3z-3xy-\left(y^2-z^2\right)\right)\right)$, за $x=-2, y=3, z=-1$;
   б) $3ab-\left(4a^2bc-2bc-\left(-3a^2b^3c-ab^3-\left(abc^2+2b^2-\left(2abc-c\right)\right)\right)\right)$,
   за $a=-1, b=1, c=-2$.
3. Изврши ги назначените операции, а добиените полиноми запиши ги во нормален вид:
   а) $\frac{3}{2}xy-\frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}y\left(-xy\right)+2xy^2-\frac{3}{2}x\left(-\frac{1}{3}y^2\right)\right]-xy$
   б) $\left(2+a^2\right)\left(a+b\right)+\frac{1}{2}\left(a+2b^2\right)\left(b-2a^2\right)-b\left(a^2+b^2\right)$.
4. Одреди ги реалните броеви m, n и p така што полиномите ќе бидат идентични:
   $P(x)=\left(mx^2+nx+p\right)\cdot\left(3x-2\right)$ и $Q(x)=6x^3-13x^2+9x-2$.
5. Дадени се полиномите
   $A=x^2-2xy+2y-5; B=-3x^2-xy-3x-2; C=2x^2-3xy+y^2$.
   Пресметај: а) $A-(B+C)$; б) $C\cdot(B-A)$; в) $A-B+C$.
6. За полиномите од задача 4 провери дали се точни следните равенства:
   а) $A+(B+C)=(A+B)+C$; б) $A\cdot B=B\cdot A$; в) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

4. Формули за скратено множење

При извршување на операцијата множење на полиноми, честопати се среќаваме со специјални случаи на полиноми кои можат да се решат со користење на одредени формули кои ја скратуваат постапката на решавање.

Да се задржиме на некои специјални случаи што се среќаваат при множење на полиноми, кои многу често ги применуваме. Идентитетите кои ги претставуваат тие специјални случаи на множењето се викаат **формули за скратено множење.**

Знаеме дека $A^2 = A \cdot A$. Доколку $A = x+3$, тогаш

$$A^2 = (x+3)^2 = (x+3)\cdot(x+3) = x\cdot x + x\cdot 3 + 3\cdot x + 3\cdot 3 = x^2 + 6x + 9.$$

Добиениот резултат можеме да го запишеме како:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2.$$

!

Формулите:

$$\left.\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2\\ (A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2\end{aligned}\right]$$

се познати како формули за **бином на квадрат**.

!

Формулите:

$$\left.\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\\ (A-B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3\end{aligned}\right]$$

се познати како формули за **бином на куб.**

❖ Формулите за бином на квадрат и бином на куб се познати како **формули за скратено множење.**

Пример 1 Да ги степенуваме следните биноми:

а) $(3x-5y)^2$ б) $(x-2)^3$.

Со примена на формулата за бином на квадрат:

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, доколку $A = 3x$, а $B = 5y$ добиваме:

$(3x-5y)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2$,

од каде со степенување, имаме:

$$(3x-5y)^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=9x^2-30xy+25y^2.$$

б) со примена на формулата за бином на куб:

$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ и замена $A=x$, а $B=2$ добиваме:

$$(x-2)^3=(x)^3-3\cdot(x)^2\cdot(2)+3\cdot(x)\cdot(2)^2-(2)^3=x^3-6x^2+12x-8.$$

1 Со примена на формулите за скратено множење, пресметај:

а) $(2ab^2-a^3b)^2$; б) $\left(\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}b^3\right)^2$; в) $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}y\right)^3$.

Пример 2 Да го пресметаме производот:

$$(x+4y^2)\cdot(x-4y^2)=x^2-4xy^2+4xy^2-16y^4=(x)^2-(4y^2)^2.$$

2 Пресметај ги производите:

а) $(2a^3-3b^2)(2a^3+3b^2)$; б) $(3x^2+2y^3)(3x^2-2y^3)$.

По извршеното множење $(2a^3-3b^2)(2a^3+3b^2)$ добиваме:

$$(2a^3-3b^2)(2a^3+3b^2)=4a^6-9b^4=(2a^3)^2-(3b^2)^2.$$

Сосема слично се добива и за производот $(3x^2+2y^3)(3x^2-2y^3)$;

Во општ случај за производи на биноми од ваков облик важи формулата:

!

Формулата:

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$$

е позната како формула за **разлика на квадрати**.

Пример 3 Да ги пресметаме производите:

а) $(2a^3+3b^2)(4a^6-6a^3b^2+9b^4)$; б) $(3x-2y^2)(9x^2+6xy^2+4y^4)$.

По извршеното множење $(2a^3+3b^2)(4a^6-6a^3b^2+9b^4)$ добиваме:

$$\left(2a^3+3b^2\right)\left(4a^6-6a^3b^2+9b^4\right)=8a^9-12a^6b^2+18a^3b^4+12a^6b^2-18a^3b^4+27b^6=$$
$$=8a^9+27b^6=$$
$$=\left(2a^3\right)^3+\left(3b^2\right)^3.$$

Сосема слично се добива и за производот $\left(3x-2y^2\right)\left(9x^2+6xy^2+4y^4\right)=\left(3x\right)^3-\left(2y^2\right)^3$.

Во општ случај за пресметување на производи од ваков облик се користат формулите за збир и разлика на кубови.

!

Формулите:

$$A^3-B^3=\left(A-B\right)\left(A^2+AB+B^2\right)$$
$$A^3+B^3=\left(A+B\right)\left(A^2-AB+B^2\right).$$

се формули за претставување на **разлика на кубови** и **збир на кубови** во облик на производ, соодветно.

3 Пресметај:

а) $\left(-\frac{4}{9}ab^2+1\right)\left(1+\frac{4}{9}ab^2\right)$; б) $\left(-5-\frac{1}{5}x^4\right)\left(-5+\frac{1}{5}x^4\right)$;

в) $\left(3x^2y^3+4x\right)\cdot\left(9x^4y^6-12x^3y^3+16x^2\right)$.

Задачи за самостојна работа:

1. Степенувај ги биномите:

а) $\left(x^2y-2xy^3\right)^2$; б) $\left(2xy^2-x^2\right)^3$; в) $\left(-\frac{3}{2}x+2y\right)^3$.

2. Со примена на формулите за скратено множење, помножи ги полиномите:

а) $\left(\frac{2}{3}x-y\right)\cdot\left(y+\frac{2}{3}x\right)$; б) $\left(a^2+3b+c\right)\cdot\left(c+3b-a^2\right)$;

в) $\left(-5-\frac{1}{5}x^4\right)\cdot\left(25-x^4+\frac{1}{25}x^8\right)$; г) $\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2y\right)\cdot\left(\frac{9}{4}x^6-\frac{3}{8}x^5y+\frac{1}{16}x^4y^2\right)$.

3. Пресметај на најбрз начин: а) 79^2; б) 1999^2; в) $42\cdot 38$; г) $5{,}99\cdot 6{,}01$; д) 751^2-249^2.

4. Степенувај го триномот:

а) $\left(2a^2b^2+ab-3\right)^2$; б) $\left(4x^2+y^2-4xy\right)^2$.

5. Кои од наведените биноми $A=x-1$, $B=-x-1$, $C=1-x$, $D=x+1$ имаат еднакви квадрати?

6. Упрости го изразот:

а) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$; б) $(x-y+z)^2+(x+y)^2-(x+z)^2$.

7. Изврши ги назначените операции. Каде што имаш можност искористи ги формулите за скратено множење и упрости ги изразите:

а) $\left(a+\frac{3}{2}b\right)\left(\frac{3}{2}b-a\right)-\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^2(-3)-2a(a+b)$;

б) $(a+b^2)^3-b^4\left[3\left(a-\frac{1}{2}\right)+(b+1)(b-1)\right]+\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2+b^2)^2$;

в) $(x^2-3x+2)^2+x^2(x+2)(x-3)-2x(x-1)^3+x(x^2+10)$.

8. Докажи ги следните равенства:

а) $a^4-1=(a-1)(a^2+1)(a+1)$; б) $(x-y)^2=(y-x)^2$; в) $(x+y)^2=(-x-y)^2$.

5. Делење на полиноми

Делењето на мономи се сведува на делење на коефициентите според правилото за делење на реални броеви и делење на главните вредности според правилото за делење на степени.

Така $\frac{3}{4}a^3b^2c:\left(\frac{1}{4}abc\right)=\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{4}\right)(a^3b^2c):(abc)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}\right)a^{3-1}b^{2-1}c^{1-1}=3a^2bc^0=3a^2b.$

- Бидејќи полиномите се збир на конечен број мономи, делењето на полином со моном се сведува на делење на секој од мономите од полиномот со мономот којшто е во улога на делител, а добиените количници се собираат.

Оваа постапка е согласно дистрибутивниот закон на делењето во однос на собирањето:

$$(A+B):C=A:C+B:C.$$

Пример 1

$$\left(3a^2+5ab-7a^3\right):3a=a+\frac{5}{3}b-\frac{7}{3}a^2$$

делење

количникот е полином

$$\left(3a^2-ay^3\right):a^2=3-a^1y^3=3-\frac{y^3}{a}$$

делење

Количникот не е полином

Пример 2 Да го пресметаме количникот: $\left(3a^4b^2+\frac{2}{3}a^3b^3+4a^2b^4\right):\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)$.

Според дистрибутивниот закон се добива:

$$3a^4b^2:\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)+\frac{2}{3}a^3b^3:\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)+4a^2b^4:\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right).$$

Според правилото за делење на моном со моном:

$$3:\left(-\frac{1}{4}\right)a^4b^2:\left(a^2b^2\right)+\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{4}\right)a^3b^3:\left(a^2b^2\right)+4:\left(-\frac{1}{4}\right)a^2b^4:\left(a^2b^2\right),$$

од каде добиваме: $-12a^2-\frac{8}{3}ab-16b^2$.

Доколку направиме проверка на решението имаме:

$$\left(-12a^2-\frac{8}{3}ab-16b^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}a^2b^2\right)=3a^4b^2+\frac{2}{3}a^3b^3+4a^2b^4.$$

1 Пресметај ги количниците:

а) $\left(9x^5y^3+27x^4y^4+15x^3y^5\right):\left(-3x^3y\right)$;

б) $\left(\frac{3}{8}x^4y^3-\frac{3}{2}x^3y^2-\frac{1}{8}x^3y^5\right):\left(\frac{1}{4}x^3y^2\right)$.

При делење на полином со полином, постапката не е толку едноставна како при делење на полином со моном.

Постапката на делење на полином со полином, се состои од следните чекори:

1) Најпрво, за да се подели полином со полином, треба степенот на полиномот-деленик да биде поголем или еднаков со степенот на полиномот-делител.
2) Полиномите треба да бидат подредени, почнувајќи од најголемиот кон најмалиот степен на дадена променлива.
3) Делењето секогаш се изведува така што првиот моном од делеником се дели со првиот моном од делителот, а добиениот количник се множи со сите мономи од делителот и се одзема од делеником. Постапката се повторува се додека не заврши множењето, односно додека не се добие полином со помал степен од степенот на делителот.

Постапката ќе ја опишеме во следниот пример:

Пример 3 Да ги поделиме полиномите:

$$\left(22b^2-12b^3+8b^4-3b+5\right):\left(4b^2+1\right).$$

Во овој пример степените во делеником $22b^2-12b^3+8b^4-3b+5$, најпрво треба да ги подредиме, почнувајќи од највисокиот, па имаме: $8b^4-12b^3+22b^2-3b+5$.

Значи треба да го пресметаме количникот $\left(8b^4-12b^3+22b^2-3b+5\right):\left(4b^2+1\right)$.

- Сега првиот моном од делеником $8b^4$ го делиме со првиот моном од делителот $4b^2$, т.е. $8b^4:4b^2=2b^2$. Добиениот количник $2b^2$ го множиме со делителот $2b^2\cdot\left(4b^2+1\right)=8b^4+2b^2$. Добиениот производ го одземаме од делеником

$$\left(8b^4-12b^3+22b^2-3b+5\right)-\left(8b^4+2b^2\right)=-12b^3+20b^2-3b+5.$$

Добиената разлика е првиот остаток при делењето и сега е во улога на втор деленик.

- Претходната постапка ја повторуваме, така што сега во улога на деленик ни е $-12b^3+20b^2-3b+5$. Првиот моном од делеником $-12b^3$ го делиме со првиот моном од делителот $4b^2$, $-12b^3:4b^2=-3b$. Добиениот количник $-3b$ го множиме со делителот $-3b\cdot\left(4b^2+1\right)=-12b^3-3b$. Добиениот производ го одземаме од делеником $-12b^3+20b^2-3b+5-\left(-12b^3-3b\right)=20b^2+5$. Добиената разлика е вториот остаток при делењето и сега е во улога на трет деленик.

- Претходната постапка ја повторуваме, така што сега во улога на деленик ни е $20b^2+5$. Првиот моном од делеником $20b^2$ го делиме со првиот моном од делителот $4b^2$, $20b^2:4b^2=5$. Добиениот количник 5 го множиме со делителот $5\cdot\left(4b^2+1\right)=20b^2+5$. Добиениот производ го одземаме од делеником

$20b^2+5-\left(20b^2+5\right)=0$. На овој начин делењето на полиномите е завршено и добиениот количник е збирот од количниците кои беа добиени при трите делења т.е. $2b^2-3b+5$.

Ако направиме проверка добиваме:

$$\left(2b^2-3b+5\right)\cdot\left(4b^2+1\right)=22b^2-12b^3+8b^4-3b+5 .$$

Опишаната постапка практично се изведува на следниот начин:

$$\begin{array}{l}
\left(\ 8b^4-12b^3+22b^2-3b+5\right):\left(4b^2+1\right)=2b^2-3b+5\\
\underline{\pm 8b^4 \qquad\qquad \pm 2b^2}\\
\qquad\quad -12b^3+20b^2-3b+5\\
\qquad\quad \underline{\mp 12b^3 \qquad\quad \mp 3b}\\
\qquad\qquad\qquad +20b^2+5\\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 20b^2\pm 5}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Во оваа постапка се среќаваат знаци од обликот $\pm$ и $\mp$. Вториот знак се добива поради одземањето на добиениот производ од полиномот. Односно одземањето на полиномот се сведува на собирање со спротивен знак.

При делење на два полиноми може да се добие и остаток.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 4

$$\begin{array}{l}
\left(3x^6+x^2-\dfrac{3}{2}x+20\right):\left(x^2-x+1\right)=3x^4+3x^3-3x-2\\
\underline{\pm 3x^6\mp 3x^5\pm 3x^4}\\
\qquad\quad 3x^5-3x^4+x^2-\dfrac{3}{2}x+20\\
\qquad \underline{\pm 3x^5\mp 3x^4\pm 3x^3}\\
\qquad\qquad\qquad -3x^3+x^2-\dfrac{3}{2}x+20\\
\qquad\qquad\qquad \underline{\mp 3x^3\pm 3x^2\mp 3x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2x^2+\dfrac{3}{2}x+20\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\mp 2x^2\pm 2x\mp 2}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\dfrac{1}{2}x+22
\end{array}$$

Ова значи дека при делење на полиномот $3x^6+x^2-\frac{3}{2}x+20$ со полиномот x^2-x+1 се добива количник $3x^4+3x^3-3x-2$ и остаток $-\frac{1}{2}x+22$.

Во овој случај при проверка имаме:

$$\left(3x^6+x^2-\frac{3}{2}x+20\right)=\left(3x^4+3x^3-3x-2\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}x+22\right).$$

2 Изврши го делењето:

а) $\left(3a-4a^3+a^5-6\right):\left(a-2\right),\ a\neq 2$;

б) $\left(10a^4-15a^3-19a^2-7a-16\right):\left(5a^2+3\right)$;

в) $\left(-7b^3-b^2+2b^4+4b-3\right):\left(2b-1\right),\ \ b\neq\frac{1}{2}$;

г) $\left(x^5+\frac{2}{3}x^3-2x^2+4\right):\left(1+2x^2\right)$.

При делењето на полиноми, во некои примери е возможно да се применат и формулите за скратено множење.

Таков е следниот пример.

Пример 5 Да го пресметаме количникот $\left(36x^2-y^2\right):\left(6x-y\right)$.

Со користење на постапката за делење на полиноми имаме:

$$\begin{array}{l}\left(36x^2-y^2\right):\left(6x-y\right)=6x+y\\ \underline{\pm 36x^2\mp 6xy}\\ \qquad\quad 6xy-y^2\\ \qquad\ \underline{\pm 6xy\mp y^2}\\ \qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

Меѓутоа ако се земе предвид дека:

$\left(36x^2-y^2\right)=\left(\left(6x\right)^2-y^2\right)=\left(6x-y\right)\left(6x+y\right)$, добиваме:

$$\left(36x^2-y^2\right):\left(6x-y\right)=\left(\left(6x\right)^2-y^2\right):\left(6x-y\right)=\left(6x-y\right)\left(6x+y\right):\left(6x-y\right)=\left(6x+y\right).$$

3 Пресметај го количникот:

а) $\left(9x^2-6xy+y^2\right):\left(3x-y\right),\ \ y\neq 3x$;

б) $\left(a^2-8ab+16b^2\right):\left(a-4b\right),\ \ a\neq 4b$;

в) $\left(16x^4-y^4\right):\left(2x-y\right),\ \ y\neq 2x$.

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај го количникот на полиномот со мономот за $x, y \neq 0$.

а) $\left(6x^4y^2+8x^3y^3+4x^2y^4\right):\left(-2x^2y^2\right)$; б) $\left(4x^5y^3+\frac{5}{2}x^4y^4-x^3y^5\right):\left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)$.

2. Пресметај го количникот на полиномите:

а) $\left(6a^4-5a^3-23a^2+20a-4\right):(3a-1)$, $a\neq\frac{1}{3}$;

б) $\left(a^4+\frac{4}{9}a-1-\frac{5}{3}a^3\right):\left(a-\frac{2}{3}\right)$, $a\neq\frac{2}{3}$;

в) $\left(\frac{1}{2}x^5-x^4+\frac{5}{2}x-3\right):\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)$, $x\neq\pm\sqrt{2}$;

г) $\left(4y^4-\frac{5}{4}y^2-9y-9\right):\left(y+\frac{3}{4}\right)$, $y\neq-\frac{3}{4}$.

3. Провери дали полиномот $5a^5-2a^4+a^3-6a^2-a+1$ се дели со биномите:

а) $a-2$; б) $a+3$; в) $a-1$.

4. Изврши го делењето со користење на формулите за скратено множење:

а) $(4x^2-12xy+9y^2):(2x-3y)$; б) $(x^3+12x^2y+12xy^2+8y^3):(x+2y)$;

г) $(4x^2-9y^2):(2x+3y)$; д) $(8x^3+27y^3):(4x^2-6xy+9y^2)$.

5. Да се одредат реалните броеви a и b така што полиномот $3x^4+ax^3+bx^2+4x-2$ е делив со полиномот x^2-2x+2.

6. Ако полиномот $P(x)=6x^4-7x^3+mx^2+3x+2$ е делив со полиномот $Q(x)=x^2-x+n$, одреди ги коефициентите m и n.

6. Разложување на полиноми на прости множители со извлекување заеднички множител пред заграда

6.3. Извлекување пред заграда заеднички множител за сите мономи во полиномот

❖ Разложувањето на полиномите на прости множители со извлекување заеднички множител пред заграда не претставува ништо друго, туку примена на дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 1 $\underline{x}a+\underline{x}b+\underline{x}c=x\cdot(a+b+c)$.

Во дадениот пример кој се состои од три собироци, очигледно е дека x е заеднички множител на секој од собироците, па поради тоа се извлекува пред заграда и полиномот е запишан како производ од неразложливи или прости множители.

Да го разгледаме полиномот во следниот пример:

Пример 2 Во полиномот $2a^3b+4a^2b^2+2ab^3$:

- заеднички делител на коефициентите на секој од мономите е 2;
- најголем заеднички делител на главните вредности е ab;
- најголем заеднички делител на сите мономи во полиномот е $2ab$.
- ако полиномот $2a^3b+4a^2b^2+2ab^3$ го поделиме со мономот $2ab$, добиваме $a^2+2ab+b^2$.

Оттука, $2a^3b+4a^2b^2+2ab^3=2ab\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right)$.

Во претходните два примери множителот што е извлечен пред заграда е заеднички за сите мономи во полиномот.

Обиди се на овој начин да ја решиш следната задача.

1 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $4x^2y^2-6x^3y+8x^2y^3$ б) $\frac{15}{4}x^9-\frac{21}{4}x^6-\frac{3}{4}x^3$.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 3 Во полиномот $x(a-3)-y(a-3)$, заеднички множител на двата мономи е $(a-3)$, што скратено можеме да го означиме со A.

На овој начин полиномот го добива обликот $xA-yA$. Доколку го извлечеме пред заграда заедничкиот множител A, добиваме $xA-yA=A(x-y)=(a-3)(x-y)$.

При извлекувањето на заеднички множител пред заграда, особено треба да се внимава на знаците.

Секогаш треба да се земе предвид дека:

$$A-B=-(-A+B)=-(B-A).$$

Ова би значело дека:

$$(A-B)^2=(-(-A+B))^2=(-(B-A))^2=(-1)^2(B-A)^2=(B-A)^2$$

$$(A-B)^3=(-(-A+B))^3=(-(B-A))^3=(-1)^3(B-A)^3=-(B-A)^3$$ итн.

Размисли!

- Дали ќе важат следните равенства:

$$(A-B)^{2n}=(B-A)^{2n}?$$

$$(A-B)^{2n-1}=-(B-A)^{2n-1}?$$

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 4 $(3x+2)(5x+2)-(-3x-2)(x+1)$.

Во овој пример ако замениме $A=3x+2$, добиваме дека $-A=-3x-2$.

Оттука, $(3x+2)(5x+2)-(-3x-2)(x+1)=A(5x+2)-(-A)(x+1)=A(5x+2)+A(x+1)$.

Сега заеднички множител е A.

$A(5x+2)+A(x+1)=A(5x+2+x+1)=A(6x+3)$.

Забележуваме дека во биномот $6x+3$, има заеднички множител 3, па следува дека

$A(6x+3)=A\cdot 3(x+2)=3A(x+2)$, т.е. акоземеме предвид дека $A=3x+2$ добиваме дека:

$$(3x+2)(5x+2)-(-3x-2)(x+1)=3(3x+2)(x+1).$$

Во овој пример можеме да забележиме дека двапати извлекувавме заеднички множител пред заграда. Вториот множител што го извлековме не можеше да се забележи како заеднички на почетокот.

2 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $(2x-3)(x^2+2)+(x^2+2)(-2x+4)$; б) $(b-2a^2)(b^2+2)+(2a^2-b)(1-b^2)$.

6.4. Извлекување заеднички множител пред заграда со претходно групирање на мономите

❖ Не секогаш полиномите имаат заеднички множител за сите мономи. Понекогаш, множителот е заеднички само за одредени мономи, па поради тоа неопходно е мономите во полиномот да се групираат.

Да ги разгледаме следните примери:

Пример 5 Да го разложиме на прости множители полиномот $xa+xb+ya+yb$.

Мономите во овој полином $xa+xb+ya+yb$ немаат заеднички множител. Меѓутоа со помош на групирање ќе имаме:

$$\underline{x}a+\underline{x}b+\underline{\underline{y}}a+\underline{\underline{y}}b=x\cdot(a+b)+y\cdot(a+b)$$
$$x\cdot\underline{(a+b)}+y\cdot\underline{(a+b)}=(a+b)(x+y).$$

Пример 6 Да го разложиме на прости множители полиномот $2a^2c^2+3abc^2+4aby+6b^2y.$

Во полиномот $2a^2c^2+3abc^2+4aby+6b^2y$, сите мономи немаат заеднички множител што може да се извлече пред заграда.

На првиот и на вториот моном најголем заеднички делител е ac^2, додека на третиот и четвртиот моном најголем заеднички делител е $2by$.

Затоа ќе ги групираме првиот и вториот моном, и третиот и четвртиот моном. Значи ќе имаме:

$$\begin{aligned}2a^2c^2+3abc^2+4aby+6b^2y&=\left(2a^2c^2+3abc^2\right)+\left(4aby+6b^2y\right)=\\&=ac^2(2a+3b)+2by(2a+3b)=\\&=\left(ac^2+2by\right)\cdot(2a+3b).\end{aligned}$$

Земајќи предвид дека пред да се извлече заеднички множител е потребно да се групираат членовите на полиномот, да се реши следната задача:

3 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $ax^2-ab^2+b^2x-x^3$; б) $ax^2-ab^2+b^2x-x^3$; в) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$.

Задачи за самостојна работа:

1. Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $16x^4-yx^3$; б) $-2xy+20ay$;

в) $21x^3b^4-14xb^3$; г) $\frac{20}{3}x^{15}+\frac{10}{3}x^{10}-\frac{5}{3}x^5$.

2. Разложи ги на прости множители полиномите со извлекување пред заграда на зеднички множител:

а) $2a\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)b$; б) $(2a-b)^2-2a(2a-b)$;

в) $x^2(y^2-y-1)-y^2+y+1$; г) $b(y-4)-a(4-y)$.

3. Разложи ги на прости множители полиномите со извлекување пред заграда на заеднички множител, со претходно групирање на мономите:

а) $4-a^2x^3+2ax-2ax^2$; б) $6(3x-y)^2-9x^2+3xy$;

в) $xa-3x-5a+15+ay-3y$; г) $28ab-12ac+9c-21b$.

4. Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $x^2(x+2)+3x^2+6x-4(x+2)$; б) $-14a^3bd+7a^3b^2-14a^2cbd+7a^2b^2c$.

в) $y^3-3y^2+y+xy^2-3xy+x$; г) $abc+a^2b^2+3a^4b^5+3a^3b^4c-ab-c$.

7. Разложување на полиноми на прости множители со користење на формули за разлика на квадрати, разлика и збир на кубови

Позната ни е формулата за скратено множење за разлика на квадрати:

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B).$$

Од формулата можеме да забележиме дека разликата на квадратите на било кои два мономи можеме да ја запишеме како производ од нивниот збир и нивната разлика.

Користејќи ја формулата да го разгледаме следниот пример:

Пример 1 Разложи го на прости множители биномот a^2-64. Членовите на биномот a^2 и 64 се полни квадрати на a и на 8, соодветно. Оттука со примена на формулата $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, ако ставиме $A=x,\ B=8$ добиваме:

$$a^2-64=a^2-(8)^2=(a-8)(a+8).$$

1 Запиши ги како производ на множители следните биноми:

а) $36x^2-y^2$ б) a^2-64b^2 в) $-25x^2+9$.

Користејќи ја формулата за скратено множење која се однесува на разлика на квадрати, да го разгледаме следниот пример:

Пример 2 Разложи го на прости множители изразот $4-(a-2)^2$.

Во дадениот израз $4-(a-2)^2$, со примена на формулата $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, и бидејќи $4-(a-2)^2=2^2-(a-2)^2$, ако ставиме $A=2, B=a-2$, добиваме:

$$4-(a-2)^2=2^2-(a-2)^2=(2-(a-2))(2+(a-2))=(2-a+2)(2+a-2)=(4-a)\cdot a.$$

2 Запиши ги како производ на множители следните изрази:

а) $(x-3)^2-9$ б) $(2x+5)^2-(x-2)^2$ в) $9(x-1)^2-16(y+3)^2$.

На сосема сличен начин, разлика или збир на кубови може да се запише како производ од прости множители.

Од претходно ги користевме формулите:

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

Користејќи ја формулата $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ да го разгледаме следниот пример.

Пример 3 Разложи го на прости множители изразот $8-a^9b^3$. Имајќи предвид дека $8-a^9b^3=2^3-(a^3b)^3$, ако ставиме $A=2,\ B=a^3b$, а согласно со формулата $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$, ќе имаме:

$$8-a^9b^3=2^3-(a^3b)^3=(2-a^3b)\left(2^2+2a^3b+(a^3b)^2\right)=(2-a^3b)(4+2a^3b+a^6b^2).$$

3 Разложи ги на прости множители изразите:

а) x^3y^6-125; б) $27+x^6y^3$; в) $(a+1)^3+(a-2)^3$.

❖ Во некои примери, разложувањето на полином во облик на производ од прости множители е комбинирано, т.е. пред да се искористи некоја формула за скратено множење, потребно е да се извлече пред заграда некој заеднички множител.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 4 Разложи го на прости множители биномот $27x^2-3y^2$.

Ако ги разгледаме членовите на биномот $27x^2, 3y^2$ веднаш ќе забележиме дека тие не се полни квадрати.

Но, исто така можеме да забележиме дека нивен најголем заеднички делител е 3. Поради тоа, најпрво ќе го извлечеме заедничкиот множител пред заграда, т.е. ќе имаме:

$27x^2-3y^2=3\left(9x^2-y^2\right)$. Сега члeновите на биномот $9x^2-y^2$ се полни квадрати, т.е.

$9x^2=(3x)^2$, $y=(y)^2$, па оттука со користење на формулата за разлика на квадрати, $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, добиваме:

$$27x^2-3y^2=3\left(9x^2-y^2\right)=3\left((3x)^2-y^2\right)=3(3x-y)(3x+y).$$

❖ Многу често, при разложувањето на полином во облик на прости множители со помош на формули за скратено множење, е потребно прво да се направи одредено групирање на мономите во полиномот.

Пример 5 Разложи го на прости множители полиномот $4x-a^2x-a^2y+4y$;

За да го разложиме овој полином на прости множители, најпрво треба да ги групираме „сличните“ мономи, бидејќи не е возможно да се извлече заеднички множител пред заграда за сите мономи во полиномот.

$$4x-a^2x-a^2y+4y=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right),$$

по извлекувањето на заедничкиот множител од секоја од заградите:

$$4x-a^2x-a^2y+4y=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right)=x\left(4-a^2\right)-y\left(a^2-4\right),$$

поради тоа што вака добиениот облик, не ни овозможува извлекување на друг заеднички множител пред заграда, потребно е да искористиме дека:

$a^2-4=-\left(4-a^2\right)$, па оттука:

$$\begin{aligned}4x-a^2x-a^2y+4y&=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right)=x\left(4-a^2\right)-y\left(a^2-4\right)=\\&=x\left(4-a^2\right)-\left(-y\left(4-a^2\right)\right)=x\left(4-a^2\right)+y\left(4-a^2\right)=\left(4-a^2\right)(x+y)\text{'}\end{aligned}$$

од формулата за разлика на квадрати, $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, добиваме:

$$\begin{aligned}4x-a^2x-a^2y+4y&=\left(4x-a^2x\right)-\left(a^2y-4y\right)=x\left(4-a^2\right)-y\left(a^2-4\right)=\\&=x\left(4-a^2\right)-\left(-y\left(4-a^2\right)\right)=x\left(4-a^2\right)+y\left(4-a^2\right)=\left(4-a^2\right)(x+y)=\\&=(2-a)(2+a)(x+y).\end{aligned}$$

4 Разложи го на прости множители полиномот:

а) $5x^2y-20y^3$; б) $x^2+8x^5-4-32x^3$.

Задачи за самостојна работа:

1. Разложи го на прости множители полиномот:

а) x^2-25y^2; б) $(x-3)^2-81y^2$;

в) $(x+1)^2-9(y-2)^2$; г) $9(n-m)^2-4(n+m)^2$.

2. Разложи го на прости множители полиномот:

а) x^3-8y^3; б) $1-27x^3$; в) $64x^6-27y^3$; г) $(a+b)^3+b^3$.

3. Разложи го на прости множители полиномот:

а) $18x-2xy^2-9+y^2$; б) $18x-2xy^2-9+y^2$; в) $a^5-a^3-a^2+1$.

4. Разложи го на прости множители полиномот:

а) $4a^3-4$; б) $8b^3+4b^2-9a^2-27a^3$; в) $81-x^4$.

8. Разложување на полиноми со користење на формулата бином на квадрат $(A\pm B)^2$

Формулите за скратено множење за бином на квадрат се:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2.$$

Ова значи дека секој полином што запишан во развиен облик соодветен на десната страна на горните формули, може да биде запишан како бином на квадрат, т.е. да биде разложен на производ од прости множители, што во овој случај се идентични.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 1 Разложи го на прости множители полиномот $9x^2-6xy+y^2$.

Ако ја разгледаме формулата $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$, полиномот $9x^2-6xy+y^2$ можеме да го запишеме како $(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2$, од каде следува дека $A=3x, B=y$.

Значи полиномот е всушност бином степенуван со степен 2, т.е.

$$9x^2-6xy+y^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2=(3x-y)^2.$$

При користењето на овие формули за бином на квадрат треба особено да се внимава и да не се гледа само првиот и третиот член од развиениот облик $A^2 \pm 2AB + B^2$, т.е. само A^2 и B^2, туку и средниот член $2AB$.

Така ако имавме полином $9x^2 - 8xy + y^2$ тогаш за него важи дека $9x^2 - 8xy + y^2 \neq (3x - y)^2$, бидејќи $8xy \neq 2 \cdot 3x \cdot y$.

1 Запиши ги како бином на квадрат следните полиноми:

а) $a^2 - 8ab + 16b^2$; б) $(a-3)^2 - 8(a-3) + 16$.

❖ Слично како во претходната наставна единица, така и овде пред да се запише даден полином како бином на квадрат, честопати е потребно да се извлече некој заеднички множител пред заграда. Да го разгледаме следниот пример:

Пример 2 Разложи го на прости множители полиномот $3x^2 + 6xy + 3y^2$.

Најпрво извлекуваме заеднички множител пред заграда:

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3\left(x^2 + 2xy + y^2\right),$$

а потоа со користење на формулата за бином на квадрат добиваме:

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = 3(x+y)^2.$$

2 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $5a^2 - 10ab + 5b^2$; б) $\frac{1}{2}a^2 + 4a + 8$.

❖ Ако не може да се најде заеднички множител и не е очигледна примената на формулата за бином на квадрат, тогаш треба да размислиме за групирање на мономите од полиномот.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 3 Запиши го како производ на прости множители полиномот $(a+2)^2 - b^2 - 1 + 2b$.

Во овој пример, очигледно е дека не може веднаш да се искористи формулата за бином на квадрат, а исто така мономите немаат заеднички множител којшто може да се извлече пред заграда. Поради тоа ќе ги групираме членовите.

$$(a+2)^2 - b^2 - 1 + 2b = (a+2)^2 - \left(b^2 + 1 - 2b\right) = (a+2)^2 - \left(b^2 - 2b + 1\right).$$

Потоа со користење на формулата за бином на квадрат добиваме:

$$(a+2)^2 - b^2 - 1 + 2b = (a+2)^2 - (b^2 + 1 - 2b) = (a+2)^2 - (b^2 - 2b + 1) = (a+2)^2 - (b-1)^2,$$

Ако сега ја искористиме формулата за разлика на квадрати $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, следува:

$$(a+2)^2 - b^2 - 1 + 2b = (a+2)^2 - (b^2 + 1 - 2b) = (a+2)^2 - (b^2 - 2b + 1) = \underbrace{(a+2)}_{A}{}^2 - (\underbrace{b-1}_{B})^2 =$$

$$= ((a+2)+(b-1))((a+2)-(b-1)) = (a+b+1)(a-b+3).$$

3 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $(y-3)^2 - x^2 - 4 - 4x$; б) $9y^2 - x^2 - 16 - 8x$.

Задачи за самостојна работа:

Разложи ги на прости множители полиномите:

1. а) $x^2 - 18x + 81$; б) $9a^2 - 3ab + \frac{1}{4}b^2$; в) $25 + 9b^2 - 30b$.

2. а) $2a^2 + 4a + 2$; б) $\frac{1}{2}a^2 + 4a + 8$; в) $\frac{1}{3}x^2 + 3 - 2x$.

3. а) $5a^2 - 10ab + 5b^2 - 5$; б) $x^2 - y^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$; в) $-1 + 9x^2 + y^2 - 6xy$.

4. а) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2)^2$; б) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$; в) $-25y^4 + 20y^2x^2 - 4x^4$.

9. Најмал заеднички содржател и најголем заеднички делител на полиноми

9.1. НЗД на полиноми

Да ги разгледаме броевите 24 и 36.

Делители на 24 се: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24.

Делители на 36 се: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 и 36.

Можеме да забележиме дека заеднички делители на 24 и 36 се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12.

Размисли!

- Што е најголем заеднички делител на два броја?

Од заедничките делители, најголем делител е 12, па велиме дека 12 е најголем заеднички делител и пишуваме $\text{НЗД}(24,36)=12$.

Многу слично, се одредува најголем заеднички делител и кај мономи.

- **Најголем заеднички делител на два или повеќе мономи**, е мономот чијшто коефициент е еднаков на најголемиот заеднички делител на коефициентите на мономите, а главната вредност се добива како најголем заеднички делител на главните вредности на мономите.

Да го разгледаме следниот пример.

Пример 1 Најди НЗД на мономите $15x^3y^6$ и $45x^2y^4$.

НЗД на коефициентите на мономите 15 и 45 е 15, т.е. $\text{НЗД}(15,45)=15$.

Ако ги погледнеме главните вредности на мономите x^3y^6 и x^2y^4, забележуваме дека најголем заеднички делител е x^2y^4.

Оттука $\text{НЗД}(15x^3y^6,45x^2y^4)=15x^2y^4$.

- За да одредиме најголем заеднички делител на полиноми, најпрво потребно е полиномите да бидат запишани како производ од прости множители.

Пример 2 Одреди НЗД на полиномите: $xy(x+y)^2$ и $y(x-y)(x+y)$.

Овде двата полиноми се запишани како производи од прости множители.

Делители на првиот полином $xy(x+y)^2$ се: $x, y, (x+y), (x+y)^2$.

Делители на вториот полином $y(x-y)(x+y)$ се: $y,(x-y),(x+y)$.

Заеднички делители на двата полиноми се: $y,(x+y)$.

Оттука следува дека $\text{НЗД}\left[xy(x+y)^2, y(x-y)(x+y)\right]=y(x+y)$.

Можеме да го заклучиме следново:

❖ **Најголем заеднички делител на два или повеќе полиноми** е производот од сите заеднички делители, при што секој од тие делители се зема со најмалиот степенов показател со кој се среќава во полиномите кои се разложени на прости множители.

Пример 3 Најди НЗД на полиномите: $x^2 \cdot (x^2 - y)$ и $y(x - y^2)$.

Делители на првиот полином $x^2(x^2 - y)$ се: $x,\ x^2, (x^2 - y)$.

Делители на вториот полином $y(x - y^2)$ се: $y, (x - y^2)$.

Можеме да забележиме дека овие два полиноми немаат заеднички делители.

Можеме да запишеме дека $\text{НЗД}\left[x^2(x^2 - y), y(x - y^2)\right] = 1$.

❖ За полиномите за кои НЗД е 1, велиме дека се **заемно прости полиноми.**

1 Најди НЗД на следните полиноми:

а) $18a^4b^3c,\ 24abc^2,\ 9ab^2$; б) $a(a - 2b),\ a^2 - 4b^2,\ a^2 - 4ab + 4b^2$;

в) $25 + 9b^2 - 30b;\ 9b^2 - 25;\ 10x - 10y - 6bx + 6by$.

9.2. НЗС на полиноми

Да ги разгледаме броевите 6 и 9.

Содржатели на бројот 6 се: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

Содржатели на бројот 9 се: 9, 18, 27, 36, 45, ...

Заеднички содржатели на 6 и на 9 се: 18, 36, 54, ...

Размисли!

- Што е најмал заеднички содржател на два броја?

Од нив најмал е 18, па велиме дека 18 е најмал заеднички содржател и пишуваме НЗС(6,9)=18.

Многу слично, се одредува најмал заеднички содржател и кај мономи.

!

Најмал заеднички содржател на два или повеќе мономи е мономот чијшто коефициент е најмал заеднички содржател на коефициентите на мономите, а главната вредност е најмал заеднички содржател на нивните главни вредности.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 4 Најди НЗС на мономите: $15x^3y^6$ и $45x^2y^4$.

НЗС на коефициентите на мономите, 15 и 45 е 45, т.е. $\text{НЗС}(15,45)=45$

.

Ако ги погледнеме главните вредности на мономите x^3y^6 и x^2y^4, забележуваме дека најмал заеднички содржател е x^3y^6 .

Оттука $\text{НЗС}(15x^3y^6, 45x^2y^4)=45x^3y^6$.

- За да одредиме најмал заеднички содржател на полиноми, најпрво потребно е полиномите да бидат запишани како производ од прости множители.

Пример 5 Одреди НЗС на полиномите: $2x(x+y)^2$ и $3x$.

Овде двата полиноми се запишани како производи од прости множители.

Содржатели на првиот полином $2x(x+y)^2$ се: $2x(x+y)^2, 4x^2(x+y)^2, 6x(x+y)^3, \ldots$

Содржатели на вториот полином $3x$ се: $3x, 6x, 3x^2, 6x^2, \ldots$.

Заеднички содржатели на двата полиноми се: $6x(x+y)^2, 6x^2(x+y)^2, 6x(x+y)^3, \ldots$

Оттука следува дека $\text{НЗС}\left[2x(x+y)^2, 3x\right]=6x(x+y)^2$.

Пример 6 Одреди НЗС на полиномите: $2a^2x+4abx+2b^2x$, a^2xy-b^2xy , $3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz$.

Пред да одредиме НЗС, потребно е да ги разложиме дадените полиноми на прости множители.

$$2a^2x+4abx+2b^2x=2x\cdot(a^2+2ab+b^2)=2x(a+b)^2;$$

$$a^2xy-b^2xy=xy\cdot(a^2-b^2)=xy\cdot(a+b)(a-b);$$

$$3acxz+3bcxz+3adxz+3bdxz=3xz\cdot(ac+bc+ad+bd)=$$
$$=3xz\left(c\cdot(a+b)+d\cdot(a+b)\right)=3xz(a+b)(c+d).$$

Добиваме,

$$\text{НЗС}\left[2x(a+b)^2, xy\cdot(a+b)(a-b), 3xz(a+b)(c+d)\right]=2\cdot3\cdot x\cdot y\cdot z\cdot(a+b)^2\cdot(a-b)\cdot(c+d)=$$
$$=6xyz(a+b)^2(a-b)(c+d).$$

Можеме да го заклучиме следното:

!

НЗС на два или повеќе полиноми се одредува како производ од сите прости множители, при што секој множител се зема со најголемиот степенов показател што се среќава во полиномите кои се разложени на прости множители.

2 Одреди НЗС на полиномите:

а) $18a^4b^3c,\ 24abc^2,\ 9ab^2$; б) $a(a-2b),\ a^2-4b^2,\ a^2-4ab+4b^2$;

в) $25+9b^2-30b;\ 9b^2-25;\ 10x-10y-6bx+6by.$

Задачи за самостојна работа:

1. Одреди НЗД на полиномите:

а) $3x^4y^3z^5,\ 4x^2yz^2,\ 5x^2y$; б) $x^2-9y^2,\ 3(x-3y),\ 9(x-3y)^2$;

в) $a^2b^2-b^4, a^4-a^2b^2, a^3b-ab^3$.

2. Одреди НЗС на полиномите:

а) $2xyz^2,\ 4x^2yz, 6x^2y^2z^3$; б) $x^2+4xy+4y^2,\ 4x+8y, 4x^2-16y^2$.

в) $a^2-a, 1-a^2, 1+a^3, a^2+a+1$.

Одреди НЗД и НЗС на полиномите:

3. а) $4a^3-4;\ 2a^2+2a+2;\ a^2x+ax+x$;

б) $x^4-16;\ 3x^2-2x-8;\ x^3-6x^2+12x-8$;

4. а) $81-x^4;\ 2x^2-7x+3;\ x^3-9x^2+27x-27.$

б) $a^2-9b^2, 4a^2-24ab+36b^2, 2a^3b-18a^2b^2+54ab^3+54b^3$.

10. Алгебарски дропки. Проширување и скратување на дропки

10.1. Алгебарски дропки

Изразот како на пример $\frac{2}{3}$, што покажува дека 2 се дели со 3, се нарекува **бројна дропка**.

Размисли!

- Дефинирај броител и именител на дропка!

Ако броителот и именителот на дропката се алгебарски изрази, како на пример $\frac{a}{2a-1}$, тогаш дропката е **алгебарска.**

- Дропката чијшто броител и именител се алгебарски изрази се нарекува **алгебарски рационален израз** или **алгебарска дропка**.

Вредноста на алгебарскиот рационален израз, можеме да ја пресметаме на ист начин како вредноста на алгебарскиот израз, со заменување на конкретни бројни вредности на местото на променливите и извршување на пресметковни операции со бројни дропки.

Пример 1 Наједноставен рационален алгебарски израз е алгебарскиот израз $\frac{1}{x}$.

Поврзете го бројот x со соодветната вредност на изразот $\frac{1}{x}$. Размисли кои вредности можат да се заменат на местото на променливата x и во каков однос се броителот и именителот на алгебарската дропка.

-40	1
1	0.4
-2	-0.025
100	-0.5
-0.1	0.01
2.5	-10

- Во рационалниот алгебарски израз $\frac{1}{x}$ на местото на x не може да стои вредноста 0. Зошто?

- Ако на местото на x заменуваме вредности кои по апсолутна вредност се зголемуваат, тогаш што се случува со вредноста по апсолутна вредност на рационалниот алгебарски израз $\frac{1}{x}$? Дали ако местото на x се заменуваат вредности кои по апсолутна вредност се намалуваат, вредноста на рационалниот алгебарски израз $\frac{1}{x}$ по апсолутна вредност се намалува или зголемува?

Пример 2 Кои од вредностите 0, 1, 2 и 3, можеш да ги замениш на местото на x во алгебарската дропка $\frac{x-1}{x-2}$?

- Што се случува кога на местото на x во алгебарската дропка $\frac{x-1}{x-2}$ ќе замениме 2?
- $\frac{2-1}{2-2}=\frac{1}{0}$, но со 0 не се дели, па не можеме да ја пресметаме вредноста на алгебарската дропка. Затоа велиме дека во 2, алгебарската дропка $\frac{x-1}{x-2}$ не е дефинирана.

Пример 3 За кои вредности на x е дефинирана алгебарската дропка $\frac{2x-5}{2x-10}$?

Секоја алгебарска дропка нема да биде дефинирана во случај кога нејзиниот именител е 0, бидејќи со 0 не се дели. Во алгебарската дропка $\frac{2x-5}{2x-10}$, именителот $2x-10=0$ ако $x=5$. Тоа значи дека алгебарската дропка е дефинирана за сите вредности на $x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Велиме дека множеството $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ е **област на дефинираност** на алгебарската дропка, или **множество од допуштени вредности за алгебарската дропка** $\frac{2x-5}{2x-10}$.

!

- Алгебарските дропки се дефинирани за сите реални броеви, освен за оние за кои именителот има вредност 0.
- Со замена на вредности од областа на дефинираност на алгебарската дропка, таа станува бројна дропка. Поради тоа за алгебарские дропки важат истите својства како и за бројните дропки. Кај алгебарските дропки можат да се извршуваат стандардните операции кои се извршуваат кај бројните дропки: собирање, одземање, множење, делење, степенување.

!

❖ За две алгебарски дропки $\frac{P}{Q}, Q \neq 0$ и $\frac{S}{T}, T \neq 0$ велиме дека се **еднакви**, $\frac{P}{Q} = \frac{S}{T}, Q \neq 0, T \neq 0$ ако $P \cdot T = Q \cdot S$ за $Q \neq 0, T \neq 0$.

Обиди се да ги решиш следните задачи:

1 Цената на еден фотопринтер е 6799 денари, а трошокот за изработка на една фотографија е 4 денари. Колку е вкупниот трошок за изработени фотографии, ако се изработени:

а) 2500 фотографии;
б) n фотографии;
в) колку фотографии треба да се изработат за да вкупниот трошок по изработена фотографија биде помала од 6 денари?

2 Одреди ја областа на дефинираност на алгебарските дропки:

а) $\frac{7x + ab}{x^2 - 9}$; б) $\frac{a - b}{a^2 + 4}$; в) $\frac{2a + 1}{3a - 9b}$; г) $\frac{2a - b}{a + b}$.

10.2. Скратување на алгебарски дропки

Во основно научивте да скратувате бројни дропки.

- Да ја скратиме дропката $\frac{60}{126}$. И именителот и броителот на оваа дропка се парни броеви, па можеме да ја скратиме дропката со 2, а потоа да провериме дали може да се скрати уште со некој број.
- Друг начин е да се разложат и броителот и именителот на прости делители, а потоа да ја скратиме дропката.

Да постапиме на тој начин:

$$\frac{60}{126} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Како ќе ги скратиме алгебарските дропки?

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 4 Дали може да ја скратиме алгебарската дропка $\frac{a+3}{39}$?

- За $a=1$, алгебарската дропка $\frac{1+3}{39}=\frac{4}{39}$, па не може да се скрати.
- За $a=2$, алгебарската дропка $\frac{2+3}{39}=\frac{5}{39}$, па не може да се скрати.
- За $a=3$, алгебарската дропка може да се скрати $\frac{3+3}{39}=\frac{6:3}{39:3}=\frac{2}{13}$.

Видовме дека за некои вредности на a, алгебарската дропка $\frac{a+3}{39}$ не може да се скрати.

❖ Кога зборуваме за скратување на алгебарски дропки, тоа треба да важи за сите вредности кои влегуваат во областа на дефинираност на алгебарската дропка.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 5 Скрати ја дропката $\frac{1-2b+b^2}{b^3-b^2}, b\neq 0,\ b\neq 1.$

Бројните дропки лесно ги кратевме ако броителот и именителот се запишани како производ од прости множители.

Истото ќе го направиме и со алгебарската дропка. Да ги запишеме броителот и именителот на дропката како производ од прости множители, а потоа да скратиме. Добиваме:

$$\frac{1-2b+b^2}{b^3-b^2}=\frac{(1-b)^2}{b^2(b-1)}=\frac{\left(-(b-1)\right)^2}{b^2(b-1)}\overset{b\neq 1}{=}\frac{(b-1)^{\cancel{2}}}{b^2\cancel{(b-1)}}=\frac{b-1}{b^2}, b\neq 0.$$

Овде кратењето можеше да се направи бидејќи $b\neq 0$ и $b\neq 1$.

❖ Алгебарска дропка може да се скрати само ако броителот и именителот се запишани како производ од прости множители и ако имаат заеднички фактор за кратење. Факторот за кратење може да биде број или алгебарски израз, во секој случај различен од 0.

❖ Вообичаено, алгебарската дропка $\frac{P}{Q}, Q\neq 0$ се крати со полиномот што е $\text{НЗД}(P,Q)$.

3 Можеш ли да ги скратиш дропките?

а) $\frac{3a+3}{39}$; б) $\frac{5a+5}{13a+13}$, $a \neq -1$.

4 Скрати ги алгебарските дропки:

а) $\frac{10ab^6}{14a^4b^2c^3}, a,b,c \neq 0$; б) $\frac{4-4a+a^2}{a^4-2a^3}, a \neq 0, a \neq 2$; в) $\frac{x^4-16}{x^3+4x-2x^2-8}$, $x \neq 2$.

10.3. Проширување на дропки

Во основно научивте да скратувате бројни дропки.

- Да ја прошириме бројната дропка $\frac{4}{5}$ со 3. Тоа значи дека и броителот и именителот на дропката ќе ги помножиме со 3, т.е. $\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{12}{15}$.

Проширувањето на алгебарските дропки се врши на ист начин како и проширувањето на обичните дропки.

Пример 6 Прошири ја алгебарската дропка $\frac{x+1}{x-2}, x \neq 2$ со полиномот $x+2, x \neq -2$.

Тоа значи дека и броителот и именителот треба да ги помножиме со полиномот $x+2$, т.е. $\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}, x \neq 2, x \neq -2$.

Оттука можеме да го заклучиме следново:

!

- Алгебарската дропка може да се прошири само ако броителот и именителот се помножат со ист полином, т.е. алгебарската дропка $\frac{P}{Q}, Q \neq 0$ може да се прошири со полиномот $S \neq 0$, така што $\frac{P}{Q}=\frac{P\cdot S}{Q\cdot S}, Q,S \neq 0$.

❖ Проширувањето на алгебарските дропки е потребно при извршување на операциите собирање и одземање на алгебарски дропки, кога дропките се сведуваат на заеднички именител, што обично е најмал заеднички содржател на именителите.

Пример 7 Сведи ги на ист именител дропките: $\frac{2x^2-4x+3}{x+1}, \frac{5}{2x+2}, \frac{x}{x^2+2x+1}$.

За да ги сведеме на ист именител, најпрво ќе одредиме НЗС на именителите, а за да го направиме тоа ќе ги запишеме именителите на дропките како производ од прости множители, т.е.

$x+1,$

$2x+2=2(x+1),$

$x^2+2x+1=(x+1)^2.$

Оттука $\text{НЗС}\left[x+1, 2(x+1), (x+1)^2\right]=2(x+1)^2$.

Сега $\text{НЗС}\left[x+1, 2(x+1), (x+1)^2\right]=2(x+1)^2$ ќе биде именителот на алгебарските дропки:

$$\frac{2x^2-4x+3}{x+1}=\frac{2x^2-4x+3}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{2(x+1)}=\frac{4x^3-4x^2-2x+6}{2(x+1)^2},$$

$$\frac{5}{2x+2}=\frac{5}{2(x+1)}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}=\frac{5x+5}{2(x+1)^2},$$

$$\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2x}{2(x+1)^2}.$$

При проширувањето на дропката можеме да заклучиме дека проширувач на дропката е оној множител што го има во НЗС на именителите, но не е присутен во именителот на дропката што ја проширувааме.

5 Сведи ги на ист именител дропките:

а) $\frac{2y}{x+y}, \frac{xy^2}{x^2-y^2}, \frac{2x-y}{y-x};$ б) $\frac{3x}{8a^2b^4}, \frac{2y^2}{24ab^5}, \frac{2x-y}{12b^3}.$

Задачи за самостојна работа:

1. Најди ја областа на дефинираност на алгебарските дропки:

а) $\frac{1}{x+y-1};$ б) $\frac{4-a}{2-7b};$ в) $-\frac{9y}{x^4+1};$ г) $\frac{3x^2-5}{a^4b^4}.$

2. Скрати ги алгебарските дропки:

а) $\frac{6x^3y^2}{10x^4y^2z}, x, y, z \neq 0$; б) $\frac{(2x-y)^2-(x+y)^2}{4y^2+x^2-4xy}, x \neq 2y$; в) $\frac{xa^3y^3-8xy^3}{x^2a^2y^2+2x^2ay^2+4x^2y^2}$.

3. Сведи ги на ист именител дропките:

а) $\frac{n}{2a^2b}, \frac{m}{3b}, \frac{p}{4ab}, \quad a, b \neq 0$;

б) $\frac{6a^2b}{3a^2b+6ab}, \frac{a^2-9}{a^2-6a+9}, \quad a, b \neq 0, a \neq 3, a \neq -2$;

б) $\frac{x-2y}{x^2-2xy}, \frac{x^2-2xy+4y^2}{4xy^2-x^3}, \frac{x^2-2xy+4y^2}{2x^2y-8y^3}, \; x, y \neq 0, x \neq 2y$.

11. Операции со алгебарски дропки

11.1. Собирање на алгебарски дропки

Собирањето на обични дропки со исти или со различни именители е познато од основно образование.

Размисли и одговори:

- Како се собираат дропки со исти именители?
- Како се собираат дропки со различни именители?

- Кога собираме дропки со исти именители, броителите се собираат, додека именителот останува ист.

  Така, $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3+2}{5}=\frac{5}{5}=1$.

- Додека, кога собираме дропки со различни именители, дропките прво се сведуваат на дропки со ист именител, а потоа собирањето се сведува на собирање на дропки со исти именители. Заедничкиот именител на сите дропки-собироци е всушност НЗС на поединечните именители.

  Така, $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{1}{2}=\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{5}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$.

- Како ги собираме алгебарските дропки?

Алгебарските дропки ги собираме сосема идентично како и бројните дропки.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 1 Да го пресметаме збирот $\frac{x}{2x+1}-\frac{3-x}{2x+1}+\frac{9}{2x+1}, x\neq -\frac{1}{2}$.

Сите алгебарски дропки имаат ист именител, па останува единствено да ги собереме нивните броители:

$$\frac{x}{2x+1}-\frac{3-x}{2x+1}+\frac{9}{2x+1}=\frac{x-(3-x)+9}{2x+1}=\frac{2x+6}{2x+1}=\frac{2(x+3)}{2x+1},\ x\neq -\frac{1}{2}.$$

!

❖ За да собираме алгебарски дропки со различни именители, потребно е истите да се сведат на алгебарски дропки со ист именител. Поради тоа, неопходно е нивните именители да бидат разложени на прости множители, со цел полесно одредување на НЗС на полиномите.

Пример 2 Да го пресметаме збирот $\frac{7}{2x-x^2}-\frac{4}{x^2-4}+\frac{5}{3x+6}, x\neq 2, x\neq 0, x\neq -2$.

Сите алгебарски дропки имаат различен именител, па останува да ги сведеме на заеднички именител. Поради тоа, најпрво именителите ќе ги запишеме како производи од прости множители.

$$2x-x^2=x(2-x)$$

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

$$3x+6=3(x+2).$$

Гледаме дека во полиномите разложени на прости множители, се среќаваат спротивни изрази $2-x$ и $x-2$.

Затоа, $2x-x^2=x(2-x)=-x(x-2)$.

Оттука заклучуваме дека $\text{НЗС}\left[2x-x^2, x^2-4, 3x+6\right]=3x(x-2)(x+2)$.

Сега ќе ги прошириме алгебарските дропки:

$$\frac{7}{2x-x^2}=\frac{7}{x(2-x)}=-\frac{7}{x(x-2)}=-\frac{7\cdot 3\cdot(x+2)}{3x(x-2)(x+2)}=-\frac{21x+42}{3x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{4\cdot 3x}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{12x}{3x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{5}{3x+6}=\frac{5}{3(x+2)}=\frac{5x(x-2)}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{5x^2-10x}{3x(x-2)(x+2)}.$$

Сега собирањето на алгебарски дропки со различни именители се сведува на собирање на дропки со исти именители, т.е.

$$\frac{7}{2x-x^2}-\frac{4}{x^2-4}+\frac{5}{3x+6}=-\frac{21x+42}{3x(x-2)(x+2)}+\frac{12x}{3x(x-2)(x+2)}+\frac{5x^2-10x}{3x(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{-21x-42+12x+5x^2-10x}{3x(x-2)(x+2)}=\frac{5x^2-19x-42}{3x(x-2)(x+2)}.$$

1 Пресметај:

а) $\frac{2x^2-4x+3}{x^3+1}-\frac{5}{2x+2}+\frac{x}{x^2+2x+1}, x\neq -1;$ б) $\frac{2}{a+4}-\frac{a-3}{16+a^2+8a}+\frac{4-a^2}{a^3+64}, a\neq -4.$

Собирањето на дропки со различни именители може да биде изведено на многу попрактичен начин. Тоа ќе го покажеме на задачата под а).

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^3+1}-\frac{5}{2x+2}+\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{2x^2-4x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{5}{2(x+1)}+\frac{x}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(2x^2-4x+3)\cdot 2(x+1)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}-\frac{5(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}+$$

$$+\frac{2x\cdot(x^2-x+1)}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{x^3+4x^2-8x+10}{2(x+1)^2(x^2-x+1)}.$$

11.2. Множење на алгебарски дропки

Како и собирањето на дропки, така и множењето на дропки е познато од основно образование.

Размисли и одговори:

- Како се множат дропки ?

- Да го пресметаме производот $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}\cdot\cancel{9}}=\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{1}{12}.$
- Значи, при множење на две дропки, се множи броител со броител, именител со именител.

На сличен начин, кај алгебарските дропки се множи броител со броител, именител со именител, при што треба да се внимава броителите и именителите да бидат запишани во облик на производ од прости множители (доколку е возможно), за да се овозможи скратување.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 3 Да го пресметаме производот: $\frac{2a^2b}{c^2}\cdot\frac{6bc^5}{3a^3}, a,c\neq 0.$

$$\frac{2a^2b}{c^2}\cdot\frac{6bc^5}{3a^3}=\frac{2\cancel{a^2}b\cdot\cancel{6}bc^{\cancel{5}}}{\cancel{c^2}\cdot\cancel{3}a^{\cancel{3}}}=\frac{2b\cdot 2bc^3}{1\cdot a}=\frac{4b^2c^3}{a}.$$

Пример 4 Да го пресметаме производот:

$$\frac{16x^2-25xy^2}{8xy-10y^2}\cdot\frac{y^2}{16x^2+40xy+25y^2}, y\neq 0, x\neq\pm\frac{5}{4}y.$$

$$\frac{16x^3-25xy^2}{8xy-10y^2}\cdot\frac{y^2}{16x^2+40xy+25y^2}=\frac{x\cancel{(4x-5y)}\cancel{(4x+5y)}}{2\cancel{y}\cancel{(4x-5y)}}\cdot\frac{y^{\cancel{2}}}{(4x+5y)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{xy}{2(4x+5y)}.$$

2 Пресметај ги производите:

а) $\left(\frac{x+y}{x^3}\right)\cdot\frac{x^5}{(x+y)^4}\cdot(y+x), x\neq 0, x\neq -y;$ б) $\frac{3a^3+3}{a^2+a}\cdot\frac{a-1}{a^2-2a+1}, a\neq 0, a\neq 1, a\neq -1.$

11.3. Делење на алгебарски дропки

Размисли и одговори:

- Како се делат дропки ?

- Да го пресметаме количникот $\frac{3}{8}:\frac{1}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{1}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$

❖ И кај алгебарските дропки, делењето се сведува на множење на алгебарската дропка-деленик со реципрочната вредност на алгебарската дропка делител.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 5 Пресметај го количникот: $\frac{x-1}{a^3}:\frac{x^2-1}{a}, a\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -1.$

Од правилото за делење на дропки имаме:

$$\frac{x-1}{a^3}:\frac{x^2-1}{a}=\frac{x-1}{a^3}\cdot\frac{a}{x^2-1}=\frac{\cancel{x-1}}{a^{\cancel{3}}}\cdot\frac{\cancel{a}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{a^2(x+1)}.$$

3 Пресметај ги количниците:

а) $-\frac{6x^8y}{5x^4a^3}:\frac{-8b^3x}{4a^2}, a\neq 0, x\neq 0,\ b\neq 0$; б) $\frac{a+b}{a-5}:\frac{a-b}{2a-10},\ a\neq 5,\ a\neq b$.

!

- ❖ **Правилото за множење на две алгебарски дропки** е: $\frac{P}{Q}\cdot\frac{S}{T}=\frac{P\cdot S}{Q\cdot T},\ Q,T\neq 0.$
- ❖ **Правилото за делење на две алгебарски дропки** е: $\frac{P}{Q}:\frac{S}{T}=\frac{P}{Q}\cdot\frac{T}{S},\ Q,T,S\neq 0.$

11.4. Степенување на алгебарски дропки

Размисли и одговори:

- Како се степенуваат дропки ?

- $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}.$
- Степенувањето на дропките значеше степенување на броителот и именителот со степеновиот показател.

❖ Постапката е сосема идентична и кај алгебарските дропки, со тоа што се применуваат правилата за степенување на мономи и полиноми.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 6 Степенувај ја алгебарската дропка: $\left(-\frac{2xy^2}{3z^3}\right)^3,\ z \neq 0$.

Имаме: $\left(-\frac{2xy^2}{3z^3}\right)^3 = \frac{(-1)^3 \cdot (2xy^2)^3}{(3z^3)^3} = -\frac{2^3 x^3 y^6}{3^3 z^9} = -\frac{8x^3 y^6}{27z^9}$.

Пример 7 Степенувај ја алгебарската дропка: $\left(\frac{x^2 - xy}{xy^2}\right)^2,\ x, y \neq 0$.

Најпрво броителот и именителот на алгебарската дропка ќе ги разложиме на производи на прости множители, а потоа ќе степенуваме:

$$\left(\frac{x^2 - xy}{xy^2}\right)^2 = \left(\frac{x(x-y)}{xy^2}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{(y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{y^4}.$$

4 Степенувај ги алгебарските дропки:

а) $\left(\frac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3, a \neq -b$; б) $\left(\frac{4-4a+a^2}{a^4-2a^3}\right)^2, a \neq 0, a \neq 2.$

11.5. Двојни алгебарски дропки

Размисли и одговори:

- Како се трансформира двојна дропка во обична дропка ?

- Да ја упростиме двојната дропка $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.
- Двојната дропка ја сведуваме на обична дропка кога производот на надворешните членови го дава броителот, а производот на внатрешните членови го дава именителот.

Постапката е идентична и кај алгебарските дропки:

Пример 8 Да ја трансформираме двојната дропка $\dfrac{\dfrac{x-1}{a^3}}{\dfrac{x^2-1}{a}}$, $a \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq -1.$.

$$\frac{\dfrac{x-1}{a^3}}{\dfrac{x^2-1}{a}} = \frac{(x-1)\cdot a}{a^3\cdot(x^2-1)} = \frac{(x-1)\cdot a}{a^3\cdot(x-1)(x+1)} = \frac{1}{a^2(x+1)}.$$

5 Трансформирај ги во обични дропки следните двојни дропки:

а) $\dfrac{\dfrac{a+b}{3}}{\dfrac{a^2+2ab+b^2}{9a}}$, $a \neq 0,\ a \neq -b$; б) $\dfrac{\dfrac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}}{\left(\dfrac{a}{a^2-a}\right)^2}$, $a \neq 0, a \neq -1, a \neq -3.$.

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај:

а) $\dfrac{a+b}{2a}-\dfrac{2a-b}{3b}-\dfrac{3b-a}{6a}, a,b \neq 0$. б) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}+\dfrac{2b}{a}+2-\dfrac{(a+b)^2}{ab}, a,b \neq 0.$

2. Пресметај:

а) $\dfrac{a}{a^2+b^2+2ab}-\dfrac{b}{b^2-a^2}+\dfrac{1}{a-b},\ a \neq \pm b$

б) $\dfrac{x-2y}{x^2-2xy}-\dfrac{x^2-2xy+4y^2}{4xy^2-x^3}+\dfrac{x^2-2xy+4y^2}{2x^2y-8y^3}, x \neq 0, x \neq 2y$

3. Пресметај:

а) $a\left(1+\dfrac{a}{2b}\right)\left(1-\dfrac{a}{2b}\right):\dfrac{a^2}{2b}:\left(\dfrac{a+2b}{a}\cdot\dfrac{2b-a}{2b}\right),\ a,b \neq 0,\ a \neq \pm 2$;

б) $\dfrac{a^2+3a}{a^2-a^4}\cdot\dfrac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}:\left(\dfrac{a}{a^2-a}\right)^2, a \neq \pm 1, a \neq -3, a \neq 0.$

в) $(x^2-y^2)\cdot\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y}-2+\dfrac{y}{x}\right), x,y \neq 0,\ x \neq y.$

4. Степенувај ги алгебарските дропки:

а) $\left(\dfrac{x^2-2x}{x^4-4x^2}\right)^2$, $x \neq 0, x \neq \pm 2$; б) $\left(\dfrac{a^2+a^3}{a^3+6a^2+9a}\right)^3$, $a \neq 0,\ a \neq -3$.

5. Трансформирај ја во обична двојната дропка:

$$\frac{\frac{a^2+3a}{a^2-a^4}}{\frac{a^3+6a^2+9a}{a^2+a^3}},\ a\neq 0, a\neq \pm 1, a\neq -3.$$

12. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Изврши ги назначените операции:

а) $\left(x^3\cdot x^2\right)^3 : x^5$ б) $\frac{\left(x^3 : x^2\right)^3\cdot x^5}{x^4 : x^2}$.

2. Пресметај:

а) $\left(3^4\right)^5 : \left(3^6\right)^3 + \left[\left(3^2\right)^3\right]^2 : 3^{10} + 3^0$; ; б) $\left(5^7\right)^3\cdot\left(2^3\right)^7 : \left(10^8\right)^2 - 3^2\cdot 10^4 - 5^4\cdot 2^4$;

в) $2\cdot 100^5\cdot 100^3 : \left(10^3\right)^5$; г) $\left(5^3\cdot 5^8\cdot 2^{11}\right) : 10^{10} + \left(5^0\cdot 5^3\right)^0 - 2^2$.

3. Мономот $x^2y\left(-\frac{2}{3}xy\right)(-x)$ сведи го во нормален вид, а потоа одреди го коефициентот и главната вредност. Кој е неговиот степен?

4. Пресметај ја вредноста на полиномот

$2a^3bx - a^2b^2 + 3ab^2x - 5a^2b^2 + a^3bx - 3ab^2x$ за $a=1$, $b=-2$, $x=-\frac{1}{2}$.

5. Сведи го во нормален вид полиномот:

а) $(3x-2y)\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{4}xy-\frac{1}{4}y^2\right)-\frac{1}{5}x\left(12x^2-\frac{25}{4}y^2\right)+\frac{1}{2}(-y)^3$;

б) $(2a+1)\left(a^2-a+1\right)-2\left(a^2-4\right)(a+3)-3a(3-a)$.

6. Пресметај го количникот:

а) $\left(10+3x^3-7x^2+9x\right) : \left(5-3x+x^2\right)$

б) $\left(2x^3+7x+4+5x^2\right) : (1+x)$

7. Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $a^3+3a^2-4a-12$ б) $3a^3+81$

8. Скрати ги дропките:

а) $\frac{a^3-a}{a^3+2a^2+a},\ a\neq -1$ б) $\frac{2a^3-2}{2a^2+2a+2}$.

9. Упрости го изразот:

а) $(4x-1)(4x+1)-(4x+1-y)^2+(y-1)^2+8x(1-y)$;

б) $\left(a+2b\right)^2-a\left(a+4b\right)-\left(2b-1\right)^2$.

10. Пресметај:

$$\left[\frac{2}{3}x^5y^5:\left(-2xy^2\right)^2+\left(\frac{1}{2}xy^8\right)^3:y^{23}+\frac{5}{6}x^3y+\frac{3}{8}x^4y:x\right]:\left(-3xy\right).$$

11. Упрости го изразот:

$$\left(\frac{2a}{a^2+2ab}+\frac{4b}{a^2-4b^2}-\frac{b}{ab-2b^2}\right):\left(1-\frac{a^2-4b^2-2}{a^2-4b^2}\right).$$

4

ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ НА ВЕЛИЧИНИТЕ

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да пресметува непознат член во пропорција;
- да составува продолжена пропорција и да ја користи во практични проблеми;
- да решава практични задачи со примена на просто и сложено тројно правило;
- да користи делбена сметка во практични проблеми;
- да дефинира процент;
- да користи процентна сметка во практични проблеми од секојдневниот живот;
- да користи каматна сметка во практични проблеми од секојдневниот живот.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 4

1. Физички величини. Мерни единици во SI. Именувани броеви

- Во секојдневното опкружување многу често среќаваме поими како: должина, маса, време, брзина, температура, плоштина, волумен итн. Сите тие се поими за **физички величини**. Поимот физичка величина е основен поим и истиот не се дефинира.

- Физичките величини се карактеризираат со позитивен реален број придружен со соодветна **мерна единица** (**единица мерка**), кои заедно сочинуваат **именуван број**. Бројот со кој е карактеризирана големината на одредена физичка величина се вика **мерен број**. На пример, 10 метри е именуван број кој карактеризира должина. Во овој пример бројот 10 е мерниот број, а метар е мерната единица (единица мерка).

Во светот е прифатен **меѓународен систем на мерни единици** за физичките величини, кој скратено се означува со **SI** (кратенка од францускиот израз Système International). Прифатени се **седум основни величини** со соодветни **основни мерни единици** во SI (дадени во табелата подолу), а сите останати се викаат **изведени физички величини** и истите се изведени од основните, врз основа на физичките закони во природата.

Физичка величина	**Мерна единица**	**Ознака за мерната единица**
должина	метар	m
маса	килограм	kg
време	секунда	s
јачина на електрична струја	ампер	A
термодинамичка температура	келвин	K
количество материја	мол	mol
светлосна јачина	кандела	cd

Табела на основните физички величини и мерни единици

Покрај прифатените основни мерни единици за физичките величини, постојат и **помали и поголеми мерни единици од основната** кои се изведуваат **кога основната мерна единица ќе се подели или помножи со соодветна декадна единица**.

Во следната табела ни се дадени префиксите кои се додаваат пред основната единица мерка во случај на поголема, односно помала единица мерка од основната.

Назив на префиксот	ознака	Бројна вредност на префиксот
екса	E	10^{18}
пета	P	10^{15}
тера	T	10^{12}
гига	G	10^{9}
мега	M	10^{6}
кило	K	10^{3}
хекта	h	10^{2}
дека	da	10^{1}
деци	d	10^{-1}
центи	c	10^{-2}
мили	m	10^{-3}
микро	μ	10^{-6}
нано	η	10^{-9}
пико	p	10^{-12}
фемто	f	10^{-15}
ато	a	10^{-18}

Табела на префикси кај изведени мерни единици

Овде ќе нагласиме дека при изведување на помалите и поголеми мерни единици за маса, префиксите се додаваат на мерната единица грам (g) која е 10^3 пати помала од основната мерна единица килограм (1 kg = 10^3 g). Исто така, поголеми мерни единици за време од основната (s), кои многу често се користат, се минута (min) и час (h). Притоа, 1 min = 60 s и 1 h = 60 min = 3600 s.

- ❖ **Изведени физички величини** се, на пример, **плоштина, волумен, брзина, забрзување, густина** итн. Соодветните основни мерни единици за овие величини се: **метар квадратен** (m^2), **метар кубен** (m^3), **метар во секунда** (m/s), **метар во секунда на квадрат** (m/s^2), **килограм на метар кубен** (kg/m^3) и се дефинирани зависно од тоа како е дефинирана, т.е. определена физичката величина (на кој начин истата е изведена од основните физички величини).

- ❖ Друго нешто што треба да знаеме дека **литар** (ознака: l) е единица мерка за **волумен**. Еден литар е приближно еднаков на $1dm^3$ (**1l ≈1dm³**).

Пример 1 **Именувани броеви**

а) **120m** е именуван број	**120** е мерен број	**m** е мерна единица
б) **15l** е именуван број	**15** е мерен број	**l** е мерна единица
в) **200m²** е именуван број	**200** е мерен број	**m²** е мерна единица
г) **10m/s** е именуван број	**10** е мерен број	**m/s** е мерна единица
д) **90km/h** е именуван број	**90** е мерен број	**km/h** е мерна единица

- Покрај основната единица мерка за плоштина, **m^2**, кај нас се користат следните поголеми мерни единици од основната: ***ар*** (ознака: **a**; **$1a=100m^2$**), **декар** (ознака: **da**; **$1da=10a=1000m^2$**) и **хектар** (ознака: **ha**; **$1ha=10da=10\,000m^2$**).

Во продолжение, низ решени задачи, ќе објасниме како да претвораме дадени именувани броеви во именувани броеви изразени со помала или поголема мерна единица. Претходно, накратко ќе се потсетиме на некои основни операции со степени.

a^n – степен **a – основа** **n – експонент (степенов показател)**

$$a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n \qquad a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{nm} = a^{mn} = \left(a^m\right)^n \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^0 = 1$$

Пример 2 Колкав дел од километарот се дециметарот и центиметарот?

$$1\text{km} = 10^3\text{m} = 10^3 \cdot 10\text{dm} = 10^4\text{dm}$$

Добиваме дека $1\text{km} = 10\ 000\text{dm}$ што значи еден дециметар е еднаков на десет илјадити дел од километарот, т.е. $1\text{dm} = \dfrac{1}{10\ 000}\text{km} = 10^{-4}\text{km} = 0,0001\text{km}$.

На исти начин, $1\text{km} = 10^3\text{m} = 10^3 \cdot 10^2\text{cm} = 10^5\text{cm} \Rightarrow 1\text{cm} = 10^{-5}\text{km}$

Пример 3 Колку dm^2, cm^2 и mm^2 има во 1m^2?

1) Равенството $1\text{m}=10\text{dm}$ ќе го квадрираме, со што добиваме:

$$1\text{m}^2 = 10^2\text{dm}^2 = 100\text{dm}^2$$

што значи еден метар квадратен е еднаков на 100 дециметри квадратни.

2) На ист начин, со квадрирање на равенството $1\text{m} = 10^2\text{cm}$ добиваме:

$1\text{m}^2 = 10^4\text{cm}^2 = 10\ 000\text{cm}^2$, т.е. еден метар квадратен е еднаков на десет илјади центиметри квадратни.

3) Ако равенството $1\text{m} = 10^3\text{mm}$ го квадрираме, добиваме:

$$1\text{m}^2 = 10^6\text{mm}^2 = 1\ 000\ 000\text{mm}^2$$

Пример 4 Пресметајте колку cm^3 има во еден литар!

$1\text{l} = 1\text{dm}^3$

$1\text{dm} = 10\text{cm}$ / равенството го степенуваме со експонент 3

$1\text{dm}^3 = 10^3\text{cm}^3 = 1\ 000\text{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 1\text{l} \approx 1000\text{cm}^3$

Пример 5 Колку грама има во еден тон, а колку во 3,5 тони?

$$1\mathrm{t}=10^3\mathrm{kg}=10^3\cdot 1000\mathrm{g}=10^6\mathrm{g}$$

$$3,5\,\mathrm{t}=3,5\cdot 10^6\,\mathrm{g}=3\ 500\ 000\,\mathrm{g}\,.$$

Пример 6 Колкав дел од 1t (еден тон) се 525g?

$$1\mathrm{t}=1000\mathrm{kg}$$

$$1\mathrm{kg}=1000\mathrm{g}\qquad\Rightarrow\qquad 1\mathrm{t}=10^6\,\mathrm{g}\qquad\Rightarrow\qquad 1\mathrm{g}=\frac{1}{10^6}\mathrm{t}=10^{-6}\mathrm{t}$$

$$\Rightarrow\qquad 525\mathrm{g}=525\cdot 10^{-6}\mathrm{t}=\frac{525}{10^6}\mathrm{t}=0.000525\mathrm{t}\,.$$

Пример 7 Колку метри претставуваат $86\mathrm{cm}$?

$1\mathrm{m}=100\mathrm{cm}\quad\Rightarrow\quad 1\mathrm{cm}=\frac{1}{100}\mathrm{m}=10^{-2}\mathrm{m}$ па одовде пресметуваме:

$$86\mathrm{cm}=86\cdot 10^{-2}\mathrm{m}=86\cdot\frac{1}{100}\mathrm{m}=0,86\mathrm{m}\,.$$

Пример 8 Брзината $80\,\mathrm{km/h}$ изразете ја со основната единица мерка за брзина ($\mathrm{m/s}$).

$$80\mathrm{km/h}=\frac{80\mathrm{km}}{1\mathrm{h}}=\frac{80\cdot 10^3\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}=\frac{800\,\mathrm{m}}{36\,\mathrm{s}}=\frac{800}{36}\mathrm{m/s}\approx 22,22\,\mathrm{m/s}\,.$$

Задачи за самостојна работа

1. а) Колку dm^3 претставуваат $1220\mathrm{m}^3$?
б) Колку m^3 претставуваат $1220\mathrm{dm}^3$?
в) Колку милилитри (ml) претставуваат 12,60 децилитри (dl)?
г) Колку децилитри (dl) претставуваат 1568 милилитри (ml)?

2. Брзината $30\,\mathrm{m/s}$ изразете ја во $\mathrm{km/h}$.

3. Густината $25\,\mathrm{kg/m}^3$ изразете ја со мерната единица: а) $\mathrm{g/m}^3$ б) $\mathrm{g/cm}^3$.

4. Плоштината $50\,\mathrm{m}^2$ изразете ја во cm^2.

5. Волуменот 250 000 cm^3 изразете го во: а) m^3 б) литри.

6. а) Колку секунди има во 2 часа и 15 минути?
б) Колку часови, минути и секунди има во 256 424 секунди?

7. Изразете ги во килограми 2 тони 35 килограми и 6 декаграми.

2. Размери и пропорции

Во секојдневниот живот многу често се наоѓаме во ситуации кога треба да ги споредиме големините на две истоимени величини.

- **Размер** ($a:b$ или $\frac{a}{b}$) е количник на бројот a со бројот b.

  Бројот b треба да биде различен од нула бидејќи делењето со нула не е дефинирано.
- Бројот a се вика **прв член**, а бројот b се вика **втор член на размерот.**

$$a:b=\frac{a}{b} \text{ - размер} \qquad (b \neq 0)$$

a - прв член на размерот $\qquad$ b - втор член на размерот

- Вредноста на количникот $a:b=\frac{a}{b}$ се вика **вредност на размерот** и најчесто се означува со k, т.е. $\frac{a}{b}=k$.
- Размерот претставува неименуван (реален) број.

Пример 1 Вредноста на размерот 20:4 е 5, додека вредноста на размерот 4:5 е 0,8 (колку што е вредноста и на соодветниот количник).

- Размерите кои имаат иста вредност ги нарекуваме **еднакви размери.**

Од два размери такви што вториот член на првиот размер е исти со првиот член на вториот размер, можеме да формираме размер со три члена.

- Така, размерите $a:b$ и $b:c$ можеме да ги запишеме во облик $a:b:c$. На исти начин можеме да формираме и размер со повеќе од три члена. Овие размери ги викаме **продолжени (проширени) размери,** додека размерите составени од два члена ги викаме **прости размери**.

$a:b$ - прост размер

$a:b:c$ - продолжен (проширен) размер

Пример 2

Прости се размерите: $1:2$, $\quad 3:4$, $\quad 4:3$, $\quad 15:20$ итн.

Продолжени се размерите: $1:2:3,\quad 4:7:5,\quad 2:5:11:15$ итн.

Размерите ги имаат истите својства како и дропките. Исто како што дропка можеме да прошириме или скратиме, множејќи, односно делејќи ги броителот и именителот со исти број различен од нула, така можеме да го прошириме, односно скратиме размерот. Ова својство е познато како основно својство на размерите.

!

- **Основно својство на размерите:** Вредноста на размерот не се менува доколку сите негови членови ги помножиме или поделиме со еден ист број различен од нула.

!

- Ако $a:b$ и $c:d$ се размери кои имаат иста вредност, равенството помеѓу нив, $a:b=c:d$ го викаме **пропорција**. Броевите a и d се викаат надворешни членови, а броевите b и c внатрешни членови на пропорцијата. Вредноста на размерот, k, се вика **коефициент на пропорционалноста**.

$a:b=c:d$ - пропорција

a,d - надворешни членови $\quad$ b,c - внатрешни членови

!

- **Основно својство на пропорциите:**
Производот од надворешните членови на една пропорција е еднаков со производот на внатрешните членови.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$$

Од пропорцијата $a:b=c:d$ и основното својство на пропорциите, непосредно следуваат пропорциите:

$$a:c=b:d$$
$$b:a=d:c$$
$$c:a=d:b.$$

Ако ни се познати три члена од пропорцијата, четвртиот член лесно го наоѓаме користејќи го основното својство на пропорциите. На пример, ако a,c и d се познати членови, а x е непознат член во една пропорција, имаме:

$$a:x=c:d \Leftrightarrow xc=ad \Rightarrow x=\frac{ad}{c}.$$

Пример 3 Упрости ја пропорцијата, а потоа пресметај го непознатиот член.

а) $\frac{3}{2}:\frac{1}{5}=x:\frac{7}{10}$; б) $\frac{3}{5}:x=0.2:1\frac{3}{2}$.

а) $\frac{3}{2}:\frac{1}{5}=x:\frac{7}{10}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{10}=x\cdot\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{21}{20}=\frac{x}{5}\Leftrightarrow 21:x=20:5\Leftrightarrow 21:x=4:1$

Од последната пропорција добиваме: $21=4x$. На крај пресметуваме $x=\frac{21}{4}$.

Пропорцијата можеме да ја упростиме и на друг начин:

$$\frac{3}{2}:\frac{1}{5}=x:\frac{7}{10}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{1}=x\cdot\frac{10}{7}\Leftrightarrow\frac{15}{2}=\frac{10x}{7}\Leftrightarrow\frac{7}{2}=\frac{10x}{15}.$$

Го применуваме основното својство на размерите и последниот размер го кратиме со 5, по што добиваме:

$$\frac{7}{2}=\frac{2x}{3}\Leftrightarrow\frac{7}{4}=\frac{x}{3}\Leftrightarrow x:7=3:4.$$

Од последната пропорција, со примена на основното својство, добиваме: $4x=21$, т.е. $x=\frac{21}{4}$.

Пример 4 Пресметај ги x и y од пропорциите:

$$9:x=5:7 \quad \text{и} \quad x:y=3:10.$$

Од првата пропорција со користење на основното својство на пропорции добиваме:

$$9:x=5:7\Leftrightarrow 5x=63.$$

Од втората пропорција со користење на основното својство на пропорции имаме:

$$x:y=3:10\Leftrightarrow 10x=3y.$$

Ако равенството $5x=63$ добиено од првата пропорција го помножиме со 2 ќе добиеме $10x=126$, па споредувајќи го со равенството добиено од втората пропорција, заклучуваме: $3y=126\Leftrightarrow y=42$.

!

- Равенство помеѓу три или повеќе еднакви размери се вика **продолжена (проширена) пропорција**.

  $a:x=b:y=c:z$ - продолжена пропорција

- Доколку вредноста на секој од размерите во продолжената пропорција е еднаква на k (коефициент на пропорционалноста), во тој случај ќе важи:

$$\frac{a}{x}=k\Rightarrow a=kx$$

$$\frac{b}{y}=k \Rightarrow b=ky$$

$$\frac{c}{z}=k \Rightarrow c=kz\,.$$

Од равенствата $a=kx$ и $b=ky$ следува дека $\frac{a}{b}=\frac{kx}{ky}=\frac{x}{y}$, т.е. $a:b=x:y$, додека од равенствата $b=ky$ и $c=kz$ следува дека $\frac{b}{c}=\frac{ky}{kz}=\frac{y}{z}$, т.е. $b:c=y:z$.

Добиените пропорции $a:b=x:y$ и $b:c=y:z$ можеме да ги запишеме во една продолжена пропорција на следниот начин: $a:b:c=x:y:z$.

Добиваме дека продолжените пропорции $a:x=b:y=c:z$ и $a:b:c=x:y:z$ се еквивалентни и од нив следуваат равенствата: $a=kx$, $b=ky$, $c=kz$, каде k е коефициентот на пропорционалност.

$$a:b:c=x:y:z$$

$$a=kx \qquad b=ky \qquad c=kz\,.$$

- Последните равенства најчесто се применуваат во задачи во кои одредена големина треба да се подели на неколку делови кои се во даден однос (размер). Овие задачи се познати како **решавање на делбена сметка**.

Пример 5 Да се изведе продолжената пропорција од пропорциите

$$a:b=4:3 \text{ и } b:c=7:8$$

Бидејќи секој размер е количник од два број, тогаш за секоја од двете пропорции точно е

$$a:b=4:3 \Rightarrow a:b=28:21$$
$$b:c=7:8 \Rightarrow b:c=21:24\,.$$

Продолжената пропорција е:

$$a:b:c=28:21:24\,.$$

Пример 6 Раздели го бројот 450 на четири делови кои се однесуваат како 2:3:5:8.

Да ги означиме трите броеви со a,b,c,d. За нив, од условот на задачата, важи:

$$a:b:c:d=2:3:5:8 \quad \Rightarrow \quad a=2k; \quad b=3k; \quad c=5k; \quad d=8k$$
$$a+b+c+d=450\,.$$

Во второто равенство a,b,c,d ги заменуваме со $2k,3k,5k,8k$, со што добиваме:

$$2k+3k+5k+8k=450 \Leftrightarrow 18k=450 \Leftrightarrow k=25\,.$$

Пресметуваме:

$$a = 2k = 50$$
$$b = 3k = 75$$
$$c = 5k = 125$$
$$d = 8k = 200$$

Пример 7 Едно земјоделско стопанство има на три места вкупно 12,6 хектари ливади. Плоштините на овие ливади се однесуваат како 2,4:3,2:2,8. По колку хектари ливади има земјоделското стопанство на секое од трите места?

Ќе ги означиме површините на секое од трите места со a, b и c. Во условот на задачата имаме:

$$a : b : c = 2{,}4 : 3{,}2 : 2{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2{,}4k \qquad b = 3{,}2k \qquad c = 2{,}8k$$

$$a + b + c = 12{,}6 \qquad \Rightarrow \qquad 2{,}4k + 3{,}2k + 2{,}8k = 12{,}6$$
$$8{,}4k = 12{,}6$$
$$k = 1{,}5$$

$$a = 2{,}4k = 3{,}6$$
$$b = 3{,}2k = 4{,}8$$
$$c = 2{,}8k = 4{,}2$$

Добиваме дека стопанството на едно место има 3,6 ha, на другото место има 4,8 ha, а на третото место има 4,2 ha.

Пример 8 Трајче, Селим и Емре треба да поделат 1650 денари, така што Селим да прими $\frac{2}{3}$ од делот на Трајче, а Емре $\frac{3}{8}$ од збирот на деловите на Трајче и Селим?

Да ја означиме со x, y, односно z, сумата која треба да ја добијат Трајче, Селим и Емре, соодветно. Според условот на задачата важи:

$$x + y + z = 1650$$

За сумите кои треба да ги добијат имаме:

Трајче x денари;

Селим $y = \frac{2}{3}x$ денари;

Емре $z = \frac{3}{8}(x + \frac{2}{3}x) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3}x = \frac{5}{8}x$ денари

Од овие равенства ја составуваме следната пропорција:

$$x : y : z = 1 : \frac{2}{3} : \frac{5}{8} \Rightarrow x : y : z = 24 : 16 : 15$$

Од последната пропорција следуваат равенствата: $x = 24k, y = 16k, z = 15k$, каде k е коефициентот на пропорционалност.

Со замена во првото равенство добиваме:

$$24k+16k+15k=1650$$
$$55k=1650$$
$$k=30.$$

Пресметуваме: $x=24k=720$, $y=16k=480$, $z=15k=450$, што значи Трајче ќе добие 720 денари денари, Селим ќе добие 480 денари, а Емре ќе добие 450 денари.

Пример 9 Тројца практиканти треба да поделат 36 000 денари, според тоа кој колку денови работел. Како треба да ги поделат парите, ако првиот работел 3 пати повеќе од вториот, а вториот работел два пати повеќе од третиот?

Да ја означиме со x, y, односно z, сумата која треба да ја добие секој од практикантите. Според условот на задачата важи: $x=3y$ од каде ја добиваме пропорцијата $x:y=3:1$, како и $y=2z$ од каде ја имаме пропорцијата $y:z=2:1$. За да составиме продолжена пропорција од претходните две пропорции, размерот 3:1 во првата пропорција ќе го прошириме со два, па ќе имаме: $x:y=6:2$ и $y:z=2:1$, од каде $x:y:z=6:2:1$. Според тоа, имаме:

$$x+y+z=36000$$
$$x:y:z=6:2:1$$

Од последната пропорција следуваат равенствата: $x=6k,\ y=2k,\ z=k$, каде k е коефициентот на пропорционалност.

Со замена во првото равенство добиваме:

$$6k+2k+k=36000$$
$$9k=36000$$
$$k=4000$$

Пресметуваме: $x=6k=24000$, $y=2k=8000$, $z=k=4000$, што значи едниот практикант ќе добие 24 000 денари, вториот ќе добие 8 000 денари, а третиот практикант ќе добие 4 000 денари.

Пример 10 Четири браќа треба да поделат наследство од 78 000 денари според возраста, така што настариот ќе добие најмала сума, а најмалиот ќе добие најголем дел од наследтството. Браќата се на возраст од 26, 29, 31 и 36 години. Тие се договориле најмалиот да земе два пати повеќе од најстариот брат и 1,2 пати поголема сума од братот што е на возраст 29 години, а братот кој е на возраст 31 година да земе 1,5 пати помалку од братот на возраст 29 години. По колку пари треба да добие секој од браќата?

Да ја означиме со x, y, z и t сумата што треба да ја добие секој од браќата соодветно, при што x е сумата која ќе ја добие најмалиот брат. Од условот на задачата имаме:

$$x=2t,\ x=1{,}2y \text{ и } y=1{,}5z.$$

Од последните две равенства можеме да ги запишеме следните пропорции:

$$x : y = 1,2 : 1 \qquad \text{и} \qquad y : z = 1,5 : 1 .$$

Ако го прошириме со 10 секој од размерите на десната страна, ќе добиеме:

$$x : y = 12 : 10 \qquad \text{и} \qquad y : z = 15 : 10 .$$

За да составиме продолжена пропорцијата од последните две пропорции, размерот на десната страна во првата пропорција ќе го прошириме со 1,5 и со тоа добиваме:

$$x : y = 18 : 15 \qquad \text{и} \qquad y : z = 15 : 10 .$$

Од овие две пропорции можеме да ја запишеме следната продолжена пропорција:

$$x : y : z = 18 : 15 : 10 .$$

Користејќи го условот $x = 2t$, т.е. $x : t = 2 : 1 = 18 : 9$, ја запишуваме пропорцијата:

$$x : y : z : t = 18 : 15 : 10 : 9 .$$

Од последната пропорција следуваат равенствата:

$$x = 18k ; \qquad y = 15k ; \qquad z = 10k ; \qquad t = 9k ,$$

каде k е коефициентот на пропорционалност.

За вредностите x, y, z и t важи равенството:

$$x + y + z + t = 78\,000 .$$

Запишувајќи ги непознатите преку k , добиваме:

$$18k + 15k + 10k + 9k = 78\,000$$

$$52k = 78\,000$$

$$k = 1500 .$$

Пресметуваме:

$$x = 18k = 27\,000$$

$$y = 15k = 22\,500$$

$$z = 10k = 15\,000$$

$$t = 9k = 13\,500 .$$

Задачи за самостојна работа

1. Определи го x од пропорцијата:

а) $1225 : 12 = 225 : x$ б) $1445 : x = 85 : 8$

в) $12,25 : 1,2 = 2,25 : x$ г) $14,45 : x = 8,5 : 0,8$

д) $\frac{8}{3} : \frac{2}{7} = \frac{4}{10} : \frac{x}{7}$ ѓ) $\frac{4}{3} : \frac{2}{5} = \frac{2}{10} : x$

2. Ако величината a е 4.5 пати поголема од c , а c е 1.5 пати помала од b , колку пати величината a е поголема (помала) од b ? (a , b , c се позитивни величини).

3. Колку пати величината a е поголема (помала) од b ако $b : c = 3 : 1$ и $\frac{c}{a} = \frac{7}{3}$?

4. Ако 3kg шеќер вреди колку 4kg сол, а 6kg сол вреди колку 8kg брашно, тогаш колку килограми брашно вреди како 9kg шеќер?

5. Набавени се четири различни производи со маса 520 кг, 340 кг, 240 кг и 750 кг соодветно. За нивниот транспорт е платено 7400 денари. Колкав е транспортниот трошок за секој од четирите производи посебно, ако се знае дека трошоците за секој производ се пропорционални со масата на производот?

6. 3 килограми од една супстанција чини колку 4 килограми од друга супстанција, а 3 килограми од втората супстанција чини колку 4 килограми од трета супстанција. Сите супстанции заедно чинат 7400 денари. Определете ја вредноста (цената) на секоја од супстанциите.

7. Една легура на бакар, цинк и олово содржи бакар два пати повеќе од цинк и 22 пати повеќе од олово. По колку килограми од секој метал има во $680\,\mathrm{kg}$ од оваа легура?

3. Права и обратна пропорционалност

Физичките величини многу често зависат една од друга. Така на пример, изминатиот пат за дадено време зависи од брзината на движење. Притоа, со промена на вредноста на една величина настанува промена во вредноста и кај друга величина.

При зависноста на величините, во некои случаи со зголемување на вредноста на една од величините се зголемува и вредноста на друга од величините и обратно, со намалување на вредноста на едната величина се намалува и вредноста на другата величина.

Во други случаи пак, со зголемување на вредноста на едната величина, се намалува вредноста на другата, односно со намалување на вредноста на едната величина се зголемува другата.

Пример 1 При движење на еден автомобил, со зголемување на брзината се зголемува и растојанието кое го поминува автомобилот за фиксен временски интервал. Така, ако автомобилот се движи со брзина $60\,\mathrm{km/h}$, тој за 15 минути ќе помине $15\,\mathrm{km}$, но ако ја зголеми брзината на $80\,\mathrm{km/h}$, тогаш за 15 минути ќе помине $20\,\mathrm{km}$, а ако ја зголеми брзината на $100\,\mathrm{km/h}$, за 15 минути ќе помине $25\,\mathrm{km}$.

При оваа зависност, за вредноста на брзината $60\,\mathrm{km/h}$ ќе речеме дека соодветствува на вредноста $15\,\mathrm{km}$ на растојанието; вредноста $80\,\mathrm{km/h}$ соодветствува на вредноста $20\,\mathrm{km}$ итн.

Од друга страна пак, ако растојанието кое треба да го помине автомобилот е фиксно, тогаш со зголемување на брзината на движење се намалува времето за кое растојанието ќе се помине. Ако автомобилот треба да помине растојание од $100\,\mathrm{km}$, движејќи се со брзина од $50\,\mathrm{km/h}$, даденото растојание автомобилот ќе го помине за 2 часа. Ако автомобилот се движи со брзина од $75\,\mathrm{km/h}$, даденото растојание ќе го помине за 1 час и 20 минути.

❖ **Правопропорционални величини** ги викаме величините кај кои **количникот** на кои било нивни соодветни вредности **е константен**.

❖ Ако a и b се две соодветни вредности на правопропорционални величини, тогаш важи:

$$\frac{a}{b}=k \qquad \text{или} \qquad a=kb\,,$$

k - коефициент на пропорционалност.

❖ Кај правопропорционалните величини при зголемување на вредноста на едната величина се зголемува и вредноста на другата величина и обратно, при намалување на вредноста на едната величина се намалува и вредноста на другата величина.

❖ **Обратнопропорционални величини** ги викаме величините кај кои **производот** на кои било нивни соодветни вредности **е константен.** Ако a и b се соодветни вредности на обратнопропорционални величини, тогаш важи:

$$ab=k\,,$$

k - коефициент на пропорционалност.

❖ Кај обратнопропорционалните величини при зголемување на вредноста на едната величина се намалува вредноста на другата величина, а при намалување на вредноста на првата величина се зголемува вредноста на другата величина.

Пример 2 Утврди кои од величините се правопропорционални, а кои се обратнопропорционални.

а) должината на страната a на квадрат и периметарот на квадратот;

б) должината на страната a на квадрат и плоштината на квадратот;

в) должината и ширината на правоаголник со плоштина 60;

г) времето на извршување на определена работа и бројот на работници;

а) величините се **правопропорционални** бидејќи со зголемување на страната на квадратот се зголемува и неговиот периметар, и обратно, со намалување на страната на квадратот се намалува и неговиот периметар;

б) величините се **правопропорционални**;

в) величините се **обратнопропорционални** за да остане плоштината на правоаголникот иста, доколку должината на правоаголникот ја зголемиме, треба да ја намалиме неговата ширина, и обратно, доколку ја намалиме должината, треба да ја зголемиме ширината на правоаголникот;

г) величините се **обратнопропорционални** доколку се зголеми бројот на работници, работата ќе биде завршена за пократко време; доколку се намали бројот на работници, ќе биде потребно повеќе време за завршување на работата.

Задачи за самостојна работа:

1. Еден човек со себе носел 240 денари со кои сакал да купи домати од пазар. Ако доматите се продаваат по цена 20 денари за килограм, колку домати ќе купи човекот со тие пари? Колку килограми домати ќе може да купи човекот ако доматот се продава по 30 денари, колку ако има цена 40 денари, колку ќе купи ако има цена 60 денари, а колку килограми домати ќе купи ако тие се продаваат по цена од 80 денари за килограм? Во каква пропорционална зависност се масата на купени домати и нивната цена? Во каква пропорционална зависност е масата на купени домати и вкупната сума која за нив треба да се плати при фиксна цена за килограм?

2. Еден камион на една тура може да превезе 8 тони од дадена стока. Колку тони од истата стока на една тура ќе превезат два камиона, колку тони ќе превезат 4 камиона, а колку тони ќе превезат 7 камиона, ако сите имаат иста носивост? Во каква пропорционална зависност се бројот на камиони и вкупната превезена стока?

3. Одредена стока со вкупна маса 30 тони, 30 камиони со иста носивост можат да ја транспортираат за еден ден. За колку дена ќе ја транспортираат стоката 15 од тие камиони? За колку дена ќе ја транспортираат 10 камиони, за колку дена 5 камиони? За колку дена ќе ја транспортираат стоката 3 камиони, а за колку 2 камиони, ако сите се со иста носивост? Во каква пропорционална зависност се бројот на ангажирани камиони и деновите за кои стоката ќе биде транспортирана?

4. Кои од следните величини се правопропорционални, а кои се обратнопропорционални?

а) радиусот на круг и плошината на кругот;

б) радиусот на топка и нејзиниот волумен;

в) висината на цилиндар и неговиот волумен;

г) висината на прав кружен цилиндар со волумен 50 и радиусот на неговата основа;

д) дијагоналата на квадрат и неговата страна;

ѓ) двете дијагонали на ромб со дадена плоштина P.

5. Сандра, Фатиме и Јован имаат 20, 30 и 50 години соодветно и треба да поделат одредена сума на денари. од 5000 денари. Пресметај по колку денари ќе земе секој од нив, ако:

а) сумата која треба да ја поделат е 5000 денари и подебата е правопропорционална со нивните години;

б) сумата која треба да ја поделат е 3100 денари и подебата е обратнопропорционална со нивните години.

4. Просто тројно правило

❖ **Просто тројно правило** е правилото со кое врз основа на три дадени вредности на две правопропорционални или обратнопропорционални величини ја наоѓаме четвртата, непозната вредност.

Простото тројно правило ќе го објасниме низ задачи.

Пример 1 Со 10 трактори за еден ден може да се изора еден блок од 120 хектари. Колкава површина би изорале 15 такви трактори за еден ден?

Соодветните величини ги пишуваме една под друга, при што треба да внимаваме мерната единица да биде иста.

↑ 10 тракористи ↑ 120 хектари
15 тракористи x хектари

Ставаме стрелки покрај величините, кои се исто насочени или спротивно насочени зависно од тоа дали величините се правопропорционални или обратнопропорционални.

Едната стрелка секогаш поаѓа од непознатата величина. Другата стрелка, во случај кога се работи за правопропорционални величини ја ставаме во иста насока со првата, а доколку се работи за обратнопропорционални величини таа има обратна насока од првата стрелка.

Во конкретната задача, при **зголемување** на бројот на трактори јасно е дека и изораната површина за еден ден ќе биде **поголема**, што значи дека се работи за правопропорционални величини, па стрелките ќе имаат иста насока.

Ја формираме пропорцијата согласно насоките на стрелките, а потоа го пресметуваме непознатиот член:

$$x:120=15:10$$
$$x=\frac{15\cdot 120}{10}$$
$$x=180.$$

Добиваме дека 15 такви трактори за еден ден ќе изораат 180 хектари земја.

Пример 2 Од 0,3 t суровина се добиваат 57 kg готов производ. Колку килограми готов производ ќе се добие од 5,1 t суровина?

Ги запишуваме соодветните величини една под друга:

↑ 0,3t суровина ↑ 57kg готов производ
5,1t суровина x kg готов производ

При **поголема** количина на суровина јасно е дека ќе се добие **поголема** количина на готов производ, што значи дека величините се правопропорционални и стрелките имаат иста насока.

$$x:57=5.1:0.3$$
$$x=\frac{5.1\cdot 57}{0.3}$$
$$x=969.$$

Добиваме дека од дадената количина суровина ќе се добие 969kg готов производ.

Пример 3 Десет работника можат да завршат дадена работа за 12 денови. За колку денови истата работа ќе ја завршат 15 работника?

$\downarrow$ 10 работника $\quad\quad$ $\uparrow$ 12 денови

15 работника $\quad\quad$ x денови

Со **зголемување** на бројот на работници се **намалува** бројот на денови за кои работата ќе биде завршена, што значи дека во овој случај величините се обратнопропорционални и стрелките се поставени во спротивна насока.

$$x:12=10:15$$
$$x=\frac{10\cdot 12}{15}$$
$$x=8.$$

Добиваме дека 15 работника истата работа ќе ја завршат за 8 денови.

Пример 4 Со определено количество храна 16 единки можат да се прехранат 30 дена. Колку денови со истото количество храна ќе се прехранат 12 единки?

$\downarrow$ 16 единки $\quad\quad$ $\uparrow$ 30 денови

12 единки $\quad\quad$ x денови

Помалку единки со истата храна ќе се хранат **повеќе** денови, што значи дека имаме обратнопропорционални величини и стрелките ќе бидат во обратна насока. Ја поставуваме пропорцијата:

$$x:30=16:12$$
$$x=\frac{16\cdot 30}{12}$$
$$x=40.$$

Се добива дека 12 единки со истото количество храна ќе се хранат 40 денови.

Пример 5 На една фарма има 45 грла добиток и за нив е обезбедена храна за 28 дена. По 6 дена на фармата се донесени уште 10 грла добиток. За колку дена ќе има храна на фармата?

Само 45 грла добиток се храннеле првите 6 дена, значи, за преостанатите денови ако не биле донесени други 10 грла, почетните 45 ќе имаат храна уште за 22 дена. Ќе составиме пропорција од која ќе пресметаме со истата храна колку денови ќе се хранат 55 грла:

$\downarrow$ 45 грла $\uparrow$ 22 денови
55 грла x денови

Повеќе грла со истото количество храна ќе се хранат **помалку** денови, значи имаме обратнопропорционални величини, па стрелките ќе имаат обратна насока. Ја составуваме пропорцијата:

$$x : 22 = 45 : 55$$

$$x = \frac{45 \cdot 22}{55}$$

$$x = 18.$$

Преостанатата храна ќе биде доволна за 18 дена, па ако ја земеме предвид и храната за првите 6 дена, добиваме дека почетното количество на храна ќе биде доволно за 24 дена.

Пример 6 Осум работници завршуваат една работа за 24 дена. Меѓутоа, после 4 дена тројца од нив одат на боледување. Колку дена ќе трае работата, доколку нема замена за отсутните работници?

Кога би работеле сите работници, после 4 дена ќе остане работа уште за 20 дена. Но, ако останат 5 работника (**помалку** работника од почетните 8), работата ќе трае **подолго**:

$\downarrow$ 8 работника $\uparrow$ 20 денови
5 работника x денови

$$x : 20 = 8 : 5$$

$$x = \frac{8 \cdot 20}{5}$$

$$x = 32.$$

Петте работника ќе ја завршат останатата работа за 32 дена, па земајќи ги во предвид и претходните 4 дена кога работеле сите 8 работника, заклучуваме дека работата ќе биде завршена за 36 дена.

Задачи за самостојна работа:

1. За 525kg од дадена стока е платено 125 000 денари. Колку килограми од истата стока можат да се купат со 100 000 денари?
2. Ако дадена работа 18 работника можат да ја завршат за 30 дена, за колку дена истата работа, при исти услови, ќе ја завршат 10 работника?
3. Ако 12 машини за 1 час полнат 20 тони сок, колку тони сок за 1 час ќе наполнат 9 машини?
4. Една работа 6 работника можат да ја завршат за 5 дена. За колку дена ќе биде завршена целата работа ако после два дена дојдат уште три работника и сите заедно работат при истите услови?
5. Една работа 45 работника можат да ја завршат за 18 дена. После 6 дена, работата ја напуштиле 9 работника. За колку дена останатите работници ќе ја завршат преостанатата работа?

5. Сложено тројно правило

❖ Во праксата, често пати среќаваме проблеми во кои се вклучени не само две, туку три, четири, па и повеќе пропорционални величини. Постапката со која се определува една непозната вредност на некоја од овие величини се вика **сложено тројно правило**.

Да го разгледаме сложеното тројно правило низ неколку решени примери.

Пример 1 8 работника во група работеле 18 дена, по 6 часа на ден и заработиле 99 000 денари. Колку ќе заработат 14 работника, за 15 дена, ако при исти услови работат по 10 часа на ден?

И овде истородните величини ги запишуваме една под друга. Стрелките ги поставуваме на следниот начин: првата стрелка секогаш поаѓа од непознатата вредност, во примерот означена со x; до секоја од останатите величини ставаме стрелка која е исто насочена или спротивно насочена со стрелката до непознатата, зависно од тоа дали соодветната величина е правопропорционална или обратнопропорционална со величината за која имаме непозната вредност.

Ако се **зголеми** бројот на работници (од 8 на 14) ќе се **зголеми** и сумата која тие би ја заработиле, што значи величините се правопропорционални и стрелките ќе бидат истонасочни (овде не обрнуваме внимание на останатите величини (деновите на работа и работните часови на ден).

Ако работниците работат **помалку** денови (15 наместо 18) и заработката ќе биде **помала**, што значи имаме пак правопропорционални величини, па стрелката до работните денови ќе биде исто насочна со стрелката до заработката (каде е и непознатата вредност).

Ако работниците работат **повеќе** часови на ден (10 наместо 6) ќе заработат и **повеќе** пари, што значи и овде се правопропорционални величините, а стрелките истонасочни.

↑ 8 работника	↑ 18 дена	↑ 6 часа/ден	↑ 99 000 денари
14 работника	15 дена	10 часа/ден	x денари

Според тоа, од дадените услови ја поставуваме следната продолжена пропорција:

$$x:99000=14:8=15:18=10:6$$

од каде се добива пропорцијата:

$$x:99000=(10\cdot15\cdot14):(6\cdot18\cdot8)$$

по што го пресметуваме x применувајќи го основното својство на пропорциите:

$$x=\frac{(10\cdot15\cdot14)\cdot99000}{6\cdot18\cdot8}$$

$$x=240625.$$

Пример 2 Некоја стока можат да ја превезат 15 камиони за 20 дена, ако прават по 4 тури дневно. Првите 10 дена возеле 5 камиони по 6 тури дневно. Уште колку камиони треба да се ангажираат со истата носивост, за да ја превезат преостанатата стока во предвидениот рок, ако секој камион прави по 5 тури на ден?

Најпрво да пресметаме за колку дена ќе биде пренесена стоката доколку возат 5 камиони наместо 15 и прават по 6 тури на ден, наместо по 4 тури.

Истородните величини ги запишуваме една под друга.

Првата стрелка поаѓа од x.

Да видиме како да ја поставиме стрелката кај останатите величини. Ако возат **помалку** камиони (5 наместо 15), ќе бидат потребни **повеќе** денови за да се превезе стоката, што значи стрелката до бројот на камиони ќе биде спротивно насочена со почетната.

Доколку камионите прават **повеќе** тури дневно (6 наместо 4), ќе бидат потребни **помалку** денови за да се превезе стоката. Ова значи дека имаме обратна пропорционалност и стрелката до величината со која се изразени турите на ден ја поставуваме обратно насочена со стрелката кај непознатата.

15 камиони	↑ 20 дена	4 тури/ден
↓ 5 камиони	x дена	↓ 6 тури/ден

Движејќи се во насока на стрелките, ја поставуваме следната продолжена пропорција:

$$x:20=15:5=4:6,$$

од која се изведува пропорцијата:

$$x:20=(15\cdot4):(6\cdot5),$$

по што го наоѓаме x

$$x = \frac{(15 \cdot 4) \cdot 20}{6 \cdot 5}$$

$$x = 40.$$

Доколку возат само 5 камиона, целата работа би ја завршиле за 40 дена. Тие возеле 10 дена, што значи им останала работа за 30 дена. Ако предвидениот рок за да се заврши целата работа е 20 дена, остануваат уште 10 дена за работа. Да пресметаме преостанатата работа која за 30 дена би ја завршиле 5 камиони кои прават 6 тури дневно, колку камиони би ја завршиле за 10 дена, доколку прават по 5 тури дневно:

↑ 5 камиони	30 дена	6 тури/ден
x камиони	↓ 10 дена	↓ 5 тури/ден

Ја поставуваме пропорцијата од која ја пресметуваме непознатата вредност:

$$x : 5 = (30 \cdot 6) : (5 \cdot 10)$$

$$x = \frac{30 \cdot 6 \cdot 5}{5 \cdot 10}$$

$$x = 18.$$

Вкупно 18 камиони ќе ја завршат преостанатата работа во предвидениот рок. Бидејќи 5 камиони веќе работат, потребно е да се ангажираат уште 13.

Пример 3 Во една фабрика за производство на платно, за изработка на 180m платно со ширина 2m, потребни се 45kg памук. Колку метри платно со ширина 1,75m ќе се произведе од 35kg памук?

Да ги запишеме истородните величини една под друга:

↑ 180m должина	2m ширина	↑ 45kg
x m должина	↓ 1,75m ширина	35kg

Ја запишуваме пропорцијата:

$$x : 180 = (2 \cdot 35) : (1,75 \cdot 45)$$

$$x = \frac{(2 \cdot 35) \cdot 180}{1,75 \cdot 45}$$

$$x = 160.$$

Добивме дека 160m платно со ширина 1.75m ќе бидат произведени од 35kg памук.

Задачи за самостојна работа:

1. 10 дрвосечачи, за 6 дена, работејќи по 10 часа дневно, можат да исечат 400 стебла. Колку стебла можат да исечат 12 дрвосечачи за 10 дена, ако работат по 8 часа дневно?
2. 23 работника за 7 дена заработуваат 80 500 денари. Колку ќе заработат 33 работника за 11 дена?
3. Ако 3 работника можат за 5 дена да спакуваат 385 кутии од еден производ, за колку дена 7 работника ќе спакуваат 4312 кутии од истиот производ?
4. За да се направи мост со должина 450m и ширина 5m, потребни се 4 500 000 денари. Колку пари се потребни за изработка на мост со должина 250m и ширина 4m?

6. Поим за процент. Процентна сметка од сто

Размерот $a:b$ или $\frac{a}{b}$ за коефициент $k<1$ ни покажува колкав дел е a од b.

Пример 1 Податокот дека во клас од 25 ученици има 5 одлични ученици, може да се искаже со размер $\frac{5}{25}$. Оваа дропка може да ја скратиме и ја добиваме дропката $\frac{1}{5}$. Овој размер $\frac{1}{5}$ значи дека на секои 5 ученика во класот има по 1 одличен ученик.

Деловите од дадена големина најчесто ги искажуваме со проценти.

!

- **Еден процент (1%)** е стоти дел од некоја целина.
- Ако S ни е дадена целина, 1% од таа целина е $\frac{1}{100}\cdot S$, додека p % од S е всушност $\frac{p}{100}\cdot S$.

Ако размерот $\frac{5}{25}$. т.е. $\frac{1}{5}$ во Пример 1 го прошириме до размер во кој вториот член е 100, го добиваме размерот $\frac{20}{100}$. Ова ќе значи дека 20% од учениците се одлични.

Пример 2 Да одредиме колкав процент од дадена целина претставуваат дропките $\frac{2}{5}, \frac{13}{20}, \frac{9}{10}, \frac{27}{50}$. За таа цел дадените дропки (размери) ќе ги прошириме до дропки со именител 100.

$\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$, $\frac{13}{20} = \frac{65}{100}$, $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$, $\frac{27}{50} = \frac{54}{100}$. Ова значи дека $\frac{2}{5}$ од некоја целина е 40%, $\frac{13}{20}$ од дадена целина е 65% од целината итн.

Пример 3 25% од 60 е $\frac{25}{100} \cdot 60 = 15$.

!

- ❖ Целината S ќе ја викаме **главна вредност**.
  Процентот ќе го означуваме со p.
  Делот од целината кој одговара на дадениот процент ќе го викаме **износ** *(***процентен износ***)* и ќе го означуваме со i.

- Имајќи предвид дека целината одговара на 100%, користејќи го простото тројно правило можеме да поставиме пропорција од каде ќе ги изведеме формулите за пресметување на една од претходните три величини (главна вредност S, процент p и процентен износ i), доколку се познати останатите две:

$$\uparrow \begin{array}{l} \text{целина } S \\ \text{износ } i \end{array} \qquad\qquad \uparrow \begin{array}{l} 100\% \\ p\,\% \end{array}$$

- Поголем износ одговара на поголем процент, поради што стрелките се во иста насока. Ја поставуваме пропорцијата:

$$i : S = p : 100$$

од која ги изведуваме формулите:

$$i = \frac{S \cdot p}{100}; \qquad p = \frac{100 \cdot i}{S}; \qquad S = \frac{100 \cdot i}{p}.$$

Пресметувањето на една од овие три величини, во случај кога се познати останатите две, се вика **процентна сметка од сто**.

Пример 4 Продавач на карти за концерт има добивка 5% од секоја продадена влезница. Ако влезницата чини 700 денари, по колку денари заработува продавачот од една продадена карта?

$$S = 700, \qquad p = 5, \qquad i = ?$$

$$i = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{700 \cdot 5}{100} = 35.$$

Продавачот има по 35 денари добивка од секоја карта.

Пример 5 Месечните примања на еден човек се 12 000 денари. Секој месец тој одвојува по 720 денари за нова гардероба. Колку проценти од месечните примања човекот одвојува за гардероба?

$$S = 12\,000, \qquad i = 720, \qquad p = ?$$

$$p = \frac{100 \cdot i}{S} = \frac{100 \cdot 720}{12\,000} = 6.$$

Добивме дека секој месец човекот одвојува по 6% за гардероба.

Пример 6 За одреден производ, за кој се плаќа ДДВ од 18% е платено 450 денари ДДВ. Колкава е основната цена на производот, а колкава е крајната цена (со данокот)?

$$i = 450, \qquad p = 18, \qquad S = ?$$

$$S = \frac{100 \cdot i}{p} = \frac{100 \cdot 450}{18} = 2\,500$$

Основната вредност на производот е 2 500 денари, крајната цена со пресметан ДДВ е 2950 денари.

Задачи за самостојна работа:

1. На колкав процент одговара 12 литри од вкупна смеса 56 литри?
2. Цената на еден производ кој чинел 640 денари е зголемена за 35%, а веднаш наредниот ден цената на истиот производ е намалена за 25%. Определете ја цената на производот по намалувањето.
3. Цената на еден производ кој чинел 825 денари е намалена за 26%, а веднаш наредниот ден цената на производот е зголемена за 30%. Определете ја цената на производот по поскапувањето.
4. Триесет проценти од висината на еден столб изнесува 105cm. Колку е висок целиот столб?
5. Марио има 45 задачи за домашна работа по математика, кои треба да ги реши за време на зимскиот распуст. Првата седмица тој решил 27 задачи. Колкав процент Марио решил од домашните задачи? Уште колку задачи треба да реши Марио за да има решено 80% од домашната работа?

6. Дадена смеса ја делиме на три дела, така што првиот дел е 55% од смесата, вториот дел е 25% од смесата, а третиот дел е 220 килограми од истата смеса. Пресметајте колку килограми е целата смеса и колкави се првиот и вториот дел.
7. На еден контролен тест, наставникот на учениците им дал три задачи. 12% од учениците не решиле ниту една задача, 32% од учениците решиле една или две задачи, а 14 ученици ги решиле сите три задачи. Колку ученици од тоа одделение правеле контролен тест? Колку ученика решиле една или две задачи, а колку ученика не решиле ниту една задача?

7.Процентна сметка под сто. Процентна сметка над сто

Во различни проблеми поврзани со проценти, честопати ни е дадена основната вредност намалена или зголемена за одреден процент, а не ни е дадена самата основна вредност. Задачата со која се определува основната вредност во случај кога ја знаеме нејзината вредност намалена, односно зголемена за одреден процент, се вика **процентна сметка под сто**, односно **процентна сметка над сто**.

Во секојдневието многу често се среќаваме со практични проблеми кои бараат користење на процентна сметка под или над сто. Такви примери се зголемувањето и намалувањето на цената на некој производ во маркети, пазари, продавници за облека, недвижнини итн. Месечните трошоци на секоја фамилија постојано се менуваат (зголемуваат или намалуваат), кои исто така бараат користење на процентни сметки. Зголемувањето или намалувањето на провизиите во трговијата исто така бара користење на процентни сметки. Реалниот живот изобилува со вакви примери, затоа и изучувањето на процентните сметки е многу важно.

- Главната вредност S одговара на 100%. Доколку истата е зголемена за p %, на кои одговара процентен износ i, тогаш вредноста ќе биде $(S+i)$ и истата ќе одговара на $(100+p)\%$. Според тоа, применувајќи го простото тројно правило, можеме да поставиме пропорција:

$$\uparrow \begin{array}{l} S \\ (S+i) \end{array} \qquad \uparrow \begin{array}{l} 100\% \\ (100+p)\% \end{array}$$

$$(S+i):S=(100+p):100$$
$$100\cdot(S+i)=S\cdot(100+p)$$
$$S=\frac{(S+i)\cdot 100}{(100+p)}.$$

Со последната формула решаваме процентна сметка над сто.

❖ Аналогно, доколку главната вредност S е намалена за p%, на кои одговара процентен износ *i*, тогаш новата вредност $(S-i)$ ќе одговара на $(100-p)\%$. Во овој случај со примена на просто тројно правило ќе добиеме:

$$\begin{array}{ll} \uparrow S & \uparrow 100\% \\ (S-i) & (100-p)\% \end{array}$$

$$(S-i):S=(100-p):100$$
$$100\cdot(S-i)=S\cdot(100-p)$$
$$S=\frac{(S-i)\cdot 100}{(100-p)}.$$

Со последната формула решаваме процентна сметка под сто.

Пример 1 Цената на кафето е зголемена за 8% и сега изнесува 3132 денари за кутија. Колкава била цената на кафето пред поскапувањето и за колку поскапело кафето?

Ако цената на кафето пред поскапувањето била S (основната вредност пред да биде зголемена за 8%), а после поскапувањето изнесува 3132 денари, тогаш $S+i=3132$, а $100+p=108$, па според формулата за процентна сметка над сто, имаме:

$$S=\frac{(S+i)\cdot 100}{(100+p)}=\frac{3132\cdot 100}{108}=2900.$$

Цената на кафето пред поскапувањето била 2 900 денари. Кафето поскапело за $3132-2900=232$ денари, што претставува 8% од 2 900 денари (проверете сами).

Пример 2 Поради грешка во шиењето, цената на еден фустан е намалена за 12% и фустанот сега се продава за 1 056 денари. Колкава била првичната цена на фустанот?

Овде ни е дадено намалување на основната вредност за 12%, т.е. имаме процентна сметка под сто.

$$S-i=1056, \qquad 100-p=100-12=88$$
$$S=\frac{(S-i)\cdot 100}{(100-p)}=\frac{1056\cdot 100}{88}=1200,$$

Добивме дека првичната цена на фустанот, пред намалувањето, била 1200 денари. Фустанот поевтинил за $1200-1056=144$ денари, што претставува 12% од 1200 денари (проверете сами).

Задачи за самостојна работа:

1. После покачувањето од 18%, платата на секој вработен во еден погон изнесува 28320 денари. Пресметај колкаво е покачувањето и колкава била претходната плата на вработените.
2. Во една конфекција каде што се шијат ученички униформи, нормата е натфрлена за 15% и со тоа се сошиени 368 униформи. Колку униформи била нормата во конфекцијата?
3. Минатата година во едно средно училиште во прва година се запишале 104 ученика, што е за 20% помалку од бројот на ученици кои се запишале оваа година. Колку ученици оваа година запишале прва година во тоа средно училиште?
4. Во септември минатата година во едно место имало во просек 44 l/m^2 врнежи седмично, што е за 5% помалку од врнежите во октомври. Колку врнежи просечно по седмица имало во октомври?
5. Цената на еден велосипед, со вклучен данок од 18%, изнесува 10 000 денари. Која е основната вредност на велосипедот, а колку изнесува данокот?
6. Една пекара која не работи во недела, во сабота произведува 4 620 лебови, што е за 65% повеќе од бројот на лебови кој го произведува во останатите работни денови. По колку лебови произведува пекарницата во работните денови?
7. За време на летните одмори една пекарница произведува по 2795 леба дневно, што е за 14% помалку од дневното производство во останатиот период од годината. По колку лебови дневно произведува пекарницата во останатиот период од годината?

8. Каматна сметка

Каматната сметка најчесто се применува при штедењето и задолжувањето. Кога вложуваме средства на определен период (штедиме) во банка или штедилница, истата ги користи нашите средства, а за сметка на тоа ни исплаќа одреден надоместок кој се вика **камата**. Слично е и со задолжувањето, во тој случај банката ни дава средства да ги користиме и вратиме за определен период (кредит), а за сметка на тоа што сме имале на располагање нејзини средства, ни пресметува камата.

!

- Вложената, односно позајмената сума пари, се вика **капитал** или **основна вредност**. Надоместокот што се исплаќа за вложените, односно позајмените пари, се вика **камата**. Каматата која треба да се исплати најчесто е дадена како определен процент од основната вредност (капиталот), за одредено време, а тој процент се вика **каматна стапка**.

На пример, ако за определен штеден влог се пресметува 3% камата годишно, тоа значи дека 3% од вложената сума ќе биде вкупната камата по истекот на една година од вложувањето.

Пример 1 Ако во банка вложиме 75 000 денари како штеден влог, со камата 2,8% годишно, за една година ќе ни биде исплатена камата од $\frac{2,8}{100}\cdot 75\,000 = 2100$ денари. Ако пак од банка подигнеме заем (кредит) со годишна каматна стапка 6,8%, тогаш на земените пари за една година ќе треба да платиме $\frac{6,8}{100}\cdot 75\,000 = 5100$ денари.

При задолжувањата и штедењата, често пати наместо на точно една година, задолжувањето, односно штедењето, ги правиме на неколку месеци или пак неколку години, па камата треба да се пресмета на определен временски период различен од една година. Каматата во овој случај јасно е дека ќе зависи од временскиот период на кој се вложени, односно задолжени средствата. Притоа, поголем временски период значи и поголема камата; исто така, поголем влог (долг) значи поголема камата. Од ова заклучуваме дека вкупната камата ќе биде правопропорционална и со вложените (задолжени) средства и со временскиот период на задолжување (вложување).

!

- Ако капиталот (основната вредност) го означиме со K, каматната стапка за единечен временски интервал (една година, еден месец) ја означиме со p, во горниот пример видовме дека за единечен интервал (пример за една година) пресметаната камата, означена со i, ќе биде $i = \frac{p}{100}\cdot K$. Ако временскиот период е t (пример t години), вкупната камата за тој период ќе изнесува:

$$i = \frac{p}{100}\cdot K \cdot t = \frac{p\cdot K\cdot t}{100}$$

- Од последната формула лесно се изведуваат формулите за пресметување на главната вредност, каматната стапка или времето, ако се познати останатите три величини:

$$K = \frac{100\cdot i}{p\cdot t} \qquad p = \frac{100\cdot i}{K\cdot t} \qquad t = \frac{100\cdot i}{p\cdot K}$$

❖ Да забележиме дека при пресметување на каматата за временски период t на овој начин ја пресметуваме каматата само на основната вредност. Оваа камата се вика **проста камата**, а нејзиното пресметување се вика **проста каматна сметка**.

Доколку при вложувањето, после првата година (првата временска единица), добиената камата ја вложиме заедно со капиталот од првата година, тогаш капиталот (основната вредност) се зголемува, па за втората година каматата ќе се пресметува на поголем капитал; понатаму, доколку каматата од втората година ја вложиме заедно со капиталот од втората година, за третата година ќе се пресмета камата на уште поголема основна вредност итн. Пресметувањето на вкупната камата за временски период t во овој случај се вика **сложена каматна сметка**.

Во следните задачи ќе претпоставиме дека добиената камата не се додава на основната вредност во наредната година, т.е. имаме проста каматна сметка.

Пример 2 Колкава е вкупната камата која треба да биде исплатена на штеден влог од 132000 денари за 5 години, ако годишната каматна стапка е 2,2%?

Дадени ни се величините: $K = 132\,000$, $t = 5$, $p = 2,2$. Вкупната камата i за 5 години ќе биде $i = \frac{p \cdot K \cdot t}{100} = \frac{2,2 \cdot 132\,000 \cdot 5}{100} = 14\,520$ денари.

Пример 3 Колкав капитал треба да се вложи во денари со годишна каматна стапка 2,5%, да за 4 години добиената камата е 12 500 денари?

Овде ни е дадено: $p = 2,5$, $t = 4$, $i = 12\,500$, додека основната вредност K (капиталот) треба да го пресметаме. Според формулата,

$$K = \frac{100 \cdot i}{p \cdot t} = \frac{100 \cdot 12\,500}{2,5 \cdot 4} = 125\,000,$$

што значи за да ја добиеме дадената камата при дадените услови треба да вложиме 125 000 денари.

Пример 4 За колку години треба да се врати долг од 60 000 денари со 8% годишна каматна стапка, за вкупната камата да биде 12 000 денари?

Дадено ни е $K = 60\,000$, $p = 8$, $i = 12\,000$, а временскиот период t, во години, треба да го пресметаме.

$$t = \frac{100 \cdot i}{p \cdot K} = \frac{100 \cdot 12\,000}{8 \cdot 60\,000} = 2,5$$

Добивме дека за 2,5 години треба да биде вратен долгот.

Во праксата при штедењето и задолжувањето, често пати се јавува потреба да на влог (долг) со определена годишна каматна стапка треба да се пресмета камата за неколку месеци или денови.

- Во случај кога треба да пресметаме **камата за еден месец при дадена годишна каматна стапка**, годишната камата ја делиме со 12 и месечниот каматен износ е:

$$i = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 12}.$$

- Доколку треба да пресметаме **камата за** m **месеци**, во ваков случај таа ќе изнесува

$$i = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}.$$

- Од оваа формула едноставно се изведуваат формулите за пресметување на останатите величини, кога ја знаеме добиената камата за определен број месеци:

$$K = \frac{1200 \cdot i}{p \cdot m}; \qquad m = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot p}; \qquad p = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot m}.$$

Пример 5 Колкава камата носи влог од 108 000 денари, со 4% годишна каматна стапка, за 4 месеци?

$K = 108\,000$, $p = 4$, $m = 4$

$$i = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12} = \frac{108\,000 \cdot 4 \cdot 4}{1200} = 1440.$$

Каматата за 4 месеци изнесува 1 440 денари.

Пример 6 Со колкава каматна стапка влог од 40 000 денари за 18 месеци ќе донесе камата 3600 денари?

$K = 40\,000$, $m = 18$, $i = 3600$

$$p = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot m} = \frac{1200 \cdot 3600}{40\,000 \cdot 18} = 6.$$

Годишната каматна стапка треба да биде 6%.

Пример 7 За колку месеци е вратен долг од 72 000 денари, земен со годишна каматна стапка од 8%, ако вкупната платена камата за долгот е 2 400 денари.

$K = 72\,000,\quad p = 8,\quad i = 2\,400$

$$m = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot p} = \frac{1200 \cdot 2\,400}{72\,000 \cdot 8} = 5.$$

Долгот е вратен за 5 месеци.

- Во случај кога треба да ја пресметаме **каматата за еден ден, при дадена годишната каматна стапка**, годишниот износ на каматата ќе го поделиме со 365, па дневниот каматен износ е:

$$i = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 365}.$$

- **Каматата за** d **денови** ќе изнесува:

$$i = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 365}.$$

- Овде ќе наспоменеме дека во некои случаи (зависно од политиката на банката), наместо со 365, за да се пресмета дневен каматен износ, годишната камата се дели со 360.
- Исто така, ако е наведен временскиот период во месеци, а не е наведено за кои месеци точно се работи, месеците ќе ги сметаме по 30 дена. Ако точно знаеме за кои месеци се работи, ќе броиме онолку денови колку што има во месеците.

Формулите за пресметување на секоја од останатите величини, во случај кога го знаеме каматниот износ за определен број на денови, се изведуваат едноставно од последната формула:

$$K = \frac{36\,500 \cdot i}{p \cdot d};\qquad d = \frac{36\,500 \cdot i}{K \cdot p};\qquad p = \frac{36\,500 \cdot i}{K \cdot d}.$$

Пример 8 Колкав капитал треба да се вложи во денари со годишна каматна стапка 3,2%, да за 125 дена донесе камата 1000 денари?

$p = 3.2,\quad d = 125,\quad i = 1000$

$$K = \frac{36\,500 \cdot i}{p \cdot d} = \frac{36\,500 \cdot 1000}{3{,}2 \cdot 125} = 91\,250.$$

Треба да се вложи капитал од 91 250 денари.

Пример 9 Со која годишна каматна стапка треба да се вложат 10 950 денари, за да влогот од 29 јули до 2 ноември, донесе камата 114 денари?

$K=10950$, $i=114$, $d=2+31+30+30+2=95$

$$p=\frac{36500\cdot i}{K\cdot d}=\frac{36500\cdot 114}{10950\cdot 95}=4.$$

Годишната каматна стапка треба да изнесува 4%.

❖ Во праксата често пати капиталот и каматата не се дадени одвоено, туку се дадени заедно како вкупен долг, т.е. позната е вредноста $K+i$. Пресметувањето на секоја од овие величини одделно се вика **каматна сметка над сто**.

❖ Капиталот во овој случај го пресметуваме со формулата $K=\dfrac{(K+i)\cdot 100}{100+p\cdot t}$, додека каматата ја пресметуваме со формулата $i=\dfrac{(K+i)\cdot p\cdot t}{100+p\cdot t}$, каде t е временскиот период во години за кој е пресметана каматата.

❖ Доколку ни е дадена разликата на капиталот и каматата, т.е. $K-i$, задачата со која пресметува секоја од овие две вредности се вика **каматна сметка под сто**. Истите ги пресметуваме со следните формули: $K=\dfrac{(K-i)\cdot 100}{100-p\cdot t}$ и $i=\dfrac{(K-i)\cdot p\cdot t}{100-p\cdot t}$.

Пример 10 За еден долг земен со годишна каматна стапка 12,5%, за две години е вратена вкупна сума 325 500 денари. Пресметајте колкав е долгот, а колкава е каматата?

$$K+i=325500,\ t=2,\ p=12{,}5$$

$$K=\frac{(K+i)\cdot 100}{100+p\cdot t}=\frac{325500\cdot 100}{100+12{,}5\cdot 2}=264000;$$

$$i=\frac{(K+i)\cdot p\cdot t}{100+p\cdot t}=\frac{325500\cdot 12{,}5\cdot 2}{100+12{,}5\cdot 2}=65100.$$

Пример 11 Со одбивање на каматата која за четири месеци треба да се плати за долгот, побарувачот на долгот примил 152 500 денари. Пресметајте колку изнесува долгот, а колку каматата при каматна стапка 5%.

$$K-i=152500\,,\quad t=\frac{1}{3}\,,\quad p=5$$

$$K=\frac{(K-i)\cdot 100}{100-p\cdot t}=\frac{152500\cdot 100}{100-5\cdot\frac{1}{3}}=155084,75\,;$$

$$i=\frac{(K-i)\cdot p\cdot t}{100-p\cdot t}=\frac{152500\cdot 5\cdot\frac{1}{3}}{100-5\cdot\frac{1}{3}}=2584,75\,.$$

Задачи за самостојна работа:

1. Со колкава каматна стапка капитал од 9 000 денари за 5 години ќе донесе камата 2 700 денари?
2. За колку години капитал од 124 000 денари ќе донесе камата 18 600 денари, ако е вложен со годишна каматна стапка 7,5%?
3. Колкав капитал вложен со годишна каматна стапка 9%, за 15 месеци ќе донесе камата 3744 денари?
4. Пресметај колкав треба да биде капиталот вложен со годишна каматна стапка од 4,5%, кој за две години, три месеци и петнаесет дена ќе донесе камата 16 500 денари?
5. Колкава камата ќе се плати на долг од 36 500 денари за 80 дена, ако годишната каматна стапка е 6%?
6. За колку денови капитал од 60 000 денари ќе донесе камата 2 700 денари, ако годишната каматна стапка е 4,5%?
7. Во банка се вложени 250 000 денари капитал, со годишна каматна стапка 3,6%. Колкава камата треба да исплати банката за 32 месеци?
8. За кредит отплатен во период од 16 месеци вратени се вкупно 58 080 денари. Пресметај колкава е основната вредност на кредитот, а колкава каматата, ако годишната каматна стапка е 4,2%?
9. По одбивање на каматата пресметана со годишна каматна стапка 6%, за долг кој треба да се врати за рок од 110 дена, исплатени се 147 250 денари. Колкав е долгот, а колкава е исплатената камата?
10. После период од 75 дена, состојбата на штедната сметка на еден штедач кој вложил средства со годишна каматна стапка 6%, изнесува 121 500 денари. Пресметај која е основната вредност на штедниот влог, а колкава е исплатената камата.

9. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Тројца ученици кои освоиле прва награда на натпревар по математика треба да ја поделат наградата од 100 000 денари пропорционално со бројот на освоени бодови. По колку денари ќе семе секој ученик, ако едниот освоил 92 бодови, другиот 95 бодови, а третиот 100 бодови?

2. За превоз на стока со маса 2 тони и 458 килограми е платено 11 061 денари. Колку треба да се плати за превоз на иста стока, со маса 4 тони, ако цената за превозот е пропорционална со масата на стиката?

3. 12 работника работеле 16 дена по 8 часа на ден и заработиле 240 000 денари. Колку ќе заработат 15 работника за 10 дена, ако при исти услови работат по 9 часа на ден?

4. 10 камиони со носивост по 6 тони ќе превезат одредена стока за 8 дена доколку прават по 4 тури на ден. За колку дена ќе ја превезат истата стока 6 камиони со носивост 8 тони, ако прават по 5 тури на ден?

5. Еден производ кој се продава по цена од 8 500 денари, ќе поевтини за 12% од цената. Која ќе биде новата цена на производот и за колку ќе биде поевтинувањето?

6. При транспорт на една роба се признава 0,5% расход. Пресметајте, за роба со маса 12 500 кг колку килограми расход се признава?

7. Платата на вработените во едно претпријатие ќе биде покачена за 15%. Колкава плата после покачувањето ќе зема работник кој сега зема 18 000 денари, а колкава плата ќе зема работник кој сега зема 21 000 денари?

8. Во едно одделение од 32 ученика, на крајот на учебната година 12 ученика поминале одлични, 8 ученика биле многу добри, 6 ученика биле добри, а 4 ученика поминале со доволен успех. Пресметајте колкав процент од учениците поминале одлични, колку многу добри, колку добри, а колку со доволен успех.

9. Во цистерна се налеани 37.4 тони течност по што во цистерната останале 6,5% празен простор. Колку течност треба да се долее за цистерната да се наполни?

10. Колкав капитал треба да вложиме со годишна каматна стапка 1,1%, на 9 месеци, за каматата да биде иста како каматата на влог 7 000 денари, вложени на две години со каматна стапка 0,9%?

11. На период од колку години треба да биде вложен капитал од 150 000 денари, при годишна каматна стапка 3%, за да биде пресметана иста камата како и каматата на заем од 100 000 денари, кој со годишна каматна стапка 4,5% треба да биде вратен за 4 години?

5 ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да решава линеарни равенки со една непозната;
- да дискутира решение на линеарна равенка со параметар во зависност од вредноста на параметарот;
- да решава практични проблеми кои се сведуваат на линеарна равенка со една непозната;
- да решава линеарна неравенка и да знае да го претстави решението аналитички и графички на бројна оска;
- да знае да решава систем и вкупност од две линеарни неравенки со една непозната и да го претставува решението аналитички како интервал и графички на бројна оска.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 5

1. Поим за линеарна равенка

1.1. Алгебарска равенка

- Изразите $-2x+5$; $3a^2b$; $\frac{3x^2}{2}-7y$ се алгебарски изрази со променливи.
- Од каков вид е равенството $x-6=1$?
- Дали за $x=7$ се добива точно равенство $x-6=1$?

За да го дефинираме поимот линеарна равенка, прво ќе дефинираме алгебарска равенка и решение на алгебарска равенка.

!

- ❖ Ако A и B се два алгебарски изрази од кои барем едниот содржи променлива, тогаш равенството $A=B$ се вика **алгебарска равенка.** За променливите во алгебарската равенка се вели дека се **непознати** во равенката.

Пример 1 Ако $A=3x^2-2$ и $B=\frac{x+5}{2x-1}$ се два алгебарски изрази, тогаш равенството $3x^2-2=\frac{x+5}{2x-1}$ е алгебарска равенка со една непозната.

- Може да се формираат и алгебарски равенки со две, три или повеќе непознати; Пример: $x^2-5y+3=0$, $5x-7y=-2$.

!

- ❖ Ако во алгебарската равенката $A=B$, каде A и B се два алгебарски изрази, после замената на непознатата со одреден реален број a, се добие точно бројно равенство, тогаш за бројот a се вели дека е **решение на таа алгебарска равенка**.
- ❖ Да се реши дадена алгебарска равенка, значи да се определат сите нејзини решенија.
- ❖ Сите решенија на една алгебарска равенка го сочинуваат **множеството решенија на таа равенка.**

Пример 2 Бројот -1 е решение на равенката $3x^2-2=\frac{x+5}{x^2+3}$, бидејќи $3(-1)^2-2=\frac{(-1)+5}{(-1)^2+3}$, т.е. $1=1$.

За алгебарските равенки важи следново:

!

❖ Една алгебарска равенка може:

- да има решение и се нарекува **решлива равенка**, ако нејзиното множество решенија не е празно множество;
- да нема решение, и се нарекува **нерешлива (невозможна) равенка**, ако нема ниту едно решение.

Пример 3 Провери дали бројот: а) 4; б) -3; е решение на равенката $2x+3=4x-5$.

а) На дадената равенка наместо променливата x го заменуваме бројот 4 . Така, $2\cdot4+3=4\cdot4-5$ т.е. $11=11$. Значи, бројот 4 е решение на дадената равенка и тоа единствено решение т.е. **множеството решенија** M на равенката е $M=\{4\}$. Доколку наместо променливата x го замениш бројот -3, ќе забележиш дека нема да добиеш точно бројно равенство. Значи бројот -3 не е решение на равенката.

1 Определи кои од следните равенки се невозможни:

а) $(x-3)\cdot0=5$; б) $3x-2=4x+1$; в) $5x^2=-3$; г) $x+2=0$.

Невозможни се равенките под а) и в). Објасни зошто!

- Како се нарекуваат равенките кои имаат исти множества решенија?

!

❖ Две алгебарски равенки $A=B$ и $C=D$ во исто дефиниционо множество се **еквивалентни равенки** ако нивните множества решенија се совпаѓаат, т.е.

$$(A=B \Leftrightarrow C=D) \Leftrightarrow M_1=M_2,$$

каде што M_1 е множеството решенија на првата равенка, а M_2 е множеството решенија на втората равенка.

!

❖ Некои од својствата на релацијата еквивалентност што се користат при решавање на равенките се:

1) $A=T \Rightarrow (A=B \Leftrightarrow T=B)$
2) $A=B \Leftrightarrow A+C=B+C$
3) $C\neq0 \Rightarrow (A=B \Leftrightarrow AC=BC)$
4) $AB=0 \Leftrightarrow A=0$ или $B=0$

Овие својства на релацијата за еквивалентност се познати како **еквивалентни трансформации на равенка.**

1.2. Линеарни равенки и решавање на линеарни равенки

!

- ❖ Алгебарската равенка $A = B$ во која по нејзиното средување, непознатата се јавува само од прв степен се нарекува **линеарна равенка**.
- ❖ Општиот облик на линеарна равенка со една непозната е $ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R}$.

- Равенките од облик $-3x+1=2$, $5x-2=3-x$, $3x+1-2x=0$, $3x+1=2$, $\frac{4x}{3}+\frac{x-3}{4}=5$ се линеарни равенки со една непозната.

Размисли и одговори!

- Колку решенија има линеарната равенка со една непозната?

Пример 4 Равенките $2x+3=x-1$, $\frac{-x+3}{2}=4$, $4x=7$,... се линеарни равенки со една непозната.

За решливоста на линеарната равенка важи следново:

!

- ❖ Секоја линеарна равенка може да се доведе во обликот $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}$.

  Решливоста на равенката $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}$ зависи од реалните броеви a и b .

  1) Ако $a \neq 0$, равенката е решлива и има само **едно решение** $x=-\frac{b}{a}$.

  2) Ако $a=0 \wedge b=0$, равенката е исто така решлива, т.е. секој реален број е нејзино решение, т.е. **има бесконечно многу решенија**.

  3) Ако $a=0 \wedge b\neq 0$, равенката е **нерешлива (невозможна)**, бидејќи равенката $0\cdot x+b=0,\ b\neq 0$, не станува точно бројно равенство за ниеден реален број x .

Пример 5 Реши ги линеарните равенки:

а) $x+2=7$; б) $\frac{x}{4}=5;$ в) $5(2x-1)=7x+10;$ г) $\frac{x+3}{2}=\frac{5x-2}{3}.$

а) Со примена на второто својство т.е. со додавање на -2 од двете страни на равенката се добива: $x+2=7 \Leftrightarrow x+2-2=7-2 \Leftrightarrow x=7-2 \Leftrightarrow x=5$.

б) Со примена на третото својство, т.е. со множење на равенката од двете страни со $C=4$ се добива: $\frac{x}{4}=5\ /\cdot 4 \Leftrightarrow x=5\cdot 4 \Leftrightarrow x=20$.

в) Следната равенка ќе ја решиме со примена на првото, второто и третото својство, т.е.

$$5(2x-1)=7x+10 \Leftrightarrow 5\cdot 2x-5\cdot 1=7x+10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x-5=7x+10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x-7x=10+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=15\ /\cdot\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{15}{3} \Leftrightarrow x=5.$$

г) За решавање на оваа равенка најпрво го применуваме третото својство со тоа што ќе ја множиме равенката од двете страни со $C=6$ т.е. равенката ќе ја помножиме со НЗС од именителите. Потоа ќе ги примениме првото и второто својство. Така се добива:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{5x-6}{3} \Leftrightarrow 3(x+3)=2(5x-6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+3\cdot 3=2\cdot 5x-2\cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x+9=10x-12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x-10x=-9-12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -7x=-21\ /\cdot(-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x=21\ /\cdot\frac{1}{7} \Leftrightarrow x=\frac{21}{7} \Leftrightarrow x=3.$$

Пример 6 Дискутирај ја решливоста на равенката:

а) $2x+\frac{1-2x}{2}=x+\frac{1}{2}$; б) $x+3=2(2x-5)-3x$; в) $3(x+2)=\frac{x}{4}-1$.

а) Решлива равенка, со бесконечно многу решенија, бидејќи:

$$2x+\frac{1-2x}{2}=x+\frac{1}{2}\ /\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 4x+1-2x=2x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x-2x-2x=1-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0\cdot x=0.$$

б) Нерешлива, бидејќи:

$$x+3=2(2x-5)-3x;$$
$$\Leftrightarrow x+3=4x-10-3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-4x+3x=-10-3 \Leftrightarrow 0\cdot x=-13.$$

в) Решлива, со едно единствено решение, бидејќи:

$$3(x+2)=\frac{x}{4}-1/\cdot 4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12(x+2)=x-4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12x-x=-4-24\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11x=-28$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{28}{11}.$$

Во една равенка, освен непознатата може да се појави некоја буква што се смета како познат број и се нарекува (реален) **параметар.**

!

- Општите броеви (букви) со кои во равенката се изразени некои од познатите величини и кои не зависат од непознатите се викаат **параметри** на равенката.
- Параметрите во равенката обично ги изразуваме со првите букви од латинската азбука $a,b,c,d,...,k,m,n$ за разлика од променливите кои ги означуваме со последните букви од латиницата $x,y,z,v,u,...$
- Ако зборуваме за општи реални броеви тогаш зборуваме за **реални параметри.**

Пример 7 Одреди за која вредност на параметарот a равенката $ax-3a=1+5x$ ќе биде:

а) решлива; б) невозможна.

Пред да почнеме со решавање равенка ја трансформираме во еквивалентна равенка на дадената, т.е. $ax-3a=1+5x \Leftrightarrow (a-5)x=1+3a$.

а) Равенката е решлива за $a-5\neq 0$, т.е. за $a\neq 5$, и тоа решение е единствено $x=\frac{1+3a}{a-5}$.

б) Равенката е невозможна за $a-5=0$ т.е. за $a=5$, бидејќи $0\cdot x=1+15=16$.

Една равенка може да содржи и повеќе параметри. Во тој случај дискусијата за решливоста на равенката се сведува на дискусија за секој параметар посебно, а и за евентуални врски помеѓу нив.

Да го разгледаме следниот пример:

Пример 8 За кои вредности на параметрите m и n равенката $\frac{x}{m+n}+\frac{x}{n}=\frac{n}{m+n}$ е решлива?

Најпрво равенката има смисла за $m+n\neq 0$, т.е. $m\neq -n$ и $n\neq 0$.

$$\frac{x}{m+n}+\frac{x}{n}=\frac{n}{m+n}\ /\cdot n(m+n)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(m+n)\cdot\frac{x}{m+n}+n(m+n)\cdot\frac{x}{n}=n(m+n)\cdot\frac{n}{m+n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nx+\left(m+n\right)\cdot x=n^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mx+mx+nx=n^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(2m+n\right)=n^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{n^2}{2m+n}$$

Оттука, следува следната дискусија:

1) Равенката ќе има единствено решение ако $2m+n\neq 0$, т.е. $n\neq -2m$.
2) Равенката има бесконечно многу решенија ако $m=0$ и $n=0$.
3) Равенката нема да има решение ако $n=-2m$ и $n\neq 0$.

2 Реши ја равенката $\frac{5\left(x+2\right)}{6}-\frac{2\left(x-1\right)}{3}=\frac{3\left(x-2\right)}{2}$.

3 Дискутирај ја решливоста на равенката $\frac{ax-b}{b}-\frac{bx-a}{a}=a-b$ во зависност од вредноста на параметрите.

Задачи за самостојна работа:

1. Одреди кои од следните равенки се еквивалентни:

а) $2x+1=0$ и $2\left(x+1\right)=1$; б) $x=5$ и $x^2=25$;

в) $\frac{x}{5}=2$ и $\frac{3x}{2}=x+5$; г) $\frac{x+3}{5}=0$ и $-2\left(x+1\right)=7$.

2. Одреди кои од следните равенки се линеарни со една непозната:

а) $\frac{x}{3}=\frac{5}{7}$; б) $\frac{x^2-3}{2}=2$; в) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{8}$; г) $2-x^2=x$.

3. Провери дали решение на равенката $\frac{2x+1}{x-3}=1$ е бројот:

а) -4; б) 2.

4. Определи кои од следните равенки се невозможни:

а) $2(1-x)+3=4x-2$; б) $x+2=3+x$; в) $-2x^2=5$; г) $x-4=0$.

5. Реши ги линеарните равенки:

а) $5-x=6$; б) $3\frac{x}{2}=-9$;

в) $2-[3(-2x+1)+(x-4)]=3x-2$; г) $\frac{-x+2}{3}+\frac{2x-1}{4}-2=\frac{3(x-2)}{2}$.

6. Реши ги равенките:

а) $2ax-a+4=8a+7-5x$; б) $4(x+4)=a(a-x)$.

7. За која вредност на параметарот a, равенката:

а) $4(3x-a)+2x=10$ има решение $x=1$; б) $ax+10=5x-6$ има решение $x=-8$.

8. Дискутирај ја решливоста на равенката во зависност од вредноста на параметарот, $\frac{x+2a}{a-1}-\frac{x-2a}{a+1}=1$.

2. Равенки со апсолутна вредност кои се сведуваат на линеарни равенки со една непозната

Поимот апсолутна вредност на реален број беше воведен во модуларната единица 2.

Апсолутна вредност на бројот $x \in \mathbb{R}$ е дефинирана со равенството:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{за } x \geq 0 \\ -x, & \text{за } x < 0 \end{cases}.$$

Размисли и одговори!

- Одреди ја апсолутната вредност на броевите 7, -3 и 0!
- Што значи геометриски на бројна права апсолутна вредност од бројот 2 т.е. |2|, а што |-2|?

Поимот апсолутна вредност се користи за воведување на поимот растојание.

!

- Апсолутната вредност на произволен број $x \in \mathbb{R}$ означува оддалеченост на овој број од почетокот на бројната оска Ox.
- Под **растојание** меѓу два реални броеви a и b го подразбираме реалниот број $|a-b|$ и го означуваме со $d(a,b)$.
- **Аксиомите за растојание** се:
  1. $d(a,b) \geq 0, d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$ или $|a-b| \geq 0, |a-b|=0 \Leftrightarrow a=b$;
  2. $d(a,b)=d(b,a)$ или $|a-b|=|b-a|$;
  3. $d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)$ или $|a-c| \leq |a-b|+|b-c|$.

Начинот на сведување на равенки со апсолутна вредност на линеарни равенки со една непозната ќе го илустрираме со следните примери.

Пример 1 Очигледно е дека решение на равенката со апсолутна вредност $|x|=3$ се броевите $x=3$ и $x=-3$, бидејќи $|-3|=|3|=3$. Како се добиваат овие решенија и кои се линеарните равенки со една наепозната на кои се сведува оваа равенка со апсолутна вредност?

Според дефиницијата за апсолутна вредност од реален број дадена погоре, равенката со апсолутна вредност $|x|=3$ се сведува на следните линеарни равенки $x=3$ или $-x=3$. Од овде се добива дека решенијата се $x=3$ и $x=-3$.

Пример 2 Реши ја равенката со апсолутна вредност $|x|-3=7$.

Откако равенката ја трансформираме во еквивалентна равенка на неа, т.е. $|x|-3=7 \Leftrightarrow |x|=10$. Со примена на дефиницијата за апсолутна вредност како во пример 1, се добива решението на равенката $x=10$ и $x=-10$.

Пример 3 Реши ги равенките:

а) $|x+6|=2$; б) $2x+|x-3|=9$; б) $|x-3|=|2x+5|$.

а) Со примена на дефиницијата за апсолутна вредност

$$|x+6|=\begin{cases} x+6, & x \geq -6 \\ -(x+6), & x<-6 \end{cases}$$

Равенката ја решаваме во два интервали.

1. За $x \in (-\infty,-6)$:

$-(x+6)=2$

$x+6=-2$

2. За $x \in [-6,+\infty)$:

$x+6=2$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = -2 - 6 \qquad\qquad\qquad\qquad x = 2 - 6$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = -8 \qquad\qquad\qquad\qquad x = -4$$

т.е. $x = -8 \in (-\infty, -6)$ и $x = -4 \in [-6, +\infty)$.

Заклучуваме дека, равенката има две решенија $x = -8$ и $x = -4$.

б) Со примена на дефиницијата за апсолутна вредност

$$| x - 3 | = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases}.$$

Равенката ја решаваме во два интервали.

1) За $x \in (-\infty, -3)$: $2x - (x - 3) = 9 \Leftrightarrow x + 3 = 9 \Leftrightarrow x = 6 \notin (-\infty, 3)$.

   Решението $x = 6$ не е решение на равенката.

2) За $x \in [3, +\infty)$: $2x + (x - 3) = 9 \Leftrightarrow 3x - 3 = 9 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = 4 \in [3, +\infty)$.

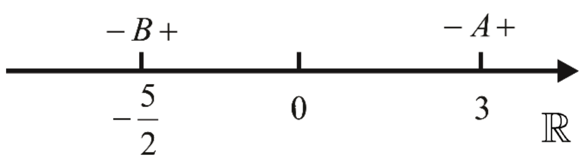
   Решението $x = 4$ е решение на равенката.

Заклучуваме дека, равенката има едно решение $x = 4$.

в) Со примена на дефиницијата за апсолутна вредност имаме,

$$| A | = | x - 3 | = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ -(x - 3), & x < 3 \end{cases} \text{ и } | B | = | 2x + 5 | = \begin{cases} 2x + 5, & x \geq -\frac{5}{2} \\ -(2x + 5), & x < -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

За подобра прегледност на интервалите во кои ќе ја решаваме равенката, ќе ја употребиме бројната оска:



Забележуваме дека знаците на изразите со променливи A и B ни даваат три различни интервали, каде ќе ја решаваме равенката.

1) За $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$: Во овој интервал за изразите со променливи A и B точно е

   $| A | = -A, | B | = -B$ т.е $-(x - 3) = -(2x + 5) \Leftrightarrow -x + 3 = -2x - 5 \Leftrightarrow x = -8 \in (-\infty, -\frac{5}{2})$.

   Решението $x = -8$ е решение на равенката.

2) За $x \in [-\frac{5}{2}, 3)$: Во овој интервал за изразите со променливи A и B точно е

   $| A | = -A, | B | = B$ т.е

$$-(x-3)=2x+5 \Leftrightarrow -x+3=2x+5 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \in [-\frac{5}{2},3) .$$

Решението $x=-\frac{2}{3}$ е решение на равенката.

3) За $x \in [3,+\infty)$: Во овој интервал за изразите со променливи A и B точно е $|A|=A, |B|=B$ т.е

$x-3=2x+5 \Leftrightarrow x=-8 \notin (3,+\infty)$.

Решението $x=-8$ не е решение на равенката. Но, ова решение веќе го добивме како решение на равенката во првиот интервал.

Заклучуваме дека, равенката има две решенија $x=-8$ и $x=-\frac{2}{3}$.

Напомена: На овој начин решаваме равенки и со повеќе апсолутни вредности.

Задачи за самостојна работа:

1. Реши ги равенките со апсолутна вредност:

а) $|x|=3$; б) $|x|-3=7$; в) $5-8|-2x|=-75$; г) $\frac{|7x+4|}{8}=3$.

2. Реши ги равенките:

а) $|2x-3|+1=4$; б) $|x-4|=|3x+1|$; в) $|-3x+7|=2$; г) $-2|5-x|+3=-7$.

3. Реши ја равенката со апсолутна вредност:

а) $|3x-2|-|-5x+1|=0$; б) $2|x|+|x-3|=x-1$; в) $|x|+|x+2|=3|x-1|-2$.

3. Составување и решавање на линеарни равенки

За поедноставување на алгебарските изрази често ги користеше формулите за:

бином на квадрат $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$, и формулата за разлика на квадрати $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

Изразите $\frac{x+1}{3-x}$, $\frac{2x}{x+1}$, $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2+2x}$ се алгебарски дропки.

Алгебарските дропки имаат смисла само кога именителот е различен од нула.

Со користење на формулите за скратено множење и еквивалентни трансформации на равенка, некои равенки се сведуваат на линеарна равенка со една непозната од облик $a \cdot x=b$. Во овој дел ќе се посветиме на решавање на такви равенки преку решавање на конкретни примери.

Пример 1 Реши ја равенката $(x+3)^2+(2x-1)^2=5x^2-2x+2$.

Со примена на формулите за бином на квадрат се добива:

$$(x+3)^2+(2x-1)^2=5x^2-2x+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x+9+4x^2-4x+1=5x^2-2x+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+10=-2x+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x+8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x=-8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{4} \Leftrightarrow x=-2.$$

Значи, решението е $x=-2$.

Направи проверка на добиеното решение!

Да го разгледаме следниот пример во кој равенката нема смисла за секој реален број.

Пример 2 Реши ја равенката $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$ во дефиниционото множество.

Равенката има смисла за секој реален број освен за $x=-1$ и $x=1$, т.е. $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, бидејќи за тие вредности на x, именителите на дропките во равенката се еднакви на 0. Значи, од тоа што $x^2-1=(x-1)(x+1)\neq 0$, следува дека $x\neq -1$ и $x\neq 1$.

Решението ќе го изведеме на два начина.

I-начин

Дадената равенка ја множиме со најмалиот заеднички содржател од именителите $\text{НЗС}(x+1,\ x-1,\ x^2-1)=x^2-1$ каде што $x^2-1\neq 0$. Така, се добива еквивалентна равенка на неа:

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}\ /\cdot(x^2-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)-5(x+1)=x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-x+2-5x-5=x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}.$$

Значи, решение на равенката е $x=-\frac{3}{8}$.

II- начин

Равенката ја сведуваме на ист именител, т.е. на $\text{НЗС}\left(x+1,\ x-1,\ x^2-1\right)=x^2-1$. Па, се добива:

$$\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)-5(x+1)-x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-x+2-5x-5-x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8x-3}{x^2-1}=0.$$

Познато е дека вредноста на една дропка е нула ако броителот е еднаков на нула, затоа за наш случај имаме $-8x-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}$, каде што се доби истото решение како и претходно.

Проверка на решението:

Ако добиеното решение $x=-\frac{3}{8}$ го замениме во почетната равенка $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$, добиваме:

$$\frac{-\frac{3}{8}-2}{-\frac{3}{8}+1}-\frac{5}{-\frac{3}{8}-1}=\frac{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2-1}$$

$$\frac{-\frac{19}{8}}{\frac{5}{8}}-\frac{5}{-\frac{11}{8}}=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{9}{64}-1}$$

$$-\frac{19}{5}+\frac{40}{11}=\frac{9}{-55}$$

$$\frac{9}{-55}=\frac{9}{-55}.$$

Следниот пример е линеарна равенка со параметар. Ќе направиме дискусија на нејзиното решение во зависност од вредноста на параметарот.

Пример 3 Реши равенката $\frac{x-1}{x+1}-\frac{a}{x-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$ во дефиниционото множество. Дискутирај го нејзиното решение во зависност на вредоста на параметарот a!

Равенката ја множиме со најмалиот заеднички содржател од именителите $\text{НЗС}\left(x+1,\ x-1,\ x^2-1\right)=x^2-1$ каде што $x^2-1\neq 0$, т.е. $x\neq -1$ и $x\neq 1$.

Следи,

$x^2=(x-1)(x-1)-a(x+1) \Leftrightarrow x^2=x^2-2x+1-ax-a \Leftrightarrow (a+2)x=1-a$.

За $a\neq -2$, равенката има единствено решение и тоа $x=\frac{1-a}{a+2}$.

За $a=-2$, равенката нема решение т.е. равенката е од обликот $0\cdot x=3$.

Во продолжение ќе дадеме неколку текстуални задачи кои може да се решаваат со помош на линеарни равенки со една непозната.

Пример 4 Збирот на три последователни броеви е 246. Најди ги тие броеви.

Нека $x,\ x+1$ и $x+2$ се три последователни броја. Од условите на задачата имаме дека нивниот збир е 246. Значи,

$$x+(x+1)+(x+2)=246 \Leftrightarrow 3x+3=246 \Leftrightarrow x=81.$$

Тие броеви се: 81, 82 и 83.

Пример 5 Сара е 5 години помлада од Леа. Четири години подоцна, Леа ќе биде двојно постара од Сара. Најди ја сегашната возраст на Сара и Леа.

Ако со x ја означиме возраста на Леа, тогаш $x-5$ е возраста на Сара.
После четири години, возраста на Леа ќе биде $x+4$, додека на Сара $x-5+4$. Според условите на задачата, четири години подоцна Леа ќе биде двојно постара од Сара, па следи:

$$x+4=2(x-5+4) \Leftrightarrow x+4=2x-2 \Leftrightarrow x=6.$$

Значи, сегашната возраст на Леа е 6 години, додека на Сара е $x-5=6-5=1$ година.

Пример 6 Цената на две маси и три столици е 7050 денари. Ако една маса чини 400 денари повеќе од еден стол, најди ја цената за една маса и еден стол.

Ако со x ја означиме цената на еден стол, според условите на задачата $400+x$ е цената за една маса (масата чини 400 денари повеќе од столот).

Тогаш, цената за 3 столици е $3x$, додека за две маси е $2(400+x)$. Бидејќи се знае дека 7050 денари е вкупната цена за две маси и три столици, имаме:

$$2(400+x)+3x=7050 \Leftrightarrow 800+2x+3x=7050 \Leftrightarrow x=1250.$$

Значи, цената за еден стол е 1250 ден. Додека цената за една маса е $400+x=400+1250=1650$ ден.

Пример 7 Должината на правоаголникот е двојно поголема од ширината. Ако периметарот е 78 метри, пресметај ги должината и ширината на правоаголникот.

Нека x е ширината на правоаголниот, тогаш $2x$ е должината. Од условите на задачата се знае дека периметарот на правоаголникот е 78 метри, така имаме:

$$2(x+2x)=78 \Leftrightarrow 2x+4x=78 \Leftrightarrow x=13.$$

т.е. 13 метри е ширината и $2x=2\cdot 13=26$ метри е должината на правоаголникот.

Задачи за самостојна работа:

1. Реши ги равенките во областа на дефинираност:

   а) $x^2-(x+3)(x-1)+3=2x-6$; б) $\frac{2x-5}{x-2}=\frac{3x-5}{x-1}-1$;

2. Именителот на еден рационален број е поголем од неговиот броител за 3. Ако броителот се зголеми за 7 додека именителот се намали за 1, новиот број станува $\frac{3}{2}$. Најди го тој број.
3. Збирот од цифрите на еден двоцифрен број е 12. Ако цифрите ги заменат местата, новиот број е за 18 помал од првиот. Кој е тој број?
4. Колку mg метал што содржи 45% никел треба да се комбинира со 6 mg чист никел за да се добие легура што содржи 78% никел?
5. Најди го бројот чија една шестина е помала од една четвртина за 3.
6. Ако купите книга за 350 денари, што е за 30% намалена од редовната цена, која е редовната цена на книгата?

4. Решен облик на линеарна неравенка со една непозната

Пред да воведеме линеарна неравенка со една непозната и да го разгледаме нејзиното решавање, да одговориме на неколку прашања.

Размисли и одговори !

- Што е бројно неравенство? Дајте пример!
- Кој интервал го претставува множеството $\{x \mid x \in \mathbb{R}$?
  Претстави го интервалот графички на бројна права!
- Што е решение на неравенката $x < 5$, аналитички и графички?

Најпрво, да го дефинираме поимот неравенка со една непозната.

❖ Од два алгебарски изрази A и B со една променлива, сврзани со еден од знаците за неравенство $<, \leq, >$ или $\geq$ се добива неравенство што се вика **неравенка со една непозната.**

Пример 1 Неревенките $3x \geq 12$, $2x+3<4$, $\frac{x-2}{3} > \frac{x+1}{6}$, $x-1>0$, … се примери на линеарни неравенки со една непозната.

Слично како кај равенките со една непозната и овде можат да се извршуваат еквивалентни трансформации.

❖ Две неравенки $A<B$ и $C<D$ се **еквивалентни неравенки** ако нивните множества решенија се еднакви меѓу себе. Се означува: $A<B \Leftrightarrow C<D$.
Некои од својствата на релацијата еквивалентност што се користат при решавање на неравенките се:
1. $A<B \Leftrightarrow B>A$;
2. $A<B \Leftrightarrow A+C<B+C$;
3. $C>0 \Rightarrow (A<B \Leftrightarrow AC<BC)$, $C<0 \Rightarrow (A<B \Leftrightarrow AC>BC)$.

Овие својства на релацијата еквивалентност што се користат при решавање на неравенките уште се нарекуваат **еквивалентни трансформации на неравенка.**

Пример 2 Со помош на својствата 1-3 се докажува следната еквивалентност $\frac{x-1}{4} \leq \frac{1}{3}x \Leftrightarrow x \geq -3$.

Според својството 3, $\frac{x-1}{4} \le \frac{1}{3}x$ можеме да ја помножиме со $\text{НЗС}(3,4)=12$, па добиваме:

$12 \cdot \frac{x-1}{4} \le 12 \cdot \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3(x-1) \le 4x \Leftrightarrow 3x-3 \le 4x$.

Според својството 2, додаваме 3 на двете страни на неравенката, т.е. $3x-3+3 \le 4x+3$, $3x-4x \le 3 \Leftrightarrow -x \le 3$.

Според својството 3, ако помножиме со (-1), $(-x)\cdot(-1) \ge 3\cdot(-1) \Leftrightarrow x \ge -3$.

За да можеме да решаваме неравенки со една непозната, да објасниме што е решение на неравенка со една непозната, како и што е множество на решенија на неравенка со една непозната.

!

- Ако за некоја вредност на непознатата, линеарната неравенка преминува во точно бројно неравенство, тогаш за таа вредност велиме дека е **решение** на линеарната неравенка со една непозната.
- Множеството вредности за кои неравенката преминува во точно бројно неравенство се нарекува **множество решенија на неравенката.**

Пример 3 Секој број од интервалот $[3, +\infty)$ е решение на неравенката $x-3 \ge 0$, бидејќи неравенката поминува во точно бројно неравенство. Пример, за $x=5$ неравенката $x-3 \ge 0$ поминува во точно бројно неравенство $5-3 \ge 0$. Решението $x=5$ е едно решение на неравенката, а интервалот $[3, +\infty)$ е нејзиното множество решенија.

!

- Секоја неравенка која може да се доведе во обликот $\boldsymbol{ax<b}$, каде што $a, b \in \mathbb{R}$, се нарекува **линеарна неравенка со една непозната.**

Пример 4 Неравенките $2x+3<5$, $\frac{x-1}{2}>4$, $x \le -6, \ldots$ се линеарни неравенки со една непозната.

Пример 5 Решението на линеарната неравенка $x-6<1$ со користење на еквивалентни трансформации на неравенка е интервалот $(-\infty, 7)$. Поточно, примената на еквивалентните трансформации на дадената линеарна неравенка е

$$x-6<1 \Leftrightarrow x<6+1 \Leftrightarrow x<7.$$

Од каде очигледно е дека множеството решенија на дадената линеарна неравенка е интервалот $(-\infty, 7)$.

1 Запиши го множеството решенија на линеарните неравенки со една непозната:

а) $x \le 2$; б) $2x > 12$; в) $x-5 \ge 3$; г) $x+3<0$.

Пример 6 Реши ги линеарните неравенки со една непозната:

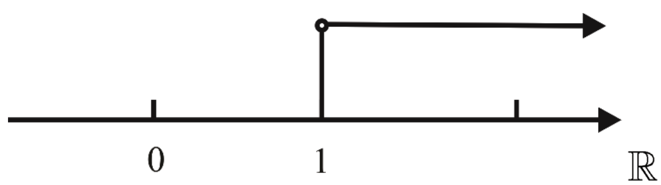
а) $-2(2x+3) \le -10$; б) $-2(5+6x) < 6(8-2x)$;

в) $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{5} < -\frac{2}{3}$; г) $\frac{3-x}{12} + \frac{5(x-2)}{6} > 2 + \frac{3x}{4}$.

а) Прво изразот во загради го множиме со бројот -2, па потоа ги применуваме второто и третото својството т.е.

$$-2(2x+3) \le -10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x-6 \le -10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x \le -4 \;/\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \ge 1.$$

Значи, множеството решенија на оваа неравенка е интервалот $[1, +\infty)$. Познато е дека интервалите може да се прикажат графички на бројната оска, така решението на ова неравенка е:



При решавање на неравенките треба да внимаваме особено при примена на третото својство т.е. при множење со негативен број, бидејќи во тој случај се менува знакот за неравенство во неравенката.

б) Слично како под а), најпрво се ослободуваме од заградите па потоа ги применуваме својствата:

$$-2(5+6x) < 6(8-2x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -10-12x < 48-12x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \cdot x < 58 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < 58.$$

Бидејќи неравенката $0<58$ е точно бројно неравенство, следи дека нејзино решение се сите реални броеви т.е. $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

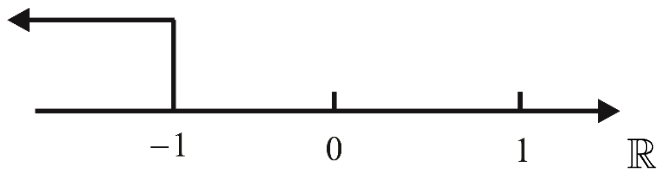
в) Најпрво го применуваме третото својство со тоа што неравенката од двете страни ја множиме со 15, т.е. со НЗС од именителите. Потоа ќе го примениме второто својство. Така се добива:

$$\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{5}<-\frac{2}{3}\ /\cdot 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x-5-3x-3<-10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x<-1.$$

Значи, множеството решенија на оваа неравенка е интервалот $(-\infty,\ -1)$, и прикажано на бројната оска е:



г) Неравенката ја множиме со 12 од двете страни, па потоа ги применуваме својствата 1-3, така се добива:

$$\frac{3-x}{12}+\frac{5(x-2)}{6}>2+\frac{3x}{4}\ /\cdot 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-x+10x-20>24+9x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\cdot x>41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0>41.$$

Бидејќи неравенката $0>41$ не е точно бројно неравенство, следи дека неравенката нема решение, т.е. нејзиното множество решенија е празно множество $\varnothing$.

2 Реши ја неравенката:

а) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}+\frac{x}{7}<1$; б) $(3x-1)^2+(4x+3)^2\geq(5x+4)^2$.

Исто како кај линеарните равенки и кај линеарните неравенки ќе разгледаме примери во кои дел или сите членови на неравенката се во знак за апсолутна вредност.

Таков е и следниот пример.

Пример 7 Реши ги линеарните неравенки со апсолутна вредност:

а) $|x-1|+2x>5$; б) $|2x-1|+|x-3|\leq 5$.

а) Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

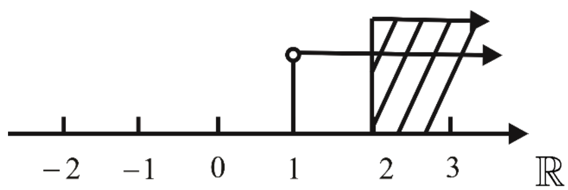
$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x-1\geq 0 \\ -(x-1), & x-1<0 \end{cases}=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -(x-1), & x<1 \end{cases}.$$

Оттука, наместо на целото множество на реални броеви одделнаш, ќе разгледуваме на два интервали $[1,+\infty)$ и $(-\infty,1)$.

1) Кога $x\in[1,+\infty)$, неравенката го добива обликот:

$x-1+2x>5 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2$.

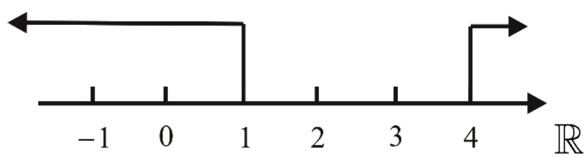
Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме $[1,+\infty)$ и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка, $(2,+\infty)$, го добиваме интервалот $(2,+\infty)$.



2) Кога $x\in(-\infty,1)$, неравенката го добива обликот:

$-x+1+2x>5 \Leftrightarrow x>4 \Leftrightarrow x>4$.

Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме $(-\infty,1)$ и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка, $(4,+\infty)$, добиваме $\varnothing$.



Конечно, решение на почетната равенка со апсолутна вредност ќе биде унијата од добиените решенија $(2,+\infty)\cup\varnothing=(2,+\infty)$.

б) $|2x-1|+|x-3|\le 5$

Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1, & 2x-1\ge 0\\ -(2x-1), & 2x-1<0\end{cases}=\begin{cases}2x-1, & x\ge \dfrac{1}{2}\\ -(2x-1), & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, & x-3\ge 0\\ -(x-3), & x-3<0\end{cases}=\begin{cases}x-3, & x\ge 3\\ -(x-3), & x<3\end{cases}$$

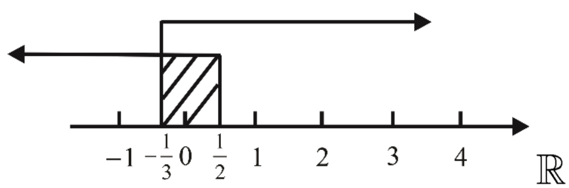
Оттука, решението на линеарната неравенка ќе го разгледуваме на интервалите:

$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},3\right),\left[3,+\infty\right)$.

1) Кога $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, неравенката го добива обликот:

$$\begin{aligned}&-(2x-1)-(x-3)\le 5 \Leftrightarrow\\&-2x+1-x+3\le 5 \Leftrightarrow\\&-3x\le 1/\cdot(-1) \Leftrightarrow\\&3x\ge -1 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

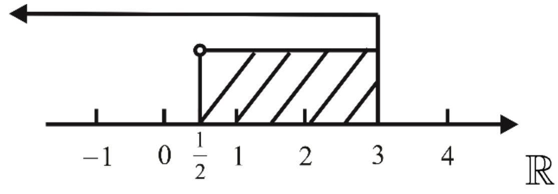
Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка, $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$, го добиваме интервалот $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.



2) Кога $x\in\left[\frac{1}{2},3\right)$, неравенката го добива обликот:

$$\begin{aligned}&2x-1-(x-3)\le 5 \Leftrightarrow\\&2x-1-x+3\le 5 \Leftrightarrow\\&x\le 3.\end{aligned}$$

Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме $\left[\frac{1}{2},3\right)$ и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка, $\left(-\infty,3\right]$, го добиваме интервалот $\left[\frac{1}{2},3\right)$.



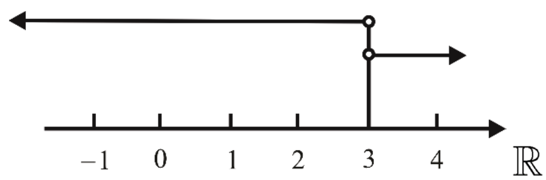
3) Кога $x \in [3, +\infty)$, неравенката го добива обликот:

$2x - 1 + x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow$

$2x - 1 + x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow$

$3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3.$

Ако најдеме пресек на интервалот на кој разгледуваме $[3, +\infty)$ и интервалот што го добиваме со решавање на линеарната неравенка, $(-\infty, 3]$, го добиваме $x = 3$.



Конечно како решение на неравенката добиваме интервал кој е унија од сите решенија, т.е.

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right) \cup \{3\} = \left(-\frac{1}{3}, 3\right].$

Задачи за самостојна работа*:*

1. Провери кои од следните парови неравенки се еквивалентни:

а) $3(x-3) - 5x > -3x - 6$ и $x > 3$; б) $3(1-2x) > 3 - 6x$ и $x > 2$.

2. Реши ги неравенките со една непозната:

а) $-5x + 6 > -7(5x - 6) - 6x$; б) $-6(1+7x) + 7(1+6x) \leq -2$;

в) $-2(2-2x) - 4(x+5) \leq -24$; г) $(x-1)^2 - (x+3)^2 \leq 2x - 5$.

3. Реши ги линеарните неравенки со една непозната:

а) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 3 - 2x$; б) $\frac{x-2}{3} - 3 \geq \frac{x+1}{4}$;

в) $4 - \frac{2(x-1)}{3} \leq 3(1-2x) + 5$; г) $-3.5x - 1.6 \geq 10.4 - 0.5x$.

4. Реши ја линеарната неравенка со една непозната: $\frac{5+9x}{6} - \frac{7x}{18} \leq \frac{1}{2}\left(5 \cdot \frac{3-2x}{9}\right)$.

5. Одреди го најголемиот цел број што ја задоволува неравенката:

$(x+3)^2 - \frac{x-3}{2} < (x-1)^2 + 3x$.

6. Одреди го знакот на функцијата $f(x)=4x-20$. Потоа да се најде нулата на функцијата.

5. Систем линеарни неравенки со една непозната и вкупност линеарни неравенки со една непозната

5.1. Систем линеарни неравенки со една непозната

Одреди го множеството решенија на линеарната неравенка со една непозната $5-2x\le -3x$!

Пресек на интервалите $(-\infty,3)$ и $[0,+\infty)$ е интервалот $(-\infty,3)\cap[0,+\infty)=[0,3)$.

Пресекот на горенаведените интервали претстави го графички.

!

- Конјункцијата од две (или повеќе) линеарни неравенки со една непозната, т.е. $A<B \wedge C<D$, или $\begin{cases} A<B \\ C<D \end{cases}$, се вика **систем линеарни неравенки со една непозната.**
  Место знакот $<$, може да стои кој било од знаците за неравенство $\le, >$ или $\ge$.

!

- Множеството вредности за кои неравенките истовремено преминуваат во точни бројни неравенства се нарекува **множество решенија на системот линеарни неравенки со една непозната**.
  Секој таков број се нарекува **решение** на тој систем линеарни неравенки со една непозната.

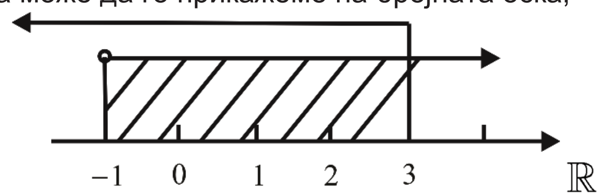
Да ги разгледаме следните примери:

Пример 1 Реши го системот линеарни неравенки со една непозната:

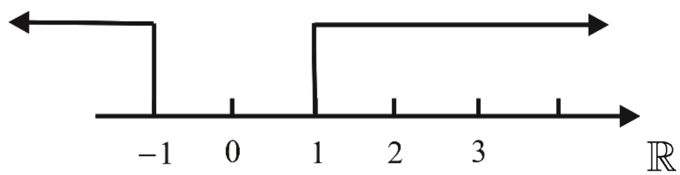
а) $\begin{cases} 2x+3\ge 1 \\ 2>x-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+3<1 \\ -x+6<5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2(x+1)-2>3+x \\ x-2<\dfrac{x+3}{2}-1 \\ 3x>4(x-1) \end{cases}$.

а) $\begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ 2 > x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1-3 \\ -x > -1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -2 \\ -x > -3 \ / \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \end{cases}$, т.е. множеството решенија на првата неравенка во системот е интервалот $[-1, +\infty)$, додека на втората неравенка е $(-\infty, 3)$. Множеството решенија на системот е пресекот на множествата решенија на секоја неравенка посебно, т.е. $[-1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = [-1, 3)$.

Множеството решенија може да го прикажеме на бројната оска,



б) $\begin{cases} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1-3 \\ -x < 5-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < -2 \\ -x < -1 \ / \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Значи, множествата решенија на неравенките во системот се интервалите $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ соодветно. Значи, системот нема решение бидејќи пресекот на овие интервали е празно множество, т.е. $(-\infty, -1) \cap (1, +\infty) = \varnothing$.

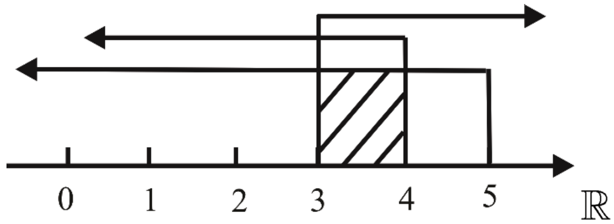


в)

$$\begin{cases} 2(x+1)-2 > 3+x \\ x-2 < \dfrac{x+3}{2}-1 \\ 3x > 4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-2 > 3+x \\ 2x-4 < x+3-2 \\ 3x > 4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-x > 3 \\ 2x-x < 4+3-2 \\ 3x-4x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \\ -x > -4 \ / \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases}.$$

Множество решенија на системот неравенки е пресекот $(3, +\infty) \cap (-\infty, 5) \cap (-\infty, 4) = (3, 4)$ и претставена на бројната оска е:



5.2. Вкупност линеарни неравенки со една непозната

Унија на интервалите $(3,+\infty)$ и $[0,+\infty)$ е интервалот $(3,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$.

Унијата на горенаведените интервали да се претстави графички.

> ❖ Дисјункцијата од две (или повеќе) линеарни неравенки со една непозната, т.е. $A<B \vee C<D$, или $\left[\begin{array}{l} A<B \\ C<D \end{array}\right.$, се вика **вкупност линеарни неравенки со една непозната.**
> Место знакот $\leq >$, може да стои кој било од знаците за неравенство $\geqq$ или $\geq$.

> ❖ Множеството вредности за кои барем една од неравенките преминува во точно бројно неравенство се нарекува **множество решенија на вкупност линеарни неравенки со една непозната**.
> Секој таков број се нарекува **решение** на вкупност линеарни неравенки со една непозната.

Пример 2 Реши ја вкупноста линеарни неравенки со една непозната:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x+3\geq 1 \\ 2<x-1 \end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l} 2x+3<1 \\ -x+6<5 \end{array}\right.$.

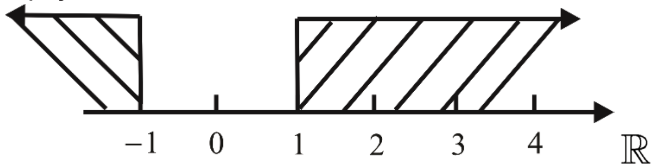
а) $\left[\begin{array}{l} 2x+3\geq 1 \\ 2<x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\geq 1-3 \\ -x<-1-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\geq -2 \\ -x<-3 \ /\cdot(-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq -1 \\ x>3 \end{array}\right.$, т.е. множеството решенија на првата неравенка во вкупноста линеарни неравенки со една непозната е интервалот $[-1,+\infty)$, додека на втората неравенка е $(3,+\infty)$ Множеството решенија на вкупност линеарни неравенки со една непозната е унијата на множествата решенија на секоја неравенка посебно, т.е. $[-1,+\infty)\cup(3,+\infty)=[-1,+\infty)$.

Множеството решенија прикажано на бројна оска е,

б) $\left[\begin{array}{l} 2x+3<1 \\ -x+6<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x<1-3 \\ -x<5-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x<-2 \\ -x<-1 \ /\cdot(-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$. Значи, множествата решенија на неравенките во вкупноста линеарни неравенки со една непозната се интервалите $(-\infty,-1)$

и $(1,+\infty)$ соодветно. Значи, вкупност линеарни неравенки со една непозната е унијата од двата интервали $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Геометриското претставување на множеството решенија на вкупноста линеарни неравенки со една непозната на бројната оска е:



Да решиме и посложени примери на задачи кои се сведуваат на систем линеарни неравенки со една непозната, но и на вкупност линеарни неравенки со една непозната.

Пример 3 Реши ја неравенката $\dfrac{x+1}{2-x}>3$.

$\dfrac{x+1}{2-x}>3 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x}-3>0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-5}{2-x}>0$. Следно, неравенката ја сведуваме на два системи линеарни неравенки, т.е. $\begin{cases}4x-5>0\\ 2-x>0\end{cases}$ или $\begin{cases}4x-5<0\\ 2-x<0\end{cases}$ (дропката е позитивен број ако броителот и именителот имаат исти знаци). Очигледно е дека се работи на вкупност од два системи линеарни неравенки со една непозната.

Затоа, ги пресметуваме множествата решенија на двата системи и потоа одредуваме унија од двете множества решенија, која што ќе биде решение на неравенката. Значи,

Множество решенија на системот $\begin{cases}4x-5>0\\ 2-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x>5\\ -x>-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{5}{4}\\ x<2\end{cases}$ е интервалот $\left(\dfrac{5}{4},2\right)$,

додека множество решенија на системот $\begin{cases}4x-5<0\\ 2-x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x<5\\ -x<-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{5}{4}\\ x>2\end{cases}$ е празно множество $\varnothing$. Така, множество решенија на неравенката е интервалот

$\left(\dfrac{5}{4},2\right)\cup\varnothing=\left(\dfrac{5}{4},2\right)$

- Обиди се да го претставиш множеството решенија на бројната оска!

Пример 4 Реши ја неравенката $(x-2)(x+1)\le 0$.

Неравенката $(x-2)(x+1)\le 0$ ја сведуваме на два системи неравенки и тоа, $\begin{cases} x-2\le 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x+1\le 0 \end{cases}$ (производот на два броја е негативен број ако множителите имаат спротивни знаци). Очигледно е дека се работи на вкупност од два системи линеарни неравенки со една непозната.

Потоа, ги решаваме и двата системи неравенки:

$\begin{cases} x-2\le 0 \\ x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x\ge -1 \end{cases}$, т.е. множество решенија е интервалот $[-1, 2]$;

$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le -1 \end{cases}$, т.е. множество решенија е празно множество $\varnothing$.

Значи, множеството решенија на дадената неравенка е интервалот $[-1, 2]\cup\varnothing=[-1, 2]$.

- Обиди се да го претставиш множеството решенија на бројната оска!

На почетокот од оваа модуларна единица објаснивме како се решаваат равенки со апсолутна вредност. Сега, со помош на еден пример ќе објасниме уште еден начин за решавање на линеарни неравенки со апсолутна вредност.

Пример 5 Реши ги неравенките со апсолутна вредност:

а) $\left|\frac{x}{4}\right|\le 3$; б) $|x+1|\le 6$.

а) Од дефиницијата за апсолутна вредност имаме $\left|\frac{x}{4}\right|\le 3 \Leftrightarrow -3\le\frac{x}{4}\le 3 \Leftrightarrow -12\le x\le 12$,

што е исто со решавање систем линеарни неравенки $\begin{cases} \frac{x}{4}\ge -3 \\ \frac{x}{4}\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -12 \\ x\le 12 \end{cases}$ т.е.

множеството решенија е интервалот $[-12, 12]$.

- Обиди се да го претставиш множеството решенија на бројната оска!

б) Слично како на претходната задача имаме: $|x+1|\le 6 \Leftrightarrow -6\le x+1\le 6 \Leftrightarrow -7\le x\le 5$, т.е. интервалот $[-7, 5]$, што е исто со решавање на системот линеарни неравенки со една непозната

$$\begin{cases} x+1 \geq -6 \\ x+1 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

- Обиди се да го претставиш множеството решенија на бројната оска!

Пример 6 Реши ги неравенките со апсолутна вредност:

а) $5 > |2x+1|$; б) $x + |2x+1| \leq 1$.

а) Неравенката $5 > |2x+1|$ ја претставуваме во облик $|2x+1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x+1 < 5$.

Се добива системот неравенки $\begin{cases} 2x+1 > -5 \\ 2x+1 < 5 \end{cases}$.

- Обиди се да го решиш системот неравенки !

б) Неравенката $x + |2x+1| \leq 1$ ја претставуваме во облик

$|2x+1| \leq 1-x \Leftrightarrow -(1-x) \leq 2x+1 \leq 1-x$.

Се добива системот неравенки $\begin{cases} 2x+1 \geq x-1 \\ 2x+1 \leq 1-x \end{cases}$.

- Обиди се да го решиш системот неравенки !

Задачи за самостојна работа:

1. Реши го системот линеарни неравенки со една непозната:

а) $\begin{cases} 2x+3 < -x+1 \\ -x+4 \geq 3+2x \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2(x+1)-3 > 1-3x \\ -2(x-2)-1 \leq 4\left(\dfrac{x}{2}+3\right) \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} \leq \dfrac{3x-1}{4} \\ -2(x+1)-3x > 4x-2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x-1 < 3x-4 \\ 3(1-x)+2 \leq 4x-3 \\ x-1 > \dfrac{x-2}{3}+3 \end{cases}$.

2. Реши ја неравенката:

а) $(x+1)(x-2) \geq 0$; б) $(x-5)(x+2) < 0$.

3. Реши ја неравенката:

а) $\dfrac{x+1}{2x-3} > 2$; б) $\dfrac{2-x}{x+1} \leq -3$.

4. Реши ја неравенката со апсолутна вредност:

а) $|x| - 3 \leq 0$; б) $|10+4x| < 14$; в) $7\left|\dfrac{x}{3}\right| - 9 < 12$;

г) $\frac{|x-4|}{5} \le 2$; д) $|x+1| \le 2-3x$; ѓ) $3x+|x+1| \le 2$.

6. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Провери дали бројот -4 е решение на равенката $\frac{3x}{2}+\frac{x}{4}-5x=13$.

2. Реши ја равенката: $-2\cdot\left[4(-3x+4)+(x-7)\right]=3(2x+5)$.

3. За која вредност на параметарот a, равенката $-3(x-5a)+4x=17$ има решение $x=2$.

4. Реши ја равенката со апсолутна вредност $|2x-3|+|-4x+7|=2$.

5. Еден број е трипати поголем од вториот број, додека нивната сума е 84. Најди ги тие броеви.

6. Провери дали следниот пар неравенки се еквивалентни: $-2(x-3)-x<4x+6$ и $x<-3$.

7. Реши ја линеарната неравенка $\frac{2-7x}{3}+\frac{5x}{2} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{x-4}{6}\right)$.

8. Одреди го знакот на функцијата $f(x)=-3x+21$. Потоа најди ја нулата на функцијата.

9. Реши го системот неравенки $\begin{cases} 2+x>3(x-1)+4 \\ x-3<\frac{2x-5}{2} \\ 2>4(x-1) \end{cases}$.

10. Реши ја неравенката со апсолутна вредност $\frac{|x-3|}{2} \ge 5$.

6

ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА
СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да дефинира и препознава линеарна функција;
- да црта график на линеарна функција;
- да определува својства на линеарна функција;
- да определува паралелност на прави добиени како графици на линеарни функции во зависност од коефициентот;
- да решава систем од две линеарни равенки со две непознати со различни методи;
- да дискутира решение на систем од две линеарни равенки со две непознати со користење на Крамерови правила;
- да решава практични проблеми кои се сведуваат на решавање систем линеарни равенки со две непознати.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 6

1. Линеарна функција. График на линеарна функција

Со линеарната функција многу често се среќаваме во природните науки, како што е физиката. На пример при изучување на рамномерно праволиниско движење за кое ќе биде даден пример подолу.

1.1. Линеарна функција

Да ги разгледаме следните примери:

Пример 1 Едно новороденче тежи 2,5 kg. Колку ќе тежи после x денови од раѓањето, ако се знае дека во првите 2 месеци по раѓањето средниот дневен прираст на тежината на детето е 0,05 kg ?

Јасно е дека за x денови тежината на детето ќе се зголемува за $0.05x$ kg. Ако тежината на детето во x-тиот ден по неговото раѓање го обележуваме со T тогаш

$$T = 0.05x + 2.5\,.$$

Значи, тежината на новороденчето ја преставуваме како функција од неговата старост x, каде $x < 60$ денови.

Пример 2 Една никелова прачка долга 1 m е загреана на температура од $t^{0}\mathrm{C}$. Да се одреди нејзината должина L.

Никелова прачка долга 1 m на $0^{0}\mathrm{C}$ со загревање за 1^{0}C се издолжува за 0,0013 cm. Ако се загрева на $t^{0}\mathrm{C}$ тогаш таа ќе се издолжи $0.0013t$ cm. Нејзината должина ќе биде

$$L = 0.0013t + 100\,.$$

Значи, должината на железната прачка ја претставуваме како функција од температурата t со која ја загреваме прачката.

Функциите добиени во двата примери се линеарни функции.

- Функциите од облик $y = 2x + 3, f(x) = -3x + 5, y = 2x, y = -x$ се линеарни функции.
- Кај функцијата $y = 2x + 3$, коефициентот пред аргументот е 2, слободниот член е 3. Додека пак за функцијата, $y = 2x$ коефициентот пред аргументот е 2, а слободниот член е 0.

Размисли и одговори:

- За кои броеви е дефинирана линеарната функција?
- Кое е множеството вредности на линеарната функција?

Да дадеме уште два примери од линеарна функција:

Пример 3 а) Линеарната функција ја среќаваме во физиката при изучување на рамномерно праволиниско движење каде изминатиот пат $x(t) = vt$ се пресметува како функција од времето t, а v е брзината на движење.

б) Линеарна функција имаме и кај рамномерно забрзано движење, каде е дадена зависност на брзината $v(t) = v_0 + at$ од времето t, а v_0 е почетната брзина на движење, а a е забрзувањето.

!

- Функција со облик $y = ax + b$ ($f(x) = ax + b$), каде a, b се константи (кои и да било реални броеви), а x е променлива или аргумент се вика **линеарна функција**. Коефициент пред аргументот е a, а b е **слободен член.**
- Доменот (дефиниционото множество) D_f и множеството вредности V_f на линеарната функција е множеството на реални броеви $\mathbb{R}$.

1 Нека е дадена линеарната функција $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$. Најди ги:

а) $f(3)$; б) $f(0)$; в) $f(\frac{c}{d})$.

1.2. График на линеарната функција

Да се проучи текот на една функција, значи да се определи нејзиното дефиниционо множество и да се испита како таа ја менува својата вредност кога расте нејзиниот аргумент. Погоре, видовме примери на линеарни функции. За нивните графици, поточно за график на линеарна функција е точно следново:

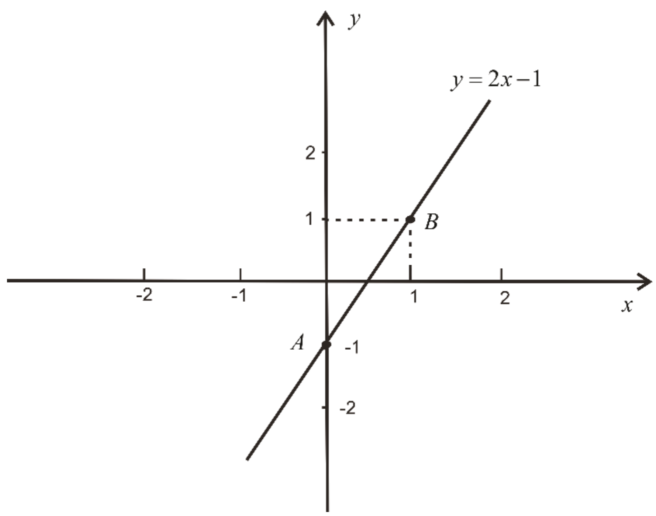
- График на линеарна функција е множеството $G_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}$.
- Множеството G_f геометриски се претставува во правоаголен Декартов координатен систем во рамнина.
- Графикот на линеарна функција е права. Од аксиомата: „Низ две точки минува една и само една права“, цртањето на графикот на линеарната функција се врши со помош на задавање на две точки што лежат на правата.

Пример 4 Да го нацртаме графикот на линеарната функција $y=2x-1$. Графикот е множеството $G_f=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y=2x-1\}$. Чекорите за цртање на графикот на линеарната функција $y=2x-1$ се:

1. Дефиниционото множество на линеарната функција е множеството на реални броеви $\mathbb{R}$. Затоа за аргументот x на линеарната функција избираме произволно два реални броеви 0 и 1. За избраните реални броеви ги наоѓаме вредностите на функцијата $y(0)=-1, y(1)=1$. Потоа, ја претставуваме линеарната функција $y=2x-1$ табеларно:

x	y
0	-1
1	1

2. Добиваме две точки што лежат на графикот на линеарната функција $y=2x-1$, а тоа се $A(0,-1)$ и $B(1,1)$.
3. Ги нанесуваме точките A и B во правоаголниот декартов координатен систем и ја цртаме правата.



Размисли и одговори:

- Како се нарекува оската x, а како оската y?
- Како се вика точката $O(0,0)$?
- Кои се координатите на точките што лежат на апсцисната оска x, а кои се координатите на точките што лежат на ординатната оска y?

2 Нацртај ги графиците на следните линеарни функции: $y=3x-1, y=-3x-1, y=x$.

Задачи за самостојна работа:

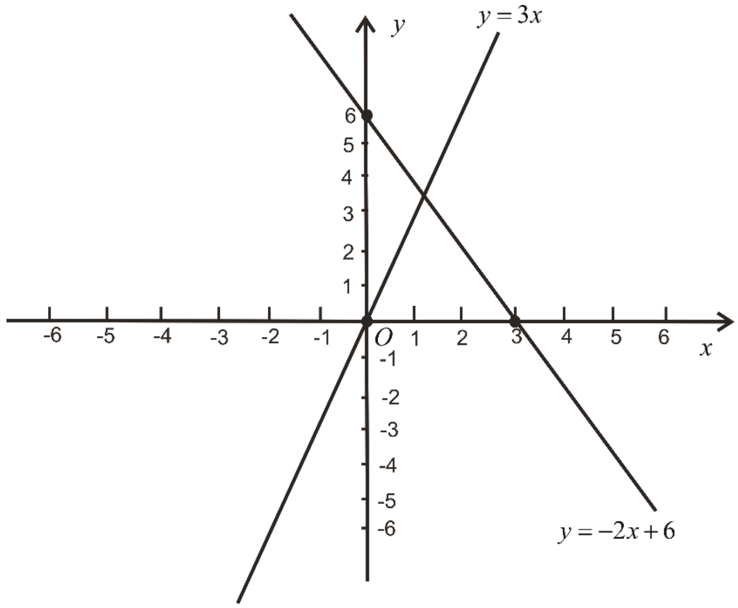
1. Нека е зададена линеарната функција $f(x) = -5x + 3$. Пресметај:
   а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f(p)$.
2. За следните линеарни функции: а) $y = -2x + 1$; б) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$; в) $y = x$ најди ги коефициентот пред аргументот и слободниот член.
3. Нацртај ги графиците на следните линеарни функции: а) $y = x + 5$; б) $y = -2x$; в) $y = 4x - 3$.
4. За која вредност на параметарот k функцијата $y = -kx + 2 - k$ минува низ точката $A(2, -1)$.
5. Најди ја линеарната функција $f(x) = ax + b$ ако за неа е точно $f(0) = 1$ и $f(-2) = 5$.
6. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на следните линеарни функции:
   а) $y = 2x - 3, y = 2x + 5, y = 2x + 1$;
   б) $y = 3x, y = -2x, y = x$;
   в) $y = 2x - 3, y = x - 3, y = -x - 3$.
   Што забележуваш?

2. Својства на линеарната функција

Откако ја воведовме линеарната функција, овде ќе се посветиме на нејзините својства. За линеарната функција веќе знаеме дека:

- Функција со облик $y = ax + b$ ($f(x) = ax + b$), каде a, b се константи (кои и да било реални броеви), а x е променлива или аргумент се вика **линеарна функција**. Коефициент пред аргументот е a, а b е **слободен член.**
- Доменот (дефиниционото множество) D_f и множеството вредности V_f на линеарната функција е множеството на реални броеви $\mathbb{R}$.

Пример 1 На цртежот во ист координатен систем се нацртани линеарните функции $y = 3x, y = -2x + 6$:



Првата линеарна функција $y=3x$ ги сече двете координатни оски во координатниот почеток $O(0,0)$. Втората линеарна функција $y=-2x+6$ ја сече апсцисната оска во точка $(3,0)$, а ординатната во точка $(0,6)$.

❖ Пресеците на линеарната функција $y=ax+b$ со координатните оски можеме да ги најдеме и аналитички, без да го цртаме нејзиниот график.
Пресекот на графикот на линеарната функција $y=ax+b$ **со апсцисната оска** x е точка од облик $(x,0)$. Тоа значи дека функцијата е еднаква на нула т.е. $y=0$ и $x=-\frac{b}{a}$ се добива како решение по непозната x на линеарната равенка $ax+b=0$.
Добиваме дека точката со координати $(-\frac{b}{a},0)$ е пресекот на графикот на линеарната функција $y=ax+b$ со апсцисата x. Вредноста на аргументот $x=-\frac{b}{a}$ за која функцијата е еднаква на нула се вика **нула на функцијата.**

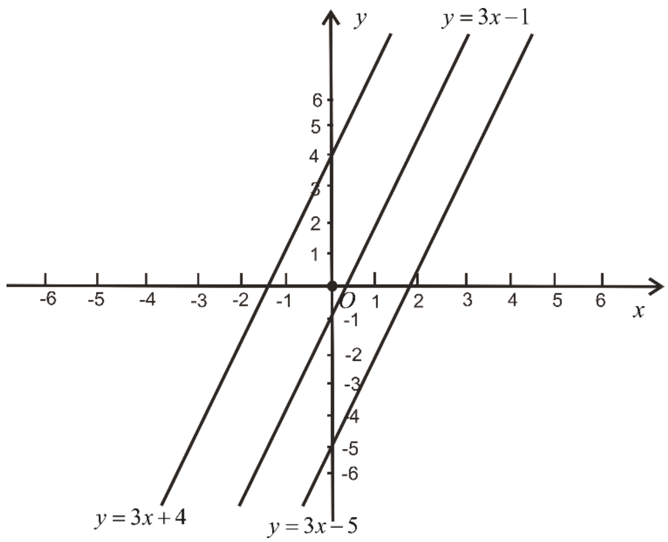
❖ **Пресекот на графикот на линеарната функција** $y=ax+b$ **со ординатната оска** y е точка од облик $(0,y)$. Тоа значи дека за $x=0$ се добива $y=a\cdot 0+b=b$. Значи, точката со кординати $(0,b)$ е пресек на графикот на линеарната функција $y=ax+b$ со ординатната оска y.

1 Најди ги пресеците со координатните оски на линеарните функции:

а) $y=\frac{1}{3}x-1$; б) $y=-4x+8$.

Да се најде нулата на функцијата на секоја од дадените линеарни функции.

Пример 2 Во ист координатен систем ги цртаме графиците на линеарните функции $y=3x-1, y=3x+4, y=3x-5$. Ги добиваме следните графици:

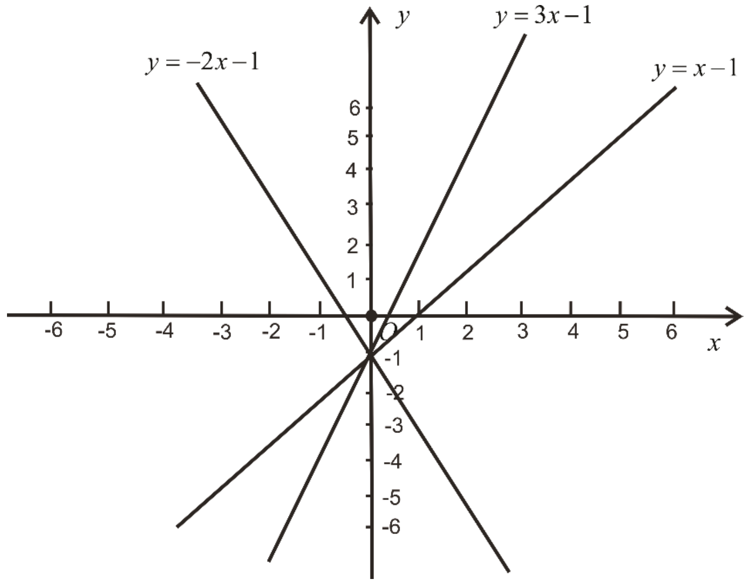


- Разгледај ги овие три прави и размисли каков е нивниот заемен однос?

Сигурно си заклучил дека сите три прави се паралелни. Ова не е случајно, бидејќи кога коефициентите пред аргументот се еднакви тогаш графиците на линеарните функции се паралелни прави.

2 Најди го параметарот a за кој графикот на линеарната функција $y=(a-3)x-1$ е паралелен со графикот на функцијата $y=-5x+4$. Која линеарна функција ја добивате?

Пример 3 Да ги нацртаме во ист координатен систем графиците на линеарните функции $y=3x-1, y=-2x-1, y=x-1$. Ги добиваме следните графици:

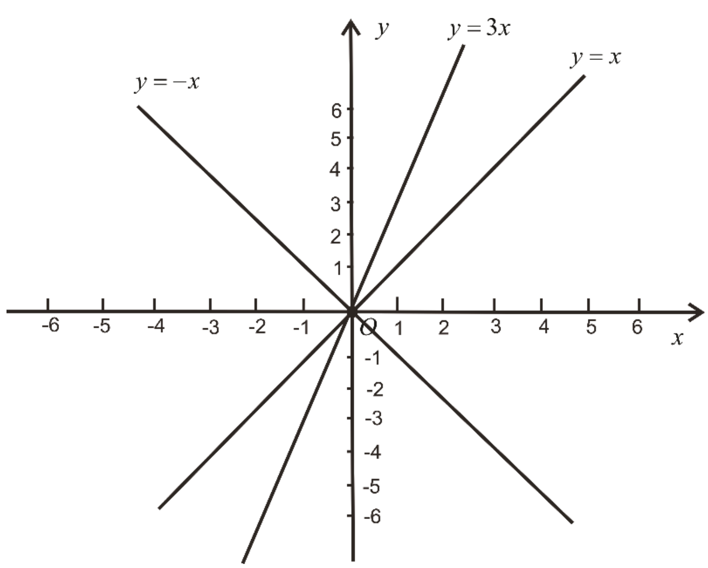


- Разгледај ги нацртаните линеарни функции. Што заклучуваш за нивните графици?

Сигурно си заклучил дека сите три прави се сечат во една точка и тоа во точката $(0,-1)$. Ова не е случајно, бидејќи кога слободните членови се еднакви тогаш графиците на линеарните функции се сечат во точката $(0,b)$ на ординатната оска y.

3 Најди го параметарот a за кој графикот на линеарната функција $y=(a-3)x-a$ ја сече ординатната оска во иста точка со графикот на функцијата $y=-3x+1$. Која линеарна функција ја добивате?

Пример 4 Да ги нацртаме во ист координатен систем графиците на линеарните функции $y=3x, y=-2x, y=x$:

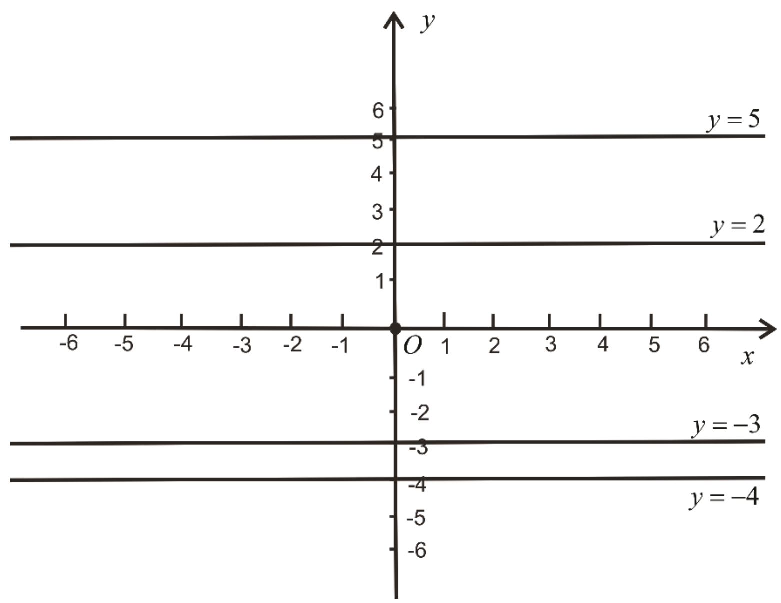


- Разгледај ги нацртаните линеарни функции. Што заклучуваш за нивните графици ?

Сигурно си заклучил дека сите три прави минуваат низ координатниот почеток $O(0,0)$. Ова не е случајно, бидејќи кога слободните членови се еднакви на нула тогаш графиците на линеарните функции минуваат низ координатниот почеток $O(0,0)$.

4 Најди го параметарот a за кој графикот на линеарната функција $y=(a+1)x-(a-1)$ минува низ координатниот почеток $O(0,0)$. Која линеарна функција ја добивате?

Пример 5 Да ги нацртаме во ист координатен систем графиците на линеарните функции $y=-3, y=2, y=5, y=-4$:



- Разгледај ги нацртаните линеарни функции. Што заклучуваш за нивните графици?

Сигурно си заклучил дека сите четири прави се паралелни со апсцисната оска x. Ова се случува кога коефициентот пред аргументот е нула т.е. за $a=0$ линеарната функција има облик $y=b$. Ваквата функција се вика **константна функција**.

5 Најди го параметарот a за кој линеарната функција $y=(a+1)x-(a-1)$ е константна функција. Која линеарна функција ја добивате?

Размисли и одговори:

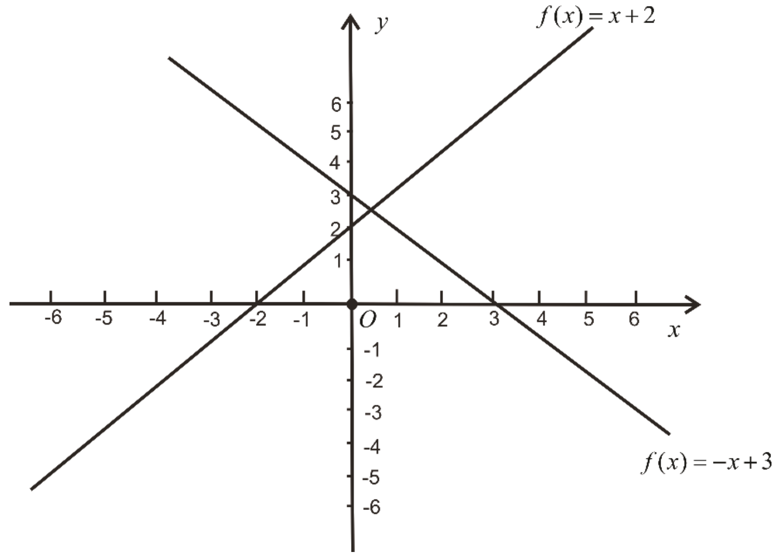
- Да се нацрта константната функција $y=0$.
- Што заклучуваш?

Нека се дадени линеарните функции $f(x)=x+2, f(x)=-x+3$. За линеарната функција $f(x)=x+2$, важи дека $f(1)=3, f(2)=4, f(3)=5$. Забележуваме дека доколку расте аргументот, расте и вредноста на линеарната функција $f(x)=x+2$.

Додека пак за линеарната функција $f(x)=-x+3$, важи $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=0$ Забележуваме дека доколку расте аргументот, вредноста на линеарната функција опаѓа.

❖ Ова не е случајно, бидејќи дали дадена линеарна функција $f(x)=ax+b$ расте или опаѓа, зависи од знакот на коефициентот пред аргументот a.
Затоа a уште се нарекува и коефициент на правец.

Пример 6 Да ги нацртаме линеарните функции $f(x)=x+2, f(x)=-x+3$.



Од графиците на дадените линеарни функции се заклучува дека **кога коефициентот на правецот е позитивен реален број** ($a>0$) **тогаш функцијата монотоно расте, а за коефициентот на правец е негативен реален број** ($a<0$) **функцијата монотоно опаѓа.**

6 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на следниве линеарни функции: $y=x, y=x+2, y=-x+2, y=-\frac{1}{2}x, y=3$. Кои од нив имаат графици кои се паралелни прави? Кои графици се сечат во иста точка на ординатната оска? Кои графици монотоно растат, а кои монотоно опаѓаат?

!

- ❖ Пресекот на линеарната функција $f(x)=ax+b$ со апсцисната оска x се вика **нула на функцијата**.
- ❖ **Графиците на две линеарни функции** $f(x)=ax+b, g(x)=cx+d$ **се паралелни**, ако нивните коефициенти на правци се еднакви меѓу себе т.е. $a=c$.
- ❖ **Графиците на линеарни функции** $f(x)=ax+b, g(x)=cx+d$ се сечат **во иста точка на ординатната оска**, ако имаат исти слободни членови т.е. $b=d$.
- ❖ График на линеарна функција $f(x)=ax+b$ минува низ координатниот почеток, ако нејзиниот слободен член е 0 т.е. $b=0$.
- ❖ За монотоноста на линеарната функција $f(x)=ax+b$ можеме да кажеме:
  - **монотоно расте** ако $a>0$ т.е. за кои било $x_1,x_2 \in D_f$, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$;
  - **монотоно опаѓа** ако $a<0$ т.е. за кои било $x_1,x_2 \in D_f$, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.
- ❖ Линеарната функција $f(x)=ax+b$ е константна функција ако $a=0$.

Задачи за самостојна работа:

1. За линеарните функции:

а) $y=-\frac{1}{2}x+1$; б) $y=5x-3$; в) $y=x-\frac{1}{7}$.

најди ги пресеците со координатните оски!

2. Дадена е линеарната функција $y=(k+1)x-3$. Најди го параметарот k, за кој:

а) линеарната функцијата има нула $x=3$;

б) графикот на линеарната функција е паралелен на симетралата на првиот и третиот квадрант;

в) линеарната функција расте;

г) линеарната функција опаѓа;

д) линеарната функција е константна функција;

3. Дали линеарната функција $y=(2k+1)x-1$ за некоја вредност на параметарот k минува низ координатниот почеток?

4. За која вредност на параметарот k графиците на двете линеарни функции $y=(2k+1)x-k, y=2x-1$ ја сечат ординатната оска во иста точка?

5. За која вредност на параметарот k графиците на двете линеарни функции $y=(2k+1)x-k, y=(2-k)x-1$ се паралелни прави?

3. Систем од две линеарни равенки со две непознати

3.1. Поим за линеарна равенка со две непознати

Поимите равенство, идентитет и равенка се веќе изучени. Овде повторно се враќаме на равенките.

- Равенките $3x-2y=8$, $x+y=-2$ се линеарни равенки со две непознати x и y.
- За линеарна равенка со две непознати $3x-2y=8$ решенија во множеството на природни броеви $\mathbb{N}$ се подредените парови (4,2), (6,5)..., во множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$ се подредените парови (4,2), (6,5), (0,-4), (-2,7)...
- Се забележува дека линеарната равенка со две непознати има бесконечно многу решенија т.е. таа е неопределена.

1 Да се најдат неколку решенија на линеарна равенка со две непознати $x+y=-2$ во $\mathbb{Z}$.

!

❖ **Линеарна равенка со две непознати** е равенката од видот $ax+by=c$, каде $a,b,c\in\mathbb{R}$ броевите a,b се нарекуваат коефициенти пред непознатите, бројот c е слободен член, а x и y се непознати на линеарната равенка со две непознати.

За решенијата на линеарна равенка со две непознати т.е. за нормалниот облик на линеарна равенка со две непознати точно е:

!

❖ Да се реши линеарна равенка со две непознати значи да се најде подреден пар на допуштени реални броеви (x_0, y_0) за кои равенката $ax+by=c$, станува вистинит исказ т.е. точно е $ax_0+by_0=c$. Линеарната равенка со две непознати има бесконечно многу решенија т.е. таа е неопределена.

❖ Обликот $ax+by=c$, на линеарна равенка со две непознати се вика **нормален или општ облик на линеарна равенка со две непознати**.

❖ Доколку линеарна равенка со две непознати не е во нормален (општ) облик тогаш таа може да се сведе во нормален (општ) облик со користење на еквивалентни трансформации.

❖ Една линеарна равенка со две непознати е **еквивалентна** на дадена линеарна равенка со две непознати на иста дефинициона област доколку секое решение на едната е решение на другата линеарна равенка со две непознати.

Напомена: Постапките за добивање на еквивалентна равенка на линеарна равенка со две непознати, се идентични со дадените постапки за линеарна равенка со една непозната во претходната модуларна единица.

Пример 1 Линеарната равенка со две непознати $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ е еквивалентна на линеарна равенка со две непознати $3x+2y=6$. Последната линеарна равенка со две непознати е во нормален (општ) облик.

2 Следната линеарна равенка со две непознати $\frac{x+y}{2}=\frac{1}{5}$ сведи ја во нормален (општ) облик.

3.2. Поим за систем од две линеарни равенки со две непознати

Многу често во проблемските задачи се бараат заеднички решенија на две линеарни равенки со две непознати.

!

❖ Множеството на две линеарни равенки со две исти непознати за кои се бараат заедничките решенија се вика **систем од две линеарни равенки со две непознати** со облик

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

(зборуваме за конјункција на две линеарни равенки со две непознати), каде $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{R}$. Броевите a_1,a_2,b_1,b_2 се нарекуваат коефициенти пред непознатите, а броевите c_1,c_2 се нарекуваат слободни членови на системот.

Пример 2 Кире и Бени отишле заедно на пазар. Кире купил 2 kg јаболки и 3 kg сливи и потрошил 190 денари. Бени купил од истите јаболки 3 kg и од истите сливи 5 kg и потрошил 300 денари. Колку денари чинел 1 kg јаболка, а колку 1 kg сливи?

За да можеме да ја решиме задачата, потребно е да составиме две линеарни равенки со две непознати и да ги бараме заедничките решенија. Затоа, обележуваме дека 1 kg јаболка чини x денари, а 1 kg сливи чини y денари. Од пазарот на Кире ја составуваме следната линеарна равенка со две променливи $2x+3y=190$. Од пазарот на Бени ја составуваме линеарната равенка со две непознати $3x+5y=300$. За да ја решиме задачата, ни требаат заедничките решенија на овие две линеарни равенки со две непознати. Овие две равенки даваат систем од две линеарни равенки со две непознати:

$$\begin{cases} 2x+3y=190 \\ 3x+5y=300 \end{cases}$$

Размисли и одговори:

- Дали секогаш систем од две линеарни равенки со две исти непознати има единствено решение?

За решението на систем од две линеарни равенки со две непознати точно е следново:

!

- **Решение на систем од две линеарни равенки со две непознати** е секој подреден пар од допуштени реални броеви (x_0, y_0) за кој и двете равенки во системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ поминуваат во вистинити искази т.е. $\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=c_1 \\ a_2x_0+b_2y_0=c_2 \end{cases}$.
- Системот може да има единствено решение (системот е определен), да нема решение (системот е противречен) или да има бесконечно многу решенија (системот е неопределен).

- Обликот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ на системот од две линеарни равенки со две непознати се вика **нормален или општ облик на систем од две линеарни равенки со две непознати**.
- Два системи од две линеарни равенки со две непознати се еквивалентни на иста дефиниционата област, ако секое решение на едниот систем е решение и на другиот систем.
- Систем еквивалентен на дадениот се добива кога која и да било равенка од системот се замени со еквивалентна равенка.
- Систем од две линеарни равенки со две непознати, ако не е во општ облик тогаш со користење на еквивалентни системи на дадениот може да се сведе во нормален (општ) облик.

Пример 3 Системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=3 \\ \dfrac{x+y}{3}=-2 \end{cases}$ не е во нормален или општ облик, но можеме да го сведеме на следниот начин:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}=3/\cdot 2 \\ \dfrac{x+y}{3}=-2/\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x+y=-6 \end{cases}$$

3 Кои од следните подредени парови $(0,0),(-1,2),(1,-2)$ е решение на системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$?

4 Следните системи од две линеарни равенки со две непознати сведи ги во нормален облик:

а) $\begin{cases} 2(x-y)+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+y}{3}-3(x-y)=\dfrac{1}{5} \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+\dfrac{x-y}{5}=\dfrac{y}{2} \\ \dfrac{y}{3}-3=\dfrac{x}{5} \end{cases}$.

Задачи за самостојна работа:

1. Одреди неколку парови на цели броеви кои се решенија на линеарната равенка од две непознати $x-y=-3$.
2. Следната линеарна равенка со две непознати $\dfrac{x-y+1}{2}=\dfrac{5}{6}$ сведи ја во нормален (општ) облик.
3. Кој од следните подредени парови $(-3,5),(2,-3),(1,1)$ е решение на системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$?
4. Следните системи од две линеарни равенки со две непознати сведи ги во нормален (општ) облик:

а) $\begin{cases} 3(x+y)-\dfrac{y}{7}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x-y}{2}+3(x+y)=\dfrac{5}{7} \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2\dfrac{x-y}{7}+\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-2y}{5}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{y}{2} \end{cases}$.

4. Решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати: метод на замена и метод на спротивни коефициенти

4.1. Метод на замена

Методот на замена за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати го користиме само на системи кои се во нормален (општ) облик, $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$. Доколку не се, прво треба системот од две линеарни равенки со две непознати да го сведеме во нормален (општ) облик на систем од две линеарни равенки со две непознати.

Систем од две линеарни равенки со две непознати го решаваме со **метод на замена** така што од едната равенка се изразува една од непознатите, која ја заменуваме во другата равенка од системот, добивајќи еквивалентен систем на дадениот.

Пример 1 Системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ да го решиме со метод на замена:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+y \\ 3+y+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+y \\ 2y=-4/:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+y \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Подредениот пар $(1,-2)$ е решение на дадениот систем од две линеарни равенки со две непознати.

1 Следните системи од две линеарни равенки со две непознати реши ги со метод на замена:

а) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -3x+2y=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \\ x+y=5 \end{cases}$.

4.2. Метод на спротивни коефициенти

Методот на спротивни коефициенти или метод на изедначување за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати го користиме само на системи кои се во нормален (општ) облик, $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$. Доколку не се, прво треба системот од две линеарни равенки со две непознати да го сведеме во нормален (општ) облик на систем од две линеарни равенки со две непознати.

Систем од две линеарни равенки со две непознати го решаваме со **метод на спротивни коефициенти или метод на изедначување** така што коефициентите пред една од непознатите во двете равенки треба да ги трансформираме во спротивни броеви. Потоа, двете равенки ги собираме. Добиваме линеарна равенка со една непозната, која ја решаваме и добиеното решение за таа непозната го заменуваме во една од почетните равенки, за да го добиеме решението на другата непозната.

Пример 2 Системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-2 \end{cases}$ да го решиме со метод на спротивни коефициенти или метод на изедначување. Се забележува дека коефициентите пред променливата y се спротивни броеви. Ги собираме двете равенки и добиената равенка ја запишуваме како прва равенка на системот, а за втора равенка ја земаме која било од првичните равенки. Така добиваме систем кој е еквивалентен на дадениот:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2/:2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Подредениот пар $(1,-2)$ е решение на дадениот систем од две линеарни равенки со две непознати.

2 Следните системи од две линеарни равенки со две непознати реши ги со метод на спротивни коефициенти или со метод на изедначување:

а) $\begin{cases} 3x+y=1 \\ -7x+2y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$.

Пример 3 Системот $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2 \end{cases}$ е систем од две равенки со две непознати. Тој се решава со помош на воведување на помошни променливи $u=\frac{1}{x}, v=\frac{1}{y}$. Со новите променливи, истиот се трансформира во систем од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} u+v=-1 \\ u-v=2 \end{cases}$, што се решава со некој од методите и се добива решението $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$.

3 Реши го системот $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{1}{2} \end{cases}$ со воведување на помошни променливи.

Задачи за самостојна работа:

1. Реши ги следните системи со еден од двата методи:

а) $\begin{cases} 2,2x-3,3y=-1,1 \\ 4,4x+6,6y=11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3(x-y)-y=2(x-5) \\ 2(x+2y)+13=3x-y+5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} (x-2)^2+(1+2y)^2=x^2+4y^2 \\ (2x+1)^2-(3-2y)^2=4(x^2-y^2) \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{2x-y+1}{3}+\dfrac{x-3y+4}{2}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x+y-1}{2}-\dfrac{1-x-y}{5}=\dfrac{3}{10} \end{cases}$.

2. Реши ги следните системи со воведување на помошни променливи:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

5. Решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати: Гаусов и графички метод

5.1. Гаусов метод

Елементарни трансформации кои се применуваат на системи од линеарни равенки со две променливи за добивање на еквивалентни системи се:

а) замена на местата на равенките;
б) множење на една од равенките со ненулти број и нејзино додавање на другата равенка.

Нека ни е даден систем од две линеарни равенки со две непознати во нормален облик:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}.$$

Гаусовиот метод за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати се состои од постепено елиминирање на едната непозната во системот. Затоа и овој метод е познат како **Гаусов метод на елиминација**. Од почетниот систем со елементарни трансформации се добива систем во кој во една од равенките е елиминирана едната непозната. Добиениот систем е еквивалентен на почетниот.

Пример 1 За решавање на системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ ќе го примениме Гаусовиот метод:

а) првата равенка ја множиме со -1 и ја додаваме на втората равенка,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 / R_1(-1)+R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -3y=-3 \end{cases}$$

Ја елиминиравме променливата x;

б) втората ја делиме со -3 и го добиваме решението за y,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -3y=-3/:(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

в) Се заменува вредноста на y во првата равенка и се добива вредноста на непозната x,

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Решението на системот е $(1,1)$.

Не мора да се елиминира непозната x, може да се елиминира и непозната y,

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=-1 / 2R_1+R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 3x=3/:3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}.$$

Забелешка: Доколку дадениот систем од две линеарни равенки со две непознати не е во нормален облик, за да го примениме Гаусовиот метод, потребно е да го доведеме системот во нормален облик.

1 Со Гаусов метод реши ги следните системи од две линеарни равенки со две непознати:

а) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-y=-1 \\ x+\dfrac{y}{2}=6 \end{cases}$.

5.2. Графичко решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати

Знаеме дека, функцијата од облик $y = ax + b$ е линеарна функција, чиј график е права. Додека пак, систем од две линеарни равенки со две непознати во нормален облик е

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

❖ **Графичкото решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати** се состои од изразување на непознатата y како функција зависна од x во двете равенки и цртање на две линеарни функции.

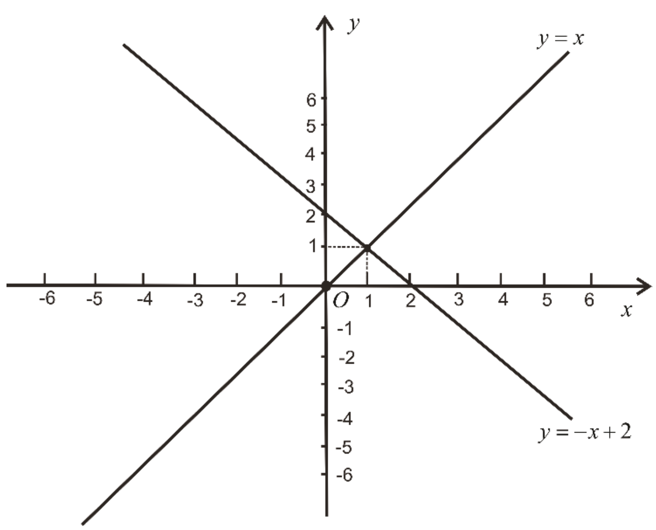
Забелешка: За да се примени овој метод, потребно е системот од две линеарни равенки со две непознати да биде во нормален облик, во спротивно дадениот систем се трансформира во еквивалентен систем од две линеарни равенки со две непознати во нормален облик.

Пример 2 Графички да го решиме следниот систем од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$. Чекорите за решавање се:

а) Во системот и во двете равенки го изразуваме y,

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases}.$$

б) Во ист координатен систем ги цртаме двете линеарни функции,



в) Пресекот на двете прави е точката $(1,1)$, која е решение на системот од две линеарни равенки со две непознати.

!

- Со **графичкиот метод**, решението на системот од две линеарни равенки со две непознати се добива како **пресек на двете прави**, кои се графици на дадените линеарни функции, доколку системот има единствено решение.
- Доколку има бесконечно многу решенија тогаш графиците ќе бидат две прави кои што се совпаѓаат.
- Системот ќе нема решение, ако графиците се паралелни прави.

2 Со графички метод да се решат следните системи од две линеарни равенки со две непознати:

а) $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x+3y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{5}-y=-1 \\ x+\frac{y}{2}=6 \end{cases}$.

Задачи за самостојна работа:

1. Со Гаусов метод да се решат следните системи од две линеарни равенки со две непознати:

   а) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{2x-y+1}{3}+\frac{x-3y+4}{2}=\frac{1}{6} \\ \frac{x+y-1}{2}-\frac{1-x-y}{5}=\frac{3}{10} \end{cases}$.

2. Со графичкиот метод да се решат следниве системи од две линеарни равенки со две непознати:

   а) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-y=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ x-y=3 \end{cases}$.

6. Крамерови правила за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати

6.1. Детерминанти од втор ред

Да го воведеме поимот детерминанта од втор ред, но и правилото за пресметување на нејзината вредност.

❖ **Детерминанта од втор ред** е квадратна шема, која се пресметува на следниот начин

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

каде a_1, a_2, b_1, b_2 се реални броеви или изрази, кои се распределени во детерминантата од втор ред во две редици и две колони.

Пример 1 Да ја пресметаме детерминантата од втор ред

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11 .$$

1 Пресметај ги следниве детерминанти од втор ред: а) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

6.2. Крамерови правила

Нека ни е даден системот од две линеарни равенки со две непознати во нормален облик

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Да го решиме овој систем. Решението може да го добиеме со кој било од претходно презентираните методи за решавање (само не со графичкиот метод). Ние ќе го искористиме методот на спротивни коефициенти,

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \;/\cdot(-a_2) \\ a_2x+b_2y=c_2 \;/\cdot a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_1a_2x-b_1a_2y=-c_1a_2 \\ a_1a_2x+b_2a_1y=c_2a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ (b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1\dfrac{c_2a_1-c_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}=c_1 \\ (b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_2a_1-b_1a_2)x=c_1b_2-c_2b_1 \\ (b_2a_1-b_1a_2)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases}$$

Од последниот систем се гледа дека се добиваат вредностите на следните детерминанти

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_1-b_1a_2, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_2c_1-b_1c_2, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=c_2a_1-c_1a_2 .$$

Нив ќе ги обележиме со $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$. Заклучуваме дека системот од две линеарни равенки со две непознати може да се реши со помош на детерминанти.

!

- Системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ може да се реши со пресметување на детерминантите $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$. Единственото решението го добиваме со формулите $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}, \Delta \neq 0$, кои се нарекуваат **Крамерови правила,** каде што:

  $$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 2 Да го решиме системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$ со помош на Крамеровите правила:

а) Вредноста на детерминантите

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0, \Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-4, \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

б) Решенијата се $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-4}{-2}=2, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-4}{-2}=2$.

в) Подредениот пар $(2,2)$ е решение на системот $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=0 \end{cases}$.

2 Реши ги следните системи со помош на Крамеровите правила:

а) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=2 \\ x-y=-2 \end{cases}$.

6.3. Дискусија за решенијата на системот од две линеарни равенки со две непознати

Знаеме дека, системот од две линеарни равенки со две непознати, може да има единствено решение (определен систем), бесконечно многу решение (неопределен систем) и да нема решение (противречен систем).

За системот од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, Крамеровите правила ќе ги запишеме во следниот облик $\Delta\cdot x=\Delta_x, \Delta\cdot y=\Delta_y$. Сега можеме да го дискутираме решението на системот од две линеарни равенки со две непознати:

- Системот од две линеарни равенки со две непознати има **единствено решение** (определен систем) $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ доколку $\Delta\neq 0$.

  Од $\Delta\neq 0$ т.е. $b_2a_1-b_1a_2\neq 0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ (системот има единствено решение, ако односот од коефициентите пред едната непозната не е еднаков на односот на коефициентите пред другата непозната).

- Системот од две линеарни равенки со две непознати има бесконечно многу решенија (неопределен систем) или нема решение (противречен систем**) доколку** $\Delta=0$ т.е. $b_2a_1-b_1a_2=0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ (односот од коефициентите пред едната непозната е еднаков на односот на коефициентите пред другата непозната) и:

  а) **Системот нема решение (противречен систем)** доколку барем една од детерминантите Δ_x, Δ_y е различна од нула т.е. $\Delta_x\neq 0 \vee \Delta_y\neq 0$ т.е. $b_2c_1-b_1c_2\neq 0 \vee c_2a_1-c_1a_2\neq 0 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2} \vee \dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ (системот нема решение ако односот од коефициентите пред едната непозната е еднаков на односот на коефициентите пред другата непозната, но не се еднакви со односот од слободните членови).

б) Системот има **бесконечно многу решенија (неопределен систем)** доколку и двете детерминанти Δ_x, Δ_y се нули т.е. $\Delta_x = 0 \wedge \Delta_y = 0$ т.е. $b_2c_1 - b_1c_2 = 0 \wedge c_2a_1 - c_1a_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (системот има бесконечно многу решенија ако односот од коефициентите пред едната непозната е еднаков на односот на коефициентите пред другата непозната, но се еднакви и со односот на слободните членови).

Пример 3 Да го дискутираме решението на следниот систем од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$.

Детерминантите се: $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$.

- Системот има единствено решение $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{1}{a+1}$ за $\Delta = a^2 - 1 \neq 0$ т.е. $a \neq \pm 1$.
- Системот има бесконечно многу решенија или нема решение кога $\Delta = a^2 - 1 = 0$ т.е. $a = \pm 1$.

За $a = 1$ детерминантите на системот се $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$, системот има бесконечно многу решенија.

За $a = -1$ детерминантите на системот се $\Delta = 0, \Delta_x = -2 \neq 0, \Delta_y = -2 \neq 0$, системот нема решение.

Дискутирањето може да биде и без пресметување на детерминантите:

- Единствено решение системот има за $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - 1 \neq 0$.
- Бесконечно многу решенија, ако $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \wedge a = 1 \Rightarrow a = 1$.
- Нема решение, ако $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \wedge (\frac{a}{1} \neq \frac{1}{1} \vee \frac{1}{a} \neq \frac{1}{1}) \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow a = -1$.

3 Дискутирај го решението на следните системи:

а) $\begin{cases} ax - y = a \\ (1-a)x + y = 1 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} (1+a)x - y = a \\ (1-a)x + y = 1 - a \end{cases}$.

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај ги следниве детерминанти од втор ред:

а) $\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0,687 & 2,5 \\ 3,52 & -0,33 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{a^3-1} \\ a^2+a+1 & a+1 \end{vmatrix}$.

2. Реши ги следните системи со помош на Крамеровите правила:

а) $\begin{cases} \frac{x-y}{3}+\frac{x+y}{5}=2 \\ \frac{x-y}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{x}{2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x-5)^2+(2y+3)^2=x^2+4y^2-2 \\ (x-3)(x+3)-(y+2)(y-2)=x^2-y^2-5x-y \end{cases}$.

3. Дискутирај го решението на следните системи:

а) $\begin{cases} ax-(1-a)y=a \\ 2x+3y=-a \end{cases}$; б) $\begin{cases} (a-b)x+2y=1 \\ (a+b)x+y=2 \end{cases}$.

7. Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати

Системот од две линеарни равенки со две непознати се применува во задачи од реалниот живот, задачи од техниката и задачи од науката. Ќе бидат дадени некои примери.

Пример 1 Денес таткото и синот заедно имаат 65 години. После две години таткото ќе биде 2 пати постар од синот. Колку години има таткото, а колку синот во моментот?

Годините на таткото ќе ги обележиме со x, а годините на синот со y. За да го поставиме системот од две линеарни равенки со две непознати ќе ни помогне следната шема:

Шема	**во моментот (сега)**	**после 2 години**
Татко	x	$x+2$
Син	y	$y+2$

Врз основа на шемата и текстот на задачата можеме да констатираме:

1) Во моментот за таткото и синот ја имаме следната равенка: $x+y=65$;
2) После 2 години равенката ја претставува врската помеѓу таткото и синот е $x+2=2\cdot(y+2)$;

3) Го добиваме системот $\begin{cases} x+y=65 \\ x+2=2(y+2) \end{cases}$.

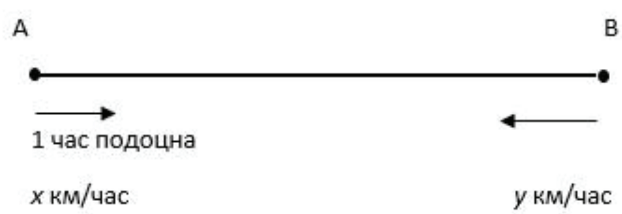
Системот се решава со некој од претходно дадените методи за решавање и тој има решение (44,21).

Како одговор на барањето на задачата добиваме: во моментот, таткото има 44 години, а синот 21 година.

1 Збирот на годините на дедото и внукот е 80 години. Пред 5 години, дедото бил 13 пати постар од внукот. По колку години има секој од нив?

Пример 2 Два мотоцикли тргнуваат еден спроти друг од два града *A* и *B* одалечени меѓу себе 300 км. Моторциклистот што тргнува од градот *A* тргнува 1 час подоцна од моторциклистот од градот *B* и после 2 часа тие се среќаваат на половина пат. Доколку моторциклистот што тргнува од градот *A* ја намали брзината за 15 км/час, а другиот ја зголеми брзината за 10 км/час тогаш тие би тргнале истовремено и би се сретнале на половина пат за 2,5 часа. Со колкава брзина вози секој од нив?

Мотоциклистот што тргнува од градот A има брзина од x км/час, а мотоциклистот што тргнува од градот B има брзина од y км/час. За да можеме да го составиме системот од две линеарни равенки со две непознати го цртаме следниот цртеж:



Во моментот кога мотоциклистот што тргнува од градот *A* тргнува 1 час подоцна од мотоциклистот од градот *B* и после 2 часа тие се среќаваат на половина пат ја добиваме следната равенка: $2x+3y=300$. Доколку моторциклистот што тргнува од градот *A* ја намали брзината за 15км/час, а другиот ја зголеми брзината за 10км/час тогаш тие би тргнале истовремено и би се сретнат на половина пат за 2,5 часа се добива равенката: $2,5(x-15)+2,5(y+10)=300$. Го добиваме системот $\begin{cases} 2x+3y=300 \\ 2,5(x-15)+2,5(y+10)=300 \end{cases}$, кој има решение (75,50). Добиваме: во моментот, мотоциклистот од градот *A* вози со 75 км/час, а мотоциклистот од градот *B* вози со 50 км/час.

2 Патнички воз од Скопје тргнува во 7 часот во насока кон Нови Сад. Два часа подоцна во иста насока тргнува брз воз, кој го стигнува патничкиот воз во 12 часот. Брзиот воз во Нови Сад пристигнува во 18 часот, кога патничкиот воз е одалечен 160 km од Нови

Сад. Со која брзина се движат двата воза? Кога ќе стигне патничкиот воз во Нови Сад? Колкаво е растојанието помеѓу Скопје и Нови Сад?

Пример 3 Количникот на два природни броеви е 2 и остаток 9. Доколку деленикот се зголеми за 5 и се подели со истиот делител се добива делење без остаток со количник 3. Кои се тие броеви?

Нека деленикот го означиме со x, а делителот со y. Првата равенка е: $x=2y+9$. Доколку деленикот се зголеми за 5 и се подели со истиот делител се добива делење без остаток со количник 3, се добива втората равенка: $x+5=3y$. Го добиваме системот $\begin{cases} x=2y+9 \\ x+5=3y \end{cases}$, кој има решение $(37,14)$. Деленикот е 37, а делителот е 14.

3 Разликата на два броја е 75, а нивниот количник е 4. Кои се тие броеви?

Пример 4 Двајца работници Славче и Халил можат да завршат една работа за 12 денови. По заедничка работа од 5 денови едниот се разболува, така што другиот, работејќи сам, ја завршува работата за следните 17,5 денови. За колку дена може да се заврши работата секој работник, ако работи сам?

Нека Славче ја завршува сам работата за x денови, а Халил за y денови. Според податоците на задачата го составуваме системот:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{y}=1 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{y}+\dfrac{17{,}5}{y}=1 \end{cases}.$$

Со смената $u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}$ се добива системот:

$$\begin{cases} 12u+12v=1 \\ 5u+5v+17{,}5v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12u+12v=1 \\ 5u+22{,}5v=1 \end{cases}.$$

Со решавање на овој систем се добиваат решенијата $u=\dfrac{1}{20}, v=\dfrac{1}{30}$. Со враќање на смената назад се добива дека Славче ја завршува работата сам за $x=20$ денови, а Халил за $y=30$ денови.

4 Еден базен се полни со две цевки. Двете цевки заедно, базенот ќе го наполнат за 12 часа. Ако двете цевки се вклучени 6 часа и после втората цевка е затворена тогаш првата ќе го дополни базенот за 9 часа. За колку часа, секоја од цевките ќе го наполнат базенот?

Задачи за самостојна работа:

1. Ако броителот и имнителот на една дропка ги зголемиме за 2 тогаш се добива дропката $\frac{9}{11}$. Ако од броителот и имнителот одземе 2 тогаш се добива дропката $\frac{5}{7}$. Која е дропката?
2. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 15. Разликата помеѓу двоцифрениот број запишан со истите цифри во обратен редослед и дадениот двоцифрен број е 9. За кој е двоцифрениот број, станува збор?
3. Еден селанец чувал кокошки и прасиња. Вкупно имале 27 глави и 84 нозе. Колку кокошки, а колку прасиња имал селанецот?
4. Количникот на два броја е 174, а остатокот 2. Разликата од деленикот помножен со 2 и делителот помножен со 250 е 298. Кои се тие броеви?
5. Два автомобили тргнуваат од градот *A* кон градот *B* со брзини од 60 км/час и 90 км/час. Три часа по тргнувањето на првиот автомобил од градот *A* тргнува вториот автомобил т.ш истовремено пристигнуваат во градот *B*. По колку часа возел секој од двата автомобили? Колку е растојаниео помеѓу двата града?
6. Денес, разликата помеѓу годините на мајката и ќерката е 28 години. По пет години мајката ќе биде 5 пати постара од ќерката. По колку години имаат мајката и ќерката денес?
7. Еден базен може да се наполни низ 2 цевки. Ако првата цевка е отворена 4 часа, втората 3 часа, се наполнува со $\frac{3}{4}$ од базенот. Ако првата е отворена 2 часа, а втората 1 час тогаш базенот ќе се наполни $\frac{1}{3}$ од базенот. За колку часа може да се наполни базенот со секоја цевка оделно?
8. Од Штип и Кавадарци одалечени 60 km се движат два велосипедисти еден кон друг. Првиот велосипедист тргнал 10 минути пред вториот. По 50 минути од тргнувањето на вториот велосипедист нивното растојание било 6 km. Во следните 30 минути од разминувањето биле одалечени 3,8 km Со кои брзини се движеле велосипедистите?

8. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Дадена е линеарната функција $y=(k-1)x-(3-k)$. Одреди го параметарот k, за кој:

а) линеарната функцијата има нула $x=1$;

б) графикот на линеарната функција е паралелен на симетралата на вториот и четвртиот квадрант;

в) линеарната функција расте;

г) линеарната функција опаѓа;

д) линеарната функција е константна функција.

2. За која вредност на параметарот k графиците на двете линеарни функции $y=(3k-1)x-(k-3), y=2x+k$ ја сечат ординатната оска во иста точка?

3. Следниве системи сведи ги во нормален облик:

а) $\begin{cases} 3(x-y)+3=2(y+1) \\ 2(x-5)-3(y+8)=-30 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{y+1}{3} \\ \dfrac{x+1}{5}-\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

4. Системот $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3 \\ x+y=2-x \end{cases}$ реши го со метод на замена.

5. Системот $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5}-\dfrac{y}{3}=-2 \\ x-y=2 \end{cases}$ реши го со метод на спротивни коефициенти.

6. Системот $\begin{cases} 2(x-y)+2y=3(x-3) \\ 5(x-3y)-1=2x \end{cases}$ реши го со Гаусов метод.

7. Системот $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ реши го со графички метод.

8. Системот $\begin{cases} 2,2x-3,3y=-1,1 \\ 4,4x+6,6y=11 \end{cases}$ реши го со Крамеровите правила.

9. Дискутирај го решението во зависност од параметарот k за системот $\begin{cases} kx+y=k-1 \\ x+y=3 \end{cases}$.

10. а) Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 7. Разликата помеѓу двоцифрениот број и двоцифрениот број запишан со истите цифри во обратен редослед е 27. Кој е тој број?

б) На располагање имаме два вида на алкохол 25% и 75%. По колку литри треба да се земе од секој за да се добие 50 литри алкохол од 50%?

7

ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да разликува основни и изведени поими;
- да ги разбира односите помеѓу точки и прави во рамнина;
- да ги дефинира рамнинските фигури;
- да утврдува и да користи својства на рамнинските фигури во практични проблеми.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 7

Геометријата е гранка од математиката која се смета како наука за фигурите. Таа е една од најстарите науки, која се појавила уште во древниот Египет, Вавилон и античка Грција, како потреба за практични мерења на земјата, каде поимот за должина, плоштина и волумен се познати уште од 6 век пр. н.е. Геометриски конструкции користеле и Индијците во 3 век пр. н.е. кога независно од нив, Евклид дал аксиоматска форма и затоа се нарекува и Евклидова геометрија. Во текот на вековите таа била усовршувана и нејзиниот напредок резултира со нејзината денешна форма, како широко поле за испитување и работа на научниците и практичарите.

1. Основни и изведени поими и тврдења

1.1. Основни и изведени поими

При изучувањето на геометријата сме водени од принципот: **од познато кон непознато**. Затоа, воведувањето на некој нов геометриски поим се прави со користење на веќе познати геометриски поими. Ваквиот став со кој се воведува нов геометриски поим се вика **дефиниција.**

!

- **Дефиниција** е реченица преку која определуваме некој поим со помош на веќе познати поими.

Во геометријата разликуваме два вида на геометриски поими: **основни и изведени поими**. **Основните поими** се поими од кои почнува градењето на Евклидовата геометрија и тие се воведуваат без дефиниција, а нивното воведување најчесто е со опишување на поимот или со користење на примери.

Изведените поими се поими кои се дефинираат и во нивните дефиниции се користат основни поими, но и изведени поими кои се претходно дефинирани.

Како основни поими во рамнина кои се прифаќаат без дефиниција се: точка, права и растојание. Но и поимот рамнина исто така е основен поим, кој не се дефинира. Исто така знаеме дека:

- Точките се обележуваат со големите латински букви $A, B, C...$
- Правите се обележуваат со малите латински букви $a, b, c...$.
- Рамнините се обележуваат со грчките букви $\alpha, \beta, \Sigma, \pi...$
- Ако *A* и *B* определуваат иста точка тогаш запишуваме $A \equiv B$ (се чита „A се совпаѓа со B “).

Пример 1

а) Отсечката како изведен поим ја дефинираме со следната дефиниција: „Дел од правата ограничена со две точки, која ги содржи нив и сите точки што лежат меѓу нив“.

Забележуваме дека за да го дефинираме изведениот поим „отсечка“, користени се основните поими точка и права.

б) Кружница како изведен поим се дефинира со следната дефиниција: „Множеството точки од рамнината кои се на еднакво растојание од една фиксна точка O во рамнината“.

Забележуваме дека за да го дефинираме изведениот поим „кружница“, користени се основните поими множество, точка и растојание. И поимот множество во математиката е основен поим, кој не се дефинира.

Наместо множество на точки многу често се користи терминот геометриско место на точки. Кружницата и отсечката ги сметаме за рамниски геометриски фигури. Точката и правата исто така ги сметаме за фигури во рамнината.

!

- **Основни поими се**: точка, права, рамнина и растојание.
- Секое геометриско место на точки од рамнината се вика **рамнинска геометриска фигура** или накратко само фигура.
- **Изведените поими** се поими кои се дефинираат со користење на основни поими и изведени поими кои се претходно дефинирани.

Воопшто, секое геометриско место на точки се вика **геометриска фигура.**

1 Наведи дефиници на изведени поими: полуправа, полурамнина и агол.

1.2. Основни и изведени тврдења

Својствата и односите на геометриските фигури се искажуваат со тврдења. Во геометријата разликуваме два вида на тврдења: **основни** и **изведени** тврдења.

Основните тврдења така наречени аксиоми се тврдења кои ги прифаќаме без доказ. Аксиомите вообичаено ги обележуваме со A_1, A_2, A_3, ...

Аксиомите кои ни се потребни за градење на геометријата се аксиомите од Евклидовата геометрија. Тоа се:

!

Аксиома 1: На секоја права лежат бесконечно многу точки, но постојат и точки кои не лежат на иста права.

Аксиома 2: Секоја права е наполно определена со две точки.

За две точки A и B велиме дека се или различни (со запис $A \neq B$) или се совпаѓаат (со запис $A \equiv B$, што значи дека се работи за иста точка со различни ознаки).

Покрај поимите точка и права во рамнинската геометрија се користи и поимот растојание, кое веќе е спомнато погоре. Растојанието меѓу две точки A и B го обележуваме со $\overline{AB}$. За овој основен поим како точни ги прифаќаме следните аксиоми:

Аксиома 3: Растојанието од точка A до друга точка B е позитивен реален број или нула т.е $\overline{AB} \geq 0$. Ако $A \neq B$ тогаш $\overline{AB} > 0$. Ако $A \equiv B$ тогаш $\overline{AB} = 0$

Аксиома 4: За секои две точки A и B растојанието од A до B е еднакво на растојанието од B до A т.е $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Аксиома 5: За било кои три точки A, B и C, растојанието $\overline{AC}$ е помало или еднакво од збирот на растојанијата $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ т.е $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$.

2 Нацртај цртеж што одговара на $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ и на $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ согласно Аксиома 5!

Поимот растојание ни овозможува да го воведеме и дефинираме поимот "лежи меѓу":

- За една точка C велиме дека лежи меѓу две точки A и B, ако сите три точки A, B и C се различни и точно е $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.

Точно е:

- Точките кои лежат на иста права се викаат **колинеарни точки.**
- Точките кои лежат на иста рамнина се викаат **компланарни точки.**

За поимот "лежи меѓу" точна е аксиомата:

Аксиома 6: Ако една точка лежи меѓу две други точки тогаш трите точки се колинеарни. Ако A, B и C се три различни колинеарни точки тогаш точката A лежи меѓу точките B и C или точката B лежи меѓу точките A и C или точката C лежи меѓу точките A и B.

Напомена: Евклидовите аксиоми ќе ги користиме и во следните наставни единици.

Изведените тврдења така наречени теореми се тврдења кои треба да се докажат со користење на аксиоми или изведени тврдења (но претходно докажани). Теоремите вообичаено ги обележуваме со T_1, T_2, T_3, ...

!

- **Аксиомите** се основни тврдења кои ги прифаќаме без доказ.
- **Теореми** се изведени тврдења кои ги прифаќаме за вистинити откако ќе ги докажеме со помош на аксиоми или веќе претходно докажани тврдења.

Пример 2 Пример за теорема.

Теорема: Во секој правоаголник дијагоналите се еднакви меѓу себе.

Вистинитоста на теоремите се докажува. Секоја теорема може да се запише во вид на импликација $p \Rightarrow q$ т.е. во условна форма каде p е претпоставка, а q е заклучок. Во претпоставката се дадени условите кои се користат при доказот, а во заклучокот е дадено она што треба да се докаже.

Пример 3 Теоремата во Пример 2 искажана во условна форма е:

Теорема: Ако четириаголникот е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви.

Претпоставката p е: Четириаголникот е правоаголник.

Заклучокот q е: Неговите дијагонали се еднакви.

За теорема дадена во условна форма ($p \Rightarrow q$), можеме да го запишеме и нејзиното обратно тврдење ($q \Rightarrow p$), кое не секогаш е теорема. Доколку обратното тврдење е теорема тогаш неа ја нарекуваме обратна теорема на дадената. Ако се теореми и $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow p$ тогаш двете теореми можеме да запишеме заедно со еквиваленција т.е. во форма $p \Leftrightarrow q$.

Размисли и одговори:

- Кој логички закон е искористен?

Доколку не е точно едно од тврдењата $p \Rightarrow q$ или $q \Rightarrow p$ тогаш не можеме да добиеме теорема запишана во облик $p \Leftrightarrow q$.

Напомена: Теоремата запишана како еквиваленција $p \Leftrightarrow q$ се докажува и во двата правци т.е. се докажува теоремата $p \Rightarrow q$, но и теоремата $q \Rightarrow p$.

Пример 4 **а) Теорема:** Ако еден број е делив со 15 тогаш тој број е делив со 3 и 5.

Теоремата е дадена во форма $p \Rightarrow q$ и ние можеме да го формулираме и обратното тврдење $q \Rightarrow p$:

“Ако еден број е делив со 3 и 5 тогаш тој е делив со 15”.

Обратното тврдење е точно (и самото е теорема) и претставува обратна теорема на дадената теорема.

Затоа можеме двете теореми да ги запишеме со еквиваленција:

Теорема: Еден број е делив со 15 ако и само ако е делив со 3 и 5.

б) За следната теорема дадена во форма $p \Rightarrow q$:

Теорема: Ако два броја се парни тогаш нивниот збир е парен број,

ние можеме да го формулираме и обратното тврдење $q \Rightarrow p$,

“Ако збирот на два броја е парен број тогаш тие броеви се парни”.

Обратното тврдење не е точно т.е. не е теорема.

Размисли и одговори:

- Зошто ?

3 Искажи неколку теореми по сопствен избор.

4 За теоремата: Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш тој има два еднакви агли искажи го обратното тврдење. Дали тоа е теорема? Доколку одговорот е потврден тогаш двете теореми искажи ги со помош на еквиваленција.

Освен условна форма, теоремите можат да се искажат и во категорична форма. Во таква форма е теоремата од Пример 1.

Возможно е теоремата од условна да се искаже во категорична форма и обратно.

5 Сети се на теорема во условна форма и истата искажи ја во категорична форма.

6 Сети се на теорема во категорична форма и истата искажи ја во условна форма. Одреди ги претпоставката и заклучокот во теоремата.

Задачи за самостојна работа:

1. Наброј ги основните поими.
2. Дефинирај го изведениот поим отсечка. Кои поими се употребени во дефиницијата?
3. Искажи неколку аксиоми.
4. Која е претпоставката, а кој заклучокот во теоремите:
   а) Ако еден број е делив со 6 тогаш тој број е делив со 2 и 3;
   б) Ако трапезот е рамнокрак тогаш неговите дијагонали се еднакви;
   в) Дијагоналите во правоаголникот меѓу себе се еднакви.
5. За теоремите од задача 4 искажи ги обратните тврдења. Дали тие се теореми? Ако одговорот е потврден тогаш запиши ги теоремата и нејзината обратна теорема со помош на еквиваленција.
6. Во каква форма е искажана теоремата:

   а) Ако еден број е делив со 5 тогаш тој број завршува на цифрата 0 или на цифрата 5;

   б) Во секој тетивен четириаголник, спротивните агли се суплементни.

7. Дадена е теоремата во условна форма: Ако еден број е делив со 2 и 5, тогаш тој е делив со 10. Да се одредат претпоставката и заклучокот на теоремата. Да се искаже теоремата во категорична форма.
8. Дадена е теоремата во категорична форма: Во секој тетивен четириаголник, спротивните агли се суплементни. Да се искаже теоремата во услона форма и да се одредат претпоставката и заклучокот на теоремата.

2. Заемен однос на точка и права. Заемен однос помеѓу две прави во рамнина

2.1. Заемен однос на точка и права

- Нацртај права a, една точка A што лежи на неа и една точка B што не лежи на неа!

Размисли и одговори:

- Колку точки лежат на правата a?

Секоја права претставува едно множество на точки.

Секоја права ја дели рамнината на два дела. Секој дел заедно со правата се нарекува полурамнина, а правата граница.

Точката може да припаѓа (лежи) на правата или да не припаѓа (не лежи) на правата;

Точката A припаѓа на правата a, симболички го запишуваме - $A \in a$, додека пак точката A не припаѓа на правата a, симболички го запишуваме - $A \notin a$;

За барем три точки што припаѓаат на иста права се вели дека се колинеарни точки. Доколку барем три точки не припаѓаат на иста права тогаш велиме дека се неколинеарни.

- Нацртај пет колинеарни точки!
- Нацртај пет неколинеарни точки!

За заемниот однос на точка и права ќе бидат дадени следните аксиоми, кои беа спомнати во предходниот дел, како аксиоми на Евклидовата геометрија:

A_1: На секоја права лежат бесконечно многу точки, но постојат и точки кои не лежат на иста права.

На слика 1 е дадена права a и три точки A, B и C. Точките A и B припаѓаат на правата a т.е. $A, B \in a$, а точката C не припаѓа на правата a т.е. $C \notin a$. Освен точките A и B, на правата a има бесконечно многу точки. Се разбира, освен точката C постојат и други точки кои не припаѓаат на правата a.

Слика 1

A_2: Секоја права е наполно определена со две точки.

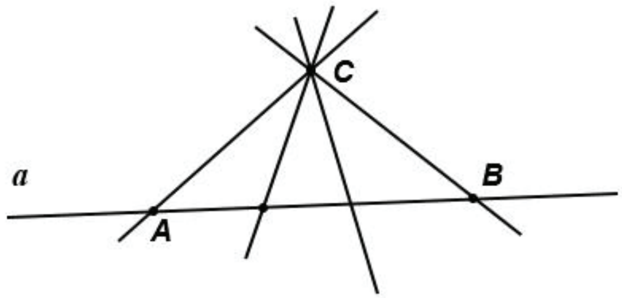
Ова се гледа од претходната слика, правата a е наполно определена со точките A и B.

Правата a можеме да ја означиме и со ознаката AB или BA.

Следните теореми ќе ги докажеме:

Теорема 1: Низ една точка минуваат бесконечно многу прави.

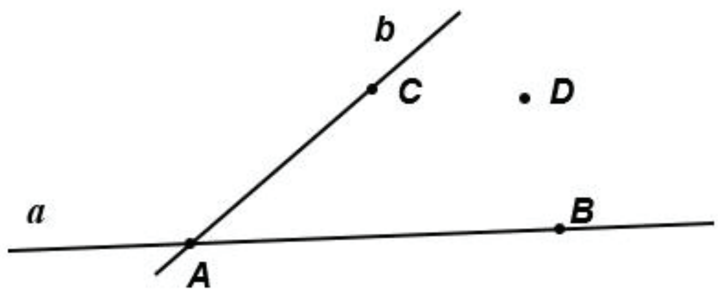
Доказ: Нека е дадена права a и од аксиомата A_2 таа е наполно определена со две точки A и B, слика 2. Од аксиомата A_1 имаме дека постои точка C што не припаѓа на правата a, но и бесконечно многу точки, освен дадените A и B што лежат на правата a. Ако повторно ја примениме аксиома A_2, низ секоја точка од правата a и точката C може да повлечеме по една права. Тогаш добиваме дека низ точката C минуваат бесконечно многу прави.



Слика 2

1 Набљудувајќи ја следната слика 3, определи ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) $A \in a \wedge B \in a$ б) $A \in a \vee B \notin b$ в) $C \notin a \Leftrightarrow C \notin b$ г) $D \in a \Rightarrow D \notin b$.



Слика 3

2 Колку прави можат да се повлечат низ три точки A, B и C? Одговорот да се образложи!

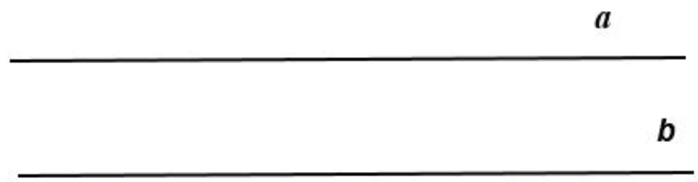
3 Во колку точки можат да се сечат три прави? Одговорот да се образложи!

2.2. Заемен однос на две прави во рамнина

- Да се нацрта рамнина и да се обележи! Да се нацртаат две прави во рамнината. Каква може да биде нивната заемна положба во рамнината?

Сигурно се воочува дека две прави a и b во рамнина ја имаат следната заемна положба:

- Правите a и b немаат заеднички точки ($a \cap b = \varnothing$) т.е. тие се **паралелни** како на слика 4:



Слика 4

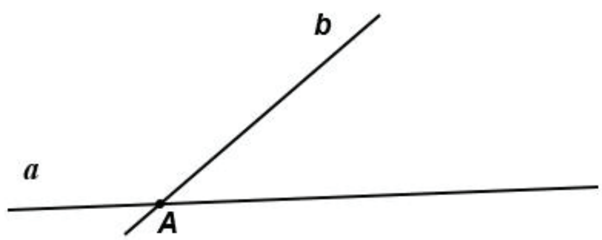
Запишуваме: $a \parallel b$ – се чита „правата a е паралелна со правата b “.

Позната е и Евклидовата аксиома:

Аксиома 7: Низ точка A што не лежи на дадена права a минува единствена права b која е паралелна со правата a .

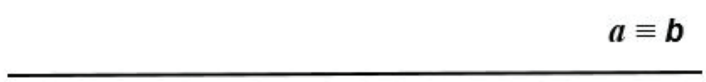
4 За Аксиома 7 направи цртеж!

- Правите a и b имаат една заедничка точка ($a \cap b = \{A\}$) т.е. тие **се сечат** како на слика 5:



Слика 5

- Правите a и b имаат **бесконечно многу заеднички точки** т.е. тие се совпаѓаат како на слика 6:



Слика 6

Запишуваме: $a \equiv b$ – се чита „правата a се совпаѓа со правата b “.

Размисли и одговори:

- Каков е заемниот однос на две прави доколку имаат две заеднички точки?

Одговорот ни ја дава следната теорема:

Теорема 3: Ако две прави имаат две заеднички точки тогаш двете прави се совпаѓаат.

Доказ: Ако ја искористиме A_2 дека секоја права е наполно определена со две точки, тогаш јасно е дека ако две прави имаат две заеднички точки тогаш сите точки им се заеднички. Значи, двете прави се совпаѓаат т.е. сите точки од едната и припаѓаат на другата права.

Размисли и одговори:

- Колку најмногу заеднички точки може да имаат две различни прави?

Сигурно се воочува согласно претходно кажаното дека: две различни прави можат да имаат најмногу една заедничка точка.

Јасно е дека:

- Две прави во рамнината или се паралелни или се сечат или се совпаѓаат.

5 Нацртај една права a и точка $A \notin a$. Колку прави низ точката A може да се повлечат кои се паралелни со правата a ? Направи цртеж!

6 Нацртај една права a . Колку прави може да се нацртаат паралелни со правата a? Направи цртеж!

7 Нацртај една права a и точка $A \notin a$. Колку прави низ точката A може да се повлечат кои се сечат со правата a ? Колку од нив се нормални на првата a ? Направи цртеж!

Задачи за самостојна работа:

1. Докажи дека постојат барем три прави кои не минуваат низ иста точка.
2. За секоја точка постојат прави што минуваат низ неа!
   За секоја точка постојат прави што не минуваат низ неа!
   Дали се точни?
3. Колку прави можат да се повлечат низ 5 различни точки? Одговорот да се образложи и да се направи цртеж!
4. Во колку точки можат да се сечат 2 прави? Одговорот да се образложи и да се направи цртеж!
5. Колку рамнини определуваат 4 точки кои не се колинеарни? Одговорот да се образложи!

3. Геометриски фигури во рамнина: полуправа и агол

3.1. Полуправа

Нацртај една права a и на неа обележи една точка O .

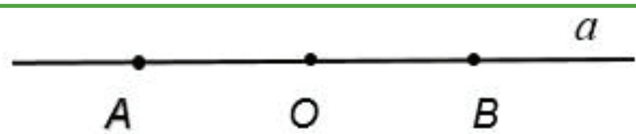
Размисли и одговори:

- На колку дела точката O ја дели правата?

Од слика 9 се воочува дека точката O ја дели правата a на два дела. Обележани се две точки A и B на правата по една од секоја од страните на точката O.

Размисли и одговори:

- Како се нарекуваат деловите од правата a т.е. како се нарекуваат OA и OB ?



Слика 9

Обично, полуправата се опишува како дел од правата која е ограничена со една точка од едната страна т.н. почетна точка.

- Секое множество на точки од правата a што е од едната страна на дадена точка O, заедно со таа точка се вика **полуправа** со почеток во точката O.
- Двете полуправи кои се наоѓаат на двете страни од точката O на правата a се викаат **составни полуправи**.

За полуправата OA точна е следната Евклидова аксиома:

Аксиома 8: На секоја полуправа OA постои единствена точка B која се наоѓа на дадено растојание r од нејзиниот почеток.

1 За Аксиома 8, направи цртеж!

2 Нацртај една права и на неа да се обележат три точки. Колку полуправи се определени со тие три точки?

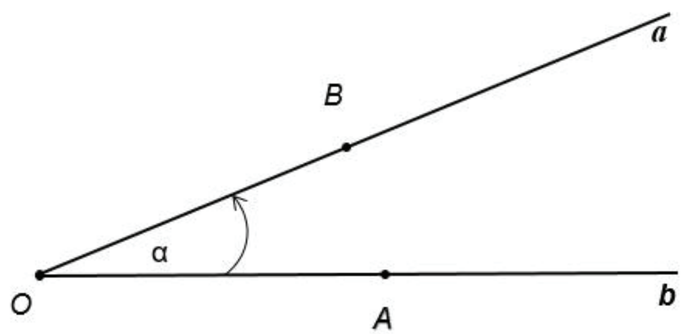
3 Нацртај три точки кои не се колинеарни и да се повлечат прави низ секои две точки од нив. Колку полуправи определуваат тие?

3.2. Агол

Нацртај две полуправи a и b со заеднички почеток O.

Размисли и одговори:

- На секоја полуправа обележи по една точка A и B. Која геометриска фигура се добива? Именувај го аголот.
- Како се викаат полуправите OA и OB ? Како се вика точката O?



Слика 10

Аголот се именува како $\measuredangle AOB$ или агол α , слика 10.

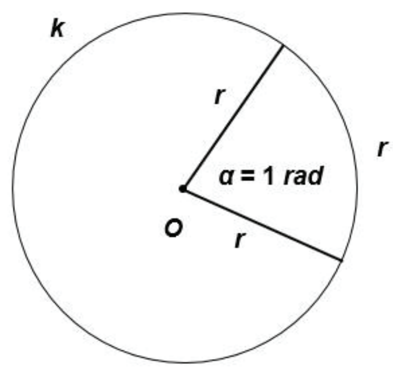
- Фигурата образувана од две полуправи со заеднички почеток, заедно со делот од рамнината ограничен со нив се вика **агол;**
- Делот од рамнината ограничен со полуправите на еден агол се вика **област на аголот** и се обележува со кружен лак. Полуправите OA и OB се викаат краци на аголот, а точката O е теме на аголот.

Во пракса, аглите најчесто се мерат во степени, но за мерење на агли има и мерна единица радијан.

!

- Основна мерна единица за мерење на аголот е **агловен степен** т.е. 1^0 се чита „еден степен“. **Еден аглов степен** (1^0) е мера на агол, кој е $\frac{1}{90}$ дел од правиот агол. Помали единици се минута и секунда т.е. $1'$ (се чита „една минута“) и $1''$ (се чита „една секунда“). Помеѓу нив важат следните равенства 1^0=60’ и 1’=60’’;

- **Еден радијан** (1 rad) е мера на агол чии краци од произволна кружница со центар во темето на аголот отсекуваат лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата (слика 11).



Слика 11

- Аголот α на слика 11 се нарекува централен агол.

!

- Агол со теме во центарот на кружницата се нарекува **централен агол.**

Општо, ако централниот агол има α радијани тогаш должината на лакот се пресметува со формулата $l = \alpha \cdot r$. Доколку централниот агол е 360^0 тогаш тој соодветствува со лакот $l = 2\pi \cdot r$. Радијанската мера за аголот $\alpha = \frac{l}{r} = 2\pi\, rad$. Од овде добиваме дека:

$$360^0 = 2\pi\, rad, 180^0 = \pi\, rad.$$

Врската помеѓу степен и радијан е дадена со следните формули

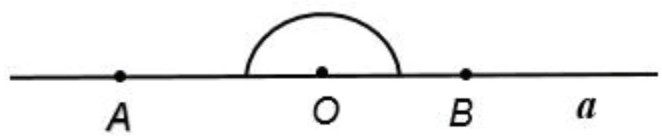
$$\beta = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{180^0}{\pi} \cdot \beta .$$

каде α е степенската мера на аголот и β е радијанска мера на аголот.

Нацртај две составни полуправи.

Размисли и одговори:

- Како се вика овој агол? Колку степени има?



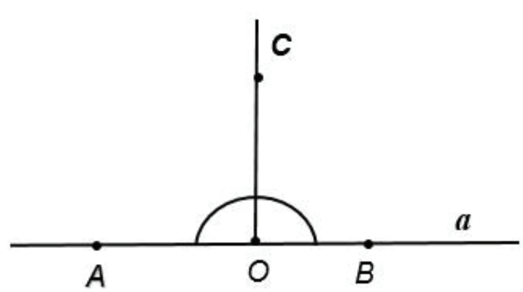
Слика 12

Аголот $\sphericalangle AOB = 180^0$, слика 12.

- Аголот чии краци се пар од составни полуправи се вика **рамен агол**. Рамниот агол има големина од 180^0.

Размисли и одговори:

- Како се вика аголот што е половина од рамниот агол? Колку степени има?



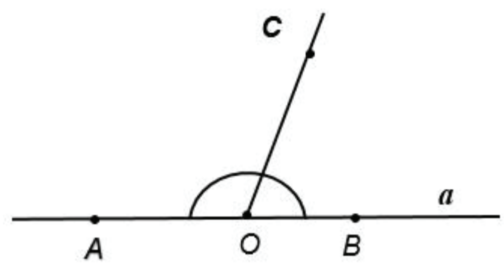
Слика 14

Аголот $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = 90^0$, слика 14.

❖ Аголот што е половина од рамниот агол е **прав агол**. Правиот агол има големина од 90^0.

Размисли и одговори:

- Како се вика аголот што е помал од правиот агол, а како аголот што е поголем од правиот агол? Именувај ги тие агли на Слика 15?
- Како се вика аголот поголем од рамниот агол, а како аголот помал од рамниот агол?



Слика 15

❖ Аголот помал од правиот агол се вика **остар агол**, а аголот поголем од правиот агол се вика **тап агол**;

❖ Аголот поголем од рамниот агол се вика **неконвексен агол**, а аголот помал од рамниот агол се вика **конвексен агол**.

Нацртај два агли кои имаат заеднички крак, а немаат заедничка област.

Размисли и одговори:

- Како се викаат тие? Слика 15!

❖ Два агли со заеднички крак и без заедничка внатрешна област се викаат **соседни агли.**

Размисли и одговори:

- Како се викаат два соседни агли кои образуваат рамен агол? Слика 15!

- Два соседни агли кои образуваат рамен агол се викаат **напоредни агли.** Нивниот збир е 180^0.

Многу често правиот агол се дефинира и на следниот начин:

- Аголот кој е еднаков на својот напореден агол се вика прав агол.

Размисли и одговори:

- Како се викаат два агли чиј збир е прав агол (90^0)?
- Како се викаат два агли чиј збир е рамен агол (180^0)?

- Ако збирот на два агли е 90^0 тогаш тие се викаат **комплементни агли.**
- Ако збирот на два агли е 180^0 тогаш тие се викаат **суплементни агли.**

Размисли и одговори:

- Дали секои два агли што се суплементни се и напоредни агли?

4 Збирот на два агли е $125^0 15'$, а едниот е $78^0 27'$. Одреди го другиот агол?

5 Нека е даден агол $127^0 26' 36''$. Одреди го неговиот комплементен и неговиот суплементен агол.

6 Нацртај еден рамен агол. Од неговото теме на едната страна од рамнината се повлечени 2 полуправи со почетоци во темето на рамниот агол. Колку парови на соседни агли имаме? Кои од нив се напоредни?

Задачи за самостојна работа

1. Нацртај две прави кои се сечат. Колку полуправи се определени со почеток во пресечната точка? Именувај ги! Кои од нив се составни?
2. Нацртај две прави кои се паралелни и една права која ги сече. Колку полуправи се определени со почеток во пресечните точки? Именувај ги! Кои од нив се составни?
3. Нека се дадени два агли $\alpha = 112^0 2'$ и $\beta = 28^0 15' 13''$.

   Пресметај: $\gamma = \alpha + \beta, \delta = \alpha - \beta$, но и нивните суплементни агли.
4. Нека е даден аголот $78^0 15' 13''$. Најди го неговиот комплементен и суплементен агол.

5. Нека се дадени аглите $\alpha = 12^0 2'$ и $\beta = 21^0 30'3''$. Пресметај го аголот $\gamma = 8\alpha - 2\beta$.
6. Нека се дадени три агли α, β, γ т.ш $\alpha - \gamma = 90^0, \beta + \gamma = 90^0$. Каков е меѓусебниот однос на α и β?
7. Нацртај две прави што се паралелни и трета што ги сече. Обележи ги сите агли што тие ги формираат. Кои од нив се соседни, а кои се напоредни?

4. Геометриски фигури во рамнина: отсечка и многуаголник

4.1. Отсечка

Да се нацрта една права и на неа две различни точки.

Размисли и одговори:

- Какви геометриски фигури добивме? Колку од нив се отсечки?

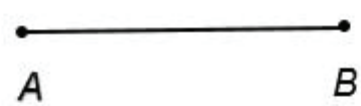
Отсечката претходно ја дефиниравме како дел од правата ограничена со две точки, која ги содржи нив и сите други внатрешни точки што се наоѓаат помеѓу нив. Но, отсечката можеме да ја дефинираме и на следниот начин:

❖ Рамнинска геометриска фигура составена од две различни точки и сите точки помеѓу нив се вика **отсечка**.

- Да се нацрта една отсечка AB.

Размисли и одговори:

- Дали BA е истата отсечка? Како се викаат точките A и B ? Што претставува $\overline{AB}$?



Слика 16

Нормално, точките A и B се крајни точки на отсечката, а $\overline{AB}$ е растојанието помеѓу двете точки A и B. За отсечката, $\overline{AB}$ е нејзина должина. Исто знаеме дека $\boldsymbol{B}$ и $\overline{AB}$ означуваат иста отсечка, слика 16.

!

- ❖ Две отсечки кои имаат еднакви должини велиме дека се еднакви или складни отсечки.

Јасно е дека две отсечки a и b може да се споредуваат преку нивните должини, при што возможни се еден од трите случаи: $a > b$ или $a < b$ или $a = b$.

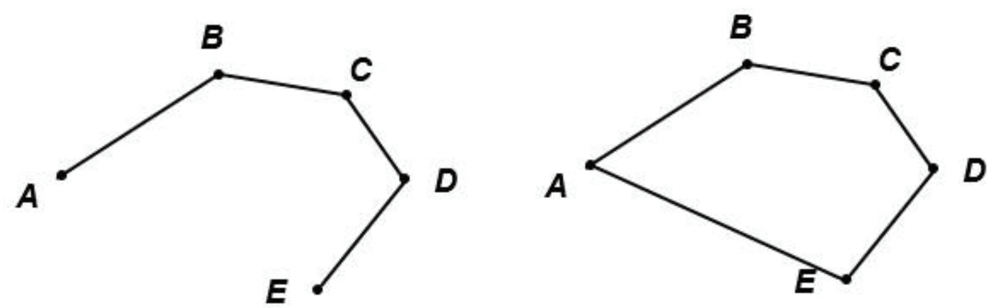
Аксиомата 8 е важна аксиома бидејќи таа ни овозможува цртање на еднакви отсечки и графичко оперирање со отсечки само со помош на шестар и линијар.

1 Нацртај четири колинеарни точки. Колку отсечки тие определуваат? Именувај ги!

2 Нацртај три неколинеарни отсечки. Колку отсечки тие определуваат? Именувај ги!

4.2. Многуаголник

Нека е дадена слика 17:



Слика 17

Размисли и одговори:

- Од што се изградени фигурите на сликата?

Отсечките AB и BC имаат заедничка точка B и за нив ќе речеме дека се соседни отсечки.

- Фигурата составена од отсечки, при што секои две соседни отсечки не лежат на иста права се вика **искршена линија**. Крајните точки на отсечките се викаат **темиња на искршената линија**. Отсечките од кои е изградена искршената линија се викаат **страни на искршената линија**.
- Темињата на искршената линија се **соседни** доколку лежат на иста страна на искршената линија. Страните на искршената линија се **соседни** доколку имаат заедничко теме.
- Искршената линија може да биде **отворена** или **затворена искршена линија**.

Разгледај ја слика 17 и одговори на прашањата:

- Што претставува точката A за искршената линија, а што претставува отсечката AB за искршената линија?
- Која искршена линија е отворена, а која е затворена искршена линија?
- Кои темиња се соседни на темето C на првата искршена линија, а кои кај втората искршена линија?
- Кои страни се соседни на страната BC кај првата, а кои кај втората искршена линија?

- Затворената искршена линија која нема несоседни страни што се сечат се вика **полигонална линија.**

- Збирот од должините на страните на искршената линија се вика **периметар на искршената линија.**

Пример 1 Периметарот на отворената искршена линија е $L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$, а на затворената искршена линија е $L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}$.

Пример 2 На претходната слика, полигонална линија е затворената искршена линија $ABCDE$.

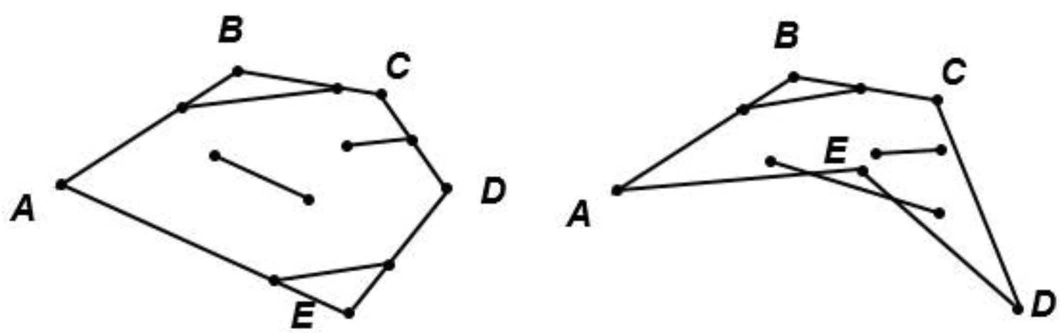
- Полигоналната линија ја дели рамнината на две области: внатрешна и надворешна област. Областа ограничена со полигоналната линија се вика внатрешна област, а другиот дел од рамнината е надворешна област.
- Фигурата образувана од една полигонална линија заедно со внатрешната област се вика **многуаголник.**

Пример 3 На слика 17, многуаголник е $ABCDE$.

Размисли и одговори:

- Колку страни, темиња, внатрешни и надворешни агли има многуаголникот $ABCDE$?
- Колку страни, темиња, внатрешни и надворешни агли има триаголникот, а колку четириаголникот?

Да ги анализираме многуаголниците на слика 18:



Слика 18

Се забележува дека кај првиот многуаголник $ABCDE$ при земање на која и да било отсечка, чии крајни точки лежат во внатрешноста на мноуаголникот или на неговите страни целосно се наоѓа во внатрешниот дел на многуаголникот. Тој се нарекува конвексен многуаголник. Кај вториот многуаголник $ABCDE$ имаме дека не секоја отсечка лежи целосно во многуагоникот. Вториот многуаголник се нарекува неконвексен многуаголник.

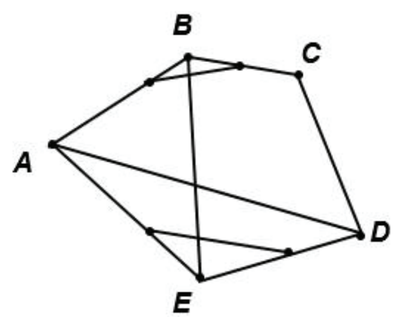
!

- Многуаголник кај кој, која и да било отсечка, чии крајни точки лежат во внатрешноста на многуаголникот или на неговите страни целосно се наоѓа во внатрешниот дел на многуаголникот се вика **конвексен многуаголник.** Доколку постои некоја отсечка, чии крајни точки лежат во внатрешноста на многуаголникот или на неговите страни, која што целосно не лежи во внатрешноста на многуаголникот тогаш тој многуаголник се нарекува **неконвексен многуаголник.**

Напомена: Кај конвексните многуаголници, доколку повлечеме права на која лежи која и да било страна од многуаголникот тогаш целиот многуаголник ќе лежи во едната полурамнина чија граница е правата. Кај неконвексните многуаголници не се случува ова.

3 Нацртај три конвексни многуагоници и два неконвексни многуаголници!

Нека е даден еден многуаголник на следната слика 19:



Слика 19

Размисли и одговори:

- Именувај ги сите отсечки на сликата!
- Кој од нив се дијагонали на многуаголникот $ABCDE$?
- Изброј ги дијагоналите што можат да се повлечат од темето A!
- Изброј го вкупниот број на дијагонали што можат да се повлечат од сите темиња во дадениот многуаголник!

!

- Отсечката чии крајни точки лежат на несоседни темиња на еден многуаголник се вика **дијагонала на многуаголникот.**
- **Бројот на дијагонали** што можат да се повлечат од едно теме кај секој многуаголник се пресметува со формулата $d = n-3$, каде n е бројот на страни на многуаголникот.
- **Вкупниот број на дијагонали** што можат да се повлечат во еден многуаголник може да се пресмета со формулата $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, каде n е бројот на страни на многуаголникот.

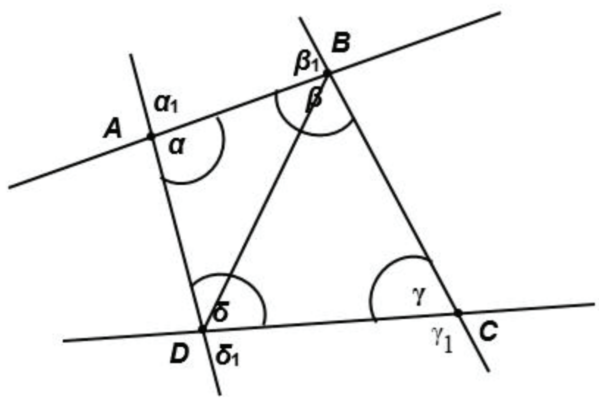
4 Пресметај го бројот на дијагонали што можат да се повлечат од едно теме кај петаголник, но и вкупен број на дијагонали во петаголникот.

5 Колку дијагонали можат да се повлечат од едно теме, а колку вкупен број на дијагонали кај триаголник?

6 Во еден многуаголник од едно теме можат да се повлечат 10 дијагонали. За кој многуаголник станува збор?

7 Во еден многуаголник можат да се повлечат вкупно 9 дијагонали. За кој многуаголник станува збор?

Нека е даден еден многуаголник на следната слика 20:



Слика 20

Многуаголникот $ABCD$ е четириаголник и тој има 4 темиња, 4 страни, 4 внатрешни агли и 4 надворешни агли. Се знае дека збирот на внатрешните агли во четириаголник е 360^0.

Како го знаеме тоа? Доколку ја повлечеме едната дијагонала, тогаш четириаголникот се дели на два триаголници. Збирот на внатрешните агли на секој триаголник е 180^0, тогаш се добива дека збирот на внатрешните агли во четириаголник е 360^0.

Размисли и одговори:

- Именувај ги внатрешните агли на четириаголникот $ABCD$!
- Именувај ги надворешните агли на четириаголникот !

На идентичен начин со делење на секој многуаголник на триаголници со повлекување на дијагоналите од едно теме се добиваат $n-2$ триаголници. Тогаш за збирот на внатрешните агли на многуаголникот со n страни се добива формулата $S_n = 180^0(n-2)$.

За збирот на надворешните агли на многуаголникот $ABCD$ имаме

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=(180^0-\alpha)+(180^0-\beta)+(180^0-\gamma)+(180^0-\delta)$$
$$=4\cdot 180^0-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=4\cdot 180^0-360^0=360^0$$

За кој и да било многуаголник со n страни се добива формулата

$n\cdot 180^0 - S_n = n\cdot 180^0-(n-2)\cdot 180^0 = 2\cdot 180^0 = 360^0$.

!

- **Збирот на внатрешните агли на секој многуаголник** се пресметува со формулата $S_n = 180^0(n-2)$;
- **Збирот на надворешните агли на секој многуаголник** е 360^0.

8 Пресметај го збирот на внатрешните агли на седмоаголник.

9 Збирот на внатрешните агли на еден многуаголник е 540^0. За кој многуаголник станува збор?

Задачи за самостојна работа:

1. Нека точката O е средина на отсечката AB и на отсечката A_1B_1, каде сите четири точки лежата на иста права. Докажи дека $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$!
2. Изброј колку отсечки определуваат пет колинеарни точки. Именувај ги! Да се споредат нивните должини! Дали можат да се извлечат некои заклучоци од споредбата на нивните должини?

3. Изброј колку отсечки определуваат три неколинеарни точки. Именувај ги! Кој многуаголник се добива? Да се споредат нивните должини! Дали може да се извлечат некакви заклучоци од споредбата на нивните должини?
4. Пресметај го бројот на дијагонали што можат да се повлечат од едно теме кај петнаесетаголник, но и вкупен број на дијагонали во петнаесетаголник.
5. Во еден многуаголник од едно теме можат да се повлечат 15 дијагонали од едно теме. За кој многуаголник станува збор?
6. Пресметај го збирот на внатрешните агли на десетаголник.
7. Збирот на внатрешните агли на еден многуаголник е 1080^0. За кој многуаголник станува збор?

5. Геометриски фигури во рамнина: кружница и круг

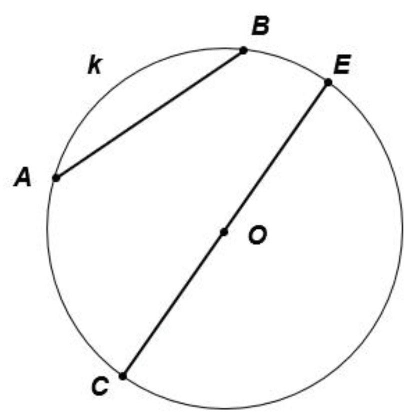
5.1. Кружница и круг

Множеството на точки од рамнината кои се на еднакво растојание од една фиксна точка O во рамнината се вика кружница. Точката O се вика центар на кружницата, а растојанието од O до која било точка од кружницата се вика радиус и се обележува со r. Обележувањето на кружницата е со $k(O,r)$.

Множеството на точки од рамнината кои се на еднакво или на помало растојание од фиксната точка O се вика круг.

Отсечката чии крајни точки лежат на кружницата се вика тетива. Најдолгата тетива минува низ центарот на кружницата и се вика дијаметар на кружницата. Дијаметарот на кружницата содржи два радиуси т.е. $d=2r$.

За слика 21:

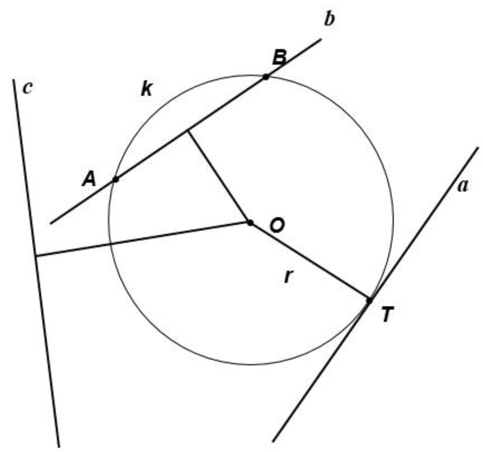


Слика 21

отсечките AB и CE се тетиви, но само CE е дијаметар на кружницата, при што $\overline{CE}=2r$. Додека пак, $\overline{CO}=\overline{OE}=r$.

1 Во една кружница една тетива е долга 12cm, а централното растојание до неа е 8 cm. Колку изнесува радиусот на кружницата?

Дадена е слика 22:



Слика 22

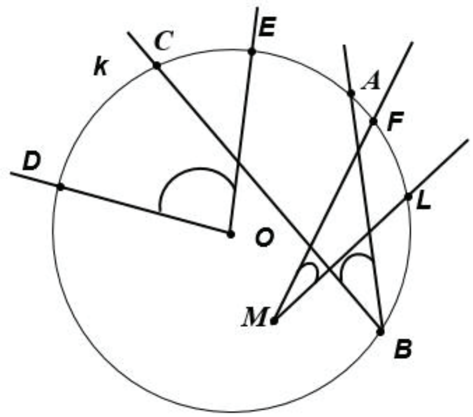
Правата a има една заедничка точка ($a \cap k = \{T\}$) и правата ја нарекуваме тангента на кружницата. Може да се забележи дека растојанието од центарот на кружницата до тангентата a е еднакво на радиусот на кружницата r. Правата b има две заеднички точки со кружницата ($b \cap k = \{A, B\}$)и таа права се вика секанта. Растојанието од центарот на кружницата до секантата b е помало од радиусот на кружницата r. Додека пак, правата c нема заеднички точки со кружницата. Растојанието од центарот на кружницата до правата c е поголемо од радиусот на кружницата r.

!

- Растојанието од центарот на кружницата до која и да било права се вика **централно растојание** на таа права.
- Правата која со кружницата има една заедничка точка се вика **тангента на кружницата**. Централното растојание на која и да било тангента на кружницата е еднакво на радиусот на кружницата.
- Правата која со кружницата има две заеднички точки се вика **секанта на кружницата**. Централното растојание на која и да било секанта на кружницата е помало од радиусот на кружницата.
- Централното растојание на која и да било права која со кружницата нема заеднички точки е поголемо од радиусот на кружницата.

2 Нацртај кружница $k(O,r)$ и пет прави. Две од нив нека бидат тангенти, две секанти и една да нема заедничка точка со кружницата. Обележи го централното растојание за секоја од нацртаните прави.

Дадена е кружницата $k(O,r)$ на слика 23,



Слика 23

На Сликата се дадени три агли $\sphericalangle BAC, \sphericalangle DOE, \sphericalangle LMF$.

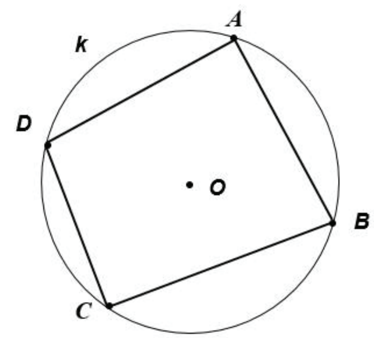
Темето A на аголот $\sphericalangle BAC$ лежи на кружницата, затоа аголот $\sphericalangle BAC$ се вика периферен агол. Аголот $\sphericalangle DOE$ е централен агол. Аголот $\sphericalangle LMF$ не е ниту централен, ниту периферен агол, бидејќи неговото теме *M* не лежи ниту во центарот на кружницата, ниту на кружницата.

!

- Агол со теме на кружницата, чии краци ја сечат кружницата се нарекува **периферен агол**.
- Секој централен агол е два пати поголем од периферниот агол конструиран над исти кружен лак.

3 Нека централен агол е $\alpha = 125^0 36'$. Колку изнесува периферниот агол β конструиран над ист кружен лак со централниот агол?

Да ја разгледаме следната слика 24:



Слика 24

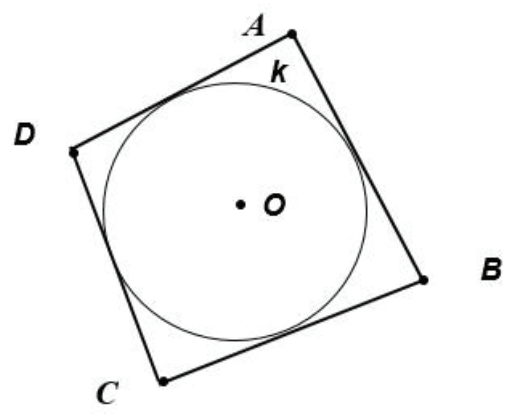
Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружницата $k\left(O,r\right)$.

Размисли и одговори:

- Што претставуваат страните на четириаголникот $ABCD$ за кружницата k?

❖ Четириаголникот чии страни се тетиви на иста кружница се вика **тетивен четириаголник.**

Да ја разгледаме следната слика 25:



Слика 25

Кружницата $k(O,r)$ е опишана околу четириаголникот $ABCD$.

Размисли и одговори:

- Што претставуваат правите на кои лежат страните на четириаголникот $ABCD$ за кружницата k?

❖ Четириаголникот чии страни лежат на прави кои се тангенти на иста кружница се вика **тангентен четириаголник.**

❖ Кај секој тетивен четириаголник спротивните агли се суплементни.
❖ Кај секој тангентен четириаголник збирот на спротивните страни е еднаков.

4 Пресметај ги внатрешните агли на еден тетивен четириаголник, ако тие се однесуваат 1:2:3:4!

5 Дали квадратот е тангентен четириаголник? Одговорот да се образложи!

Задачи за самостојна работа:

1. Да се докаже: Ако AB и A_1B_1 се два дијаметри на една кружница тогаш $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$ и $AA_1 \parallel BB_1$!
2. Аголот помеѓу тетивата на кружницата и тангентата повлечена во една од крајните точки на тетивата е еднаков со периферниот агол што одговара над таа тетива. Докажи!
3. Во една кружница една тетива е долга 24 cm, а централното растојание до неа е 9 cm. Колку изнесува радиусот на кружницата?
4. Нека збирот на еден централен и периферен агол над ист кружен лак е $136^0 47'24''$. Колку изнесува секој од нив?
5. Околу триаголник ΔABC опишана е кружница $k(O,r)$. Аглите $\sphericalangle ACB = 50^0$, $\sphericalangle ABC = 60^0$. Симетралата на аголот $\sphericalangle ABC$ ја сече кружницата во точка D. Да се пресметаат аглите на четириаголникот $ABCD$.
6. Дали ромбот е тангентен четириаголник? Одговорот да се образложи!

6. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Теоремата: „Спротивните агли на секој тетивен четириаголник се суплементни“, искажи ја во условна форма и определете ја претпоставката и заклучокот.

2. Колку прави можат да се повлечат низ 4 различни точки? Нацртај ги сите случаи!

3. Збирот на три агли е 180^0, а тие се однесуваат како 2:3:4. Најди го секој од нив!

4. Разликата на еден пар напоредни агли е 27^0 12’. Колку изнесува секој од нив?

5. Збирот на внатрешните агли во еден многуаголник е 720^0. За кој многуаголник станува збор?

6. Нека аглите во еден петаголник се однесуваат 2:3:4:5:6. Колку изнесува секој од нив?

7. Во еден многуаголник можат да се повлечат вкупно 35 дијагонали. За кој многуаголник станува збор? Колку дијагонали можат да се повлечат од едно теме на многуаголникот?

8. Во една кружница една тетива е долга 12 cm, а радиусот на кружницата е 10 cm. Колку изнесува централното растојание до тетивата?

9. Нека збирот на еден централен и периферен агол над ист кружен лак е $144^0 54' 21''$. Колку изнесува секој од нив?

10. Нека два агли што лежат на иста страна кај тетивен четириаголник се $65^0 25'$ и $125^0 34'$. Пресметај ги другите два агли.

8 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

ЦЕЛИ НА МОДУЛАРНАТА ЕДИНИЦА

Со изучување на модуларната единица, ученикот треба да биде оспособен:

- да одредува плоштина на паралелограм (правоаголник, квадрат, ромб, ромбоид);
- да пресметува плоштина и периметар на триаголник;
- да пресметува радиус на впишана и опишана кружница на триаголник;
- да применува Питагорова теорема, Евклидова теорема и Талесова теорема во правоаголен триаголник;
- да пресметува периметар и плоштина на трапез;
- да разликува тангетен и тетивен четириаголник;
- да ги користи својствата на тангетен и тетивен четириаголник;
- да пресметува периметар и плоштина на многуаголник;
- да пресметува плоштина и периметар на круг и на делови од кругот;
- да знае да користи формули за периметар и плоштина во практични проблеми.

СОДРЖИНА НА МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 8

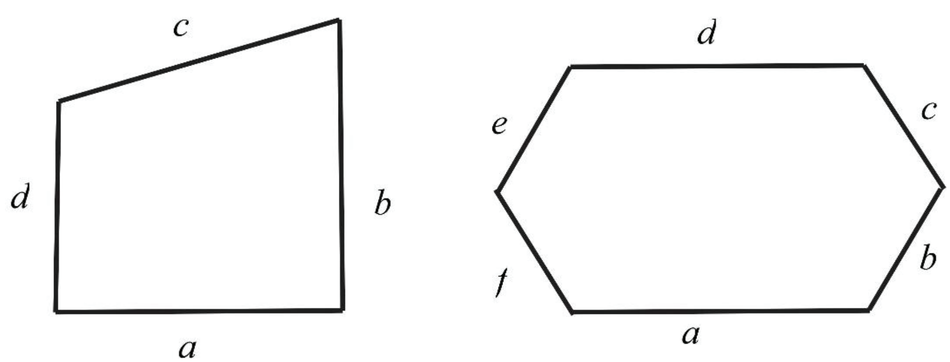
Во претходната модуларна единица воведовме поими за некои рамнински фигури, меѓу кои и многуаголник и круг. Во оваа модуларна единица ќе се потсетиме на некои видови многуаголници, како триаголник и четириаголник, а ќе се потсетиме и на поимите периметар и плоштина на многуаголник, како и периметар и плоштина на круг и делови од кругот. Потребата за пресметување на периметар и плоштина на рамнински фигури секојдневно се среќава во реалниот живот. Пример, да пресметаме колку метри ограда ќе ни треба да заградиме градина со определена форма, да пресметаме колку материјал ќе ни треба за обложување на подот или ѕидовите во дадена просторија (колку паркет или плочки ќе ни требаат) итн.

1. Периметар на многуаголник. Периметар и плоштина на квадрат и правоаголник

!

Збирот од должините на сите страни на еден многуаголник се вика **периметар** или **обиколка** на **многуаголникот**.

Периметарот најчесто се означува со L.

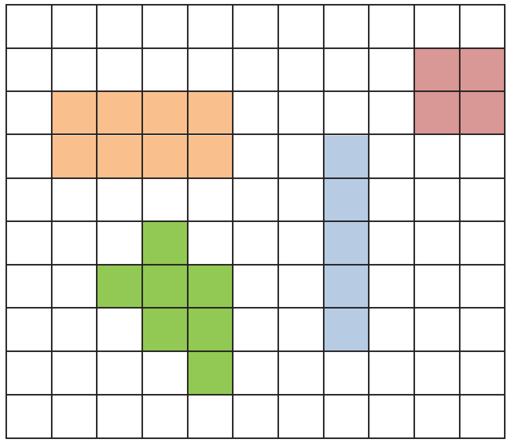


$L=a+b+c+d$ $\quad$ $L=a+b+c+d+e+f$

Слика 1. Многуаголници

- Плоштината е основен поим во математиката и истиот не се дефинира, туку интуитивно создаваме претстава за тоа што означува плоштината. Плоштината на рамнинска фигура ни ја покажува на некој начин големината на таа фигура, т.е. колкава површина (колкав дел) од рамнината зафаќа разгледуваната фигура.

- Ако делот од рамнината каде се скицирани рамнинските фигури го поделиме на исти квадратчиња, можеме да изброиме на по колку квадратчиња „е распространета“ секоја од разгледуваните фигури. Тој дел од рамнината претставува плоштина на соодветната рамнинска фигура. На слика 2 се претставени неколку рамнински фигури означени со различна боја. Бројот на квадратчиња на кои е распространета секоја од фигурите ни покажува колкава површина зафаќа секоја од фигурите и таа површина претставува нивната плоштина. Плоштината најчесто ја означуваме со буквата P.



Слика 2.

❖ Плоштината на дадена фигура не зависи од местоположбата каде што се наоѓа фигурата.

За плоштината на многуаголник се точни следните аксиоми:

❖ Плоштината P на еден многуаголник е позитивен број или нула т.е. $P \geq 0$;
❖ Складните многуаголници имаат еднакви плоштини;
❖ Плоштината на многуаголник составен од два или повеќе многуаголници кои немаат заеднички внатрешни точки е еднаква на збирот на плоштините на тие многуаголници;
❖ Плоштината на квадратот со страна 1cm е 1 cm^2.

❖ Мерната единица за плоштина во SI е метар квадратен (m^2).

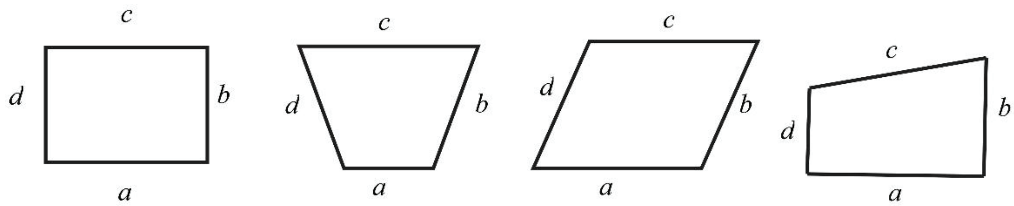
Многуаголник со четири страни (четири темиња, четири агли) се вика **четириаголник**.

- Четириаголници се, на пример, квадратот, правоаголникот и трапезот, кои ги знаете од основно училиште.

❖ Збирот од должините на страните на даден четириаголник се вика **периметар на четириаголникот**.

❖ Страните на четириаголникот најчесто ги означуваме со мали латинични букви, па ако истите се означени со a,b,c,d за пресметување на периметарот на четириаголникот ја имаме формулата:

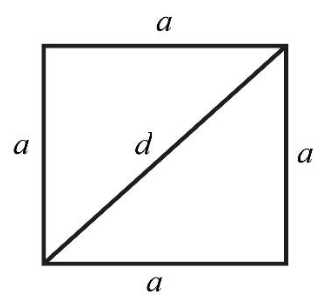
$$L = a + b + c + d$$



Слика 3. Четириаголници

1.1. Квадрат

- **Квадратот** е четириаголник чии четири страни и агли се еднакви меѓу себе. Знаејќи дека збирот на внатрешните агли во еден четириаголник е 360^0, големината на секој од аглите во квадратот е 90^0, т.е. во квадратот сите агли се прави агли.



Слика 4. Квадрат

!

Ако секоја од страните на квадратот ја означиме со a, тогаш:

- периметарот на квадратот ќе го пресметаме со формулата:

$$L = 4a\,.$$

- Плоштината на квадратот се пресметува со формулата:

$$P = a^2\,.$$

Ако дијагоналата на квадратот ја означиме со d, неговата плоштина можеме, исто така да ја пресметаме со формулата:

$$P = \frac{d^2}{2}\,.$$

Последната формула следува од познатата Питагорова теорема за правоаголен триаголник. Имено, од правоаголниот триаголник чии катети се две страни на квадратот, а хипотенузата е дијагоналата на квадратот, според Питагоровата теорема важи равенството:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = \frac{d^2}{2}$$

т.е.

$$P = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Пример 1 Даден е квадрат со страна $a = 6cm$. Да ги пресметаме периметарот и плоштината на квадратот.

$$L = 4a = 4 \cdot 6cm = 24cm$$

$$P = a^2 = (6cm)^2 = 36cm^2.$$

Периметарот на квадратот е 24cm, додека плоштината е $36cm^2$.

Пример 2 Пресметај за колку ќе се промени периметарот, а за колку плоштината на квадратот, ако неговата страна:

а) се зголеми два пати,

б) се намали два пати.

Нека страната на квадратот е a. Неговиот периметар е $L = 4a$, додека плоштината е $P = a^2$.

а) Ако страната на квадратот се зголеми два пати, значи должината на страната е $2a$, тогаш периметарот ќе биде $L = 4(2a) = 8a$, додека плоштината ќе биде $P = (2a)^2 = 4a^2$.

Заклучуваме дека со зголемување на страната на квадратот два пати, неговиот периметар ќе се зголеми исто така два пати, додека неговата плоштина ќе се зголеми четири пати.

б) Ако страната на квадратот се намали два пати, нејзината должина е $\frac{a}{2}$, па тогаш периметарот ќе биде $L = 4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$, додека плоштината ќе биде $P = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.

Со намалување на страната на квадратот два пати, неговиот периметар се намалува исто така два пати, додека плоштината се намалува четири пати.

Пример 3 Пресметај го периметарот на квадрат со дијагонала $d = 6cm$.

За да го пресметаме периметарот на квадратот, потребна ни е должината на страната a. Од Питагоровата теорема, $d = a\sqrt{2}$, т.е. $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$, па од условите во задачата: $a = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, т.е. $L = 4a = 4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

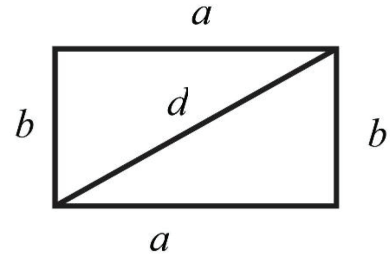
1 Колкава е плоштината на нива во форма на квадрат со:

а) страна 250 m; б) дијагонала 500 m.

2 За еден двор во форма на квадрат со страна 15 m треба да се огради со три реда жица. Колку метри жица е потребно?

1.2. Правоаголник

❖ **Правоаголник** е четириаголник чии четири агли се прави.



Слика 5. Правоаголник

Во правоаголникот спротивните страни се еднакви и паралелни.

Периметарот и плоштината на правоаголникот се пресметуваат со следните формули:

Ако страните на правоаголникот ги означиме со a и b, тогаш:

❖ **периметарот на правоаголникот** е:

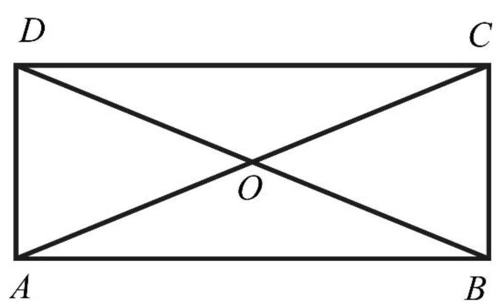
$$L = 2a + 2b .$$

❖ **Плоштината на правоаголникот** се пресметува со формулата:

$$P = a \cdot b .$$

Во правоаголникот $ABCD$ на цртежот се повлечени дијагоналите AC и BD.

Зошто $\overline{AC} = \overline{BD}$?



Ако го разгледаш цртежот, сигурно согледуваш дека триаголниците ΔABC и ΔBAD се складни бидејќи $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$, $\overline{BC} = \overline{AD}$. Од складноста на триаголниците ќе следува дека $\overline{AC} = \overline{BD}$, како соодветни страни на складни триаголници.

Со тоа е докажано дека:

Во секој правоаголник дијагоналите се еднакви меѓу себе.

Важи и обратното тврдење кое би можело да се земе и како признак за правоаголник.

За дијагоналата d и страните во правоаголникот важи следното равенство:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Пример 4 Пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголник со страни $a = 7cm$ и $b = 5cm$.

$$L = 2a + 2b = 2\cdot 7 + 2\cdot 5 = 24$$

$$P = a\cdot b = 7\cdot 5 = 35.$$

Пример 5 Пресметај ги периметарот и дијагоналата на правоаголник чија плоштина е $48cm^2$, а едната страна има должина 8cm.

$$P = 48,\quad a = 8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 6$$

$$L = 2a + 2b = 16 + 12 = 28$$

$$d^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow d = 10.$$

3 Сопственик на куќа за одмор во својот двор има базен во облик на правоаголник со димензии 50 m и 15 m. Околу базенот треба да направи патека со ширина од 200 cm. Колкава е плоштината на патеката? Колку метри треба да изоди сопственикот обиколувајќи го базенот при тоа движејќи се до самиот раб на базенот?

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај за колку ќе се промени периметарот, а за колку плоштината на квадратот, ако неговата страна:
   а) се зголеми три пати,
   б) се намали три пати.

2. Пресметај ги периметарот и плоштината на квадрат со дијагонала 18cm.

3. Пресметај го периметарот, како и должината на дијагоналата на квадрат чија плоштина е 81cm^2.

4. Разликата на дијагоналата и страната на квадратот е 3cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на квадратот.

5. Правоаголник со дијагонала 15cm и страна 9cm и квадрат имаат иста плоштина. Пресметај го периметарот на квадратот.

6. Едната страна на правоаголникот 9cm, а другата е за 3cm помала од дијагоналата. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

7. Страните на правоаголникот се однесуваат како 2:3. Ако помалата страна ја намалиме за 2cm, а поголемата ја зголемиме за 2cm, плоштината на правоаголникот ќе се намали за 18cm^2. Пресметај ги страните на правоаголникот.

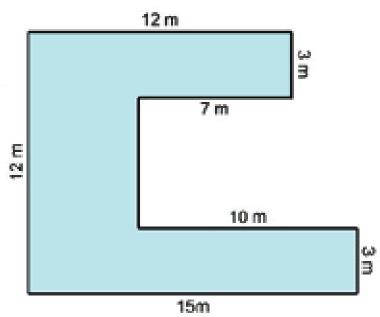
8. Две метални плочи во форма на правоаголник со должини 3cm и 1cm со иста дебелина се леат во нова метална плоча со истата дебелина во форма на квадрат. Колку е долга страната на квадратот?

9. Еден ученик требало од парче хартија во форма на квадрат со страна 5cm да исече еден правоаголник со страни 4cm и 1 cm. Колкава е плоштината на фигурата која треба да се фрли по отсекувањето на правоаголникот? Од какви четириаголници е составена таа фигура?

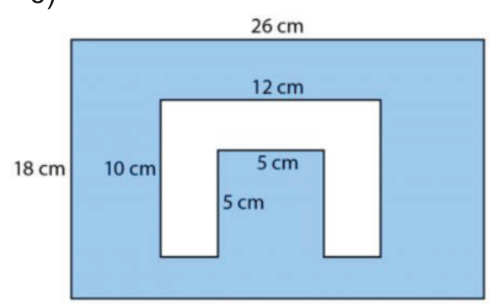
10. Двајца браќа требало да поделат една нива во форма на квадрат со страна 250 m на следниот начин: секоја страна на нивата требало да ја поделат во однос 2:3 и да ги поврзат делбените точки така што добиваат повторно квадрат. Нивата во форма на добиениот квадрат треба да ја добие едниот брат, а другиот останатите 4 дела што остануваат. Кој од двајцата браќа добива поголем дел?

11. Пресметај ја плоштината на фигурата:

а)

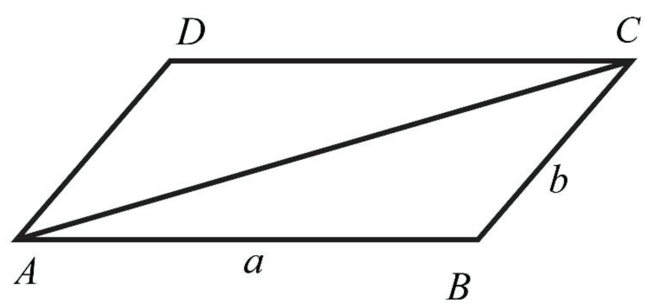


б)



2. Периметар и плоштина на паралелограм

Паралелограм е четириаголник со два пара паралелни страни.



Слика 6. Паралелограм

За паралелограмот постојат повеќе признаци, според кои може да се утврди дали даден четириаголник е паралелограм или не.

Ако во четириаголникот дијагоналите се преполовуваат со пресечната точка, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

Ако во еден четириаголник две спротивни страни се паралелни и еднакви, тогаш тој четириаголник е паралелограм.

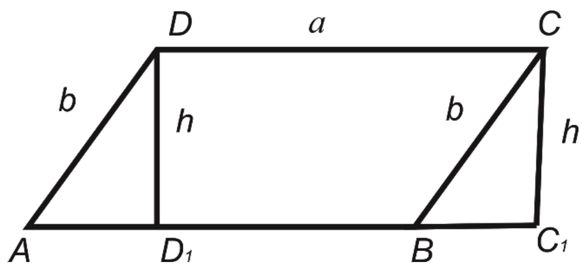
За пресметување на периметарот на паралелограм точна следната формула:

Ако страните на паралелограмот ги означиме со a и b, тогаш:

периметарот на паралелограмот го пресметуваме со формулата:

$$L = 2a + 2b.$$

Да ја изведеме формулата за пресметување на плоштина на паралелограм. Ќе го разгледаме паралелограмот $ABCD$ со страни a и b на слика 7. Нека DD_1 е висината спуштена од темето D кон страната AB, а CC_1 е висината спуштена од темето C кон истата страна. Двете висини имаат еднаква должина која ќе ја означиме со h_a



Слика 7.

Триаголниците ADD_1 и BCC_1 се складни (обидете се да покажете сами!), поради што плоштината на паралелограмот $ABCD$ и плоштината на правоаголникот D_1C_1CD се еднакви:

$$P_{ABCD} = P_{ADD_1} + P_{D_1BCD} = P_{D_1BCD} + P_{BC_1C} = P_{D_1C_1CD}$$

Бидејќи плоштината на правоаголникот D_1C_1CD е: $P = a \cdot h_a$, исто толкава ќе биде и плоштината на паралелограмот $ABCD$.

Значи, **плоштината на паралелограмот** ја пресметуваме со формулата:

$$P = a \cdot h_a.$$

На исти начин, доколку ги разгледаме страната b и висината спуштена кон страната b, ќе дојдеме до следната формула, аналогна на претходната:

$$P = b \cdot h_b.$$

Значи, треба да го запомниш следново:

!

Ако страните на паралелограмот ги означиме со a и b и ако висината спуштена кон страната a е означена со h_a, а висината спуштена кон страната b е означена со h_b тогаш:

плоштината на паралелограмот ја пресметуваме со формулата:

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b .$$

Пример 1 Пресметај ги периметарот и плоштината на паралелограм со страни 6cm и 9cm, ако висината спуштена кон страната a е 4cm. Колкава е должината на висината спуштена кон страната b?

Од условот на задачата имаме дека:

$$a = 6,\ b = 9,\ h = 4$$
$$L = 2a + 2b = 12 + 18 = 30$$
$$P = a \cdot h_a = 6 \cdot 4 = 24$$

Периметарот на паралелограмот е 30cm, а неговата плоштина е 24cm^2. За да ја пресметаме должината на висината спуштена кон страната b ќе го користиме равенството $P = b \cdot h_b$. Со замена на познатите величини во последното равенство, имаме:

$$24 = 9 \cdot h_b \text{, од каде } h_b = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} .$$

Должината на висината h_b е $\frac{8}{3}$ cm.

Пример 2 Пресметај ги висините и периметарот на паралелограмот со страна $a = 16$ cm, чија плоштина е 48cm^2, а едната страна е два пати поголема од другата.

$$P = a \cdot h \Rightarrow 48 = 16 \cdot h \ \Rightarrow \qquad h_a = 3 .$$

1) Ако дадената страна е помала, тогаш $b = 32$ и $h_b = 1,5$, па периметарот е:

$$L = 2a + 2b = 32 + 64 = 96 .$$

2) Ако дадената страна е поголема, тогаш $b = 8$ и $h_b = 6$, па периметарот е:

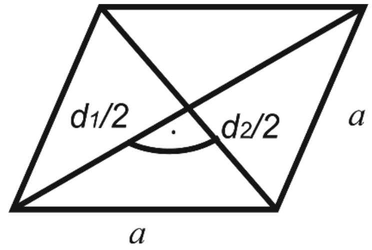
$$L = 2a + 2b = 32 + 16 = 48 .$$

1 Ариф имал ливада во форма на паралелограм со страна 250 m и висината што што одговара на оваа страна 100m. Пресметај ја плоштината на ливадата? Колку изнесува плоштината изразена во хектари?

!

Паралелограмот во кој сите четири страни се еднакви се вика **ромб**.

Да се потсетиме дека и квадратот е паралелограм со четири еднакви страни, во кој сите агли се прави. Така, квадратот можеме да го разгледуваме како ромб со четири прави агли.



Слика 8. Ромб

За ромбот важат следните признаци:

Ако еден паралелограм има заемно-нормални дијагонали, тогаш тој е ромб.

2 Обиди се да го докажеш следниот признак за ромб:

Дијагоналата на ромбот е симетрала на соодветните спротивни агли.

За пресметување на периметарот и плоштината на ромбот точни се следните формули:

- Ако страната на ромбот ја означиме со a, **периметарот на ромбот** ќе го пресметаме со формулата:

$$L = 4a\,.$$

- **Плоштината на ромбот** можеме да ја пресметаме на исти начин како и плоштината на паралелограм: ако a е страната на ромбот, а h_a е висината на ромбот, неговата плоштина е:

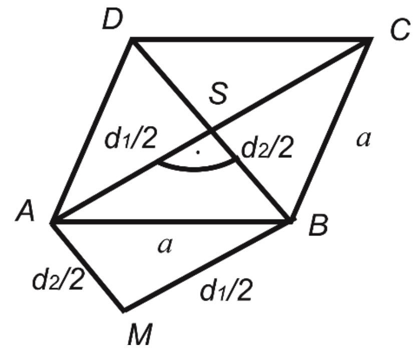
$$P = a \cdot h_a\,.$$

- Кај ромбот е карактеристично тоа што неговите дијагонали се взаемно нормални. Да ги означиме дијагоналите со d_1 и d_2.

- Плоштината на ромбот може да се пресмета и со следната формула:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Да ја докажеме последната формула. Ќе го разгледаме ромбот на слика 9.



Слика 9.

Плоштината на ромбот $ABCD$ е збир од плоштините на четирите правоаголни триаголници на кои е поделен ромбот со неговите дијагонали. Ќе го конструираме четириаголникот $AMBS$ така да $MB \parallel AS$ и $AM \parallel SB$. Овој четириаголник ќе биде паралелограм со прави агли кај темето S и темето M, што значи и останатите два агли ќе бидат прави, т.е. четириаголникот $AMBS$ е правоаголник. Неговата плоштина е $P_1 = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4}$. Триаголниците ΔABM и ΔDCS се складни, па ќе имаат еднакви плоштини.

На исти начин можеме да конструираме правоаголник со страни SC и SB чија плоштина ќе биде $P_2 = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4}$.

Збирот од плоштините на двата правоаголника, $P_1 + P_2$, ќе биде еднаков на плоштината на ромбот. Така за плоштината на ромбот добиваме:

$$P = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{4} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Забелешка*:* По изучување на формулите за плоштина на триаголник, последната формула за плоштина на ромб ќе можете да ја докажете и на други начини.

Пример 3 Плоштината на ромбот е 60cm^2, а неговата висина е 5cm. Пресметај го периметарот на ромбот.

Од формулата $P = a \cdot h_a$ ја пресметуваме страната на ромбот:

$$60 = a \cdot 5 \Rightarrow a = 12$$

$$L = 4a = 4 \cdot 12 = 48.$$

Периметарот на ромбот е 48cm.

Пример 4 Страната на ромбот е 12cm, а неговата висина е 6cm. Пресметај ги дијагоналите во ромбот ако едната дијагонала е два пати поголема од другата.

Плоштината на ромбот е $P = a \cdot h_a = 12 \cdot 6 = 72$. Од друга страна, $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, т.е.

$$72 = \frac{d_1 \cdot 2d_1}{2} \Rightarrow d_1^2 = 72 \Rightarrow d_1 = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow d_2 = 3\sqrt{2}.$$

❖ Ако аглите во паралелограмот не се прави агли, и соседните страни се со различна должина, тој паралелограм го викаме **ромбоид**.

!

Правоаголникот, квадратот, ромбот и ромбоидот се паралелограми.

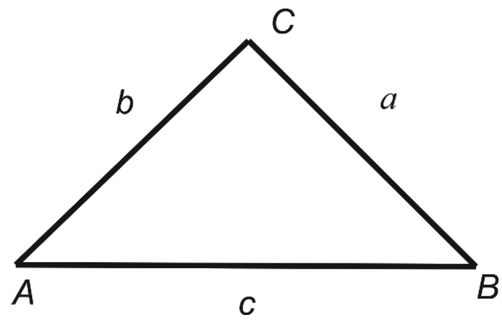
3 Една нива има форма на ромб со страна 300 m и остар агол од 45^0. Пресметај ја плоштината на нивата.

Задачи за самостојна работа:

1. Должините на страните на паралелограмот се 4cm и 6cm, а неговата плоштина е 4,8cm^2. Пресметај ги должините на висините во паралелограмот.
2. Плоштината на еден паралелограм е 72 cm^2. Определи го растојанието помеѓу двете негови страни со должина 6cm.
3. Страните на паралелограмот се 17cm и 28cm, а плоштината на паралелограмот е 420cm^2. Пресметај ги дијагоналите на паралелограмот и неговиот периметар.
4. Пресметај ги периметарот и плоштината на паралелограм со страна $b = 58cm$ и дијагонали $d_1 = 89cm$ и $d_2 = 52cm$.
5. Пресметај ја плоштината на ромбот ако неговиот периметар е 36cm, а должината на страната е два пати поголема од висината на ромбот.
6. Периметарот на ромбот е 52cm. Пресметај ја плоштината на ромбот ако едната негова дијагонала е 10cm.
7. Мендух имал двор во форма на паралелограм со страни 10 m и 15 m, а висината што што одговара на неговата поголема страна е 5 m. Пресметај колку е долг патот кој го сече дворот по неговата подолга дијагонала? Колку изнесува плоштината на дворот на Мендух?
8. Симона има сложувалка со 20 еднакви парчиња во форма на ромбови со страна 5 cm и една дијагонала 8 cm. Пресметај ја плоштината на наредената сложувалка на Симона!
9. За нива во форма на ромб која е обиколена со три реда на жица во должина од 6 000 m и една дијагонала 800 m. Пресметај ја плоштината на нивата! Изрази ја плоштината во ари!
10. Ливада во форма на паралелограм со една страна 500m има периметар 1400 m. Висината спуштена кон поголемата страна на ливадата е 100m. Пресметај ја плоштината на нивата! Изрази ја плоштината во декари!

3. Периметар и плоштина на триаголник

❖ **Триаголникот** е многуаголник со три страни. Ако темињата на триаголникот се означени со A, B, C, најчесто страната наспроти темето A ја означуваме со a, страната наспроти темето B ја означуваме со b, страната наспроти темето C ја означуваме со c.



Слика 10. Триаголник

3.1. Разностран триаголник

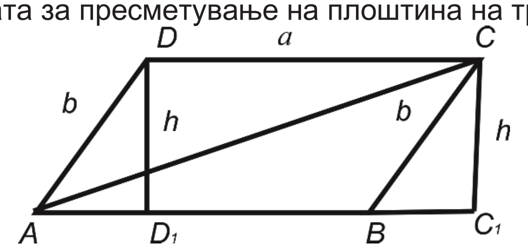
❖ Доколку сите страни во триаголникот имаат различна должина, триаголникот го викаме **разностран триаголник**.

Запомни:

❖ Периметарот на триаголникот со страни a,b,c е:

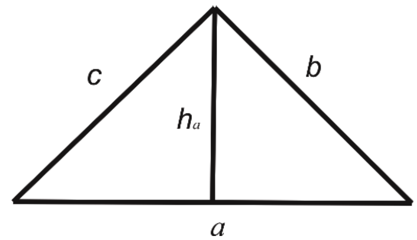
$$L = a + b + c.$$

Да ја изведеме формулата за пресметување на плоштина на триаголник.



Слика 11.

Ќе го разгледаме паралелограмот $ABCD$ на слика 11. Неговата плоштина е $P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$. Со дијагоналата AC паралелограмот е поделен на два складни триаголника: ΔABC и ΔCDA, па плоштината на секој од нив ќе биде половина од плоштината на паралелограмот, т.е. $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$.



Слика 12. Триаголник со спуштена една висина

!

- Ако висините во триаголникот спуштени кон страните a,b,c ги означиме соодветно со h_a, h_b, h_c, плоштината на триаголникот ќе ја пресметаме со една од следните формули:

$$P=\frac{a\cdot h_a}{2} \qquad P=\frac{b\cdot h_b}{2} \qquad P=\frac{c\cdot h_c}{2}$$

- Доколку ја знаеме должината на секоја од страните на триаголникот, плоштината на триаголникот можеме да ја пресметаме и со следната формула:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

каде s е полупериметарот на триаголникот, т.е. $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Оваа формула е позната како **Херонова формула за плоштина на триаголник.**

Пример 1 Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголник со страни 26cm, 28cm и 30cm.

Периметарот на триаголникот е: $L=a+b+c=26+28+30=84$ cm.

Бидејќи ни се познати трите страни во триаголникот, плоштината можеме да ја пресметаме со Хероновата формула:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{84}{2}=42$$

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{42\cdot(42-26)(42-28)(42-30)}$$

$$P=\sqrt{42\cdot 16\cdot 14\cdot 12}=336\text{ cm}^2.$$

Пример 2 Плоштината на триаголникот е 72cm^2, а висините во триаголникот се со должина 8cm, 6cm и 9cm. Пресметај го периметарот на триаголникот.

$P=72 \qquad h_a=8 \qquad h_b=6 \qquad h_c=9$

Од формулата за плоштина на триаголник $P=\dfrac{a\cdot h_a}{2}$ имаме: $72=\dfrac{a\cdot 8}{2}\Rightarrow a=18$ cm.

Аналогно, $P=\dfrac{b\cdot h_b}{2}\Rightarrow 72=\dfrac{b\cdot 6}{2}\Rightarrow b=24$ cm.

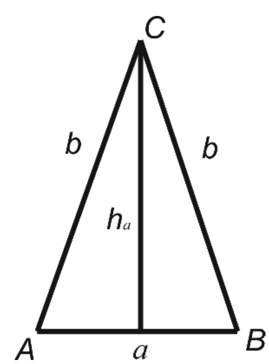
$$P=\frac{c\cdot h_c}{2}\Rightarrow 72=\frac{c\cdot 9}{2}\Rightarrow c=16 \text{ cm}.$$

Периметарот на триаголникот е $L=a+b+c=18+24+16=58$ cm.

1 Ливада во форма на разностран триаголник со страни 180 m, 240 m и 160 m. Пресметај ја плоштината на ливадата! Колку метри пат треба да поминеш за да ја обиколиш ливадата?

3.2. Рамнокрак триаголник

❖ Триаголникот во кој две страни имаат еднаква должина го викаме **рамнокрак триаголник**. Страните со иста должина ги викаме **краци** во триаголникот, а третата страна се вика **основа** во рамнокракиот триаголник.



Слика 13. Рамнокрак триаголник

!

❖ Основата во рамнокрак триаголник најчесто ја означуваме со a, а краците со b. Периметарот на рамнокракиот триаголник е:

$$L=a+2b.$$

❖ За пресметување на плоштината на рамнокрак триаголник ги користиме формулите кои се користат за пресметување на плоштина на разностран триаголник, т.е.

$$P=\frac{a\cdot h_a}{2} \qquad P=\frac{b\cdot h_b}{2}$$

како и Хероновата формула.

Пример 3 Пресметај ги периметарот и плоштината на рамнокрак триаголник со основа 8cm и крак 12cm. Определете ја должината на секоја од висините во триаголникот.

Периметарот на триаголникот е: $L = a + 2b = 8 + 2 \cdot 12 = 32$ cm.

Бидејќи ги знаеме должините на трите страни во триаголникот, а не ни е позната ниту една од висините, плоштината на триаголникот ќе ја пресметаме со Хероновата формула.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 16$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{16 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4}$$

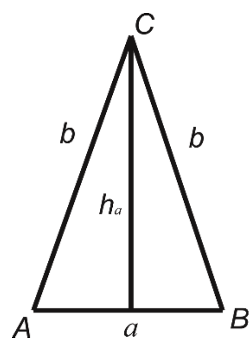
$$P = 32\sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

Од друга страна,

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \Rightarrow 32\sqrt{2} = \frac{8 \cdot h_a}{2} \Rightarrow h_a = 8\sqrt{2}\ \text{cm.}$$

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow 32\sqrt{2} = \frac{12 \cdot h_b}{2} \Rightarrow h_b = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{cm.}$$

Пример 4 Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник со основа 6cm и висина спуштена кон основата 4cm.



Слика 14.

Дадено ни е: $a = 6$ $h_a = 4$

За да го пресметаме периметарот на триаголникот, потребно е да ја определиме должината на кракот. Ако го разгледаме правоаголниот триаголник со катети h_a и едната половина од основата, а хипотенуза b, согласно Питагоровата теорема, важи:

$$b^2 = (h_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

па со замена на дадените вредности имаме: $b^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow b = 5$.

Периметарот на триаголникот ќе биде $L = a + 2b = 6 + 2 \cdot 5 = 16$ cm.

2 Никола треба да пресмета плоштина на горниот дел на плоча во форма на рамнокрак триаголник со основа 12 cm и агол при основата 30^0. Колку добил Никола?

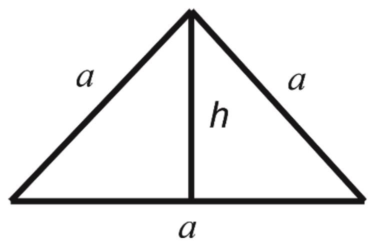
3.3. Рамностран триаголник

❖ Триаголникот во кој сите страни се еднакви го викаме **рамностран триаголник**.

За периметарот важи следново:

❖ Ако страната во рамностран триаголник ја означиме со a, неговиот периметар е:

$$L = 3a\,.$$



Слика 15. Рамностран триаголник

Висините спуштени кон секоја од страните во рамностран триаголник се еднакви и ќе ги означуваме со h. Плоштината на рамностран триаголник можеме да ја пресметаме применувајќи ја формулата

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Да ја пресметаме должината на висината во рамностраниот триаголник. Ја применуваме Питагоровата теорема:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

Да ја изведеме сега формулата за плоштина на рамностран триаголник за кој ја знаеме само должината на страната:

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,.$$

Оттука, за пресметување плоштина на рамностран триаголник, ќе користиме:

!

❖ Ако страната во рамностран триаголник ја означиме со a, неговата плоштина се пресметува според формулата:

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 5 Пресметајте ги периметарот и плоштината на рамностран триаголник со страна 8cm.

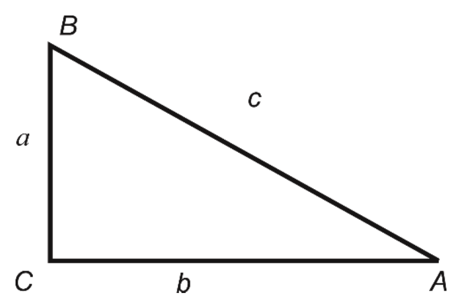
Решение: $a=8\,\text{cm}$ $L=3\cdot 8=24\,\text{cm}$

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{64\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

3 Петре и Линдита треба да пресметаат плоштина на два различни триаголници. Петре го добил рамностраниот триаголник со страна 5 cm, а Линдита рамнокрак триаголник со основа 6 cm и висина кон основата 5 cm. Кој триаголник има поголема плоштина, на Петре или на Линдита?

3.4. Правоаголен триаголник

❖ Триаголникот кој има прав агол го викаме **правоаголен триаголник**.



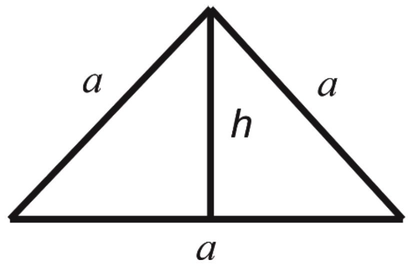
Слика 16. Правоаголен триаголник

Да забележиме дека во правоаголен триаголник со прав агол кај темето C висината спуштена кон страната b се совпаѓа со страната a и обратно, висината спуштена кон страната a се совпаѓа со страната b. Според тоа, плоштината на правоаголен триаголник е:

$$P=\frac{a\cdot b}{2}.$$

За правоаголен триаголник важат двете познати теореми: **Евклидова теорема** и **Питагорова теорема** (која ја имате изучено во основно училиште, а ние ја применивме неколку пати). Во продолжение овие теореми ќе ги дадеме со доказ.

Евклидова теорема: Ако p и q се проекциите на катетите a и b врз хипотенузата c во правоаголен триаголник, а h е висината спуштена кон хипотенузата, тогаш важи равенството: $h^2=pq$ (слика 17).



Слика 17.

Евклидовата теорема е изведена како резултат на сличноста на двата правоаголни триаголника кои се добиваат со повлекување на висината кон хипотенузата c во разгледуваниот правоаголен триаголник.

Доказ*:* Имено, ако $CC_1 = h$ е висината спуштена кон хипотенузата во правоаголниот триаголник ABC, тогаш триаголниците ΔCC_1A и ΔBC_1C се правоаголни. Покрај тоа, аголот кај темето B и аголот кај темето A се комплементни, исто како и аголот кај темето B и $\measuredangle BCC_1$, од каде заклучуваме дека $\measuredangle BCC_1$ и аголот кај темето A се еднакви. На исти начин се покажува дека $\measuredangle ACC_1$ и аголот кај темето B се еднакви, што значи ΔCC_1A и ΔBC_1C имаат соодветни агли еднакви, па тие се слични триаголници. Нивните соодветни страни се пропорционални, т.е. важи равенството:

$$h : p = q : h$$

од кое добиваме:

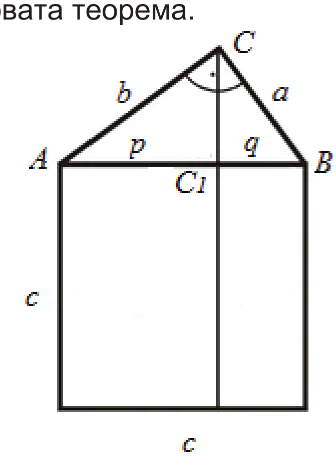
$$h^2 = pq$$

со што ја покажавме Евклидовата теорема.

Питагорова теорема: Ако a и b се катети, а c е хипотенуза во правоаголен триаголник, тогаш важи равенството*:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Да ја докажеме Питагоровата теорема.



Слика 18.

Доказ*:* Ќе го разгледаме правоаголниот триаголник ΔABC на слика 18. Нека p и q се проекции на катетите врз хипотенузата. ΔAC_1C и ΔACB се слични (соодветните агли им се еднакви), што значи имаат пропорционални страни, т.е. важи равенството:

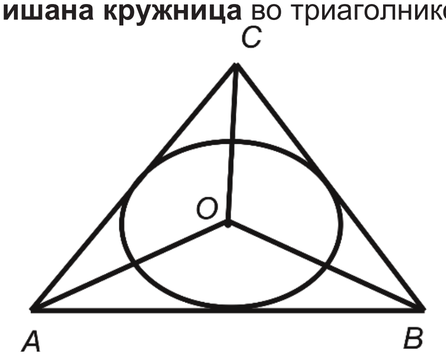
$p:b=b:c$ од каде $p=\frac{b^2}{c}$. Од сличноста на триаголниците ΔBC_1C и ΔBCA следува $q:a=a:c$, т.е. $q=\frac{a^2}{c}$.

Над хипотенузата c конструираме квадрат. Ако ја продолжиме висината спуштена кон хипотенузата во ΔABC, квадратот ќе го поделиме на два правоаголника чии плоштини се соодветно $pc=\frac{b^2}{c}\cdot c=b^2$ и $qc=\frac{a^2}{c}\cdot c=a^2$. Плоштината на квадратот, c^2, е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците на кои квадратот е поделен (слика 18), т.е. $c^2=a^2+b^2$ со што ја докажавме теоремата.

4 Периметарот на правоаголен рамнокрак триаголник со хипотенуза 4 cm е $4(1+\sqrt{2})$ cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот!

3.5. Вписана кружница во триаголник и опишана кружница околу триаголник

Симетралите на аглите во даден триаголник се сечат во една точка. Таа точка е центар на кружница која секоја од страните на триаголникот ја допира (од внатрешната страна) и истата се вика **впишана кружница** во триаголникот.



Слика 19. Впишана кружница во триаголник

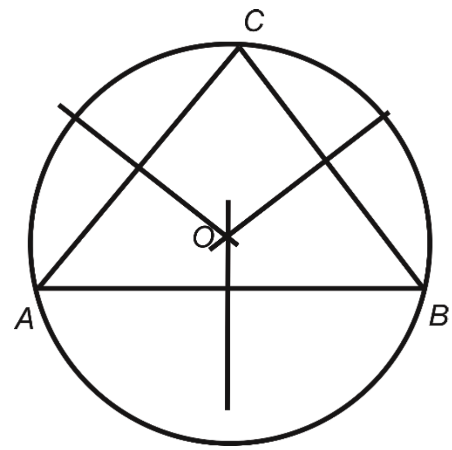
!

- Ако r е радиусот на впишаната кружница во еден триаголник, а s е полупериметарот на триаголникот, т.е. $s=\frac{a+b+c}{2}$. Плоштината на триаголникот е:

$$P=r\cdot s.$$

- Во рамностран триаголник со страна a, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Симетралите пак на страните во произволен триаголник исто така се сечат во една точка која претставува центар на кружницата **опишана** околу триаголникот, т.е. кружница која минува низ темињата на триаголникот.



Слика 20. Опишана кружница околу триаголник

!

- Ако со R го означиме радиусот на опишаната кружница, а a,b,c се страните во триаголникот, за плоштината на триаголникот важи:
$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}.$$
- Во рамностран триаголник со страна a, $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Пример 6 Пресметај ја плоштината на триаголник со страни 6cm, 9cm и 10cm, ако радиусот на кружницата впишана во триаголникот е 4cm.

$$s=\frac{6+9+10}{2}=\frac{25}{2} \qquad r=4$$

$$P=r\cdot s=4\cdot\frac{25}{2}=50\text{ cm}^2.$$

Пример 7 Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу правоаголен триаголник со катети 3cm и 4cm.

Плоштината на правоаголниот триаголник е: $P=\dfrac{a\cdot b}{2}=\dfrac{12}{2}=6\text{ cm}^2$.

Хипотенузата ќе ја пресметаме со Питагоровата теорема:

$$c^2=3^2+4^2=25\Rightarrow c=5\text{ cm}$$

$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}\Rightarrow 6=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4R}\Rightarrow R=\frac{15}{6}=2{,}5\text{ cm}$$

Да забележиме дека радиусот на опишаната кружница во правоаголниот триаголник е два пати помал од хипотенузата, т.е. дијаметарот на кружницата опишана околу правоаголен триаголник е еднаков на хипотенузата. Тоа е тврдење кое важи во секој правоаголен триаголник и е познато како Талесова теорема за правоаголен триаголник.

Талесова теорема за правоаголен триаголник: ако A, B, C се три точки од кружница во која AB е дијаметар, тогаш аголот $\measuredangle ACB$ е прав агол.

Последната теорема е специјален случај од Талесовата теорема според која секој периферен агол во кружница е два пати помал од централниот агол над истиот кружен лак.

5 За триаголник со страни 21 cm, 17 cm и 10 cm да се најде радиус на опишана и впишана кружница.

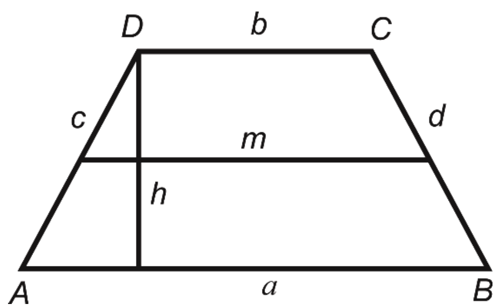
Задачи за самостојна работа*:*

1. Скицирај рамнокрак триаголник и означете ги страните. Пресметајте ги плоштината и периметарот на рамнокрак триаголник со основа 6 см и крак 5 см.
2. Пресметај ги периметарот и плоштината на рамностран триаголник со висина 9cm.
3. Пресметај го периметарот на триаголник во кој двете страни имаат должини 7cm и 9cm, а плоштината на триаголникот е $12\sqrt{5}$ cm^2.
4. Скицирај правоаголен триаголник и означете ги страните. Пресметајте ги плоштината и периметарот на правоаголен триаголник со катети 3 см и 4 см.
5. Кракот во рамнокрак триаголник е 17cm, а висината спуштена кон основата е 15cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот.
6. Страните во еден триаголник се 24cm, 25cm и 7cm. Пресметај ги радиусот на впишаната кружница во триаголникот и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.
7. Пресметај го радиусот на впишаната и радиусот на опишаната кружница во рамностран триаголник со страна 10cm.
8. Основата на еден рамнокрак триаголник е 12cm, а кракот е 10cm. Пресметај ги радиусот на впишаната и опишаната кружница во триаголникот.
9. Пресметај ја хипотенузата во правоаголен триаголник со плоштина 270cm^2, ако катетите се однесуваат како 5:3.
10. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголен триаголник кој преставува слика поставена на ѕид, а во кој проекциите на катетите врз хипотенузата се 16cm и 9cm.
11. Славко има слика на ѕид во облик на рамнокрак триаголник. Периметарот на триаголникот е 78 cm, а разликата на страната на сликата која игра улога на крак и страната со улога на основа е 6 cm. Да се пресмета колкава е плоштината на сликата на Славко!
12. Клара од лист хартија исекла триаголник со страни кои се однесуваат 2:3:4, потоа во триаголникот впишала кружница со радиус $0,5\sqrt{15}$ cm. Пресметај ги страните на триаголникот на Клара!

4. Периметар и плоштина на трапез и трапезоид

4.1. Трапез

❖ **Трапез** е четириаголник кој има само еден пар паралелни страни. Паралелните страни ги викаме **основи** на трапезот, а останатите две страни ги викаме **краци**.



Слика 21.Трапез

❖ Ако основите на трапезот ги означиме со a и b, а краците со c и d, трапезот ќе има периметар

$$L = a + b + c + d\,.$$

❖ Трапезот во кој двата крака се еднакви се вика **рамнокрак трапез**. Ако краците во рамнокрак трапез ги означиме со c, трапезот ќе има периметар

$$L = a + b + 2c\,.$$

❖ Плоштината на трапезот се пресметува со формулата:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h\,,$$

каде h е висината спуштена кон било која од основите на трапезот, т.е. растојанието меѓу двете основи.

Важно е да го знаеш следново својство за средната линија на трапезот:

❖ Отсечката која ги поврзува средините на краците во трапезот се вика **средна линија** во трапезот. Средната линија во трапезот најчесто се означува со m и за неа важи равенството: $m = \frac{a+b}{2}$. Со замена на ова равенство во формулата за плоштина на трапез, за плоштината добиваме:

$$P = m \cdot h\,.$$

Да ги разгледаме следните решени примери:

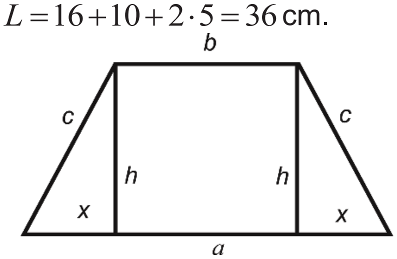
Пример 1 Пресметај ја плоштината на трапез со основи 12cm и 8cm и висина 7cm.

$a = 12\text{cm}$ $b = 8\text{cm}$ $h = 7\text{cm}$

$$P = \frac{12+8}{2} \cdot 7 = 70\,\text{cm}^2.$$

Пример 2 Пресметај ги периметарот и плоштината на рамнокрак трапез со основи 16cm и 10cm и крак 5cm.

Периметарот на трапезот е: $L = 16 + 10 + 2 \cdot 5 = 36\,\text{cm}$.



Слика 22. Рамнокрак трапез

За да ја пресметаме плоштината на трапезот потребно е да ја определиме висината во трапезот. Од правоаголниот триаголник со катети h и x и хипотенуза c, според Питагоровата теорема важи: $h^2 = c^2 - x^2$, каде $x = \frac{a-b}{2}$.

$x = \frac{16-10}{2} = 3\text{cm}$ $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow h = 4\text{cm}$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{16+10}{2} \cdot 4 = 52\,\text{cm}^2.$$

За рамнокракиот трапез точни се следните теореми, кои опишуваат својства на рамнокракиот трапез и многу често се користат при решавање на конкретни проблемски задачи:

Теорема: Аглите што лежат на ист крак на рамнокракиот трапез се суплементни.

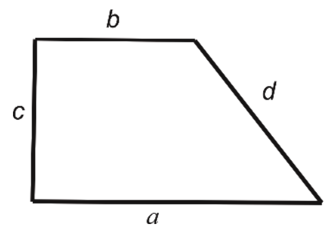
1 Докажи ја претходната теорема.

За рамнокракиот трапез точни се и следните две својства:

Теорема: Аглите што лежат на иста основа на рамнокракиот трапез се еднакви меѓу себе.

Теорема: Дијагоналите на рамнокракиот трапез се еднакви меѓу себе.

❖ Трапезот кој има еден прав агол се вика **правоаголен трапез**. Во правоаголен трапез висината се совпаѓа со едниот крак во трапезот.



Слика 23. Правоаголен трапез

Пример 3 Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголен трапез со основи 12cm и 19cm и краци 7cm и 9cm.

$$L = 12 + 19 + 7 + 9 = 47 \text{ cm}.$$

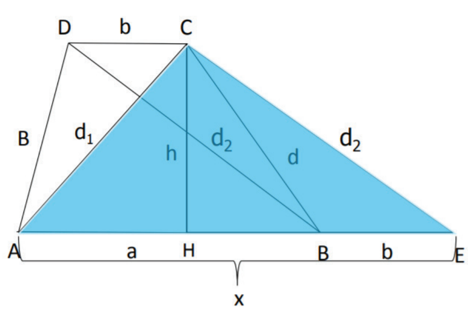
Висината во правоаголниот трапез е еднаква на помалиот крак. Според тоа, $h = 7\text{cm}$.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+19}{2} \cdot 7 = \frac{31}{2} \cdot 7 = \frac{217}{2} \text{ cm}^2.$$

2 Правоаголен трапез има непаралелни страни со должина 17 cm и 8 cm, а периметар 94 cm. Пресметај ја неговата плоштина!

Да ги разгледаме и следните примери:

Пример 4 Пресметај ја плоштината на трапез со дијагонали 13cm и 15cm, ако неговата висина е 12cm.



Дадено е дека $d_1 = 13\text{cm}$, $d_2 = 15\text{cm}$, $h = 12\text{cm}$.

Повлекуваме отсечка CE која е паралелна и еднаква на дијагоналата d_2. Така го добиваме триаголникот AEC. Страната $x = a + b$.

Со користење на Питагоровата теорема ги добиваме должините на AH и HE од правоаголните триаголници ΔAHC и ΔEHC.

$$\overline{AH} = \sqrt{d_1^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5\text{cm}.$$

$$\overline{EH} = \sqrt{d_2^2 - h^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9\text{cm}.$$

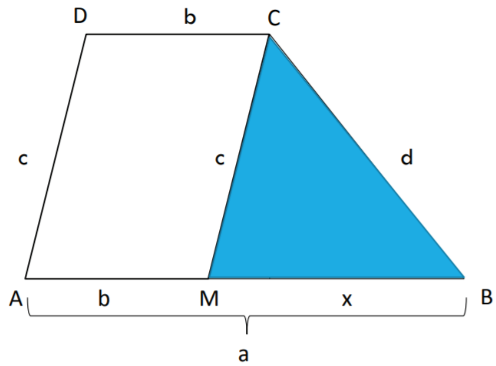
$$x = \overline{AH} + \overline{HE} = 5 + 9 = 14\text{cm}.$$

Од друга страна $x = a + b = 14\text{cm}$.

Оттука плоштината на трапезот ќе биде еднаква на:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = 7 \cdot 12 = 84\text{cm}^2.$$

Пример 5 Пресметај ја плоштината на трапез со основи 30cm и 19cm и краци 13cm и 20cm.



Дадени се основите $a=30\text{cm}, b=19\text{cm}$ и краците $c=13\text{cm}, d=20\text{cm}$.

Повлекуваме отсечка CM паралелна и еднаква на страната c. Така, добива,е триаголник ΔMBC. Страната $x=a-b=30-19=11\text{cm}$.

Знаејќи ги сите должини на страните на триаголникот ΔMBC, со помош на Хероновата формула, можеме да ја пресметаме неговата плоштина.

За полузбирот на неговите страни имаме:

$$S=\frac{c+d+x}{2}=\frac{13+20+11}{2}=22.$$

$$P=\sqrt{s(s-c)(s-d)(s-x)}=\sqrt{22\cdot 9\cdot 2\cdot 11}$$

$$P=\sqrt{4356}=66\text{cm}^2.$$

Знаеме дека плоштината на ΔMBC можеме да ја пресметаме како $P=\frac{x\cdot h}{2}$, каде h е висината на ΔMBC, а истовремено е и висина на трапезот.

Според тоа, $h=\frac{2P}{x}=\frac{132}{11}=12\text{cm}.$

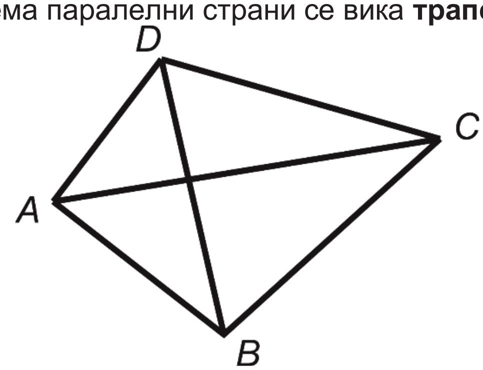
Оттука, за плоштината на трапезот ќе имаме:

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{30+19}{2}\cdot 12=294\text{cm}^2.$$

3 Пресметај ја плоштината на трапез со основи 19cm и 2cm и дијагонали 17cm и 10cm.

4.2. Трапезоид

❖ Четириаголникот кој нема паралелни страни се вика **трапезоид**.



Слика 24. Трапезоид

Плоштината на трапезоидот можеме да ја пресметаме како збир на плоштини на триаголници на кои што ќе го поделиме трапезоидот (зависно од тоа кои елементи ни се дадени). На пример, со една од дијагоналите трапезоидот го делиме на два триаголника. Со двете дијагонали трапезоидот е поделен на четири триаголника.

Пример 6 Пресметај ја плоштината на трапезоидот со дијагонала $\overline{BD}=12$ cm, ако темињата A и C се оддалечени од дијагоналата 7cm и 6cm соодветно.

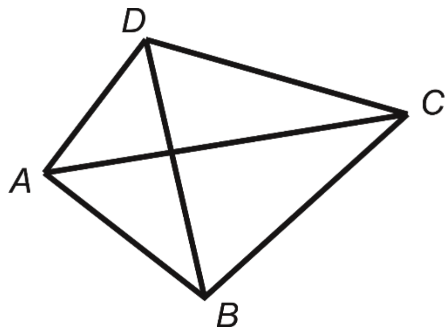
Плоштината на трапезоидот ќе биде збир од плоштините на триаголниците ΔABD и ΔBCD за кои дијагоналата $\overline{BD}$ е заедничка страна. Растојанието од темето A до дијагоналата $\overline{BD}$ е всушност висината кон страната $\overline{BD}$ во триаголникот ΔABD. Аналогно, растојанието од точката C до $\overline{BD}$ е висина во триаголникот ΔBCD. (Направете скица!)

Плоштината на трапезоидот е:

$$P=P_{\Delta ABD}+P_{\Delta BCD}=\frac{12\cdot 7}{2}+\frac{12\cdot 6}{2}=42+36=78\ \text{cm}^2.$$

4.3. Делтоид

❖ Четириаголникот кој има два пара соседни страни со иста должина се вика **делтоид.** Кај делтоидот дијагоналите му се взаемно нормални. Подолгата дијагонала е симетрала на пократката дијагонала во делтоидот.



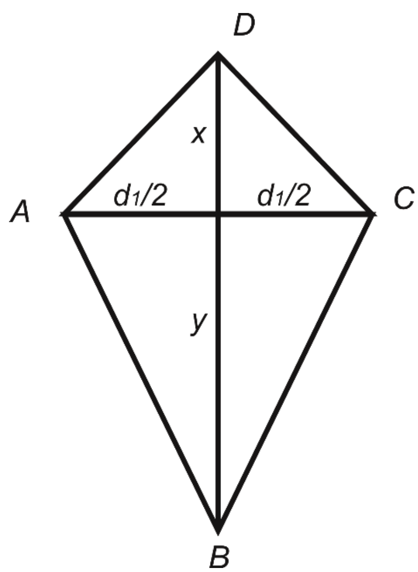
Слика 25. Делтоид

!

❖ Плоштината на делтоидот со дијагонали d_1 и d_2 се пресметува со формулата:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Оваа формула едноставно се докажува. Да го разгледаме делтоидот на слика 26. Плоштината P на делтоидот е збир од плоштините на триаголниците ΔACD и ΔABC. Дијагоналата d_1 е заедничка страна на двата триаголника. Со пресечната точка на двете дијагонали, поголемата дијагонала е поделена на два дела, чии должини се означени со x и y.



Слика 26.

Бидејќи дијагоналите во делтоидот се взаемно нормални, отсечките со должина x и y ќе бидат висини спуштени кон страната $\overline{AC}$ во триаголниците ΔACD и ΔABC соодветно. За плоштината на секој од триаголниците ќе имаме:

$$P_{\Delta ACD} = \frac{d_1 \cdot x}{2} \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{d_1 \cdot y}{2}$$

Од каде за плоштината на делтоидот имаме:

$$P = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta ABC} = \frac{d_1 \cdot x}{2} + \frac{d_1 \cdot y}{2} = \frac{d_1(x+y)}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Да се потсетиме дека дијагоналите и кај ромбот се взаемно нормални и последната формула ја користевме исто така за пресметување на плоштина на ромб.

Пример 7 Пресметај ги периметарот и плоштината на делтоид со страни 8cm и 5cm и дијагонали 6cm и 9cm.

Периметарот на делтоидот е: $L = 2a + 2b = 16 + 10 = 26$ cm.

Плоштината на делтоидот е: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ cm^2.

2 Страните на делтоидот се $2\sqrt{13}$ cm и $2\sqrt{5}$ cm, а дијагоналата која не е оска на симетрија на делтоидот е 8 cm. Да се пресмета плоштината на делтоидот.

Задачи за самостојна работа:

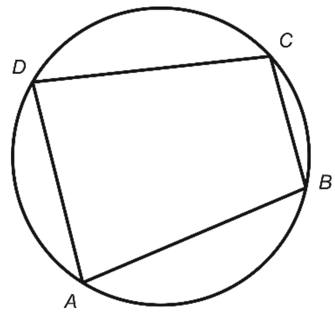
1. Трапез со основа 34cm и висина 15cm има плоштина 360cm^2. Пресметај ја другата основа во трапезот. Колкава е должината на средната линија во трапезот?
2. Пресметај ги основите во трапез кои се разликуваат за 7cm, ако плоштината на трапезот е 75cm^2, а висината е 6cm.
3. Правоаголен трапез има краци 17cm и 8cm, а неговиот периметар е 94cm. Пресметај ја плоштината на трапезот.
4. Пресметај ги периметарот и плоштината на трапез со основи 24cm и 10cm и краци 15cm и 13cm.
5. Никола имал двор во облик на рамнокрак трапез со плоштина од 330 m^2 и основи 30 m и 14 m. Колку метри треба да изоди Никола за го обиколи дворот?
6. Пресметај ја плоштината на трапезоид со страни $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 13$ cm, $\overline{CD} = 9$ cm, $\overline{AD} = 10$ cm и дијагонала $\overline{AC} = 15$ cm.
7. Пресметај ги периметарот и плоштината на делтоид со страни 5cm и 11cm, во кој пократката дијагонала е 6cm.
8. Симе сакал да си направи летало од жица во форма на делтоид со плоштина 840cm^2, со помала дијагонала 30cm и со помала страна 25cm. За таа цел треба да ја набави жицата за страните на делтоидот. Колку треба да биде долга жицата?
9. Линдита требало да ја пресмета плоштината на горниот дел на плоча во форма на делтоид со страни 8 cm и 6 cm, а агол помеѓу нееднаквите страни 150^0. Колку е плоштината?

5. Тетивен и тангентен четириаголник

Тетивен и тангентен четириаголник беше дефиниран во претходната модуларна единица. Но, да се потсетиме на нивните дефиниции и да ги надградиме со нивни својства.

!

- Четириаголникот чии страни се тетиви на една кружница се вика **тетивен четириаголник**.
- Во тетивен четириаголник спротивните агли се суплементни.

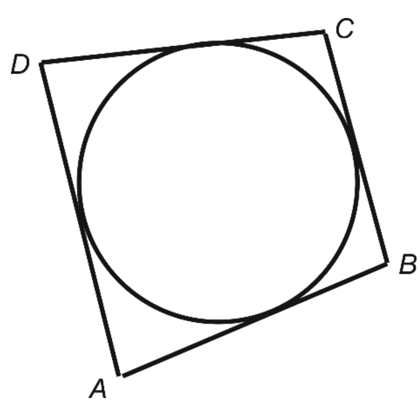


Слика 27. Тетивен четириаголник

$$\measuredangle A+\measuredangle C=180^0=\measuredangle B+\measuredangle D$$

!

- Четириаголникот чии страни се тангенти на една кружница се вика **тангентен четириаголник**.
- Во тангентен четириаголник, збировите од должините на спротивните страни се еднакви.



Слика 28. Тангентен четириаголник

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$$

Да забележиме дека кога разгледуваме **тетивен четириаголник**, кружницата чии тетиви се страните на четириаголникот е всушност **опишана кружница** околу четириаголникот.

Кога разгледуваме **тангентен четириаголник**, кружницата чии тангенти се страните на четириаголникот е **впишана кружница** во четириаголникот.

Пример 1 Пресметај го периметарот на тангентниот четириаголник $ABCD$ со страна $\overline{AB}=17cm$ и $\overline{CD}=26cm$.

$$L=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$$
$$\overline{AB}+\overline{CD}=17+26=43cm$$

Четириаголникот е тангентен, што значи: $\overline{BC}+\overline{AD}=43cm$, па периметарот е $L=86cm.$

Пример 2 Утврди кој од видовите четириаголници кои ги изучивме претходно: паралелограм (квадрат, правоаголник, ромб, ромбоид), трапез и делтоид може да биде тангентен, односно тетивен четириаголник.

Квадратот е четириаголник во кој спротивните агли се суплементни, а исто така збировите на должините на спротивните страни се еднакви. Квадратот може да биде и **тангентен и тетивен** четириаголник, т.е. во квадратот може да се впише кружница и околу квадратот може да се опише кружница. Центрите на опишаната и впишаната кружница кај квадратот се совпаѓаат и се наоѓаат во пресекот на дијагоналите на квадратот. Ова значи дека дијагоналата е дијаметар на опишаната кружница, а дијаметарот впишаната кружница е еднаков на должината на страната на квадратот.

Правоаголникот е четириаголник околу кој може да се опише кружница, т.е. правоаголникот може да биде **тетивен** четириаголник. Правоаголникот не го задоволува својството да збировите на спротивните страни се еднакви, што значи правоаголникот не е тангентен четириаголник и во него не може да се впише кружница. Центарот на опишаната кружница околу правоаголникот лежи во пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Дијагоналата е дијаметар на опишаната кружница.

Во **ромбот** може да се впише кружница, но околу ромбот не може да се опише кружница, т.е. ромбот може да биде **тангентен**, но не и тетивен четириаголник. Навистина, кај ромбот спротивните агли се еднакви, но не и суплементни. Центарот на впишаната кружница е во пресекот на дијагоналите, а дијаметарот на кружницата е еднаков на страната на ромбот.

Ромбоидот не е ниту тангентен, ниту тетивен четириаголник (да забележиме дека спротивните агли кај ромбоидот се еднакви, а не суплементни; исто така, збировите на спротивните страни не се еднакви).

Не секој **трапез** е тетивен, односно тангентен четириаголник. Но, постојат трапези околу кои може да се опише кружница, како и трапези во кои може да се впише кружница, т.е. постојат тетивни и тангентни трапези.

Делтоидот е четириаголник во кој може да се впише кружница, но околу делтоидот не може да се опише кружница. Всушност делтоидот е тангентен, но не и тетивен четириаголник. Бидејќи во делтоидот соседните страни две по две се еднакви, тоа ќе значи дека збировите на должините на спротивните страни ќе бидат еднакви.

Пример 3 Во правоаголник со периметар 184cm страните се однесуваат како 15:8. Пресметај го радиусот на кружницата опишана околу правоаголникот.

$$a:b=15:8 \quad \Rightarrow \quad 8a=15b \quad \Rightarrow \quad a=\frac{15}{8}b$$

$$L=2a+2b \quad \Rightarrow \quad 184=2a+2b \quad \Rightarrow \quad a+b=92$$

$$\frac{15}{8}b+b=92/\cdot 8$$

$$15b+8b=92\cdot 8$$

$$b=\frac{92\cdot 8}{23}=32$$

$$a=\frac{15}{8}\cdot 32=60$$

Дијаметарот на опишаната кружница околу правоаголник е еднаков на дијагоналата во правоаголникот. Дијагоналата ќе ја пресметаме со примена на Питагоровата теорема.

$$d^2=a^2+b^2$$

$$d^2=60^2+32^2$$

$$d=68.$$

Радиусот на кружницата опишана околу правоаголникот е $R=34cm$.

Пример 4 Во кружница со радиус 6cm е впишан квадрат, а во квадратот е впишана друга кружница. Пресметајте го радиусот на впишаната кружница.

Кружницата со радиус 6cm е опишана околу квадратот и нејзиниот дијаметар е еднаков на дијагоналата во квадратот (направете скица сами!), што значи дијагоналата на квадратот е $d=12cm$.

Дијаметарот на кружницата впишана во квадратот е еднаков на страната на квадратот, a.

Според Питагоровата теорема, помеѓу страната и дијагоналата во квадратот важи равенството:

$$d^2=2a^2 \quad \Rightarrow \quad d=a\sqrt{2}$$

$$12=a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a=6\sqrt{2}$$

$$r=3\sqrt{2}.$$

1 Пресметај ја страната на ромбот и плоштината на впишана кружница во ромбот, ако неговата плоштина е 600 cm^2 и односот на неговите дијагонали е $d_1 : d_2 = 3:4$.

2 Пресметај ја плоштината на кругот кој е опишан околу рамнокрак трапез чии основи се 14 cm и 2 cm, а крак 10 cm.

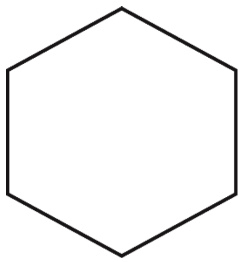
Задачи за самостојна работа:

1. Во кружница е впишан правоаголник со страни 12cm и 5cm. Пресметајте го радиусот на кружницата. Пресметај ги периметарот и плоштината на квадратот чии страни се тангенти на истата кружница.
2. Во кружница со радиус 6cm е впишан квадрат. Пресметај ги периметарот и плоштината на квадратот. Колкав е радиусот на кружницата впишана во квадратот?
3. Во кружница впишана во ромб со страна 14cm е впишан правоаголник со страна 6cm. Пресметај ја дијагоналата на правоаголникот, како и неговата плоштина.
4. Страните на еден ромб се тангенти на кружница со радиус 5cm. Пресметај ја плоштината на овој тангентен четириаголник во кој дијагоналите се однесуваат како 3:4.
5. Пресметај го радиусот на кружницата опишана околу рамнокрак трапез со основи 14cm и 2cm и крак 10cm. Пресметајте ја и плоштината на трапезот.
6. Во трапез со основи 15cm и 9cm е впишана кружница. Пресметај го периметарот на трапезот.
7. Стефан нацртал круг и внатре впишал рамностаран триаголник со страна 9cm. Потоа, тој ја пресметал плоштината на квадратот впишан во истиот круг. Колку добил за плоштината на квадратот?

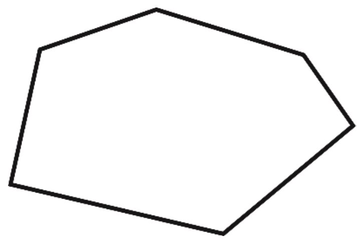
6. Плоштина и периметар на правилен многуаголник

❖ Многуаголник во кој сите страни и сите агли се еднакви се нарекува **правилен многуаголник**.

Пример 1 Рамностраниот триаголник е правилен многуаголник (триаголник). Квадратот е правилен четириаголник. Многуаголникот на слика 29 е правилен шестоаголник, додека многуаголникот на слика 30 не е правилен многуаголник.



Слика 29.



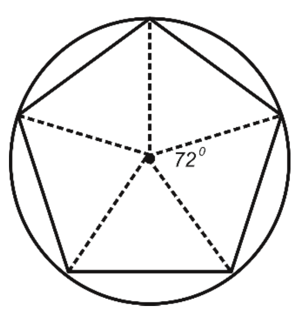
Слика 30.

❖ Периметарот на правилен n - аголник со страна a се пресметува со формулата $L = n \cdot a$.

Зошто?

- Рамностраниот триаголник со страна a има периметар $L = 3a$.
- Квадрат со страна a има периметар $L = 4a$.
- Правилен n - аголник има n - страни со еднаква должина a, па збирот од должините на сите страни е $L = n \cdot a$.

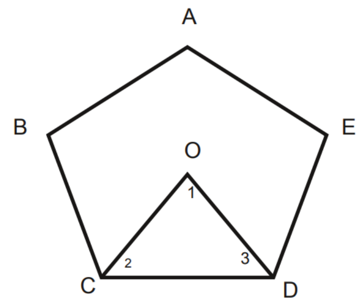
Да нацртаме правилен петаголник на следниот начин (слика 31): во круг ќе скицираме 5 еднакви агли со големина $360^0/5=72^0$. Точките во кои краците на овие агли ја сечат кружницата ќе ги поврземе. Со тоа добиваме многуаголник со 5 страни, т.е. петаголник. Триаголниците на кои е поделен правилниот петаголник на Слика 30 се рамнокраки триаголници, складни еден со друг (имаат по две страни еднакви како радиуси на кружницата и аглите помеѓу тие страни се еднакви). Според тоа, сите страни во петаголникот се еднакви, т.е. имаме правилен петаголник.



Слика 31. Правилен петаголник

Секој од аглите со големина 72^0, кој е централеен агол во кругот, се нарекува **централен агол во многуаголникот**.

Петаголникот $ABCDE$ на слика 32 е правилен петаголник. Централниот агол $\measuredangle 1$ е 72^0.



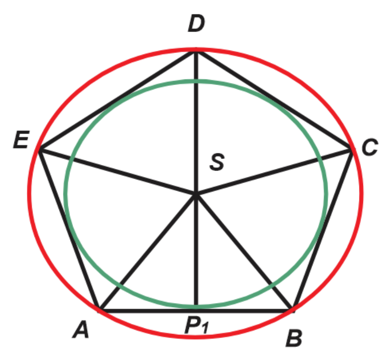
Слика 32. Правилен петаголник

○ Што можеме да заклучиме во општ случај?

! ❖ Централниот агол α на правилен n - аголник се пресметува со помош на формулата: $\alpha = \dfrac{360^0}{n}$.

За правилните многуаголници важат следните тврдења:

❖ Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.
❖ Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.
❖ Центрите на впишаната и опишаната кружница на правилен многуаголник се совпаѓаат во една точка S која што се нарекува **центар на правилниот многуаголник.**
❖ Центарот на правилниот многуаголник е теме на централниот агол во правилниот многуаголник.



Слика 33. Впишана и опишана кружница во и околу правилен многуаголник

На слика 33 можеме да забележиме дека правилниот петаголник е поделен на пет складни триаголници $\Delta ABS, \Delta BCS, \Delta CDS, \Delta DES, \Delta EAS$. Какви се овие триаголници? Ако централниот агол на правилен петаголник е 72^0, тогаш колкави се другите два агли во секој од триаголниците?

- Да го разгледаме триаголникот ΔABS. Овој триаголник е рамнокрак.

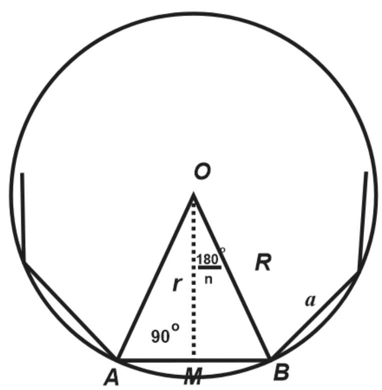
Затоа што за неговите страни важи: $\overline{AS} = \overline{BS} = R$, каде R е радиусот на опишаната кружница околу правилниот петаголник. Тоа значи дека страните $\overline{AS}, \overline{BS}$ се краци на ΔABS, додека страната AB е основа на триаголникот ΔABS.
ΔABS го викаме **карактеристичен триаголник за правилниот петаголник.**

1 Нацртај правилен шестаголник и дискутирај за неговиот карактеристичен триаголник.

2 Нацртај правилен осумаголник и дискутирај за неговиот карактеристичен триаголник.

!

- Кај правилен n- аголник, **карактеристичниот триаголник** е рамнокрак триаголник при што за краците на триаголникот важи $\overline{AO} = \overline{BO} = R$, каде O е центар на многуаголникот, т.е. имаат должина еднаква на радиусот на опишаната кружница R, додека висината на рамнокракиот триаголник спуштена кон основата (апотемата) $\overline{OM} = r$, т.е. има должина еднаква на радиусот на впишаната кружница r.



Слика 34. Карактеристичен триаголник

- Плоштина на триаголник ABC се пресметува како половина од производот на една страна на триаголникот и висината спуштена на нея: $P_{\Delta ABC} = \frac{ah_a}{2}$.

Имајќи во предвид дека правилниот n - аголник можеме да го поделиме на n - складни триаголници (тоа се карактеристичните триаголници), следува дека плоштината на правилен n - аголник се пресметува според формулата:

$$P_{n-аголник} = n \cdot \frac{ah}{2}.$$

Претходно покажавме дека периметарот на правилен n - аголник се пресметува според формулата $L = na$, од што следува дека плоштината на правилниот n - аголник може да се пресмета и според формулата:

$$P_{n-аголник} = \frac{L \cdot h}{2}$$

каде h е висината спуштена кон основата во карактеристичниот триаголник. Оваа висина ја нарекуваме **апотема** во карактеристичниот триаголник.

Пример 2 Пресметај ги плоштината и периметарот на правилен дванаесетаголник со страна $a = 3cm$ и радиус на впишана кружница $a = 3cm$.

Периметарот на на правилен n - аголник се пресметува според формулата $L = na$. Кај правилен дванаесетаголник, $n = 12$. Оттука:

$$L = 12 \cdot 3 = 36\ cm.$$

За плоштината, ако ја земеме формулата $P_{n-аголник} = \frac{L \cdot h}{2}$, добиваме:

$P_{n-аголник} = \frac{L \cdot h}{2}$ и ако земеме во предвид дека $r = h$, добиваме:

$$P = \frac{36 \cdot 4}{2} = 72\, cm^2.$$

Пример 3 Дадена е кружница со радиус $R = 5cm$. Пресметај ги плоштината и периметарот на правилен шестаголник впишан во неа.

Ако имаме правилен шестаголник, тогаш карактеристичниот триаголник е рамностран триаголник: $360^0 : 6 = 60^0$. Кружницата е опишана околу шестаголникот, што значи краците во карактеристичниот триаголник се $R = 5cm$. Карактеристичниот триаголник во правилен шестаголник е рамностран, што значи страната на шестаголникот е $a = 5cm$.

За периметарот на правилниот шестоаголник имаме: $L = 6 \cdot 5cm = 30\, cm.$

За да ја пресметаме плоштината на правилниот шестаголник, потребно е да ја пресметаме апотемата, која во рамностран триаголник изнесува $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Апотемата во овој случај ќе биде $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Плоштината на правилниот шестоаголник ќе биде

$$P = \frac{30 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{150\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2.$$

Пример 4 Пресметај ја плоштината и периметарот на правилен осумаголник, ако опишаната кружница околу осумаголникот е со радиус $R = 10\text{cm},$ а впишаната кружница е со радиус $r = 6\,\text{cm}.$

Ако впишаната кружница на правилниот осумаголник е со радиус $r = 6\,\text{cm},$ следува дека апотемата на карактеристичниот триаголник на правилниот осумаголник е $h = r = 6\text{cm}.$

Од Питагоровата теорема имаме:

$$\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\text{cm}.$$

$$a=16\,\text{cm}.$$

Оттука за периметарот имаме $L=8\cdot 16=128\text{cm}$.

Плоштината ќе биде еднаква на $P=\dfrac{128\cdot 6}{2}=384\,\text{cm}^2$.

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај ги плоштината и периметарот на правилен седумаголник со страна $a=3\,\text{cm}$ и радиус на впишана кружница $r=4\text{cm}$.

2. Петре добил задача: пресметај ја плоштината и периметарот на правилен единаесетаголник, ако опишаната кружница околу единаесетаголникот е со радиус $R=5\,\text{cm}$, а впишаната кружница е со радиус $r=3\,\text{cm}$. Петре решавал, решавал и не успеал да добие решение. Помогни му ти!

3. Дадена е кружница со радиус $10\,\text{cm}$. Определи ја плоштината и периметарот на правилен шестаголник опишан околу неа.

4. Пресметај го централниот агол, внатрешните и надворешните агли на правилен деветаголник.

5. Вилијам требало да нацрта правилен шестаголник со страна која треба да ја определи. Површината на правилниот шестаголник е $54\sqrt{3}$ cm^2. Колку е страната на правилниот многуаголник кој треба да го нацрта Вилијам? Пресметај ги радиусите на впишана и опишана кружница!

7. Периметар и плоштина на круг

Со поимите кружница и круг се имате среќавано порано.

Размисли и одговори:

- Што е кружница, а што круг?
- Дали може должината на кружница да ја утврдиш со линијар, на истиот начин како што одредуваш должина на отсечка?

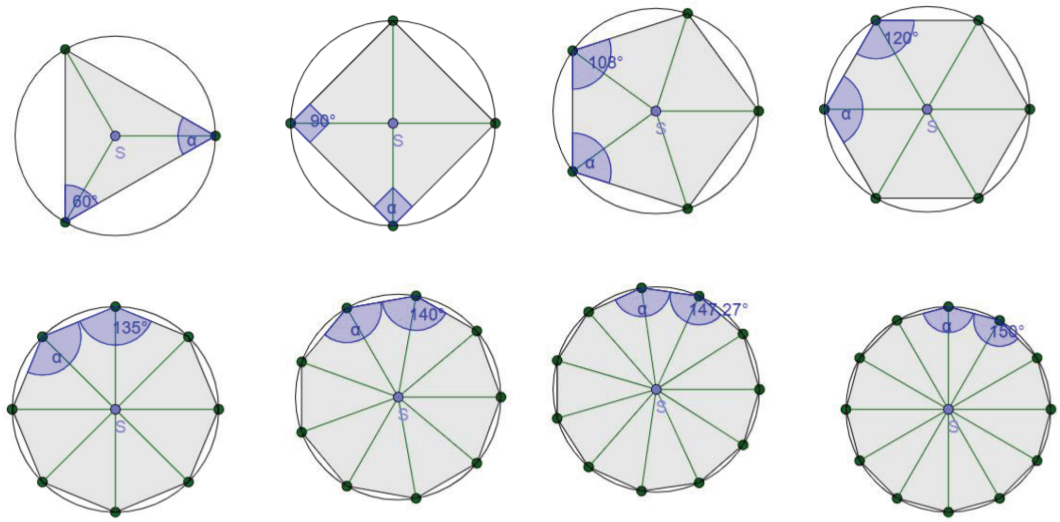
- Формулата за пресметување на периметар на кружница со радиус r е $L=2r\pi$.

  Ако се земе во предвид дека дијаметарот на кружницата $d=2r$, тогаш формулата за пресметување на периметар на кружница можеме да ја запишеме во облик $L=d\pi$.

- Формулата за пресметување на плоштина на круг со радиус r е $P=r^2\pi$.

Дали можеме да ги поврземе периметарот и плоштината на правилен многуаголник со периметарот и плоштината на круг?

Да нацртаме неколку правилни многуаголници, така што бројот на страни ќе се зголемува.



Слика 35. Правилни многуаголници

- Со зголемување на бројот на страни на правилниот многуаголник, многуаголникот сè повеќе се доближува до кружница.

- Со зголемување на бројот на страни, должината на страната на правилниот многуаголник се намалува, но се зголемува апотемата на карактеристичниот триаголник, доближувајќи се сè повеќе до радиусот на кружницата.

- Со зголемување на бројот на страни периметарот на правилниот многуаголник се приближува до периметар на кружница.

- Со зголемување на бројот на страни плоштините на правилните многуаголници се приближуваат до плоштина на круг.

Нека се дадени две кружници $k(O,r)$ и $k'(O',r')$.

❖ Односот на плоштината и дијаметарот на кругот е константен и изнесува $\pi \approx 3{,}14$.

❖ Периметрите на две кружници се однесуваат како нивните радиуси т.е. $\dfrac{L'}{L} = \dfrac{2r'\pi}{2r\pi} = \dfrac{r'}{r}$.

❖ Плоштините на два круга се однесуваат како квадратите на нивните радиуси, т.е. $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{(r')^2\pi}{r^2\pi} = \dfrac{(r')^2}{r^2}$.

Пример 1 Пресметај ги периметарот и плоштината на круг со дијаметар $d = 8\,\mathrm{cm}$.

Ако дијаметарот е $d = 8\,\mathrm{cm}$, тогаш за периметарот на кружницата ќе имаме $L = 8\pi\,\mathrm{cm}$.

За плоштината на кругот, ќе го пресметаме прво радиусот: $r = \frac{d}{2} = \frac{8}{2}\text{cm} = 4\,\text{cm}$. Оттука $P = 16\pi\,\text{cm}^2$.

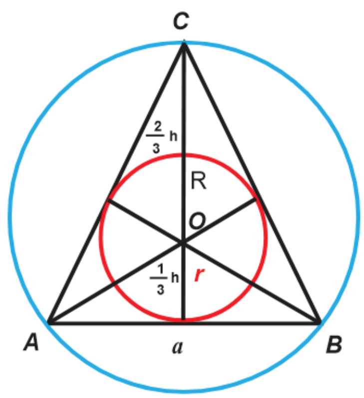
Пример 2 Пресметај периметарот на кружницата ако кругот е со плоштина $P = 100\pi\,cm^2$.

Ако плоштината на кругот е $P = 100\pi\ \text{cm}^2$, од формулата $P = r^2\pi$ имаме:

$$100\pi = r^2\pi \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10\,\text{cm}.$$
$$L = 20\pi\ \text{cm}.$$

Пример 3 Даден е рамностран триаголник со страна $a = 6$ cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на впишаната и опишаната кружница во триаголникот.

Да нацртаме рамностран триаголник, да опишеме и впишеме кружница.



Слика 36. Рамностран триаголник со впишана и опишана кружница

Кај рамностраниот триаголник со примена на Питагоровата теорема се добива дека радиусот на опишаната кружница околу триаголникот е $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, а радиусот на впишаната кружница е $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Според тоа, $R = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$ и $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}\ \text{cm}$.

Оттука за периметрите ќе имаме:

$$L_{впиш.} = 2r\pi = 2\sqrt{3}\pi\ \text{cm}.$$
$$L_{опиш.} = 2R\pi = 2\cdot 2\sqrt{3}\pi\ \text{cm} = 4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}.$$

Додека за плоштините:

$$P_{впиш.} = r^2\pi = 3\pi\ \text{cm}^2.$$
$$P_{опиш.} = R^2\pi = 12\pi\ \text{cm}^2.$$

Пример 4 Мерните броеви на периметарот и плоштината на еден круг се еднакви. Колкав е радиусот?

Ако мерните броеви на периметарот и плоштината на еден круг се еднакви, тоа значи дека:

$$L = P$$

$$2r\pi = r^2\pi / : \pi$$

$$2r = r^2 / : r$$

$$r = 2$$

1 Збирот на периметрите на две кружници е 28 π cm, а разлика на нивните радиуси е 4 cm. Пресметај ги плоштините на круговите!

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај ги периметарот на кругот чија што плоштина е еднаква на збирот од плоштините на круговите со радиуси од 3 cm и 4 cm.

2. Даден е квадрат со дијагонала 10 cm. Пресметај ги периметарите на впишаната и опишаната кружница во квадратот, како и плоштината на круговите определени со тие кружници.

3. Дадени се две кружници чии радиуси се однесуваат како 2:3. Како се однесуваат нивните периметри, а како се однесуваат нивните плоштини?

4. Една кружница има радиус 3 cm. Плоштините на дадениот круг со друг круг се однесуваат како 9:16. Пресметај го радиусот на другата кружница.

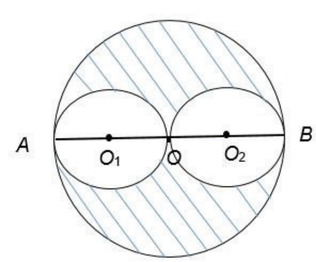
5. Плоштината на еден круг е четири пати поголема од плоштината на друг круг. Колку пати е поголем радиусот на првиот круг од радиусот на вториот?

6. Ариф и Теута нацртале два круга со следните податоци: плоштините на двата круга чии радиуси се однесуваат како 2:3 се разликуваат за 25 π cm^2. Пресметај ги периметарот и плоштината на секој од тие два круга, кои ги нацртале Ариф и Теута!

7. Во круг е впишан рамностран триаголник со страна 9cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на кругот.

8. Мила нацртала кружница и внатре впишала рамностран триаголник со страна 9 cm. Потоа во кружницата впишала квадрат. Колкава ќе биде плоштината на впишаниот квадрат?

9. Пресметај ја плоштината на шрафираниот дел ако $\overline{AO} = 10\text{cm}$ и $\overline{AO_1} = \overline{O_2B} = \frac{1}{2}\overline{AO}$.



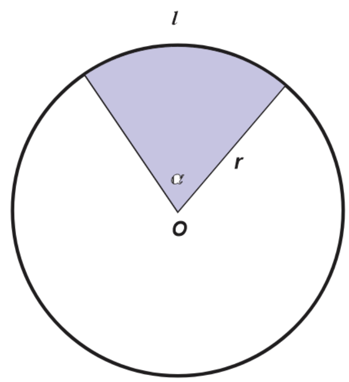
8.Периметар и плоштина на делови од кругот

8.1. Должина на кружен лак

Кружницата со радиус r ќе сметаме дека претставува кружен лак соодветен на централен агол од 360^0 (полн агол). Должината на кружницата е $L = 2r\pi$.

Должината на кружен лак кој одговара на централен агол од 1^0 според тоа, ќе биде еднаков на:

$$l = \frac{2r\pi}{360}, \text{ т.е. } l = \frac{r\pi}{180}$$



Слика 37.

!

❖ **Должина на кружен лак** од кружница со радиус r, кој одговара на централен агол α ќе биде еднаква на:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$

Пример 1 Пресметај ја должината на кружниот лак кој е дел од кружница со радиус 17cm и соодветствува на централен агол од 54^0.

Согласно горната формула:

$$l = \frac{17\pi \cdot 54}{180} = 5{,}1\pi\, cm$$

Пример 2 Колкав е периметарот на кружницата во која должината на кружниот лак кој одговара на агол од 36^0 е 14 $\pi\, cm$?

Во формулата $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ непознато ни е r:

$$14\pi = \frac{r\pi 36}{180} \quad \Rightarrow \quad 14 = \frac{r}{5} \quad \Rightarrow \quad r = 70$$

$$L = 2r\pi = 140\pi\, cm$$

Пример 3 Пресметај ја должината на кружниот лак кој е дел од кружница со радиус 24cm и соодветствува на централен агол од $24^0 24'$.

Најпрво големината на аголот треба да ја изразиме во степени (минутите да ги претвориме во степени).

$$\alpha = 24^0 24'$$

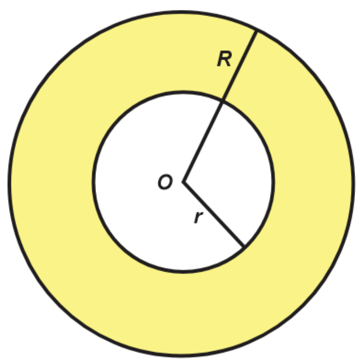
$$24' = \left(\frac{24}{60}\right)^0 = 0,4^0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 24,4^0$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{24\pi \cdot 24,4}{180} = 3,25\pi\, cm$$

1 Да се пресмета должината на кружниот лак како дел од кружница со радиус 16cm и одговара на централен агол $\alpha = 46^0 25'$.

8.2. Плоштина на кружен прстен

❖ Делот од рамнината кој е ограничен со две концентрични кружници се вика **кружен прстен** (слика 38).



Слика 38. Кружен прстен

!

❖ **Плоштина на кружниот прстен** е еднаква на разликата од плоштините на двата круга кои го ограничуваат кружниот прстен. Ако радиусите на кружниците ги означиме со R и r, плоштината на кружниот прстен ќе биде еднаква на:

$$P = R^2\pi - r^2\pi .$$

Разликата $R - r$ ја викаме **дебелина на кружниот прстен**.

Пример 4 Пресметај ја плоштината на кружен прстен образуван од кружници со радиуси 12cm и 9cm. Колкава е дебелината на кружниот прстен?

$$P = R^2\pi - r^2\pi = 144\pi - 81\pi$$

$$P = 63\pi cm^2$$

Дебелината на кружниот прстен е $12cm - 9cm = 3cm$.

Пример 5 Пресметај ја дебелината на кружен прстен со плоштина 95π cm^2, ако помалата од кружниците кои го образуваат прстенот има радиус 7cm.

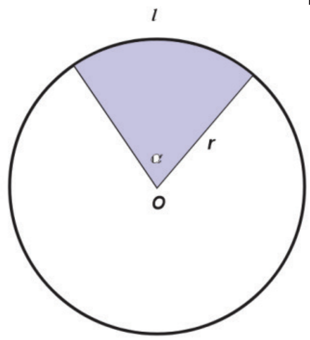
Кругот со радиус $r = 7cm$ (помалиот круг) има плоштина $P = 49\pi cm^2$, што значи поголемиот круг има плоштина $(95+49)\pi\, cm^2$, т.е. 144π cm^2, па радиусот на поголемиот круг е 12cm.

Дебелината на кружниот прстен е 5cm.

2 Површината на кружниот прстен е 55π cm^2, а периметарот на поголемиот круг е 16π cm. Колкава е дебелината на кружниот прстен?

8.3. Плоштина на кружен исечок

❖ Делот од кругот со радиус r ограничен со еден централен агол α и кружниот лак l кој одговара на централниот агол α се вика **кружен исечок**.



Слика 39. Кружен исечок

Напомена: На слика 39 се забележува дека постојат два кружни исечоци, обоениот и необоениот дел од кругот.

Ако кружниот исечок е ограничен со централен агол 1^0, неговата плоштина ќе биде

!

❖ Кружен исечок ограничен со централен агол α ќе има плоштина:

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Пример 6 Пресметај ја плоштината на кружниот исечок кој е ограничен со централен агол $\alpha = 27^0 20'$ во кружница со радиус $r = 8cm$.

$$\alpha = 27^0 20' = \left(27 + \frac{20}{60}\right)^0 = 27{,}3^0$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{64\pi \cdot 27{,}3}{360} = 4{,}85\pi$$

Пример 7 Кружен исечок од кружница со радиус 11cm има плоштина 62,8cm^2. На колкав централен агол одговара кружниот исечок? Пресметај ја должината на соодветниот лак.

$$r = 11cm \qquad P = 62,8cm^2$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} \qquad \Rightarrow \qquad 62,8 = \frac{121 \cdot 3,14 \cdot \alpha}{360}$$

$$62,8 = \frac{121 \cdot 3,14 \cdot \alpha}{360}$$

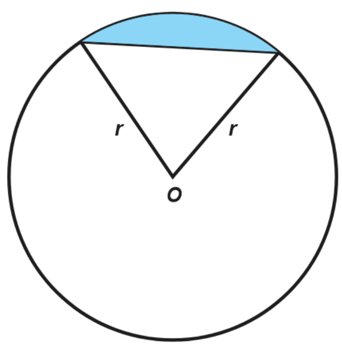
$$\alpha = \frac{360 \cdot 62,8}{121 \cdot 3,14} = 59,5^0$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{11\pi \cdot 59,5}{180} = 11,42cm$$

3 Пресметај ја плоштината на кружниот исечок до радиус 7 cm и централен агол $55^026'$. Колку е должината на кружниот лак што одговара на тој централен агол?

8.4. Плоштина на кружен отсечок

❖ Делот од кругот ограничен со една тетива во кругот и кружниот лак над таа тетива, се вика **кружен отсечок**.



Слика 40. Кружен отсечок

Напомена: На слика 40 се забележува дека потојат два кружни отсечоци, обоениот и необоениот дел од кругот.

!

❖ **Плоштина на кружниот отсечок** е разлика од плоштината на кружниот исечок кој одговара на централен агол α соодветен на кружниот лак кој го ограничува кружниот отсечок и плоштината на рамнокракиот триаголник чија основа е тетивата која го ограничува кружниот отсечок, а краците се со должина r.

Пример 8 Пресметајте ја плоштината на кружниот отсечок во кружница со радиус $r = 10cm$, кој го отсекува тетива со должина 16cm, која одговара на централен агол $\alpha = 73^0 45'$.

Кракот во рамнокракиот триаголник е 10cm, а основата е 16cm. Висината во триаголникот ќе ја пресметаме со примена на Питагоровата теорема:

$$h^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad h = 6$$

Плоштината на триаголникот е: $P_\Delta = \dfrac{16 \cdot 6}{2} = 48$

Плоштината на кружниот исечок е: $P = \dfrac{r^2 \pi \alpha}{360}$; $\alpha = 73^0 45' = 73,75^0$.

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360} = \frac{100\pi \cdot 73,75}{360} = 64,33$$

Плоштината на кружниот отсечок е 64,33-48=16,33cm^2.

4 Околу рамностран триаголник со страна 45 cm е опишана кружница. Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок што е ограничен со страната на триаголникот и лакот.

Задачи за самостојна работа:

1. Пресметај ја должината на кружниот лак кој е дел од кружница со радиус 17cm и соодветствува на централен агол од 45^0.
2. Пресметај ја должината на кружниот лак кој е дел од кружница со радиус 12cm и соодветствува на централен агол од 46^{0}15'.
3. На колкав централен агол одговара кружен лак со должина 5,5cm, ако радиусот на кружницата е 3,4cm?
4. Плоштината на еден кружен прстен е 40πcm^2, а неговиот помал круг има периметар 6π cm. Пресметај ја дебелината на кружниот прстен.
5. Кружен прстен со дебелина 6cm има плоштина 120π cm^2. Пресметај ги радиусите на кружниците кои го образуваат кружниот прстен.
6. Чаша во облик на цилиндар има должина на надворешното дното од 10 π cm, а плоштината на дното е 4,75 π cm^2. Колку е дебелината на чашата?
7. Пресметај ја плоштината на кружниот исечок кој е дел од круг со радиус 12cm и соодветствува на централен агол од 45^0.
8. Пресметај ја плоштината на кружниот исечок кој е дел од круг со радиус 12cm и соодветствува на централен агол од 46^{0}12'.
9. Пресметај го радиусот, како и плоштината на кругот, ако кружниот исечок кој одговара на централен агол од 64^0 има плоштина $\dfrac{1568\pi}{45} cm^2$.
10. Пресметај го централниот агол кој одговара на кружен исечок со плоштина 26π cm^2, од круг со радиус 8cm.

11. Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок определен со централен агол од 60^0 во круг со радиус 9cm (тетивата е определена со пресечние точки на краците на аголот и кружницата).

9. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Периметрите на два квадрата се разликуваат за 12cm, а нивните плоштини се разликуваат за $33cm^2$. Пресметај ги страните и дијагоналите на двата квадрата.

2. Правоаголник со дијагонала 13cm има плоштина $60cm^2$. Пресметај го периметарот на правоаголникот.

3. Периметарот на еден паралелограм е 48cm. Пресметај ја плоштината на паралелограмот ако едната негова страна е два пати поголема од другата и три пати поголема од растојанието помеѓу страните со поголема должина.

4. Страната на ромб со остар агол 60^0 е 8cm. Пресметај ја плоштината на ромбот.

5. Периметарот на рамнокрак триаголник е 88cm и при тоа кракот е за 4 cm помал од основата. Пресметај ги страните во триаголникот, како и неговата плоштина.

6. Збирот на една од страните во триаголник и висината спуштена кон таа страна е 18cm. Ако страната се зголеми за 4cm, а висината се намали за 4cm, плоштината на триаголникот ќе се зголеми за $4cm^2$. Пресметај ги страната и висината во триаголникот.

7. Висината во рамностран триаголник е 9cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

8. Основите во еден трапез се 142cm и 89cm, а дијагоналите се 120cm 153cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на трапезот.

9. Даден е ромб со дијагонали 16cm и 12cm. Пресметај го периметарот на впишаната кружница во ромбот.

10. Пресметај го радиусот на кружницата чиј периметар е еднаков на збирот на периметрите на две кружници со радиуси 6cm и 8cm.

11. Пресметај го радиусот на кругот чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на два круга со радиуси 6cm и 4cm.

Решенија и упатства за решавање:

Модуларна единица 1

1

1. б), г).
2. а) Ги зема и двете вистинитосни вредности, значи за некои луѓе зимата е најубаво годишно време додека за некои не е најубаво.
   б) Не може да се постави прашањето за вистинитост.
   в) Реченицата не е осмислена.
   г) Не може да се постави прашањето за вистинитост.
3. а) Не е вистинит.
   б) Вистинит.
   в) Не е вистинит.
   г) Вистинит.
4. а) $\tau(\text{Скопје е главен град на Република Северна Македонија}) = \top$.
   б) $\tau(3 = -3) = \perp$.
   в) $\tau(\text{Бројот 24 е делив со 6}) = \top$.
   г) $\tau(2 < 3) = \top$.
5.

x	-2	-1	1	2
$\tau(x<3)$	⊤	⊤	⊤	⊤
$\tau(x^2=4)$	⊤	⊥	⊥	⊤
$\tau(x+1>2)$	⊥	⊥	⊥	⊤

2

1. а) Денес не е петок б) $-3 < 5$;
   в) 10 не е негативен број: г) $\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$.
2. а) $\neg p$: Метар не е основна мерна единица за должина, $\tau(\neg p) = \perp$;
   б) $\neg q$: Бројот 9 не е делител на 37, $\tau(\neg q) = \top$;
   в) $\neg r : 2+7=9$, $\tau(\neg r) = \top$; г) $\neg s : 7 \geq 3$, $\tau(\neg s) = \top$.
3. а) $p \wedge q$ =5 е природен број и -2>3;
   б) $p \wedge p$ =5 е природен број и 5 е природен број;
   в) $q \wedge r = -2 > 3$ и $3|9$; г) $r \wedge p = 3|9$ и 5 е природен број.
4. а) $\tau(p \wedge \neg q) = \perp$; б) $\tau(r \wedge \neg p) = \top$;

в) $\tau\left(\left(\neg p \wedge \neg r\right) \wedge q\right) = \perp$; г) $\tau\left(\neg\left(p \wedge q\right) \wedge r\right) = \top$.

5. p: Бројот 5 е прост број; q: Бројот 5е непарен број.

6. а) $\tau\left(5 > 3 \wedge 3 \mid 18\right) = \top$; б) $\tau\left(3^2 = 6 \wedge 2^3 = 6\right) = \perp$; в) $\tau\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \wedge \frac{1}{5} < \frac{1}{2}\right) = \perp$;

г) $\tau\left(\text{Бројот } -2 \text{ е негативен број} \wedge -2 = 2\right) = \perp$.

7.а) $p \vee q = |-3| = -3$ или $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$; б) $p \vee p = |-3| = -3$ или $|-3| = -3$;

в) $q \vee r = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ или $5 \geq 7$; г) $r \vee p = 5 \geq 7$ или $|-3| = -3$.

8. а) $\tau\left(p \vee \neg q\right) = \top$; б) $\tau\left(r \vee \neg p\right) = \perp$; в) $\tau\left(\left(\neg p \vee \neg r\right) \vee q\right) = \top$;

г) $\tau\left(\neg\left(p \vee q\right) \vee r\right) = \perp$.

9.а) $\tau\left(5 \mid 25 \vee 2 \nmid 20\right) = \top$; б) $\tau\left(7 + 3 \neq 10 \vee 3 > -1\right) = \top$;

в) $\tau\left(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \vee 4^2 = 8\right) = \top$;

г) $\tau\left(\text{Плоштината на еден многуаголник е негативен број} \vee |-2| = 2\right) = \top$.

10.

а) $\tau\left(\left(3 \neq 2 \wedge 2 < -1\right) \vee \left(\text{Бројот 36 е делив со 6}\right)\right) = \top$;

б)

$\tau\left(\left(\frac{5}{5} = 1 \vee 5 - 6 = 1\right) \wedge \left(\text{Множеството на природни броеви се означува со } \mathbb{Z}\right)\right) = \perp$

в) $\tau\left(\left(10 = 5 \cdot 2 \wedge 6 > 6\right) \vee \neg\left(6^2 = 36\right)\right) = \perp$;

г) $\tau\left(\neg\left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \vee -2 > 3\right) \wedge \left(x + 5 = 7 \text{ за x=2}\right)\right) = \perp$

11.

а)

$p \veebar q =$ Или паралелограмот нема ни еден пар паралелни страни или $14 \neq 2 \cdot 7$

б) $r \veebar r =$ Или $7 - 7 = 0$ или $7 - 7 = 0$;

в) $q \veebar r =$ Или $14 \neq 2 \cdot 7$ или $7 - 7 = 0$;

г)

$r \veebar p =$ Или $7 - 7 = 0$ или паралелограмот нема ни еден пар паралелни страни.

3

1. а) $p \Rightarrow q =$ Ако $\frac{1}{4} = 0,25,$ тогаш рекатa Дунав минува низ Скопје ;

б) $q \Rightarrow q =$ Ако реката Дунав минува низ Скопје, тогаш реката Дунав минува низ Скопје ;

в) $q \Rightarrow r =$ Ако реката Дунав минува низ Скопје, тогаш $\sqrt{2}$ е ирационален број ;

г) $r \Rightarrow p =$ Ако $\sqrt{2}$ е ирационален број, тогаш $\frac{1}{4} = 0,25$.

2. а) $\tau(p \Rightarrow \neg q) = \top$; б) $\tau(\neg p \Rightarrow r) = \top$;

в) $\tau((\neg p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow q) = \perp$; г) $\tau(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow r) = \top$.

3. а) $\tau(3 > -2 \Rightarrow -2 < 1) = \top$; б) $\tau(2 \neq 3 \Rightarrow -5 = 5) = \perp$;

в) $\tau(2^6 = 12 \Rightarrow 7^2 = 14) = \top$; г) $\tau(2 + 0 = 2 \Rightarrow 2 - 0 = -2) = \perp$.

4. г) Ако p тогаш q се нарекува импликација.

5. а) $\tau((\top \wedge \perp) \vee \perp) = \perp$; б) $\tau(\neg(\top \vee \top) \wedge \perp) = \perp$;

в) $\tau((\perp \wedge \top) \Rightarrow \neg \perp) = \top$; г) $\tau((\perp \vee \perp) \Leftrightarrow (\neg \top \wedge \neg \perp)) = \top$.

6. а) $p \Leftrightarrow q = -1$ е позитивен број ако и само ако 4>2 ;

б) $q \Leftrightarrow q =$ 4>2 ако и само ако 4>2 ;

в) $q \Leftrightarrow r =$ 4>2 ако и само ако $2 \cdot 3 - 6 = 0$;

г) $r \Leftrightarrow p = 2 \cdot 3 - 6 = 0$ ако и само ако -1 е позитивен број.

7. а) $\tau(p \Leftrightarrow \neg q) = \perp$; б) $\tau(r \Leftrightarrow \neg p) = \perp$;

в) $\tau((\neg p \Leftrightarrow \neg r) \vee q) = \top$; г) $\tau(\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow r) = \perp$.

8. а) $\tau(3 | 20 \Leftrightarrow 3 - 2 \cdot 1 = 1) = \perp$; б) $\tau\left(3 = 3 \Leftrightarrow 2 = \frac{6}{3}\right) = \top$;

в) $\tau(-2 > 2 \Leftrightarrow 6^2 = 12) = \top$;

г) $\tau\left(\text{Плоштината на правоаголникот со димензии } a \text{ и } b \text{ е бројот } a \cdot b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right) = \perp$.

9. а) $\tau(p \veebar \neg q) = \perp$; б) $\tau(r \veebar \neg p) = \perp$;

в) $\tau((\neg p \veebar \neg r) \Rightarrow q) = \top$; г) $\tau(\neg(p \Leftrightarrow q) \veebar r) = \perp$.

10. а) $\tau((\top \Leftrightarrow \top) \wedge \perp) = \perp$;

б) $\tau\left(\neg\left(\bot \veebar \top\right) \Leftrightarrow \bot\right) = \bot$;

в) $\tau\left(\left(\neg\top \Rightarrow \top\right) \vee \neg\bot\right) = \top$;

г) $\tau\left(\left(\bot \Leftrightarrow \top\right) \veebar \left(\neg\bot \Rightarrow \neg\top\right)\right) = \bot$.

4

1.

a) $\tau\left(\neg p \wedge r \Leftrightarrow \neg\left(r \wedge q\right) \Rightarrow p\right) = \bot$;

b) $\tau\left(\left(p \veebar \neg r\right) \Rightarrow \neg\left(q \Leftrightarrow p\right)\right) = \top$.

За $\tau(p) = \bot$; $\tau(q) = \top$; $\tau(r) = \bot$.

2.

а)

1) Ако $\tau(p) = \top$, тогаш $\tau(p \vee \top) = \top$.

2) Ако $\tau(p) = \bot$, тогаш $\tau(p \vee \top) = \top$.

б)

1) Ако $\tau(p) = \top$, тогаш $\tau\left(p \Rightarrow \left(\neg p \wedge \top\right)\right) = \bot$.

2) Ако $\tau(p) = \bot$, тогаш $\tau\left(p \Rightarrow \left(\neg p \wedge \top\right)\right) = \top$.

в)

1) Ако $\tau(p) = \top$, тогаш $\tau(p \Leftrightarrow \bot) = \bot$.

2) Ако $\tau(p) = \bot$, тогаш $\tau(p \Leftrightarrow \bot) = \top$.

г)

1) Ако $\tau(p) = \top$, тогаш $\tau\left(\left(\top \Rightarrow p\right) \veebar \neg\top\right) = \top$.

2) Ако $\tau(p) = \bot$, тогаш $\tau\left(\left(\top \Rightarrow p\right) \veebar \neg\top\right) = \bot$.

3.

а) $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$; б) $p \vee (p \wedge q)$ и p.

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
$\top$	$\top$
$\top$	$\top$
$\top$	$\top$
$\top$	$\top$

5

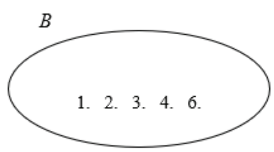
1. Упатство: Искористете вистинитосна таблица.
2. Упатство: Искористете вистинитосна таблица.

6

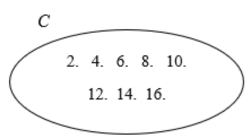
1.

а) $A=\{\text{Т, Е, Х, Н, И, К, А}\}$,

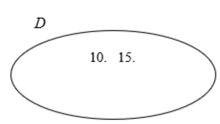
б) $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$,



в) $C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$,



г) $D=\{10,\ 15\}$,



2.

г) $\{3,\ 5,\ 8\}\subset A$.

3.

а) еквивалентни;
б) еднакви и еквивалентни.

4.

г) $x=2,\ y=3$.

5.

а) $P(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$;

б) $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

7

1. а) $A\cup B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}=B$;   б) $A\cap B=\{-1,\ 0,\ 1\}$;
   в) $(A\setminus B)\cup C$;   г) $A\cap(B\setminus C)$.
2. $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ i\}$, $B=\{d,\ e,\ f\}$, $C=\{a,\ ,\ c,\ d,\ e,\ i,\ f,\ g,\ h,\ k\}$ и $A\cap B=\{d,\ e\}$.

3. $\{1,\ 3\}=\{1,\ 3\}$.
4. а) $A\times B=\{(a,1),\ (a,b),\ (2,1),\ (2,b),\ (3,1),\ (3,b)\}$;
   б) $B\times A=\{(1,a),\ (1,2),\ (1,3),\ (b,a),\ (b,2),\ (b,3)\}$.

5. а) $A\cap B=\{-3\}$;   б) $A\setminus B=\{-4,\ -2,\ -1\}$;
   в) $P(A\setminus B)=\{\varnothing,\ \{-4\},\ \{-2\},\ \{-1\},\ \{-4,-2\},\ \{-4,-1\},\ \{-2,-1\},\ \{-4,-2,-1\}\}$;
   г) $B\setminus A=\{3\}$.

6. б) $C=\{x\mid x-\text{парен}\wedge x<12\}$, $D=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x-5=0\}$.

7. а) $\overline{A}=\{*,\ \Delta,\ -5\}$;   б) $\overline{C}=\{\Delta,\ 2,\ \pi,\ a\}$;
   в) $\overline{C}\cup\overline{B}=\{\Delta,\ 2,\ \pi,\ a\}$;   г) $\overline{(A\setminus B)}=\{*,\ \Delta,\ -5,\ \pi\}$.

8. а) $x=3,\ y=5$;   б) $x=2,\ y=\frac{1}{2}$.

9. $A=\{1,\ b,\ \pi\}$, $B=\{\square,\ a\}$.

10. а) $\varnothing\setminus A=\varnothing$;   б) $A\cup(A\cap B)=A$.

8

1. а)
2. $M_1=\{2,4,6,8,10,12,14\}$
3. а) Т   б) $\perp$ в) Т.
4. а) Т   б) $\perp$ в) Т.

9

1. б)
2.

x	-2	-1	0	1	2
$\tau\left(-2x+5=3\right)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$

3. а) $(2\cdot 2=5)\wedge(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0)$; б) $(2\cdot 2\neq 5)\Rightarrow(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0)$; в) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0)\Leftrightarrow(3\geq -2)$.

4. $\perp$

6. а), в) $\varnothing$

7. A={1,3,5}

8. $\{-2,\ \Delta,\ \theta\}$

9. *C*

Модуларна единица 2

1

1. а) Точно; б) Неточно; в) Точно.
2. а) ; б) ; в) .
3. а) 3·6; б) 9·4; в) 10·2.
4. а) 25 ; б) 452 ; в) 123.
5. а) 1000; б) 775; в) 900000; г) 7000000.
6. а) 847; б) 517; в) 26; г) 1038; д) 834.
7. 1209.
8. Зоран потрошил 3380 денари, а му останале 8620 денари.
9. 30 000 денари.
10. 750·408=306000.

2

1. а) $D_{125}=\{1,5,25,125\}$; б) $D_{565}=\{1,5,113,656\}$; в) $D_{232}=\{1,2,4,8,29,58,116,232\}$.

2. а) 175=7·5^2; б) 550=2·5^2·11; в) 1250=2·5^4.

3. а) $S_8=\{8,16,24,...\}$; б) $S_{16}=\{16,32,48,...\}$; в) $S_{23}=\{23,46,69,...\}$.

4. а) прост број; б) сложен број; в) сложен број.

5. 3.

7. 6, 72.

8. а) НЗД(42,20,30)=2, НЗС(42,20,30)=420; б) НЗД(12,18,25)=2, НЗС(12,18,25)=900.

9. Заемно прости се: б) и в).

15. 585, 180.

16. 3 метри

17. 360 часа или 15 дена.

18. 3 еднакви пакетчиња.

3

1. а) неточно б) точно в) неточно г) неточно д) точно ѓ) точно е) неточно
2. 1258, -987, 8746,203, -1223; -1223<-987<203<1258<8746.
3. 1258, 0, 987, 8746,203, 1223; 0<203<987<1223<1258<8746.
4. а) +68 б) +90 в) -89 г) -31 д) +40 ѓ) -36 е) +7 ж) -7.
5. а) -5:(-1)+(-8)·(3-(-2)·6) =-115 б) -7-(-2)·(-1+(-10):2)=-19 в) (5·(-2)-(-3))·(-7)=-91
6. а) -1 б) 13.
9. 12^0.
10. -7^0, -2^0, -6^0, -1^0, -4^0. Најладен е првиот ден, а најтопол е четвртиот ден.
11. -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.

4

1. И двата дела се $\frac{1}{2}$ од денонoќието.
2. а) 0; б) 2; в) -1, 1.
3. а) $\frac{40}{45}$ б) $\frac{14}{12}$ в) $\frac{9}{18}$.
4. $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.
5. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{21}$.
6. а) $\frac{5}{12} < \frac{8}{9}$ б) $\frac{7}{6} > \frac{7}{9}$ в) $\frac{9}{17} > \frac{1}{2}$.
7. $-\frac{5}{12} < -\frac{2}{5} < \frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{5}{9} < \frac{8}{9}$.
8. $\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, 3, \frac{5}{2}, 5$.

5

1. а) $4\frac{1}{3}$ б) $\frac{47}{52}$ в) $1\frac{5}{13}$ г) $2\frac{9}{10}$ д) $-\frac{6}{7}$ ѓ) 1.
3. Сумата е 35 000 денари. Првиот примил 7 000 денари, а вториот 15 000 денари.
4. 30 ученици.
5. $\frac{1258}{3465}$
6. Планот на Онур не е остварлив.
7. 186 000 *l*, 124 000 *l*, 1395 *kg*.
8. $\frac{9}{11}$.

6

1. 0,(6); 0,875; 1,(714285); -3,7.
2. $1\frac{1}{4}, \frac{11}{20}, \frac{7}{30}, 1\frac{5}{9}$
3. а) 25,6716 б) 101,24 в) 191,365.
4. а) -6,92; 13,827.

7

1. Упатство:
$\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 1^2}, \sqrt{7} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2}, \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}$.
2. а) 1,21 б) 4,28.
3. $(7,9)$, $(0,8]$, $(-\infty,5)$, $[-3,+\infty)$.

8

1. а) 284 б) 129 в) $3\frac{13}{44}$ г) 31,135.
2. НЗД (250,220,210)=10, НЗС (250,220,210)=115 500.

4. а) $[-2,2]$ б) $[-2,5)$ в) $(-5,7)$.

6. 8 кг.

7. 4π.

3. $-\sqrt{11} < -2,5(23) < -\frac{1}{5} < \frac{1}{7} < \sqrt{7} < 3,555.$

4. $1\frac{923}{990}$.

5. $\frac{2}{7} = 0,(285714); -\frac{1}{5} = -0,5; \frac{5}{11} = 0,(45); -\frac{9}{20} = -0,45$.

Конечни се $-\frac{1}{5} = -0,5; -\frac{9}{20} = -0,45$, а бесконечни се $\frac{2}{7} = 0,(285714); \frac{5}{11} = 0,(45).$

6. а) $(-7,12)$ б) $[-1,2]$.

7. 42 500 денари

8. 154,8 метри жица.

9. Во 11 часот.

10. Патот бил 350 км, потрошил $46\frac{2}{3}$ литри нафта и потрошил 3080 денари.

Модуларна единица 3

1

1. а) неточно; б) неточно; в) точно.
2. а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$; г) $x = 3$.
3. а) $-27\frac{x^3 \cdot y^6}{z^9}$; б) $8\frac{c^9}{a^3b^6}$; в) $36a^{32}$
4. а) $7 \cdot 10^5$; б) $5 \cdot 10^4$; в) 10^6.
5. а) $x = 2$ б) $x = \frac{4}{3}$ в) $x = 10$.

2

1. а) коефициент $\frac{3}{5}$ главна вредност $x^6y^5z^{10}$;
   б) коефициент 20 главна вредност a^4b^2c;
   в) коефициент 1 главна вредност b^2;
2. а) $4a^3b^3$; б) a^2b^4; в) $\frac{2}{3}b^8$.
3. а) $\frac{5}{2}a^6b^6$; б) $\frac{1}{25}a^8b^4$;
   в) $-\frac{4}{3}x^4y^4z^5$

4. а) $2a^2b$ б) $8a^4b^6$ в) $5x^2y$
г) x^3y^3 д) 1.

3

1. а) x^5+2x^3+2x+6
б) $2a^3+a^2b-b^3$
2. а) $\frac{1}{2}xy-x^2y^2$
б) $2a+2b+\frac{1}{2}ab-2a^2b^2$
3. $m=2,\ n=-3,\ p=1$

4

1. а) $x^4y^2-4x^3y^4+4x^2y^6$;
б) $8x^3y^6-12x^4y^4+6x^5y^2-x^6$.
в) $-\frac{27}{8}x^3+\frac{27}{2}x^2y-9xy^2+8y^3$.
2. а) $\frac{9}{4}x^2-y^2$ б) $c^2+6bc+9b^2-a^4$
в) $-125-\frac{1}{125}x^{12}$;
г) $\frac{27}{8}x^9+\frac{1}{64}x^6y^3$.
3. *Упатство:* а) Групирај ги членовите:
$\left(\underbrace{\left(2a^2b^2+ab\right)}_{A}-3\right)^2=\left(A-3\right)^2$ и на овој начин квадратот на триномот ќе се сведе на квадрат на бином.
4. а) $\frac{43}{12}b^2-\frac{9}{4}a^2$;
б) $-\frac{3}{2}a^4+a^3+b^4$; в) x^2+4.

5

1. а) $-3x^2-4xy-2y^2$;
б) $-8x^2y-5xy^2+2y^3$.
2. а) $2a^3-a^2-8a+4$;
б) количник $a^3-a^2-\frac{2}{3}a$ и остаток -1;

6

1. а) $x^3\cdot(16x-y)$;
б) $2y\cdot(-x+10a)$;
в) $\frac{5}{3}x^5\cdot\left(4x^{10}+2x^5-1\right)$.

в) количник $-x^3-2x^2+2x-4$ и

остаток $\frac{9}{2}x-7$;

г) количник $4y^3-3y^2+y-\frac{39}{4}$ и

остаток $-\frac{37}{16}$.

2. а) $\left(x^2+y^2\right)(2a-b)$
   б) $(2a-b)(-b)$;
   в) $\left(y^2-y-\right)(x-1)(x+1)$.
   г) $(y-4)(b+a)$
3. а) $\left(2-ax^2\right)(2+ax)$;
   б) $3(3x-y)(5x-2y)$;
   в) $(a-3)(x-5+y)$.
   г) $(7b-3c)(4a-3)$
4. а) $(x+2)\left(x^2+3x-4\right)$
   б) $7a^2b(a+c)(b-2d)$
   в) $(x+y)\left(y^2-3y+1\right)$

7

1. а) $(x-5y)(x+5y)$;
   б) $(x-3-9y)(x-3+9y)$;
   в) $(x+3y-5)(x-3y+7)$;
   г) $(n-5m)(5n-m)$.
2. а) $(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)$;
   б) $(1-3x)\left(1+3x+9x^2\right)$;
   в) $\left(4x^2-3y\right)\left(16x^4+12x^2y+9y^2\right)$.
3. а) $(3-y)(3+y)(2x-1)$;
   б) $(2x-3)(2x+3)(y+1)\left(y^2-y+1\right)$
   в) $(a-1)^2(a+1)\left(a^2+a+1\right)$
4. а) $4(a-1)\left(a^2+a+1\right)$;

б) $(2b-3a)\left(4b^2+6ab+9a^2+2b+3a\right)$

в) $\left(9+x^2\right)(3+x)(3-x)$

8

1. а) $(x-9)^2$; б) $\left(3a-\frac{1}{2}b\right)^2$ в) $(3b-5)^2$
2. а) $2(a+1)^2$; б) $\frac{1}{2}(a+4)^2$;
   в) $\frac{1}{3}(x-3)^2$.
3. а) $5(a-b-1)(a-b+1)$;
   б) $\left(x+\frac{1}{4}-y\right)\left(x+\frac{1}{4}+y\right)$;
   в) $(3x-y-1)(3x-y+1)$.
4. а) $-(b-c)^2(b+c)^2$;
   б) $(x+y+z)(x+y-z)$;
   в) $-\left(5y^2-2x^2\right)^2$.

9

1. а) x^2y; б) $(x-3y)$;

10

1. $a) x\neq 1-y$; $б) b\neq\frac{2}{7}$; $в) \forall x\in \mathbb{R}$;

в) $(a-b)(a+b)$.

2. а) $12x^2y^2z^3$; б) $4(x-2y)(x+2y)^2$

в) $a(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$.

3. а) НЗД a^2+a+1;

НЗС $4x(a-1)(a^2+a+1)$;

б) НЗД $(x-2)$;

НЗС

$(x-2)(x+2)(3x+4)(x^2+4)(x^2-4x+4)$;

в) НЗД $(3-x)$;

НЗС $-(3-x)^3(3+x)(9+x^2)(1-2x)$;

$a \neq 0 \wedge b \neq 0$

г)

2. $а)\dfrac{3}{5xz}$; $б)\dfrac{3x}{x-2y}$; $в)\dfrac{ay-2y}{x}$

$(x+y)(x^4+y^4)$

г)

д) $\dfrac{x+y-z}{x-1}$.

11

1. а) $\dfrac{3b-2a}{3b}$; б) 0.
2. а) $\dfrac{2}{(a-b)}$; б) $\dfrac{x}{2y(x-2y)}$.
3. а) 1; б) $1-a$; в) $x+y$.
4. а) $\dfrac{1}{x^2(x+2)^2}$; б) $\dfrac{(1+a)^3}{(a+3)^6}$.
5. $\dfrac{1}{(1-a)(a+3)}$

12

1. а) x^{10}; б) x^6.
2. а) 37 б) 0 в) 20 г) 7
3. $\dfrac{2}{3}x^4y^2$
4. -21
5. а) $xy\left(y-\dfrac{17}{20}x\right)$ б) $-4a^2+25$.
6. а) $3x+2$ б) $2x^2+3x+4$
7. а) $(a+3)(a-2)(a+2)$

   б) $3(a+3)(a^2+3a+9)$
8. $\dfrac{a-1}{a+1}$, $a \neq -1$; б) $a-1$; в) $\dfrac{1}{3x^2-y^2}$.
9. а) -1 б) $4b-1$.
10. а) $\dfrac{x+18}{x^2-9}$; б) 2; в) $-\dfrac{1}{2}x^2$.
11. а) $\dfrac{ab(a+2b)}{2}$ б) $\dfrac{16a-21}{3(a-3)}$.

Модуларна единица 4

1

1. а)
   $1220m^3 = 1220000dm^3 = 122\cdot 10^4\ dm^3$
   б) $1220dm^3 = 1,22m^3$
   в) 1260 ml
   г) 15,68 dl
2. 108 km/h
3. а) 25 000 g/m^3 б) $25\cdot 10^{-3}\ g/cm^3 = 0,025\,g/cm^3$
4. $5\cdot 10^5\ cm^2$
5. а) $0,25m^3$ б) 250 литри
6. а) 8100s б) 71h 13min 44s
7. 2035,06kg

2

1. а) 108/49 б) 136
   в) 108/490 г) 1,36
   д) 3/10 ѓ) 3/10
2. $a = 3b$
3. $a = b/7$
4. 16kg брашно
5. 2080 денари, 1360 денари, 960 денари, 3000 денари, соодветно.
6. 3200 ден., 2400 ден., 1800 ден. Соодветно.

3

1. Соодветно 12*kg*, 8*kg*, 6*kg*, 4*kg*, 3*kg*. Масата на купени домати и нивната цена се обратнопропорционални. Масата на купени домати и вкупната сума се правопропорционални.
2. 16 тони, 32 тони и 56 тони. Правопропорционална зависност
3. 15 камиони за два дена, 10 камиони за 3 дена, 5 камиони за 6 дена, 3 камиони за 10 дена, 2 камиони за 15 дена. Обратнопропорционална зависност.
4. Правопропорционални: а), б), в), д). Обратнопропорционални: г), ѓ).
5. а) 1000, 1500, 2500;

4

1. 420kg
2. 54 дена
3. 15t
4. Преостанатата работа ќе биде завршена за два дена, целата работа за 4 дена.
5. 15 дена

5

1. 640 стебла
2. 181 500 денари
3. 24 дена
4. 2 000 000 денари

6	7
1. 21,43% 2. 648 денари 3. 793,65 денари 4. 350cm 5. Марио решил 60% од задачите, треба да реши уште 9 задачи за да има решено 80%. 6. Целата смеса е 1100kg, вториот дел е 275kg, а третиот дел е 605kg. 7. 25 ученика правеле контролен тест.	1. 24 000 денари 2. 320 униформи 3. 130 ученика 4. 46,3 l/m^2 5. 8475 денари 6. 2800 лебови 7. 3250 лебови
8 1. 6% 2. 2 години 3. 33280 денари 4. 160 000 денари 5. 480 денари 6. 365 дена 7. 24 000 денари 8. K=55 000, i=3080 9. K=149949, i=2699 10. K=120020, i=1480	**9** 1. 32 056 денари, 33 101 денари и 34 843 денари 2. 18 000 денари 3. 210 937,5 денари 4. 8 дена 5. Новата цена е 7480 денари. 6. 62,5kg 7. 20 700 денари и 24 150 денари 8. 37,5% одлични, 25% многу добри, 18,75% добри, 12,5% доволни 9. 2,6 тони 10. 15 273 денари 11. 4 години

Модуларна единица 5

1	2
1. а) и в). 2. а) и в). 3. а) -4. 4. б) и в).	1. а) $x=-3$ или $x=3$; б) $x=-10$ или $x=10$; в) $x=-5$ или $x=5$;

5. а) $x=-1$; б) $x=-6$; в) $x=-\frac{5}{2}$; г) $x=\frac{17}{16}$. 6. а) За $a\neq-\frac{5}{2}$ равенката е решлива; За $a=-\frac{5}{2}$ равенката е невозможна. б) За $a\neq-4$ равенката е решлива; За $a=-4$ равенката има бесконечно многу решенија. 7. а) $a=1$; б) $a=7$.	г) $x=\frac{20}{7}$ или $x=-4$. 2. а) $x=0$ или $x=3$; б) $x=-\frac{5}{2}$ или $x=\frac{3}{4}$; в) $x=\frac{5}{3}$ или $x=3$; г) $x=0$ или $x=10$. 3. $x=-\frac{1}{2}$ или $x=\frac{3}{8}$.
3 1. а) $x=3$; б) $x=3$. 2. $x=8$, додека бројот е $\frac{8}{11}$. 3. $x=5$, додека бројот е 75. 4. 4 mg. 5. $x=36$. 6. Редовната цена на книгата е 500 ден.	**4** 1. а). 2.Да се решат неравенките: а) $x>1$, б) Неравенката нема решение; в) $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$; г) $x\geq-\frac{3}{10}$, 3. Да се решат линеарните неравенки: а) $x<1\frac{7}{11}$, б) $x\geq 47$, в) $x\leq\frac{5}{8}$, г) $x\leq-4$, 4. $x\leq 0$, 5.Најголемиот цел број што ја задоволува неравенката е -3.

6.Функцијата $f(x)$ е позитивна ако $x>5$. Функцијата $f(x)$ е негативна ако $x<5$. Нула на функцијата $f(x)$ е $x=5$.

5

1. а) $x<-\frac{2}{3}$; б) $x>\frac{2}{5}$;

в) Системот неравенки нема решение; г) $x>5$.

2. а) $(-\infty, -1]\cup[2, +\infty)$; б) $(-2, 5)$.

3. а) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$; б) $\left[-\frac{5}{2}, -1\right)$.

4. а) $-3\leq x\leq 3$; б) $-6<x<1$; в) $-9<x<9$; г) $-6\leq x\leq 14$.

6

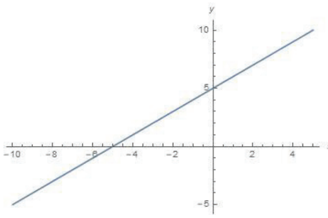
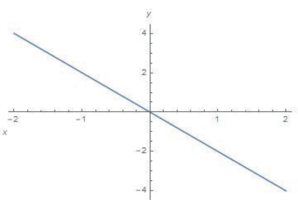
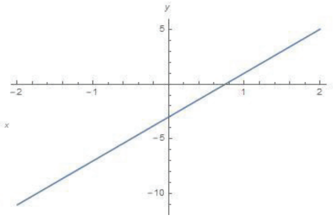
1. да
2. $\frac{33}{16}$
3. *a*=1
4. 2, $\frac{4}{3}$.
5. 63, 21
6. не се
7. $(-\infty, 20]$
8. $f(x)>0, x\in(-\infty,7)$; $f(x)<0, x\in(7,+\infty)$, нула во *x*=7.
9. $(-\infty,\frac{1}{2})$.
10. $(-\infty,-7]\cup[13,+\infty)$

Модуларна единица 6

1

1. а) $f(-1)=8$ б) $f(0)=3$ в) $f(p)=-5p+3$.
2. а) -2,1 б) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ в) 1,0.

3. а) б) в)

4. k=1.
5. $f(x) = -2x + 1$.
6. а) Графиците на линеарните функции се паралелни
   б) Графиците на линеарните функции минуваат низ координатниот почеток
   в) Графиците на линеарните функции минуваат низ точката (0,-3).

2

1. а) (2,0), (0,1) б) $(\frac{3}{5},0)$, (0,-3) в) $(\frac{1}{7},0),(0,-\frac{1}{7})$.
2. а) k=0б) k=0в) k>-1 г) k<-1 д) k=-1
3. не
4. k=1
5. $k=\frac{1}{3}$

3

1. (0,3),(-1,2)...
2. $3x - 3y = 2$
3. (1,1)
4. а) $\begin{cases} 105x + 100y = 14 \\ 49x + 35y = 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 34x - 6y = 35 \\ 14x - 63y = 10 \end{cases}$.

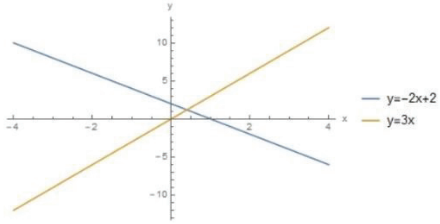
4

1. а) (1,1) б) (-82,-18) в) $(\frac{19}{126},\frac{23}{18})$
   г) $(1\frac{7}{16},\frac{3}{16})$.
2. а) $(5\frac{1}{4},21)$ б) $(4\frac{1}{20},-\frac{9}{20})$.

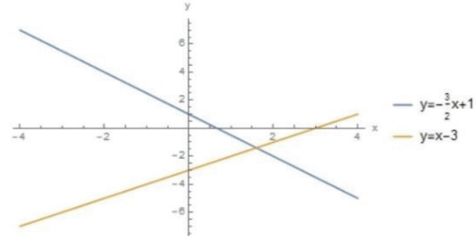
5

1. а) (1,1) б) $(\frac{12}{5},-\frac{3}{5})$ в) $(1\frac{7}{16},\frac{3}{16})$.

2. а)



б)



6

1. а) $\frac{2}{5}$ б) -9,02671 в) $\frac{a^2}{a-1}$.

2. а) (9,21) б) $(1\frac{13}{35},-1\frac{6}{7})$.

3. а) За $a \neq -2$ системот има единствено решение $x=a, y=-a$. За $a=-2$ има бесконечно многу решенија.

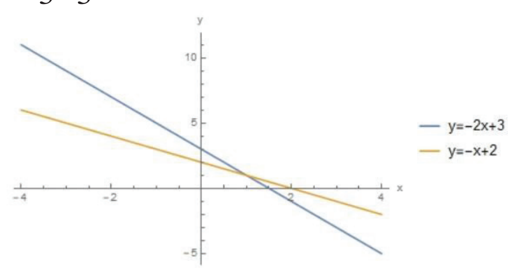
б) За $a \neq -3b$ системот има единствено решение $x=\frac{3}{a+3b}, y=\frac{3b-a}{a+3b}$. За $a=-3b$ системот нема решение.

7

1. $\frac{7}{9}$
2. 78
3. 12 кокошки и 15 прасиња.
4. 524, 3.
5. 9 часа и 6 часа, 540 км.
6. 30 и 2.
7. 8 часови и 12 часови.
8. 30 km/h и 28,8 km/h.

8

1. а) *k*=2 б) *k*=0 в) *k*>1 г) *k*<1 д) *k*=1.
2. *k*=3/2
3. а) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 2x-5y=-7 \end{cases}$
4. $(3\frac{1}{7},-4\frac{2}{7})$
5. $(21,5;19,5)$
6. $(3\frac{2}{3},\frac{2}{3})$



7.
8. (1,1)
9. За $k \neq 1$ има единствено решение. За $k=1$ нема решение.
10. а) 52 б) Од двата по 25 литра.

Модуларна единица 7:

1

2. Точка и права.
4. а) Претпоставка: Еден број е делив со 6;
Заклучок: тој број е делив со 2 и 3;
б) Претпоставка: Трапезот е рамнокрак;
Заклучок: Неговите дијагонали се еднакви.
в) Претоставка: Четириаголникот е паралелограм;
Заклучок: Неговите дијагонали се еднакви.
5. Упатство: а) и б) постои обратна теорема; в) обратното тврдење не е теорема.
6. а) Условна форма;   б) Категорична форма.
7. Претпоставка: Бројот е делив со 2 и 5. Заклучок: Бројот е делив со 10. Категорична форма: Бројот делив со 2 и 5 е делив и со 10.
8. Условна форма: Ако четириаголник е тетивен тогаш неговите спротивни агли се суплементни. Претпоставка: Четириаголникот е тетивен. Заклучок: Спротивните агли се суплементни.

2

3. 1, 5, 6, 8 или 10 прави
4. 1 точка
5. 1 или 4.

3

1. 4 полуправи, 2 пара на составни полуправи.
2. 8 полуправи, 4 пара на составни полуправи.
3. $\gamma = 140^0 17'13'', \delta = 89^0 46'47''$. Суплементниот на γ е $39^0 42'47''$, а на δ е $90^0 13'13''$.
4. $11^0 44'47''$ и $101^0 44'47''$
5. $\gamma = 53^0 15'54''$
6. Суплементни.

4

2. 10 отсечки,
3. 3 отсечки, формираат триаголник,
4. 12 дијагонали од едно теме и 90 вкупен број на дијагонали,
5. 18-аголник,
6. 1440^0
7. осумаголник

5

3. 15 cm
4. $45^0\ 35'\ 48''$
5. 120^0, 80^0, 100^0, 60^0.

6

1. Ако четириаголникот е тетивен тогаш неговите спротивни агли се суплементни.
Претпоставка: Четириаголникот е тетивен.

Заклучок: Спротивните агли се суплементни.
2.1, 4, 6.
3.40^0, 60^0, 80^0.
4.103^0 36’, 76^0 24’ .
5.6-аголник
6.54^0, 81^0, 108^0, 135^0, 162^0.
7.10-аголник, 7 дијагонали.
8.8 cm
9.Периферниот агол е $48^0 18'07''$, а централниот $96^0 36'14''$.
10. $114^0$35’, $54^0$26’.

Модуларна единица 8:

1

1. а) Периметарот ќе се зголеми 3 пати, а плоштината 9 пати.
   б) Периметарот ќе се намали 3 пати, а плоштината 9 пати.
2. $L=36\sqrt{2}cm$, $P=162cm^2$
3. $L=36cm$, $d=9\sqrt{2}cm$
4. $L=\left(12+12\sqrt{2}\right)cm$, $P=\left(27+18\sqrt{2}\right)cm^2$
5. $L=24\sqrt{3}cm$
6. $L=42cm$, $P=108cm^2$
7. 21cm и 14cm

2

1. 1,2cm и 0.8cm
2. 12cm
3. Дијагоналите се 25cm и 39cm
4. $L=204cm$, $P=2204cm^2$
5. 40,5cm^2
6. $P=120cm^2$

3

1. $P=12cm^2$, $L=16cm$
2. $L=18\sqrt{3}cm$, $P=27\sqrt{3}cm^2$
3. $L=30cm$ Упатство: од Хероновата формула имаме $144\cdot 5=s(s-7)(s-9)(16-s)$, т.е. $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=s(s-7)(s-9)(16-s)$ од каде согледуваме дека $s\geq 10cm$. s треба да го запишеме како производ од множители кои се јавуваат на левата страна. За $s=10cm$ равенството не е исполнето, а исполнето е за $s=15cm$.
4. $L=12cm$, $P=6cm^2$
5. $L=50cm$, $P=120cm^2$
6. $r=3cm$, $R=12,5cm$
7. $r=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}cm$, $R=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}cm$

8. $r = 3cm$, $R = 6,25cm$
9. $c = 6\sqrt{34}cm$
10. $L = 60cm$, $P = 150cm^2$

4

1. $b = 14cm$, $m = 24cm$
2. $a = 16cm$, $b = 9cm$
3. $P = 276cm^2$
4. $L = 62cm$, $P = 204cm^2$
5. Упатство: со дијагоналата $\overline{AC}$ трапезоидот е поделен на два триаголника чии плоштини можете да ги пресметате со Хероновата формула.
6. $L = 32cm$, $P = \left(12 + 12\sqrt{7}\right)cm^2$
7. $L = 128cm$

5

1. $R = 6,5cm$, $L = 52cm$, $P = 169cm^2$
2. $r = 3\sqrt{2}cm$, $L = 24\sqrt{2}cm$, $P = 72cm^2$
3. $d = 14cm$, $P = 24\sqrt{10}cm^2$
4. $d_1 = 12cm$, $d_2 = 16cm$, $P = 96cm^2$
5. $r = 4\sqrt{2}cm$, $P = 64cm^2$
6. $L = 48cm$
7. $P = 18cm^2$

6

1. $L = 21cm$, $P = 42cm^2$
2. $L = 88cm$, $P = 132cm^2$
3. $L = 40\sqrt{3}cm$, $P = 200\sqrt{3}cm^2$
4. Централниот и надворешниот агол се по 40^0, внатрешниот агол е 140^0.

7

1. $L = 10\pi\, cm$
2. 2. $L_1 = 10\pi\, cm$, $P_1 = 25\pi\, cm^2$, $L_2 = 5\sqrt{2}\pi\, cm$, $P_2 = \frac{25}{2}\pi\, cm^2$
3. $L_1 : L_2 = 2:3$, $P_1 : P_2 = 4:9$
4. $R = 4\, cm$
5. $R_1 = 2R_2$
6. $L_1 = 4\sqrt{5}\,\pi\, cm$, $P_1 = 20\pi\, cm^2$, $L_2 = 6\sqrt{5}\,\pi\, cm$, $P_2 = 45\pi\, cm^2$
7. $L = 6\sqrt{3}\,\pi\, cm$, $P = 27\pi\, cm^2$

8	9
1. $l = \frac{17\pi}{4} cm$ 2. $l = 3{,}1\pi\, cm$ 3. $\alpha = 92^0 44'$ 4. 4cm 5. 13cm и 7cm 6. $18\pi cm^2$ 7. $P = 18{,}5\pi\, cm^2$ 8. $r = 14cm$, $P = 196\pi\, cm^2$ 9. $\alpha = 146^0 15'$ 10. $P = \frac{162\pi - 243\sqrt{3}}{12} cm^2$	1. Страните се 7cm и 4cm. 2. $L = 34cm$ 3. $P = \frac{128}{3} cm^2$ 4. $P = 32\sqrt{3}\, cm^2$ 5. $a = 32cm$, $b = 28cm$, $P = 64\sqrt{3}\, cm^2$ 6. $a = 6cm$, $h = 12cm$ 7. $P = 27\sqrt{3}\, cm^2$ 8. $L = 388{,}7cm$, $P = 8316cm^2$ 9. $L = 10\pi\, cm$ 10. $r = 14cm$ 11. $r = 2\sqrt{13}\, cm$