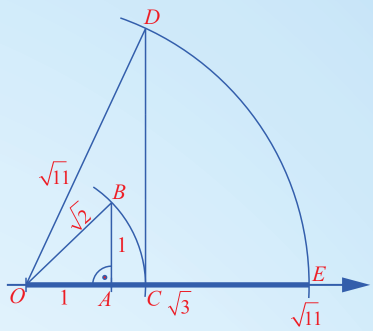
Bilyana Kırsteska

Yasmina Markoska

MATEMATİK

Dört yıllık mesleki liseler birinci sınıfları için
Ders kitabı



Sağlık mesleği

Tarım-veterinerlik mesleği

Tekstil-deri mesleği

Kişisel hizmetler

Ormancılık ve odun işletme mesleği

Bilyana Kırsteska **Yasmina Markoska**

M A T E M A T İ K

Dört yıllık mesleki liseler birinci sınıfları için
Ders kitabı

Sağlık mesleği
Tarım-veterinerlik mesleği
Kişisel hizmetler
Tekstil-deri mesleği
Ormancılık ve odun işletme mesleği

Üsküp, 2022

Bilyana Kırsteska **Yasmina Markoska**

MATEMATİK

Dört yıllık mesleki liselerin birinci sınıfları için

(Sağlık, Ziraat-veterinerlik mesleği, Kişisel hizmetler, Tekstil-deri mesleği, Ormancılık-ahşap işleme mesleği)

Yorumcular

Dr. Marija Orovçanec
Doğa Bilimleri ve Matematik Fakültesi, Üsküp
Violeta Peşevska
OMBO "Kiro Burnaz", Kumanova
Rade Krenkov OMBUD "Dimitar Vlahov", Ustrumca

Orijinal baskının başlığı:
МАТЕМАТИКА
за I година на средното стручно
четиригодишно образование
Здравствена струка
Земјоделско-ветеринарна струка
Лични услуги
Текстилно-кожарска струка
Шумарско-дрвопреработувачка струка
Билјана Крстеска
Јасмина Маркоска

Yayımcı
Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı
"Az.Kiril ve Metodiy" Sok.no. 54, 1000 Üsküp

Makedonca'dan Türkçe'ye çeviri:
Abdülgani Ali
Mesleki redaksiyon:
Doç Dr Aybeyan Selim
Uluslararası Vizyon Üniversitesi, Gostivar
Lektör:
Bedri Nuredin
Grafik ve teknik tasarım:
Elena Stefanovska
Başım yeri ve yılı: Üsküp, 2022

İllüstrasyonlar: Yazarlar

Dört yıllık mesleki liselerin I sınıfları için (Sağlık mesleği, Tarım-veterinerlik mesleği, Kişisel hizmetler, Teks l-deri mesleği, Ormancılık ve odun işlemtme mesleği) MATEMATİK ders kitabının onaylanması no. 26- 2024/1 ve 9.11. 2020 tarihli kararı ile Milli Komisyonu tara ndan ders kitabı olarak kabul edilmiş r.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)

KIRSTESKA, Bilyana
Matematik dört yıllık mesleki liselerin birinci sınıfları için [Електронски извор] : (Sağlık, Ziraat-veterinerlik mesleği, Kişisel hizmetler, TeksƟl-deri mesleği, Ormancılık-ahşap işleme mesleği) / Bilyana Kırsteska, Yasmina Markoska ; [Makedonca'dan Türkçe'ye çeviri: Abdülgani Ali]. - Текст во ПДФ формат, содржи 172 стр., табели. - Üsküp : Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı, 2022

Начин на пристапување (URL): https://www.e-ucebnici.mon.gov.mk/pdf/Matematika_1_turski.pdf,. - Наслов преземен од екран. - Превод на делото: Математика за I година на средното стручно четиригодишно образование : Здравствена струка Земјоделско-ветеринарна струка Лични услуги Текстилно-кожарска струка Шумарско-дрвопреработувачка струка / Билјана Крстеска, Јасмина Маркоска

ISBN 978-608-273-055-4

1. Markoska, Yasmina [автор]

COBISS.MK-ID 57961477

İÇİNDEKİLER

Ö N S Ö Z

Meslek liselerin I sınıfları için zorunlu ders olarak kabul edilen **MATEMATİK** ders kitabı dört yıllık mesleki eğitim müfredatına göre yazılmıştır. Kullanılacağı meslekler Sağlık bölümü, Tarım-veterinerlik mesleği, Kişisel hizmetler, Tekstil-deri mesleği ve ormancılık ve ağaç işleme mesleği öğrencilerine yöneliktir.

Yazarlar, programın amaçlanan içeriklerinin gerçekleştirilmesi için didaktik-metodolojik talimatlara uygun şekilde işlemeye çalıştılar.

Ders kitabı modüler olarak tasarlanmış ve sekiz konu birimini kapsamaktadır, bunlar:

- Matematiksel mantık ve kümeler
- Gerçek sayılar
- Rasyonel cebirsel ifadeler
- Büyüklüklerin orantılılığı
- Lineer denklemler, eşitsizlikler ve lineer eşitsizlik sistemleri
- Lineer fonksiyon ve iki bilinmeyenli lineer denklem sistemi
- Düzlemde geometrik şekiller
- Düzlemsel şekillerin alanı ve çevresi

Her öğretim konusuna ait içerikler incelenerek işlenir ve genel olarak, çözülmüş örnekler ve çizimlerle gösterilerek açıklanmıştır. Her öğretim biriminin sonunda, okulda veya evde kendi başına çalışmak için ödevler verilmiştir. Bunlar okuldaki dersin devamı olarak incelenen konuyu daha iyi bellemek için uygun alıştırma ve poroblemler biçiminde verilmiştir. Ders kitabının sonunda alıştırmaların çözümü verilmiş ve yazarların seçtikleri belli problemlerin çözümüne ait tavsiyeler de gösterilmiştir.

Yazarlar, herhangi bir iyi niyetli eleştiri için veya içeriği geliştirmek için yapacakları tavsiyeler için şimdiden minnettar olacaklar. Çünkü bu kitap, öğrencilerin matematiği daha çok sevmelerine ve onun sırlarını keşfetmeye teşvik edecektir.

Mart, 2020 Yazarlar

1. MATEMATİKTE MANTIK VE KÜMELER

1.1. Önerme Kavramı

İnsanlar her gün birbiriyle konuşurken, anlatısal (bildirimsel), sorgulayıcı, komut edici, ünlem niteliğinde olabilen cümleler kurarlar . Matematiğin ilgi odağı, iki olasılıktan birinin geçerli olduğu bildirim cümleleridir, yani. ifade doğrudur (doğru) veya doğru değildir (yanlış) olan ifadelerdir.

Örnek 1. Aşağıdakiler bildirim cümleleridir:

a) Üsküp vatanımızın başkentidir.

b) 1 tek sayıdır

c) $4 < 2$

ç) $2^2 + 3^2 = 5^2$ ve bunların her biri için doğru (a) ve b) şıklarındakiler gibi) veya doğru değildir (c) ve ç) şıklarındakiler gibi) ♦

Tanım. Doğruluğu veyayanlış olduğu kesinlikle belli olan bildirim cümlesine **önerme** denir.

Her bildirim cümlesi daima önerme değildir.

Örnek 2. Şu tümceler:

a) Matematik en iyi derstir

b) Cuma günü herkez mutludur

c) $5x - 2 > 3$

önerme değildirler, çünkü bu iddialar bazı defa doğru bazı defa yanlış olabilirler. ♦

Alıştırma 1. Verilen cümlelerden hangileri önerme olduğunu belirtiniz. Cevapları açıklayınız!

a) Ancak ve ancak ölçüleri toplamı 180^o olan açılar bütünler açılardır

b) Eylül, yılın en güzel ayıdır

c) $x + 7 = 11$

ç) 16 asal sayıdır

Çözüm. a) doğru önermedir, b) Önerme değildir, çünkü bazılarına göre eylül yılın en güzel ayı değildir, c) önerme değildir, çünkü $x = 4$ için, $4 + 7 = 11$, $x = 5$ için ise, $5 + 7 \neq 11$ dir, ç) doğru olmayan bir önermedir, çünkü asal sayının tam iki böleni vardır, 16 sayısının ise 5 tane böleni vardır. ♦

Her önermeye **doğru** veya**yanlış** değerlerden sadece biri verilebilir: ($\top$ işaretiyle tam diye oku) veya($\perp$ işaretiyle yanlış diye oku). Bu değerlere, önermenin **doğruluk değeri** denir, onlara karşılık gelen ifadelere de doğru veyayanlış önerme denir.

Önermeleri genellikle latin alfabesinin küçük harfleriyle: $p,q\ r\ s\ t$, , , ,... , işaret eder ve bir önermenin doğruluk değeri için τ, oku:„ тау" harfini kullanacağız.

Örnek 3. p önermesi, 1 tek sayıdır (p: 1 tek sayıdır biçiminde yazılır). Bu durumda ifadeyi $\tau(p) = \top$ biçiminde yazarak p önermesinin doğru önerme olduğu ifade edilir. ♦

Alıştırma 2. Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) p:$122 - 11 = 12$

b) q:$2x + 5 = 3$, $x = -1$ için

c) r :$2^4 = 4^2$

Çözüm. $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \top$ ve $\tau(r) = \top$.♦

Örnek 4. p : 2 çift sayıdır ve q : 2 sayısı 10 sayısının bölenidir önermeleri verilmiş olsun. Onları kullanarak şu tümceler oluşturulabilir:

a) 2 sayısı 10' un böleni değildir

b) 2 çift sayıdır ve 2 sayısı 10'un bölenidir

c) 2 çift sayıdır veya 2 sayısı 10'un bölenidir

ç) Eğer 2 çift sayı ise, 2 sayısı 10'un bölenidir

d) 2 çift sayıdır, ancak ve ancak 2 sayısı 10'un böleni ise.

Bu durumda, tümcelerin oluşturulmasında "değil", "ve", "veya", "eğer-ise", "ancak ve ancak" bağlaçları kullanılmıştır. Bu şekilde p ve q **temel** (basit) önermelerden **bileşik** önermeler meydana getirmiş oluyoruz.

Temel önermelerden bileşik önermelerin elde edilme işlemine **mantık işlemi** denilir. ♦

Alıştırmalar

1. Şu tümcelerden hangileri önermedir?

a) Herkez sarı rengi seviyor

b) $9 = 2 + x$

c) $x = 3$ için, $9 = 2 + x$ dir.

ç) Her doğal sayı a ve b için, $a + b = b + a$, dır.

2. Şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $2 \mid 15$

b) 19 asal sayıdır

c) 45 sayısı, 9 ve 15 in en küçük ortak katıdır

ç) $\frac{3}{5} > \frac{5}{3}$

3. Doğruluk değerleri belirtiniz:

a) $\tau\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{4+3}\right)$

b) $\tau(3 \mid 21)$

c) $\tau(-5 > -2)$

ç) $\tau(0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6)$

4. Verilen önermelerden hangisi basit, hangisi ise bileşik olduğunu belirtiniz?

a) Her eşkenar dörtgende köşegenler birbirine diktir ve birbirini yarıya böler.

b) İkizkenar üçgenin taban açıları birbirine eşittir.

c) Bir sayının son rakamı 0 veya5 ise, o sayı 5 ile bölünür.

ç) 14 sayısı 2 ile bölünür fakat 4 ile bölünmez.

1.2. Önermelerle işlemler

Değilleme

Çok kez verilen bir iddiaya ters olan iddiayı yazmamız gerekebilir. Bu şekilde verilenin anlamına ters olan yeni bir önerme elde etmiş oluyoruz.

Örnek 1. p : 7 çift sayıdır önermesi verilmiş olsun. Bunun ters iddiası değilleme ile elde edilir, yani „ hayır, 7 çift sayı değildir“ veya „7 çift sayı değildir“ veya „7 tek sayıdır“.♦

Böyle durumlarda p önermesinin **değilini (olumsuzunu)** elde etmiş oluyoruz ve $\neg p$ (oku: „değil p “) biçiminde yazıyoruz.

Tanım. p önermesinin değiline $\neg p$ önermesi denir ve p yanlış olduğu durumda $\neg p$ doğrudur ve tersine.

Diğer sözlerle $\tau(p) = \top$ ise, $\tau(\neg p) = \perp$ tır ve tersine. Buna göre değillemenin şu **değerlerinin doğruluk tablosunu** oluşturabiliriz:

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

ya da

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Örnek 2. p : 5 asal sayıdır önermesi verilmiş olsun. Bu durumda $\neg p$: „5 asal sayı değildir “ önermesidir, $\neg\neg p$ önermesi ise „Doğru değildir ki 5 asal sayı değildir“.
Son önerme, p önermesine ait iddiayı doğrulamaktadır. O halde $\neg\neg p = p$ geçerlidir.♦

Alıştırma 1. Verilen önermelerin değilini yazınız:

a) p : Kare bir dikdörtgendir
b) $q : 2 = 3$
c) r : 4 bileşik sayıdır
ç) $s: 5 > 8$

Çözüm. a) $\neg p$: Kare dikdörtgen değildir, **b)** $\neg q: 2 \neq 3$, **c)** $\neg r$: 4 bileşik sayı değildir ve **ç)** $\neg s$: 5 sayısı 8 den büyük değildir, yani $5 \leq 8$.♦

Alıştırma 2. Verilen önermelerin değilini oluşturunuz ve elde edilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $p: 0 \in \mathbb{N}$
b) q: $\frac{1}{2}$ rasyonel sayıdır
c) $r : 2- < -1$
ç) $s: 3 \notin \mathbb{Q}$

Çözüm. a) $\neg p : 0 \notin \mathbb{N}, \tau(\neg p) = \top$, **b)** $\neg q$: $\frac{1}{2}$ rasyonel sayı değildir, $\tau(\neg q) = \perp$, **c)** $\neg r : -2 \geq -1, \tau(\neg r) = \perp$, **ç)** $\neg s : 3 \in \mathbb{Q}$, $\tau(\neg s) = \top$.♦

<u>‘‘ve’’ Bağlacı (konyuksiyon)</u>

p : 25 bileşik sayıdır, q: 5 sayısı 25’in bölenidir, önermeleri verilmiş olsun. Bu durumda ve bağlacını kullanarak, 25 bileşik sayıdır ve 5 sayısı 25’in bölenidir önermesini elde edebiliriz. Bu şekilde p ve q önermelerinin **konyuksiyonu** denilen bileşik önerme elde edilmiştir. Bu durumda $p \wedge q$ (oku „ p ve q “) biçiminde yazıyoruz.

Tanım. p ve q önermelerinin konyuksiyonu „ve“ bağlacıyla elde edilen bileşik önermedir .

Ve bağlacıyla elde edilen bileşik önerme, her iki önermenin doğru olduğu durumda doğrudur. Diğer durumlarda önerme yanlıştır (doğru değildir).

Konyuksiyonun doğruluk tablosu şu şekilde ifade edilebilir:

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Alıştırma 3. p : 11| 451, q : 3+1 = 5 ve r : 3 $\in \mathbb{N}$ önermeleri veriliyor. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \wedge q$
b) $p \wedge r$
c) $q \wedge r$,
ondan sonra onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

Çözüm. a) $p \wedge q$: 11| 451 ve 3+ 1= 5 , $\tau(p \wedge q) = \perp$, çünkü q yanlış önermedir.
b) $p \wedge r$:11| 451 ve 3 $\in \mathbb{N}$, $\tau(p \wedge r) = \top$, çünkü her iki önerme yanlıştır.
c) $q \wedge r$: 3 + 1 = 5 ve 3 $\in \mathbb{N}$, $\tau(q \wedge r) = \perp$, çünkü her iki önerme yanlıştır. ♦

<u>“veya” bağlacı (disyunksiyon)</u>

p : 14 sayısı 7 ile bölünür ve q :14 sayısı 2 ile bölünür önermeleri verilmiş olsun. Bu durumda “veya” bağlacıyla 14 sayısı 7 ile bölünür veya14 sayısı 2 ile bölünür önermesi elde edilebilir. Bu ifade bileşik önermedir ve buna p ve q önermelerinin disyunksiyonu denir ve $p \vee q$ (oku „ p veya q “) biçiminde işaret edilir.

Tanım. p ve q önermelerinin disyunksiyonu $p \vee q$ önermesidir. Bu önerme p ve q önermelerinin „veya“ bağlacıyla birleştirilmesiyle elde edilir.

Önermelerden en az biri doğru iken disyunksiyon doğrudur.

Buna göre disyunksiyona ait şu değerlerin doğruluk tablosunu oluşturabiliriz:

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Alıştırma 4. p: $3< 3$, q: $3 = 3$ ve r :$3 > 3$ önermeleri veriliyor. $p\vee q$, $q \vee r$ ve $p\vee r$ önermelerini (disyunksiyonlarını) belirtiniz. Ondan sonra onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

Çözüm. $p\vee q$:$3< 3$ veya $3 = 3$ yani $3\leq 3$, $\tau\left(p \vee q\right) =$ T , çünkü q önermesi doğrudur. $q\vee r$:$3 = 3$ veya $3 > 3$ yani $3 \geq 3$, $\tau\left(q \vee r\right) =$ T, çünkü q önermesi doğrudur. $p\vee r$:$3< 3$ veya $3 > 3$, $\tau\left(p \vee r\right) =\perp$, çünkü her iki önerme yanlıştır. ♦

<u>“ya da” bağlacı</u>

Konuşmalarda çok kez veya bağlacının istisnai anlamını ifade eden cümleler kullanırız. Böyle durumda iki iddiadan sadece biri doğru olan cümleler elde edilir.

Tanım. Ya da bağlacı $p\underline{\vee}q$ (oku: ya p ya da q), p ve q önermelerinden oluşan bileşik önermedir.

Ya da bağlacıyla oluşan bileşik önerme, p ile q önermelerinden yalnız biri doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.
O halde, ya da bağlacı ile oluşan bileşik önermenin doğruluk tablosu şu şekilde gösterilebilir:

p	q	$p\underline{\vee}q$
T	T	$\perp$
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Alıştırma 5. p: $2 > 2$ ve q:$2 < 2$ önermeleri veriliyor. $p\underline{\vee}q$ önermesini oluşturunuz ve onun doğruluk değerini belirtiniz.

Çözüm. $p\underline{\vee}q$: ya $2 > 2$ ya da $2 < 2$ ve $\tau\left(p \underline{\vee} q\right) =\perp$, çünkü her iki ifade doğru değildir. ♦

<u>Gerektirim</u>

Şu koşullu tümceyi inceleyelim: eğer 46 çift sayı ise 46 sayısı 2 ile bölünür. Farkedildiği gibi, bu tümce iki basit önermeden meydana gelmiştir; p: 46 çift sayıdır ve q : 46 sayısı 2 ile bölünür ve bu iki önerme “eğer … ise…” sözcükleriyle birleştirilmiştir.

Tanım. p ve q önermelerinin "eğer … ise …" sözcükleriyle bağlanmasından oluşan bileşik önerme p ve q önermelerinin gerektirimi denir ve $p \Rightarrow q$ biçiminde yazılır (oku: p ise q).

$p \Rightarrow q$ gerektirimi ancak p doğru ve q yanlış iken yanlış, diğer durumlarda gerektirim doğru olarak tanımlanır.

Buna göre, gerektirimin doğruluk tablosu aşağıda gösterilmiştir:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

Alıştırma 6. $p : 6 \mid 18$, $q : 6 \mid 21$ ve $r : 6 \mid 36$ önermeleri veriliyor. Şu gerektirimleri oluşturunuz:

a) $p \Rightarrow q$
b) $q \Rightarrow r$
c) $r \Rightarrow p$, ondan sonra onların doğruluk değerlerini belirtiniz.

Çözüm. a) $p \Rightarrow q$: $6 \mid 18$ ise $6 \mid 21$, $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$, çünkü p doğru , q ise yanlıştır.

b) $q \Rightarrow r$: $6 \mid 21$ ise $6 \mid 36$, $\tau(q \Rightarrow r) = \mathrm{T}$, çünkü q yanlış, r ise doğru önermedir,

c) $r \Rightarrow p$: $6 \mid 36$ ise $6 \mid 18$, $\tau(r \Rightarrow p) = \mathrm{T}$, çünkü her iki önerme doğrudur. ♦

$p \Rightarrow q$ gerektiriminde, p önermesine **varsayım (koşul ya da hipotez)**, q önermesine ise **hüküm (sonuç)** denir. $p \Rightarrow q$ gerektirimini şu şekilde de okuyabiliriz:

a) p den q gerekir
b) p gerektirir q
c) p, q için yeter şarttır
ç) q, p için gereken şarttır.

<u>Çift gerektirim (denklik)</u>

$4 \mid 20$ ancak ve ancak $20 : 4 = 5$ önermesini inceleyelim. Bu önerme $p : 4 \mid 20$, $q : 20 : 4 = 5$ önermelerinden ve ancak ve ancak sözcüklerinden oluşan bir bileşik önermedir.

Tanım. $p \Leftrightarrow q$ (oku: p ancak ve ancak q) bileşik önermesine p ve q önermelerinin iki yönlü çift gerektirimi (iki yönlü koşullu önerme) denir.

İki yönlü koşullu önermenin doğruluk değeri, her iki önermenin doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

Çift gerektirimin doğruluk değerlerinin tablosu aşağıda gösterilmiştir:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Alıştırma 7. Verilen çift gerektirimlerden hangileri doğru olduğunu belirtiniz.

a) $p \Leftrightarrow q$: -5 doğal sayıdır, ancak ve ancak -5 tam sayı ise

b) $r \Leftrightarrow s$: $2 < 3$ ancak ve ancak $-2 > -3$

Çözüm. a) doğru önerme değildir $\tau(p) = \perp$ ve $\tau(q) = \top$, **b)** doğru önermedir, çünkü her iki önerme doğrudur. ♦

Mantık işlemlerin özellikleri

1. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ çift gerektirimin değişme özelliği,

2. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ veya işleminin değişme özelliği,

3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ve işleminin birleşme özelliği,

4. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ veya işleminin birleşme özelliği,

5. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ ve $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ve işleminin veya işlemi üzerine sağ ve sol dağılma özelliği,

6. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ve $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ veya işleminin ve işlemi üzerine sağ ve sol dağılma özelliği,

7. $\tau(p \vee \neg p) = \top$ üçüncüsünün istisna kanunu,

8. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ gerektirimi değiştirme kanunu,

9. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ çift gerektirimi değiştirme kanunu,

10. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ve işleminin değillemesine ait De Morgan kanunu,

11. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ veya işleminin değillemesine ait De Morgan kanunu.

Alıştırmalar

1. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} \wedge \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$

b) $\neg\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}\right)$

c) $2^3 + 2^2 = 2^5 \vee 2+3 = 5$

ç) $3 < 5 \underline{\vee} -3 > -5$

d) $28 = 7 \cdot 4 \Rightarrow 4 | 28$

e) $(56 - 24) + 32 = 56 - (24 + 32) \Leftrightarrow 2 = 3$

2. Hesaplayınız:

a) $\tau(4 - 2 = 6 \wedge 6 + 2 = 4)$

b) $\tau(\neg\neg(5 > 3))$

c) $\tau(3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 3 + 4 > 5)$

ç) τ ($\alpha+\beta= 90^\circ \Rightarrow \gamma= 90^\circ$), α, β ve γ üçgenin açılarıdır.

3. p : Her karede köşegenler birbirine eşittir, q: Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirine diktir ve r : Her yamukta köşegenler birbirine eşittir önermeleri veriliyor. Şu önermeleri oluşturunuz:

a) $p \Leftrightarrow r$

b) $q \vee r$

c) $r \Rightarrow p$,

ondan sonra onların doğruluk değerini belirtiniz.

4. $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$ ve $\tau(r) = \bot$ olsun. Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:

a) $r \Rightarrow p$

b) $q \vee p$

c) $q \Leftrightarrow r$

5. Aşağıdakilerde $\tau(p)$ nin değerini belirtiniz:

a) $\tau(\neg p) = \top$

b) $\tau(p \wedge q) = \bot$ ve $\tau(q) = \top$

c) $\tau(p \vee q) = \bot$ ve $\tau(q) = \top$

ç) $\tau(p \Rightarrow q) = \bot$ ve $\tau(q) = \bot$

d) $\tau(p \Leftrightarrow q) = \bot$ ve $\tau(q) = \top$

e) $\tau(p \veebar q) = \bot$ ve $\tau(q) = \top$

1.3. Önerme formülleri

$(p \Rightarrow q) \vee (\neg p \Leftrightarrow r)$ bileşik önermesinde, ($p, q, r, s, \ldots$) gibi sonlu sayıda önerme, ($\neg, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$) gibi mantık işlemleri ve belli sayıda parantezler bulunmaktadır. Bu gibi önermelere **önerme formülleri** denir. Önermeler yerine bileşik önermeler de söz konusu olabilir. Bu yüzden onlara **önerme değişkenleri** de diyeceğiz, $\top$ ve $\bot$ doğruluk değerlerine ise **önerme sabitleri** diyeceğiz.

Tanım. 1) $p, q, r, s, \ldots$önerme değişkenlerine ve $\top$ ve $\bot$ önerme sabitlerine temel önerme formülleri denir.

2) A ve B önerme formülleri ise,

$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ ifadeleri de önerme formülleridir.

3) Tüm önerme formülleri 1) ve 2) nin sonlu uygulamasıyla elde ediliyorlar.

Örnek 1. $\neg p \Leftrightarrow q$, $p \Rightarrow (\neg q)$ önerme formülleridir, fakat $p \vee$, $\wedge \neg p$ önerme formülleri değildir ♦

Önerme formüllerini yazarken bazı kuralları uygulamalıyız:

1) Dış parantezlerin yazılması zorunlu değildir.

Örnek 2. $((p \wedge q) \vee r)$ formülü $(p \wedge q) \vee r$ biçiminde yazılır ♦

2) Formülün yazılışını sadeleştirmek için, mantık işlemlerinin yapılış sırasının öncülüğünü göz önünde bulunduruyoruz. Önce $\neg$ işlemi, ondan sonra $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ işlemleri yapılır.

Örnek 3. $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow (\neg\, p \vee r))$ formülünde parantezleri göz ardı edebiliriz ve $p \Leftrightarrow q \Rightarrow \neg\, p \vee r$ biçiminde yazabiliriz, çünkü öncülük kuralına göre önce $\neg p$ nin doğruluk değerini, ondan sonra $\neg p \vee r$, ardından gerektirim ve sonunda çift gerektirim uygulanır.♦

Bir önerme formülünde, önerme değişkenlerinin doğruluk değerleri değiştirildiği durumda, önerme formülünün doğruluk değeri elde edilir. Bu durumda değişkenlerin mümkün olan tüm doğruluk değerleri değiştirildiğinde o formülün değerler tablosunun doğruluk değeri elde edilecektir. Değişkenlerin tüm mümkün durumlarının sayısı, değişkenlerin sayısına bağlıdır. Bir önerme formülünde n değişken varsa, mümkün durumların sayısı 2^n olacaktır. Genel olarak, herhangi bir önerme formülünü işaret etmek için $F\ G\ H$ gibi alfabemizin büyük harflerini kullanıyoruz.

Örnek 4. $F : \neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$ formülüne ait doğruluk değerler tablosunu oluşturunuz.♦

Bu önerme formülünün iki değişkeni olduğuna göre, mümkün tüm sonuç sayısı 4 tür. Tabloda her mantık işlemi için , işlemlerin öncelik sırasına göre sütunlar katılmalıdır. Bu şekilde şu tabloyu elde ediyoruz:

p	q	$\neg p$	$\neg\, p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg\, p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥	T	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	T	T

<u>Önerme formüllerin çeşitleri</u>

Bir önerme formülü bileşenlerinin bütün doğruluk değerlerine karşılık daima doğru değerini alıyorsa bu bileşik önermeye **totoloji** denir. Bir önerme formülün bileşenlerin bütün doğruluk değerlerine karşılık daima yanlış değerini alıyorsa bu bileşik önermeye **çelişki** denir. Bir önerme formülün bileşenlerin bazı değerleri için doğru, bazı değerler için ise yanlış değerini alıyorsa bu bileşik önermeye **tarafsız** denir.

Alıştırma 1. Verilen önerme formülünün cinsini belirtiniz:

a) $F : p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$

b) $G : (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\, p \Leftrightarrow q\,)$

Çözüm. a)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$	$p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$
T	T	⊥	⊥	T	T	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	T	⊥	T
⊥	⊥	T	T	T	⊥	T

Bu önerme formülü totolojidir.

b)

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	G
T	T	⊥	T	T	T	T	T
T	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	T	T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T	⊥

Bu önerme formülü tarafsızdır. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen önerme formülünün cinsini belirtiniz.

a) $F : \neg p \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

b) $G: p \vee \neg q \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$

2. Verilen formüllerin totoloji olduğunu gösteriniz:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

b) $p \Rightarrow \neg q \vee p$

3. Verilen formüllerin çelişki olduğunu ispatlayınız:

a) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

b) $p \vee \neg p \Rightarrow q \wedge \neg q$

4. Verilen formüllerin totoloji olup olmadığını inceleyiniz:

a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

5.Verilen formüllerin tarafsız olup olmadığını inceleyiniz:

a) $p \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$

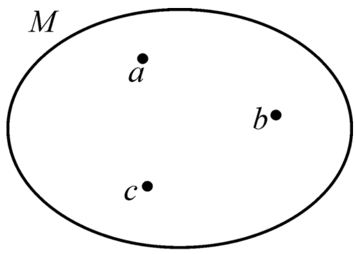
b) $\neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow p$

1.4 Küme Kavramı

Küme kavramı, matematikte temel kavramdır. Bu kavramı ancak örneklerle algılayabiliriz. Bir sınıfın tüm öğrencileri bir küme oluşturuyor diyoruz, okul kütüphanesinin tüm kitapları, bir doğrunun tüm noktaları da bir kümedir. Buna göre, her küme **bir ortak özellikte birleşen** bir takım farklı nesneden oluşmaktadır. Bu nesnelere kümenin **elemanları** denir.

Kümeler genellikle $A, B, C, ..., I, ,... J$ gibi alfabemizin büyük harfleriyle işaret ediliyorlar, kümenin elemanları ise $a, b, c, ..., i, j,...$ gibi alfabemizin küçük harfleriyle işaret ediliyorlar.

Örnek 1. Bir küme sadece a ,b ve c elemanlarından meydana gelmişse, onu $M = \{a, b, c\}$ biçiminde, ya da (şek. 1) de olduğu gibi grafiksel şekilde gösterebiliriz. ♦



Şek. 1

$a \in M$ ifadesi, a elemanı M kümesine **ait olduğunu** işaret etmektedir, $4 \notin \{1,2,3\}$ ifadesi ise, 4 elemanı $\{1,2,3\}$ kümesine **ait olmadığını** ifade etmektedir.

Bir kümenin tüm elemanları sayılmış olduğu durumda küme verilmiş sayılır (küme **tablo (ya da liste) yöntemine** göre gösterilmiştir denir) ya da elemanlarının bir ortak özelliğini ifade ederek küme gösterilebilir (bu gibi gösterime **ortak özellik yöntemi** denir).

Örnek 2. $A = \{2,4,6,8\}$ kümesi tablo usuluna göre yazılmış, $B = \{b \mid b = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ kümesi ise ortak özellik yöntemine göre verilmiştir . ♦

Alıştırma 1. Verilen kümeyi tablo usuluna göre yazınız

$$M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 7\}.$$

Çözüm. $M = \{3,4,5,6,7\}$. ♦

M ve N gibi iki kümenin elemanları aynı ise onlara **eşit kümeler** denir ve $M = N$ biçiminde yazılır.

Örnek 3. $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{b, c, c, a\}$ geçerlidir, çünkü kümelerde elemanların yazılış sırası önemli değildir. Küme kavramında, koşullardan biri elemanların belli özellikle farklı olması gerektiğine göre son küme kullanılmıyor. ♦

Kümelerin eşitliğiyle ilgili özellikler:

-yansıma $A = A$

-simetrilik $A = B \Rightarrow B = A$

-geçişgenlik $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

Alıştırma 2. Şu kümeler eşit midirler:

a) $\{1, \{2, 3\}\}$ ve $\{1,2,3\}$

b) $\{a, b, a, c, c\}$ ve $\{a, a, b, b, b, c\}$?

Çözüm. **a)** Hayır, çünkü birinci kümenin elemanları 1ve $\{2,3\}$ tür, ikinci kümenin elemanları ise 1,2 ve 3, **b)** evet, çünkü kümelerin aynı elemanları vardır. ♦

Alt küme

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ ve $C = \{1,2,3,4,5\}$ kümelerini inceleyelim. A kümesinin her elemanı B kümesinin ve C kümesinin de elemanı olduğunu ve B kümesinin her elemanı da C kümesinin elemanı olduğunu fark ediyoruz. Demek ki, A kümesi B ve C kümesinin kapsamında, B kümesi ise C kümesinin kapsamındadır. Bunu $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ ve $B \subseteq C$ biçiminde yazıyoruz.

Tanım. Bir A kümesi B kümesinin **alt kümesidir** ancak ve ancak A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ise, yani

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

İki küme için $M \subseteq N$ ve $N \subseteq M$ geçerli olduğu durumda, onlara $M = N$ dir denir.

Tanım. A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ve B kümesinde A da olmayan en az bir eleman varsa, A kümesine B kümesinin denir, yani $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Örnek 4. $M = \{a, b, c\}$, $N = \{a, b, c, d\}$ olsun. O halde $M \subset N$ dir. ♦

Boyları üç metreden daha uzun olan insanlar kümesini ya da sıfırdan küçük olan tüm doğal sayılar kümesini inceleyelim. Bunlar elemanları olmayan kümelerden örneklerdir. Bunlar birbirine eşit olan kümeler olduklarına göre, bu özellikle bir tek küme vardır. Elemanları olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\varnothing$ simgesiyle işaret edilir.

Boş küme her kümenin alt kümesidir ve her boş olmayan kümenin kesin alt kümesidir.

Çok kez verilen bir kümenin tüm alt kümelerini incelemek gerekebilir. Verilen bir M kümesinin tüm alt kümelerini içeren kümeye M kümesinin **parçalar kümesi** denir ve $\mathcal{P}(M)$ ile işaret edilir, yani $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$.

Örnek 5. $A = \{1,2\}$ kümesinin parçalar kümesini yazalım.

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}. \ ♦$$

Alıştırmalar.

1. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,15,18\}$. $B = \{b \mid b \in A \wedge 3 \mid b\}$, $C = \{c \mid c \in A \wedge 2 \mid c\}$ kümelerini yazınız. $B = C$ doğru mudur?

2. Şu önermelerden hangileri doğrudur?

a) $3 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 3\}$

b) $\{\{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a,b,c\})$

c) $22 \in A$, A ikinci onluğun çift sayılarının kümesidir.

3. $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 5 < a \leq 55\}$ olsun. Bu kümenin elemanlarından 5 ile bölünen ve rakamları toplamı çift olan sayıların kümesini belirt ve B ile işaret ediniz.

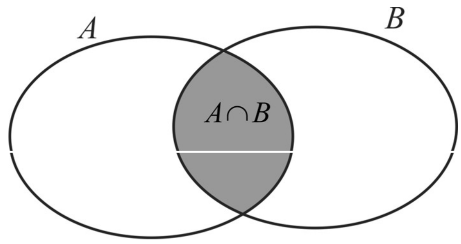
4. İki tam karenin toplamı biçiminde yazılabilen, 30 dan küçük tüm doğal sayıların kümesini belirtiniz.

5. $\varnothing$ ve $\{\varnothing\}$ arasında nasıl fark vardır?

1.5. Kümelerle İşlemler

Kümelerle ilgili birkaç işlemi inceleyeceğiz.

Tanım. A ile B kümelerindeki ortak elemanların oluşturduğu küme $A \cap B$ biçiminde yazılır ve ona A ile B kümelerinin **kesişim (arakesit) kümesi** denilir (Şek. 1) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.



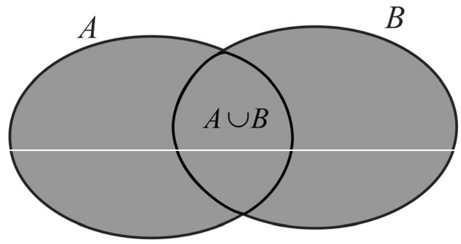
Цртеж 1

Örnek 1. $A = \{2,4,6,8,10\}$ ve $B = \{4,8,12\}$ verilen iki küme olsun
O halde $A \cap B = \{4,8\}$ dir ♦

Örnek 2. $M = \{a, b, c\}$ ve $N = \{1,2,3\}$ olsun. O halde $M \cap N = \varnothing$ olur. Böyle durumda M ve N kümelerine **ayrık kümelerdir** denilir. ♦

Tanım. A ve B kümelerinde en az birinde olmak üzere tüm elemanlardan oluşan kümeye A ve B kümelerinin **birleşim kümesi** adı verilir ve $A \cup B$ biçiminde gösterilir (Şek. 2).

$$A \cup B = \{x\, x| \in A \vee x \in B\} .$$



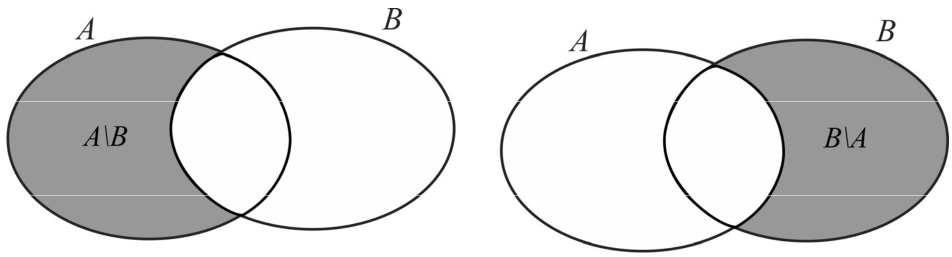
Цртеж 2

Örnek 3. $A = \{1,3,5,7\}$ ve $B = \{1,3,4,5,6,7\}$ olsun. O halde

$$A \cup B = \{1,3,4,5,6,7\}. \text{ ♦}$$

Tanım. A ve B herhangi iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan tüm elemanların oluşturduğu kümeye ***A* kümesinin *B* kümesinden farkı** adı verilir. $A \setminus B$ ile gösterilir , yani

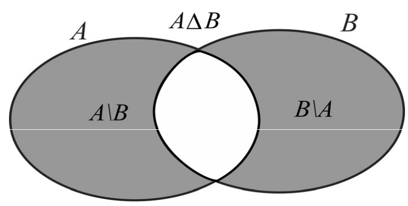
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Цртеж 3

Örnek 4. $A=\{1,2,3,5,8\}$ ve $B=\{2,4,6,8\}$ olsun. O halde $A \setminus B=\{1,3,5\}$ dir. ♦

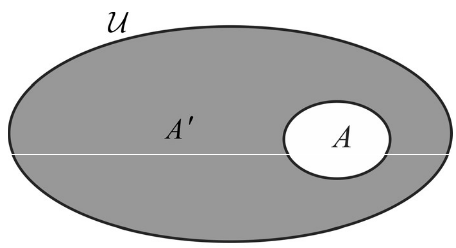
> **Tanım.** A ve B herhangi iki küme olmak üzere, ya A kümesine ya da B kümesine ait olan tüm elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin **simetrik farkı** adı verilir, $A \Delta B$ ile gösterilir , yani
>
> $$A \Delta B=\{x\, x| \in A \setminus B \vee x\in B \setminus A\} =\{x|\, x\in A \veebar x\in B\}.$$



Цртеж 4
Şek.4

Örnek 5. $A=\{2,3,5,7,9\}$ ve $B=\{1,3,5,7,9\}$ olsun. O halde $A \Delta B=\{2,1\}$ dir. ♦

A kümesi M kümesinin bir öz alt kümesi olsun. Bu durumda $M \setminus A$ kümesi M kümesine ait fakat A kümesine ait olmayan tüm elemanlardan meydana gelmektadir. Bu küme M kümesine göre A kümesini tamamlamaktadır, bu nedenle ona A nın **tümleyeni** denir ve A_M^C ya da A'_M biçiminde işaret edilir, yani $A'_M=\{x\,|x \in M \wedge x\notin A\}$.
M kümesine göre bir kümenin tümleyenini belirtirken, genel olarak M kümesi sabit gereksemelere yetecek kadar öğe içerecek biçimde seçilir ve bu kümeye **evrensel küme** denir ve $\cup$ ile işaret edilir. Buna göre simgesel olarak $A'=\{x|\, x \in \cup \wedge x\notin A\}$ şekilinde yazabiliriz (Şek. 5).



Şek.5

Örnek 6. $A=\{1,3,5\}$ ve $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ olsun.

O halde $A'_M=\{2,4,6,7,8,9,10\}$ dir. ♦

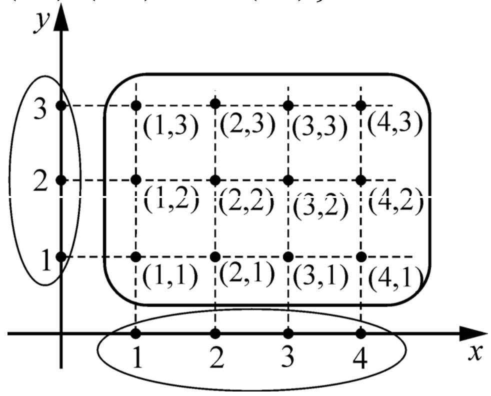
Tanım. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ kümesine A ve B kümelerinin **kartezyen (Dekard) çarpımı** denir.

A ve B kümelerinden biri boş olduğu durumda $A \times B$ kümesi de boş kümedir. $A \neq B$ olduğu durumda $A \times B \neq B \times A$ olduğunu farketmeliyiz. $A \times A = A^2$ kümesine A nın **Dekard karesi** denir, yani

$$A^2 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A\}.$$

Örnek 7. $A = \{1,2,3,4\}$ ve $B = \{1,2,3\}$ olsun.

$A \times B = \{(1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4), \ldots, (4,3)\}$ (Şek. 6). ♦



Şek.6

Kümelerle işlemlerin özellikleri

1. $A \cap B = B \cap A$ kesişimin değişme özelliği
2. $A \cup B = B \cup A$ birleşimin değişme özelliği
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ kesişimin birleşme özelliği
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ birleşimin birleşme özelliği
5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ve $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ birleşimin kesişime göre sağ ve sol dağılma özelliği.
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ kesişimin birleşime göre dağılma özelliği.
7. $A \Delta B = B \Delta A$ simetrik farkın değişme özelliği.
8. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
9. $A \Delta A = \varnothing$
10. $A \cap A'_M = \varnothing$ **ve** $A \cup A'_M = M$
11. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ ve $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ fark işleminin kartezyen çarpımına ait sağ ve sol dağılma özelliği.
12. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ve $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ birleşme işlemine göre kartezyen çarpımının sağ ve sol dağılma özelliği.
13. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ ve $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ fark işlemine göre kartezyen çarpımının sağ ve sol dağılma özelliği.

Alıştırmalar

1. $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,5,6,7\}$ ve $C=\{3,4,5,7,8\}$ kümeleri veriliyor. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A\cap B$ **,** $B\cap C$ ve $A\cap C$ **b)** $A\cup B$ **,** $B\cup C$ ve $C\cup A$

c) $A\setminus B$ **,** $B\setminus C$ ve $C\setminus A$ **ç)** $A\Delta B$, $B\Delta C$ ve $C\,\Delta A$

2. $A\subset B$ olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A\cap B$ **b)** $A\cup B$ **c)** $A\setminus B$

ç) $B\setminus A$ **d)** $A\,\Delta\,B$ **e)** A'_B

3. $A=\{x|\, x\in\mathbb{N}\wedge x<20\}$, $B=\{x\,|x\in\mathbb{N}\wedge 3|\,x\wedge x<20\}$ olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A\setminus B$ **b)** $A\,\Delta\,B$

4. A verilen bir küme olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $(A\times A)\cap A$ **b)** $A\times(A\cap A)$ **c)** $A\,\Delta\,A'$

5. $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$ ve $C=\{1,2,3\}$ olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A\setminus C$ **b)** $B\,\Delta\,C$ **c)** $B\cup C$ **ç)** $A\times C$

1.6. Önerme Fonksiyonları

Matematikte çok kez değişkenler kapsayan ifadeler kullanılmaktadır. Örnek, ikinci onlukta bir çift sayı x olsun.

Bir D kümesinin içinde en az bir x değişkeni bulunan ve her $x\in D$ bu değişkenlere verilen değerlerle doğru veya yanlış olduğu belirlenebilen ifadelere **önerme fonksiyonu** ya da **açık önerme** denir. Genellikle $P(x)$ ile işaret edilir, D kümesine de **tanım bölgesi** denir.

Örnek 1. $D=\{1,2,3,4,5,6\}$ ve $P(x)$: $2\mid x$ olsun. Bu durumda $P(x)$, D kümesinde önerme fonksiyonudur ve $P(2)$ doğru, $P(3)$ yanlış önermedir. ♦

$P_1(x)$ ve $P_2(x)$, D kümesinde önerme fonksiyonları olsun. O halde $\neg,\wedge,\vee,\underline{\vee},\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ mantık işlemleriyle meydana gelen tüm ifadeler de önerme fonksiyonlarıdır.

$P(x)$ açık önermesini doğrulayan tüm $x\in D$ elemanların kümesine **çözüm (doğruluk) kümesi denir** ve $M_{P(x)}$ ile gösterilir.

Örnek 2. $P_1(x)$: $x<20$ ve $P_2(x)$: $5|x$, $D=\mathbb{N}$ önerme fonksiyonlarının çözümler kümesi $M_{P1\,(x)}=\{1,2,...,19\}$ ve $M_{2P(x)}=\{5,10,15,...\}$ dir. Buna göre $M_{P1\,(x)\,\wedge\,P2\,(x)}=\{5,10,15\}$ çözümler kümesi $P_1(x)\wedge P_2(x)$ fonksiyonun çözümler kümesidir. ♦

$P_1(x)\wedge P_2(x)$ fonksiyonun çözümler kümesi, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ önerme fonksiyonlarının karşılıklı çözümler kümelerinin kesişimidir; $P_1(x)\vee P_2(x)$ fonksiyonun çözümler kümesi ise karşılıklı çözümler kümelerinin birleşimidir.

Alıştırma 1. $D=\{1,2,3,...,20\}$ kümesinde $P_1(x)$: $4 \mid x$ ve $P_2(x)$: $x<16$ önerme fonksiyonları veriliyor. Şu önerme fonksiyonların çözümler kümelerini belirtiniz: $\neg P_1(x)$, $P_1(x)\underline{\vee} P_2(x)$, $P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$ и $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$.

Çözüm. $P_1(x)$ yanlış önerme olduğu durumların tüm $x\in D$ değerlerini belirtmekle

$M_{\neg P_1(x)}=D\setminus M_{P_1(x)}=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19\}$ elde edilir.

$P_1(x)$ doğru ya da $P_2(x)$ doğru olduğu durumların tüm $x\in D$ değerlerini belirtmekle $M_{P_1(x)\underline{\vee} P_2(x)}=M_{P_1(x)}\Delta M_{P_2(x)}=\{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,16,20\}$ elde edilir.

$P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$ gerektirimi ancak $P_1(x)$ yanlış ya da $P_2(x)$ doğru önerme olduğuna göre, $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=D\setminus\{16,20\}=M_{\neg P_1(x)\vee P_2(x)}=M_{\neg P_1(x)}\cup M_{P_2(x)}=\{1,2,...,15\}$ elde edilir.

Her iki önermenin doğruluk değeri aynı olduğu durumda $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$ çift gerektirimi doğrudur. O halde $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=M_{(\neg P_1(x)\vee P_2(x))\wedge(\neg P_2(x)\vee P_1(x))}=$

$=(M_{\neg P_1(x)}\cup M_{P_2(x)})\cap(M_{\neg P_2(x)}\cup M_{P x1(x)})=\{4,8,12,17,18,19\}$ elde edilir. ♦

$P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$ önerme fonksiyonunun çözümler kümesini belirtmek için $p\Rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q$, totolojisinden, $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$ önermesi için ise $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\Rightarrow q\wedge q\Rightarrow p$ totolojisinden yararlanabiliriz.

Alıştırmalar.

1. $P_1(x)$: $2 \mid x$ ve $P_2(x)$:$3\mid x$ ve $D=\{1,2,...,10\}$ olsun. Şu önerme formüllerinin çözümler kümesini belirtiniz:

a) $P_1(x)\wedge P_2(x)$

b) $P_1(x)\vee P_2(x)$

c) $\neg P_1(x)$

2. $P_1(x)$: $(x+1)(x-1)=0$, $P_2(x)$: $x(x+3)=0$ ve

$D=\{a \mid a\in\mathbb{Z}\wedge -4\leq a\leq 4\}$ olsun. Şu önerme formüllerinin çözümler kümesini belirtiniz:

a) $P_1(x)\underline{\vee} P_2(x)$

b) $P_1(x)\Rightarrow P_2(x)$

c) $P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)$.

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Şu tümcelerden hangileri önermedir?
a) $2 + 3 = 5$ olduğunu sanırım
b) $x + 3 = 2 + x$, $x \in \mathbb{R}$
c) $x(x + 1) = 2 + x$
ç) Bir sayının son rakamı 2 ise, o sayı 2 ile bölünür.
2. Şu önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:
a) $9 \mid 6156$
b) 31 asal sayıdır
c) 9 sayısı 900 ve 153 sayılarının en büyük ortak bölenidir
ç) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$
3. Doğruluk değeri belirtiniz:
a) $\tau\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}\right)$
b) $\tau(13 \mid 153)$
c) $\tau\left((-5)^2 > -(2)^2\right)$
ç) $\tau(0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03)$
4. Verilen bileşik önerme hamgi basit önermelerden oluştuğunu belirtiniz:
a) 12 sayısı 3 ve 4 ile bölünür
b) $\frac{2}{3}$ ve $0,(3)$ rasyonel sayılardır
c) 3 sayısı bileşik sayı ya da tek sayıdır
5. Şu önermelerin doğruluk değerlerini belirtiniz:
a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
b) $\neg\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{11}{15}\right)$
c) $2^3 < 2^2 \vee 2+3 = 5$
ç) $2 < 5 \underline{\vee} -3 > -4$
d) $22 = 7 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow 4 \mid 22$
6. $\tau(p) = \perp, \tau(q) = \top$ ve $\tau(r) = \perp$ olsun. Şu önermelerin doğruluk değerlerini
a) $r \Leftrightarrow p$
b) $q \underline{\vee} p$
c) $q \wedge r$
7. Aşağıdakilerde $\tau(p)$ nin değerini belirtiniz:
a) $\tau(p \wedge q) = \top$ ve $\tau(q) = \top$
b) $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$ ve $\tau(q) = \perp$
c) $\tau(p \Leftrightarrow q) = \top$ ve $\tau(q) = \top$

8. Önerme formülü hangi türden olduğunu belirtiniz:

a) $F : p \wedge q \Rightarrow p$

b) $G: p \wedge (\neg p \wedge q)$

9. Şu formüllerin totoloji olduğunu ispatlayınız:

a) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

b) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

10. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p$ önerme formülü bir çelişki olduğunu ispatlayınız.

11. $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ olsun.

$B = \{b \mid b \in A \wedge 6 \mid b\}$, $C = \{c \mid c \in A \wedge 4 \mid c\}$ kümelerini yazınız. $B = C$ doğru mudur?

12. Verilen önermelerden hangileri doğrudur?

a) $9 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 3\}$ **b)** $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a,b,c\})$

c) $22 \in A$, burada A üçüncü onluğun tüm çift sayıların kümesidir.

13. $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 5 < a \leq 45\}$ olsun. 5 ile bölünen ve rakamları toplamı çift olan B kümesini belirtiniz.

14. Üç tam karenin toplamı biçiminde gösterilebilen 10 sayısından küçük doğal sayılar kümesini belirtiniz.

15. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,7,8\}$ ve $C = \{1,2,3,4,5,9\}$ kümeleri veriliyor. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A \cap B$ **b)** $B \cup C$ **c)** $A \setminus B$ **ç)** $C \Delta A$

16. $A \cup B = A$ olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A \cap B$ **b)** $B \setminus A$ **c)** $A \Delta B$

17. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 10 \leq x < 20\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 \mid x \wedge x \leq 20\}$ olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $A \setminus B$ **b)** $A \Delta B$

18. A verilen bir küme olsun. Şu kümeleri belirtiniz:

a) $(A \cap A) \Delta A'$ **b)** $A \times (A \cup A)$ **c)** $(A \cap A') \times A'$

19. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x(x-2) = 0\}$ ve $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x(x+1) = 0\}$ olsun. $A \times B$ kümesini belirtiniz:

20. $P_1(x) : (x+3)(x-1) = 0$, $P_2(x) : (x+2)(x+1) = 0$ ve

$D = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a \leq 4\}$ olsun. Şu önerme fonksiyonlarının çözümler kümesini belirtiniz:

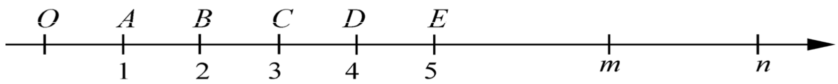
a) $P_1(x) \veebar P_2(x)$ **b)** $P_1(x) \Rightarrow P2(x)$ **c)** $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$.

2. REEL (GERÇEK) SAYILAR

2.1. Doğal sayılar

Doğal sayılar $=\{1,2,3,..., n, n+1,...\}$ ile işaret edilir. Tüm doğal sayılar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 rakamlarıyla yazılabilir. $\mathbb{N}\cup\{0\}$ kümesi $\mathbb{N}_0$ ile işaret edilir ve **genişletilmiş doğal sayılar kümesi** denir , yani $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,...,n, n+1,...\}$.

$\overline{OA}=1$ olmak üzere bir birim seçmekle, doğal sayıları grafiksel biçimde gösterebiliriz (şek.1). *OA* birimini sağ tarafa göçürmekle *B, C, D, E,* ... noktaları elde edilir.



Şek. 1

Doğal sayıları sayı doğrusu denilen bir doğru üzerinde gösterebiliriz. Bu durumda m sayısı n sayısının „solunda“ bulunduğunda $m < n$ ya da $n > m$ olduğunu diyoruz.

Alıştırma 1. Şekil 1' den yararlanarak verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $p : 2 < 3$

b) $q : m > 5$

c) $r : 3 \leq 4$

ç) $s : 5 \geq 5$

Çözüm. a) 2 sayısı 3 ün "solunda" olduğuna göre $\tau(p) = \mathrm{T}$ dir, **b)** m sayısı 5 in "sağında" olduğuna göre $\tau(q) = \mathrm{T}$ dir, **c)** bu önerme $3 < 4$ ve $3 = 4$ önermelerinden meydana gelen bir bileşik önermedir ve birincisi doğru olduğundan $\tau(r) = \mathrm{T}$ doğrudur, **ç)** $\tau(s) = \mathrm{T}$. ♦

Tanım. m sayısı n den büyük ise, m sayısına n in **bir öncesidir (önceli)**, n sayısına ise m in **bir sonrasıdır (ardılı)** denir.

Her doğal sayının bir sonrası vardır, fakat her doğal sayının bir önceli olmayabilir. Örnek, 1 sayısının bir öncesi yoktur. Her doğal sayının sonlu sayıda bir öncesi ve sonsuz sayıda bir sonrası vardır.

Verilen bir sayıdan bir büyük ve bir küçük olan sayılara **ardışığın bir öncesi** ve **ardışığın bir sonrası** denir. Örnek, 5 sayısından bir küçük ve bir büyük olan sayılar 4 ve 6 sayılarıdır, buna göre 4 sayısı 5 in ardışığının bir öncesi, 6 sayısı ise 5 in ardışığının bir sonrasıdır. Buna göre, $n > 1$ doğal sayısının bir sonraki ardışığı $n + 1$, bir önceki ardışığı $n - 1$ dir.

Doğal sayılarla işlemler

a ve b doğal sayılar olsun. $a+b$ doğal sayısına a ve b sayılarının **toplamı** denir. a ve b sayılarına **toplananlar**, işleme ise **toplama** işlemi denir.

a ve b doğal sayılar olsun. $a \cdot b$ doğal sayısına a ve b sayılarının **çarpımı** denir. a ve b ce sayılarına **çarpanlar**, yapıan işleme ise **çarpma** işlemi denir.

$a \cdot b = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\ defa}$ çarpımı, herbiri b ye eşit olan a tane toplananın toplandığını göstermektedır.

a ve b doğal sayılar olsun. $a-b$ doğal sayısına a ve b saylarının **farkı** denir. a sayısına **eksilen**, b sayısına **çıkan**, işleme ise **çıkarma** denir. Bu durumda $b+(a-b) = a$ dır.

a ve b doğal sayılar olsun. $a : b$ sayısına a ve b doğal sayıların **bölümü** denir. Bu durumda a sayısına **bölünen**, b sayısına **bölen**, işleme de **bölme işlemi** denir. Bu durumda $b \cdot (a : b) = a$ geçerlidir.

Doğal sayılarla toplama ve çarpma işlemi doğal sayılar kümesinde **kapalı işlemdir**, çünkü herhangi iki doğal sayının toplamı (çarpımı) yine doğal sayıdır. Doğal sayılarla çıkarma ve bölme işlemleri **açıktır**, çünkü iki doğal sayının farkı (bölümü) daima doğal sayı olmayabilir. Örnek, 2 ve 4 doğal sayılardır, fakat 2 – 4 ve 2 : 4 sayıları doğal sayı değildir.

Doğal sayılarla işlemlerin özellikleri

Doğal sayılarla işlemlerde şu özellikleri (kanunlar) geçerlidir:

1. $a+b = b+a$ toplama işleminin değişme özelliği

2. $a \cdot b = b \cdot a$ çarpma işleminin değişme özelliği

3. $(a+b)+c = a+(b+c)$ toplama işleminin birleşme özelliği

4. $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b \cdot c)$ çarpma işleminin birleşme özelliği

5. $(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ve $a\cdot(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ çarpma işleminin toplama işlemine göre sağ ve sol dağılma özelliği

6. $a - b \in \mathbb{N}$ и $b - c \in \mathbb{N}$ ise $(a - b)\cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ ve $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a \cdot c$ çarpma işleminın çıkarma işlemine göre sağ ve sol dağılma özelliği

7. $a + b$, $a - b$, $a : c$, $b : c \in N$ ise, $(a+b):c = a : c + b : c$ ve $(a-b):c = a : c - b : c$ toplama ve çıkarma işlemlerine göre bölme işleminin sağ dağılma özelliği.

Alıştırma 2. Verilen doğal sayıların toplamını en sade şekilde hesaplayınız.

a) $147+33+17+503$

b) $1+2+3+\ldots+19$

c) $23+46+57+72+44+58$

Çözüm. a) $147+33+17+503=(147+33)+(17+503)=180+520=700$,

b) $1+2+3+\ldots+19=(1+19)+(2+18)+\ldots+(9+11)+10=9\cdot 20+10=190$,

c) $23+46+57+72+44+58=(23+57)+(46+44)+(72+58)=80+90+130=300$. ♦

Alıştırma 3. Verilen kümeyi tablo usuluna göre yazınız:

a) $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}\wedge 3<x<26\}$

b) $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}\wedge 2<x<8\}$, ondan sonra $C=\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\wedge a-b=7\}$ kümesini belirtiniz.

Çözüm. a) $A=\{4,5,\ldots,25\}$, **b)** $B=\{3,4,5,6,7\}$,

$C=\{(10,3),(11,4),(12,5),(13,6),(14,7)\}$. ♦

$a=b\cdot c$ olacak şekilde ancak ve ancak bir c doğal sayısı varsa b doğal sayısı a doğal sayısının **bölenidir**. Çok kez a sayısı b nin **katıdır** ya da a sayısı b ile **bölünür** denir. Bunu $b \mid a$ biçiminde işaret ediyoruz.

Örnek 1. 4 sayısı 28 in bölenidir, çünkü $28=4\cdot 7$ dir ve $4 \mid 28$ biçiminde yazılır. 4 sayısı 30 un böleni değildir ve onu $4\nmid 30$ biçiminde yazıyoruz. ♦

Bölme işlemi $\mathbb{N}$ kümesinde açık olduğundan 4 ve 30 sayılarında olduğu gibi, **bölme işleminde kalan** kavramını kullanacağız.

Her doğal sayı m ve n için, öyle p ve q doğal sayıları var ki, $p,q\in\mathbb{N}_0$ için $0\le q<n$ olacak şekilde $m=np+q$ geçerlidir.

Bu durumda m bölünen, n bölen, p bölüm ve q bölme işleminin kalanıdır.

Her doğal sayının 2 ile bölündüğünde kalanı 0 ya da 1 olur. 2 ile bölündüğünde kalanı 0 olan her sayıya **çift sayı,** 2 ile bölündüğünde kalanı 1 olan her doğal sayıya **tek sayı** denir.

Bu özellik yüzünden çift sayılar için $2n$ ve tek sayılar için $2n-1$ yazılışını kullanıyoruz.

Örnek 2. Her doğal sayı 5 ile bölündüğünde $\{0,1,2,3,4\}$ kalanlarından biri elde edildiğini kolay görebiliriz. O halde her doğal sayı $n\in\mathbb{N}_0$ için, $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$ ve $5n+4$ biçiminde yazılabilir. ♦

Bir sayının tam iki böleni varsa **asal sayıdır**, iki bölenden daha çok bölenleri varsa **bileşik sayıdır**.

Örnek 3. 11 sayısı asal sayıdır, çünkü onun sadece 1 ve 11 olmak üzere iki böleni vardır. 10 sayısı ise bileşik sayıdır, çünkü onun 1, 2, 5 ve 10 olmak üzere 4 tane böleni vardır. 1 sayısı ne asal ne de bileşik sayıdır, çünkü onun sadece bir böleni vardır. ♦

Bölünebilmenin özellikleri

1. $c \mid a$ ve $c \mid b$ ise, $c \mid (a+b)$ gerekir

2. $c \mid a$, $c \mid b$ ve $a-b \in \mathbb{N}$ ise, $c \mid (a-b)$ gerekir

3. $c \mid a$ veya $c \mid b$ ise, $c \mid (a \cdot b)$

4. Her bileşik sayı, asal sayıların çarpımı gibi yazılabilir.

Örnek 4. 36 sayısının çarpanlarına ayrılışı $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ biçiminde, 72 sayısı da $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ biçiminde yazılır. ♦

Verilen bir n doğal sayısının tüm bölenleri o sayının bölenler kümesini oluşturuyorlar. Bu kümeyi D_n ile işaret edeceğiz.

Örnek 5. $D_{14} = \{1,2,7,14\}$, $D_{121} = \{1,11,121\}$ dir. ♦

m ve n doğal sayılar olsun $D_m \cap D_n$ kümesi m ve n sayılarının ortak bölenlerinin kümesidir. Bu kümenin en büyük elemanına **en büyük ortak bölen** denir ve $EBOB(m\ n,)$ ile işaret edilir. Bu durumda bu kümenin en küçük elemanı 1 sayısı olduğu aşikardır.

m ve n sayıları için $D_m \cap D_n = \{1\}$ yani $EBOB(m, n) = 1$ olduğu durumda m ve n sayılarına **birbirine göre asaldır** denir.

Alıştırma 4. $EBOB(12,20)$ belirtilsin.

Çözüm. $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$ ve $D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$, o halde $D_{12} \cap D_{20} = \{1,2,4\}$ dir. Bu kümede en büyük sayı 4 olduğuna göre $EBOB(12,20) = 4$ olduğunu buluyoruz.

Verilen bir n doğal sayısının tüm katları verilen sayının katlarının kümesini oluşturuyorlar. Bu kümeyi S_n ile işaret edeceğiz. ♦

Örnek 6. $S_4 = \{4,8,12,16,...,4\,k,\ 4(k+1)\ ,...\ \}$ kümesi 4 sayısının katlarının kümesidir.

m ve n doğal sayılar olsun, $S_m \cap S_n$ kümesi m ve n sayılarının ortak katlarından oluşan kümedir. Bu kümede en küçük elemana **en küçük ortak kat** denir ve $EKOK(m, n)$ biçiminde işaret edilir. Açıktır ki, bu kümenin en büyük elemanı yoktur.

Alıştırma 5. $EKOK(20,25)$ belirtiniz.

Çözüm. $S_{20} = \{20,40,60,80,100,...\}$, $S_{25} = \{25,50,75,100,125,...\}$, o halde

$S_{20} \cap S_{25} = \{100,200,300,400,...\}$ dir. Bu kümenin en küçük elemanı 100 olduğuna göre $EKOK(20,25) = 100$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırma 6. Bir mağazada her iki günde süt, her üç günde meyve ve her beş günde meyve suları dağıtılıyor. Bugün üç ürünü bir arada teslim etseler, ilerde en kısa kaç gün sonra üç ürünü yine aynı gün dağıtacaklar.

Çözüm. Aranılan sayı 2,3 ve 5 sayıların katı olmalıdır. $EKOK(2,3,5) = 30$ olduğuna göre, her üç ürün için en kısa zaman olarak ancak 30 gündür, yani 30 gün sonra yine her üç ürün aynı gün dağıtılacaktır. ♦

Bölünebilme kuralları

1. Bir sayının son rakamı çift sayı ise, o sayı 2 ile bölünür.

2. Bir sayının rakamları toplamı 3 ile bölünüyorsa, o sayı 3 ile bölünür.

3. Bir sayının son iki rakamından oluşan sayı 4 ile bölünüyorsa, ya da son iki rakamı 00 ise, o sayı 4 ile bölünür.

4. Bir sayının son rakamı 5 ya da 0 ise, o sayı 5 ile bölünür.

5. Bir sayının rakamları toplamı 9 ile bölünüyorsa, o sayı 9 ile bölünür.

6. Bir sayının son rakamı 0 ise, o sayı 10 ile bölünür.

Alıştırma 7. Verilen sayıda * yerine hangi rakam yazılmalıdır ki:

a) 23*469 sayısı 3 ile bölünsün

b) 113* sayısı 4 ile bölünsün?

Çözüm. a) Bölünme kuralına göre, verilen sayı 3 ile bölünmesi için rakamları toplamı 3 ile bölünmelidir. Buna göre $2+3+4+6+9+*=24+*$ sayısı 3 ile bölünmelidir. Buna göre bu sayı 3 ile bölünmesi için * yerine 0,3,6 ya da 9 rakamları yazılabilir. b) Onluk basamağında 3 olan iki basamaklı sayılardan sadece 32 ve 36 sayıları 4 sayısının katlarıdır. O halde * yerine 2 ya da 6 rakamlarından biri yazılabilir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) 5 sayısı 12 nin bir öncesidir

b) 2 sayısı 3 ün ardışığıdır

c) 3 sayısı 21 in bölenidir

2. Verilen işlemleri en sade şekilde yapınız:

a) $234+457+146+473$

b) $13+47+28+62+91+89$

c) $1+2+...+50$

ç) $2\cdot 8\cdot 5\cdot 125$

3. Verilen sayılardan hangileri asal, hangileri ise bileşiktir:

a) 30273

b) 1111

c) 34543

4. $EBOB(248,126)$, $EKOK(453,780)$ belirtilsin.

5. "Buket" adlı çiçekçi dükkanında üç renkte güller var. Bu dükkânda sadece aynı renkte çiçek buketleri satılıyor. Birinci renkten olan tüm buketlerde 3 gül, ikinci renkten tüm buketlerde 5 er gül ve üçüncü renkte olan tüm buketlerde 7 şer gül vardır. Her renkten aynı sayıda gül satıldığı bilinmektedir. Çiçek sayısı 150'den büyük ve 250'den küçük olduğu bilindiğine göre, bu sayı belirtilsin.

2.2. Tam Sayılar

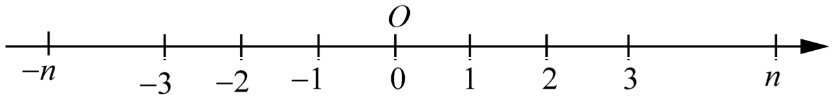
Doğal sayılarla çıkarma işlemi $\mathbb{N}$ kümesinde açık işlem olduğunu gördük. Bunu doğrulamak için bir örnek olarak $5-7$ farkı doğal sayı değildir, halbuki bu gibi sayıları bazı doğal olayların açıklanmasında kullanabiliriz. Örnek, $5^\circ C$ hava sıcaklığı $7^\circ C$ azalıyor. Bu nedenle doğal sayıları 0 il $\mathbb{N}_0$ e kümesine genişlettiğimiz gibi, sayı doğrusunda sıfırın farklı tarafında olmak üzere sıfırdan aynı uzaklıkta bulunan sayılarla genişletebiliriz.

Bu sayıları $\mathbb{Z}^{-} = \{-1, -2, -3, ...\}$ işaret eder ve **negatif sayılar diye** adlandırıyoruz. Doğal sayılara pozitif tam sayılar da diyebiliriz, yani $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^{+}$.

Tanım. Tam sayılar kümesini, pozitif tam sayılar, negatif tam sayılar ve 0 oluşturuyor. Simgelerle $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^{+}$ dir.

Sıfır sayısı ne pozitif ne de negatif sayıdır.

Geometrik şekilde tam sayılar sayı doğrusunda o şekilde gösterilir ki, negatif tam sayılar sıfır merkez olmak üzere pozitif sayıların simetrik görüntüleri olarak belirlenir (Şek.1).



Şekil 1

n tam sayısının simetrik görüntüsü (resmi) $-n$ dir ve ona n sayısının **ters sayısı** denir.

Örnek 1. 2 sayısının tersi -2, 1 sayısının tersi -1, -5 in tersi 5 vb. ♦

Sayı doğrusunda tam sayıları geometrik şekilde karşılaştırıyorsak a ve $-a$ sayıları 0 sayısından eşit uzaklıkta olduğunu kolay farkedebilirsiniz. Her a tam sayısının 0' a kadar uzaklığına a sayısının **mutlak değeri** denir ve $|a|$ biçiminde işaret edilir. Bu durumda

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Örnek 2. $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$. ♦

<u>Tam sayıları toplama ve çıkarma kuralları</u>

a) $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$ ise , $a + b \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $a \cdot b \in \mathbb{Z}^{+}$

b) $a, b \in \mathbb{Z}^{-}$ ise, $a + b \in \mathbb{Z}^{-}$ ve $a \cdot b \in \mathbb{Z}^{+}$

c) $a \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $b \in \mathbb{Z}^{-}$ olsun, $|a| > |b|$ ise $a + b \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $|a| < |b|$ ise $a + b \in \mathbb{Z}^{-}$ ve

$a \cdot b \in \mathbb{Z}^{-}$ olur.

Tam sayıları çıkarma işlemi toplama işlemiyle tanımlanıyor, yani $a, b \in \mathbb{Z}$ ise , $a - b = a + (-b)$. Buna göre, tam sayılarla çıkarma işlemi yapıldığında, toplama işlemine geçerli olan tüm özellikler kullanılabilir.

<u>Tam sayılarla işlemlerin özellikleri</u>

Tam sayılarla işlemler için şu özellikler (kanunlar) geçerlidir:

1. $a + b = b + a$ toplama işlemine ait değişme özelliği

2. $a \cdot b = b \cdot a$ çarpma işlemine ait değişme özelliği

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ toplama işlemine ait birleşme özelliği

4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ çarpma işlemine ait birleşme özelliği

5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ve toplamaya göre çarpma işleminin sağ ve sol dağılma özelliği

6. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ve $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ çıkarmaya göre çarpma işleminin sağ ve sol dağılma özelliği

7. $a : c,\ b : c \in \mathbb{Z},\ c \neq 0$ ise, $(a + b) : c = a : c + b : c$ ve $(a - b) : c = a : c - b : c$ geçerlidir. Bu özelliğe bölme işleminin toplama ve çıkarma işlemlerine göre sağ dağılma özelliği denir.

8. İki ters tam sayının toplamı 0 dır, yani $a + (-a) = 0$.

Alıştırma 1. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $|10| + |-10|$

b) $|13-8| + |-3| - |-5|$

Çözüm. a) $|10| + |-10| = 10 + 10 = 20$, **b)** $|13-8| + |-3| - |-5| = 5 + 3 - 5 = 3$.♦

Doğal sayıların karşılaştırılmasında geçerli olan kurallar, tam sayıların karşılaştırılmasında da geçerlidir, yani a tam sayısı sayı ekseninde b tamsayısının solunda bulunuyorsa, a sayısı b den küçüktür ve $a < b$ biçiminde yazılır.

Tam sayılar büyüklüklerine göre şu şekilde sıralanabilir:

$$... < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < ...$$

Alıştırma 2. Verilen önermelerin doğruluk değerini belirtiniz:

a) $-3 > 0$

b) $-7 > -5$

c) $-11 < -3$

Çözüm. a) doğru değildir, çünkü 0 sayısı -3 ün solunda değildir, **b)** doğru değildir -7 sayısı -5 in sağında değildir, **c)** doğrudur, çünkü -11 sayısı -3 ün solundadır. ♦

Tam sayıların sıralanmasında şu özellikler geçerlidir:

1. $a < b \wedge b < c$ ise, $a < c$ dir.

2. $a < b$ ise, $a + c < b + c$ dir.

3. $a < b$ ve $c > 0$ ise, $ac < bc$ dir, $c < 0$ ise, $ac > bc$ olur.

Alıştırma 3. $(-3 + 5) \cdot (-2) + |-8 - 11 + 3|$

Çözüm. $(-3 + 5) \cdot (-2) + |-8 - 11 + 3| = -4 + 16 = 12$. ♦

$a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a : b$ tam sayıdır, ancak ve ancak $b \mid a$ ise.

Buna göre tam sayılar kümesinde toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kapalı, bölme işlemi ise açıktır.

Alıştırmalar

1. Verilen sayıların mutlak değerini belirtiniz:

a) -7

b) 0

c) 33

2. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $|3-14|+|-2\cdot(-3)+1|$

b) $|7+11|+|-2\cdot(-5)+10|$

3. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $|-4\cdot(7-15):(8-10)+13\cdot 3-4|$

b) $|-6\cdot(9-15):(5-8)+11\cdot 4-5|$

4. Verilen sayılardan hangisi büyük olduğunu belirtiniz:

$A=(-2\cdot(-2\cdot(-2+3)\cdot(-2))\cdot(-3))$ yoksa $B=(-3\cdot(-3\cdot(-3+5)\cdot(-2))\cdot(-2))$.

5. -2, 3, -5 ve 11 sayılarını yazdıktan sonra, onların bir öncelerini, onların ardışık bir sonralarını ve onların ters sayılarını da yazınız. Bu şekilde elde edilen tüm sayıların toplamını belirtiniz.

2.3. Rasyonel Sayılar

Günlük hayatımızda tam sayılarla ifade edilemeyen durumlara rastlıyoruz. Örnek, bir pastayı beş kişiye ayırmak istersek, her birinin payına düşecek pastanın kısmını ifade edecek sayılara ihtiyacımız olacaktır ve benzer.

Bu nedenle $a, b, \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde her ifadeye **kesir** diyeceğiz.

Bu durumda $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirleri birbirine eşit olmak için $a\cdot d=b\cdot c$ geçerli olmalıdır.

a sayısına **pay**, b sayısına **payda** ve aralarındaki „ __ " çizgiye **kesir çizgisi** denir.

Her kesir pay ve paydanın bölümü olarak yeni bir sayıdır ve herhangi iki eşit kesir aynı sayıyı gösterdiğine göre , bu şekilde elde edilen kümeye $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\right\}$ **rasyonel sayılar kümesi** denir.

$\mathbb{Q}^-=\left\{\frac{-a}{b}\mid a,b\in\mathbb{N}\right\}$ ve $\mathbb{Q}^+=\left\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{N}\right\}$ olduğuna göre $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^-\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^+$ dir.

Her tam sayı a kesir biçiminde $\frac{a}{1}$ olarak yazılabilir.

$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ ve $\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$, $a, b, c\in\mathbb{Z}\wedge c\neq 0$ eşitliklerine kesirlerin **genişletilmesi ve kısaltılması** denir.

Rasyonel sayılarla işlemler

1. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ rasyonel sayıları toplama ve çıkarma

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ rasyonel sayıların çarpımı

3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ rasyonel sayıları bölme, burada $\frac{d}{c}$ kesri $\frac{c}{d}$ kesrinin çarpımsal tersidir.

Kesirlerin bölümü $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ **iki katlı kesir** şeklinde de gösterilebilir.

Alıştırma 1. Verilenlerin değerini hesaplayınız:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

b) $1\frac{1}{5} - 2\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{13}$

ç) $\frac{2}{7} : \frac{23}{14}$

Çözüm. a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$,

b) $1\frac{1}{5} - 2\frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{5} - \left(2 + \frac{3}{4}\right) = -1 + \frac{1}{5} - \frac{3}{4} = -1 + \frac{4-15}{20} = -1 - \frac{11}{20} = -\left(1 + \frac{11}{20}\right) = -1\frac{11}{20}$,

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{13} = \frac{33}{52}$ ve **ç)** $\frac{2}{7} : \frac{23}{14} = \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{23} = \frac{4}{23}$. ♦

Ondalık sayılar

a,bcd..., $a \in \mathbb{Z}$ ve $b, c, d, ... \in \mathbb{N}$ cinsinden sayılara **ondalık sayı** denir. Görüldüğü gibi, ondalık sayı virgülle ayrılmış iki bölümden meydana gelmektedir. Virgülden önceki kısmına **tam kısım**, virgülden sonraki kısmına ise **ondalık (kesir) kısmı** denir.

Bir ondalık sayının kesir kısmı sonlu ya da sonsuz olabilir.

Örnek 1. 3,2 sayısı sonlu, 1,3333...3... sonsuz ondalık sayıdır. ♦

Sadece bir rakamı tekrarlanan ya da sonlu sayıda aynı sıraya göre tekrarlanan bir grup biçiminde olan ondalık sayılara **devirli (peryodik) ondalık sayılar** denir.

Örnek 2. 2,6666...6... sayısı devirli ondalık sayıdır ve 2,(6) biçiminde işaret edilir, -3,(159) = −3,159159...159.... vb. 5,92(356) ve 4,1(23) sayıları da devirli ondalık sayılardır. ♦

Alıştırma 1. Hesaplayınız:
a) $2{,}35+3{,}9$
b) $17{,}2-11{,}36$
c) $2{,}7 \cdot 3{,}47$
ç) 12,1: 0,11

Çözüm. a) $\begin{array}{r} 2{,}35 \\ +3{,}9 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 17{,}2 \\ -11{,}36 \\ \hline 5{,}84 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} \underline{27 \cdot 347} \\ 189 \\ 108 \\ +81 \\ \hline 9369 \end{array}$

Olduğuna göre, aranılan sayı 9,369 olur.

ç) $12{,}1:0{,}11=(12{,}1\cdot100):(0{,}11\cdot100)=1210:11=110$. ♦

Payın paydaya bölünmesiyle her kesir ondalık sayı biçiminde yazılabilir

Örnek 3. Bir kesrin payının paydasına bölünmesiyle sonlu ondalık sayı, $\frac{1}{2}$ = 0,5, $\frac{100}{8}$ =12,5 gibi, ya da $\frac{1}{3}$ = 0,(3) sonsuz devirli ondalık kesir gibi ondalık sayılar elde edilir. ♦

Her sonlu ya da devirli ondalık sayı kesir biçiminde yazılabilir.

Örnek 4. 4,7 sayısı kesir biçiminde şu şekilde yazılır:
$4{,}7=\frac{4{,}7}{1}=\frac{4{,}7\cdot10}{1\cdot10}=\frac{47}{10}$. ♦

Örnek 5. 3,(6) sayısı kesir biçiminde şu şekilde yazılır:

$$x=3,(6)\,/\cdot10$$

$$10x=36,(6)$$

Taraf tarafa çıkararak $10x - x$ = 36,(6) −3,(6) , yani $9x = 33$ ve $x=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$ elde edilir .♦

Örnek 6. 5,32 (4) sayısını kesir şeklinde şu şekilde yazacağız:
$x = 5{,}32\,(4)\ /\cdot 100$ ·
$100x = 532{,}(4)\ /\cdot 10$
$1000x = 5324,\ (4)$
Son iki eşitlikleri taraf tarafa çıkarmakla $900x = 4792$ elde edilir. O halde
$x = \frac{4792}{900} = \frac{1198}{225}$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen kesirleri ondalık sayı biçiminde yazınız: $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{25}$ ve $\frac{13}{16}$.

2. Şu sayıları karşılaştırınız:
a) 5, (83) ve 5,8 (3)
b) 4, (371) ve 4, (37)

3. Hesaplayınız:
a) $(2{,}5 \cdot 0{,}4 - 8{,}52) : 0{,}01$
b) $(12{,}5 \cdot 0{,}8 - 1{,}45) : 0{,}001$

4. Verilen sayıları kesir şeklinde yazınız:
a) 4,1(3)
b) 2,36(21)

5. Verilen işlemleri yapınız: $\dfrac{\left(-0{,}39 + \frac{72}{100}\right) : 0{,}66}{\left(\frac{5}{16} \cdot 1{,}2 + \frac{11}{40}\right) : 1\frac{3}{10}}$.

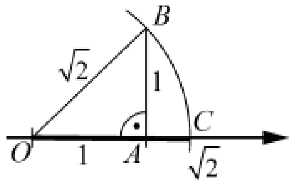
2.4. Reel (Gerçek) Sayılar

Her sonlu ya da sonsuz devirli ondalık sayı kesir biçiminde yazılabildiğini, yani o sayıların hepsi rasyonel sayı olduğunu gördük.

Kateti $a = 1cm$ olan bir ikizkenar dik üçgenin hipotenüsünü, ya da kenarları $a = 1$ ve $b = 2$ olan bir dikdörtgenin köşegenini hesaplarken rasyonel olmayan sayılarla karşılaşıyoruz. Birinci örnekte Pitagor teoremini uygulayarak hipotenüsün uzunluğu $c = \sqrt{2a^2}$, yani $c = \sqrt{2}$ elde edilir, diğer örnekte ise köşegenin uzunluğu $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ elde edilir.

Bu iddiayı doğrulamak için, tersini doğru olduğunu var sayacağız. Örneğin, $c = \sqrt{2}$ sayısı rasyoneldir. O halde, bu sayı $c = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ indirgemsiz (en sade) kesir biçiminde yazılabilir ve $EBOB(m,n) = 1$ olmalıdır. Bu eşitliğin iki tarafının karesi alınırsa $m^2 = 2n^2$ elde edilir. Oradan m^2 çift sayı olduğunu yani 2 ile bölündüğünü görüyoruz. $m = 2k$ ifadesini $m^2 = 2n^2$ eşitliğinde değiştirmekle $4k^2 = 2n^2$ elde edilir, yani $n^2 = 2k^2$ olur. Bu şekilde n sayısı da 2 ile bölündüğünü elde ediyoruz. Bu sonuç $EBOK(m,n) = 1$ var sayımı ile çelişir.

Demek ki, rasyonel olmayan sayılar da vardır ve onları sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz. Örnek olarak, katetlerinin uzunluğu $\overline{OA} = \overline{AB} = 1$ olmak üzere ΔOAB bir ikizkenar dik üçgen olsun. Bu durumda $\overline{OB} = \sqrt{2}$ dir ve bu uzunluk sayı doğrusu üzerinde gösterilebilir (şek.1).



Şek. 1

Demek ki, sayı doğrusu üzerinde gösterilebilen devirli olmayan sonsuz ondalık sayılar da vardır. Bu sayılara **irasyonel sayılar** denir ve $\mathbb{I}$ ile işaret edilir.

Tanım. Rasyonel sayılar ve irasyonel sayılar kümeleri beraber **reel sayılar** kümesini oluşturuyorlar, yani $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Örnek 1. 1,323323332...., π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$... irasyonel sayılardır.♦

Her reel sayı, sayı doğrusu üzerinde gösterilebilir ve a sayısı b nin "solunda" ise $a < b$ geçerlidir.

Örnek 2. $\sqrt{2}$ sayısının yukarıdaki çiziminden $1 < \sqrt{2}$ olduğu açıktır, çünkü her dik üçgende hipotenüsün uzunluğu katetin uzunluğundan daima daha büyüktür. ♦

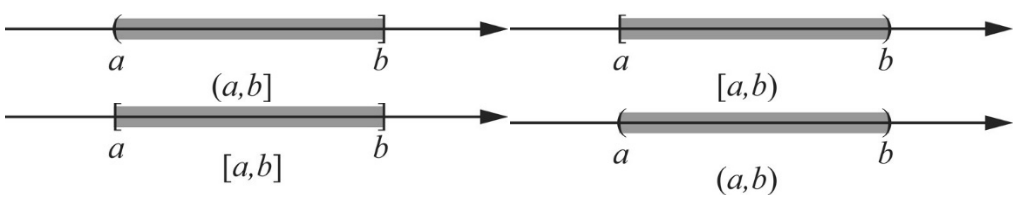
Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. O halde

$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$ açık aralıktır,

$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \le x < b\}$ sağdan açık aralık,

$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x \le b\}$ soldan açık aralık,

$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \le x \le b\}$ kapalı aralık denir.



Tanım: $a \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

$[a,\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \ge a\}$, $(-\infty,a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \le a\}$,

$(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$ ve $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$ kümelerine sınırsız aralıklar (yarı doğrular) denir.

Alıştırma 1. Şu önermelerden hangileri doğrudur?

a) $2 \in (2,5)$

b) $3 \in (-7,3]$

c) $\sqrt{2} \in [1,3]$

Çözüm. a) yanlış önermedir, çünkü $(2,5) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \wedge\ 2 < x < 5\}$ ve $2 \not< 2$, **b)** doğru önermedir çünkü $3 \leq 3$, **c)** doğru önerme, çünkü $\sqrt{2} > 1$ dir. ♦

Tanım. a sayısının mutlak değeri

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$ dir.

Örnek 3. $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 2\}$ kümesi $(-2,2)$ açık aralığıdır. ♦

Tanım. $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ defa}$ $\cdot \ldots \cdot a$ ifadesine a reel sayısının **kuvveti** denir.

Örnek 4. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^2 \cdot 2^3$. ♦

Tanım. $a \in \mathbb{R}$ olsun. O halde $\sqrt{a^2} = |a|$ dir.

Örnek 4. $\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{25}$ ifadesinin değeri $\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{25} = |3| + |4| - |5| = 2$ dir. ♦

<u>**Karekökün Özellikleri**</u>

1. $a, b \geq 0$ ise, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ geçerlidir
2. $a \geq 0$, $b > 0$ ise, $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ geçerlidir
3. $m = 2k, k \in \mathbb{N}$ ise, $\sqrt{a^m} = \sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2} = |a^k|$ geçerlidir
4. $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ ve $a \geq 0$ ise, $\sqrt{a^m} = \sqrt{a^{2k+1}} = \sqrt{(a^k)^2 a} = |a^k|\sqrt{a}$ geçerlidir
5. $b \geq 0$ ise, $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = (a \pm c)\sqrt{b}$ geçerlidir.

Örnek 5. $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = |2|\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ yazılabilir. Bu durumda $\sqrt{8}$ sayısı **normal şekilde** yazılıdır denir.

Alıştırma 2. Hesaplayınız:

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{18} + \sqrt{8}$

Çözüm. a) $\sqrt{32} + \sqrt{50} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$,

b) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{18} + \sqrt{8} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$. ♦

Alıştırmalar

1. Şu sayıları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz: $-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ ve 2 .

2 . $(-3,6]$ ve $[-5,2)$ aralıklarının kesişimini ve birleşimini belirtiniz.

3. Sayıları karşılaştırınız:

a) 3,4567 ve 3,4576

b) −3,1223 ve −3,1224

4. Hesaplayınız:

a) $\sqrt{112}+\sqrt{63}$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{125}$

5. Verilenlerde a ve b sayılarının işaretini belirtiniz:

a) $ab < 0$

b) $ab > 0$ ve $a + b > 0$

c) $ab > 0$ ve $a + b < 0$

ç) $a : b :> 0$

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Verilen sayıları asal çarpanlarına ayırınız:

a) 720 **b)** 3600 **c)** 837

2. Hesaplayınız:

a) $EKOK(108,39)$ **b)** $EBOB(270,96)$

3. Hesaplayınız:

a) $365 + 48 + 135 + 252 + 200$ **b)** $15:3 + 25 \cdot 11 \cdot 4 - 50 \cdot 5$

4. Marko her üçüncü gün yüzmeye gidiyor, her dörtgünde bir çin dilinden dersler alıyor ve her on dört günde bir bisiklet sürüyor. Bugün Marko her üç etkinliği aynı günde yapmışsa, kaç gün sonra Marko her üç etkinliği yine aynı günde yapmalıdır.

5. İsmet, Sami ve Nuri'nin adım uzunlukları sırasıyla 60cm , 65cm ve 70cm dir. Onlar aynı yerden aynı anda ve aynı yönde hareket ediyorlar. Hangi uzaklıktaki noktada ilk olarak her biri tam sayılı adım yapmış olacaklar?

6. 7 sayısının 100 den büyük ve 200 den küçük olan ve 5 ile bölünen tüm üç basamaklı katlarını belirtiniz.

7. Hesaplayınız!

a) $(1-2)\cdot 20 :((-3)\cdot 4 + 10)$ **b)** $(4 - 10 + 3 + (-5) + 10) : (-2)$

8. Hesaplayınız:

a) $12\cdot(4\cdot 16 - 84 : 6) - 2\cdot(180 : 4 + 3 \cdot 17 \cdot 5)$

b) $4\cdot(4\cdot 16 - 135:9) - 5\cdot(524 : 4 + 3 \cdot 12 \cdot 4)$

c) $2\cdot(4\cdot 13 - 117 :9) - 3\cdot(256 : 4 + 4\cdot 15 \cdot 5)$

ç) $5\cdot(4\cdot 11 - 176 :8) - 3\cdot(339 :3 + 3 \cdot 11 \cdot 5)$

9. Hesaplayınız:

a) $|-3\cdot(11-15):(8-10)+11\cdot 5-7|$

b) $|6\cdot(8-11):(2-8)-11\cdot 3-5|$

c) $|-4\cdot(4-9):(23-25)+12\cdot 4-7|$

$|-9\cdot(8-13):(6-9)+14\cdot 2-5|$

ç)

10. Hesaplayınız:

a) $\dfrac{3\frac{1}{5}\cdot 7\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}-2\frac{7}{30}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{3}}{12}+\dfrac{5}{\frac{3}{6}}-\dfrac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{2}{5}}$

11. Hesaplayınız:

a) $3{,}72+0{,}02-2{,}35$ **b)** $(6{,}25: 0{,}5)\cdot 0{,}01$

12. Hesaplayınız:

a) $24:8\cdot 2-(-3)\cdot 2+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}$

b) $0{,}5+1{,}(5)5-2{,}3(7)$

13. Verilen sayıları en sade kesir biçiminde yazınız:

a) $7{,}3(8)$ **b)** $2{,}(47)$

14. Verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz:

a) $[1,5]$ **b)** $[-2,3)$ **c)** $(-3,2]$

15. Verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{11}$ **c)** $2\sqrt{3}$

16. Belirtiniz:

a) $(-2,4]\cap[0,5)$ **b)** $(-2,4]\cup[0,5)$

17. $A=\{x|x\in\mathbb{R},-4{,}7<x\leq 3{,}2\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{R},-3{,}8\leq x<5{,}3\}$ ve $C=\{x|x\in\mathbb{R},-2{,}4\leq x\leq 6{,}9\}$ kümeleri veriliyor. $A\cap(B\cup C)$ kümesini belirtiniz.

18. Hesaplayınız:

a) $\sqrt{45}+\sqrt{75}$ **b)** $\sqrt{288}-\sqrt{8}+\sqrt{18}$

19. $a=-3{,}7$ ve $b=-11{,}5$ olsun. Aşağıdakilerin değerini hesaplayınız:

a) $|a+b|$ **b)** $|a-b|$ **c)** $|a|\cdot|b|$

20. $\dfrac{-12}{b-a}<0$ ise, $a>b$ geçerli midir?

3. RASYONEL CEBİRSEL İFADE

3.1. Gerçek Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

Eş toplananlardan oluşan toplamı incelerken, bizi çarpma işlemine götürmüştü. Benzer şekilde eş çarpanların çarpımı bizi, kuvvet işlemi denilen yeni işlemin keşfedilmesine götürmektedir.

Tanım. Her biri bir a reel sayısına eşit olan n tane çarpanın çarpımına ***a* sayısının *n.* dereceden kuvveti** denir ve a^n ile işaret edilir, yani

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ defa}}$$

a sayısına **kuvvetin tabanı**, n sayısına kuvvetin **üssü** denir.

Bir çarpımın en az iki çarpanı olduğuna göre, yukarıdaki tanıma dayanarak kuvvetin üssü n, 2 den küçük olmamalıdır. $a^1 = a$ olduğunu sayacağız.

Herhangi bir sayının kuvvetini hesaplamak için, onu çarpım biçiminde göstererek çarpanlar birbiriyle çarpılır.

Örnek 1. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27};$

b) $(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32.$ ♦

Sayıların çarpımına ait tanımı kullanarak üslü ifadelere ait şu özellikler geçerli olacaktır:

- Herhangi bir pozitif sayının çift üslü kuvveti pozitif sayıdır, yani

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0.$$

- Negatif sayının çift üslü kuvveti pozitif sayıdır; negatif sayının tek sayılı üslü kuvveti negatif sayıdır, yani

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > 0 & n \text{ çift sayı} \\ a^n < 0 & n \text{ tek sayı} \end{cases}$$

Üslü ifadelerle işlemleri şu kurallara göre yapacağız:

1. Tabanları eşit olan üslü ifadelerin çarpımı

Tabanları aynı olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken taban aynen yazılır, üsler toplanıp tabanın üssü olarak yazılır.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (1)$$

Gerçekten, $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ defa}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ defa}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ defa}} = a^{n+m}$ elde edilir.

N

Örnek 2. a) $a^3 \cdot a^4 = a^7$; **b)** $a^n \cdot a^2 = a^{n+2}$. ♦

2. Tabanları aynı olan üslü ifadelerin bölümü

Tabanları aynı olan üslü ifadelerde bölme işlemi yapılırken taban aynen yazılır, payın üssünden paydanın üssü çıkarılıp ortak tabanın üssü olarak yazılır.

$m > n$ olmak üzere, $a^n : a^m = a^{n-m}$ dir (2)

Bunu göstermek için, bölenin ve bölümün çarpımını hesaplıyoruz.

$$a^m \cdot a^{n-m} = a^{m+(n-m)} = a^n$$

Görüldüğü gibi, bölenin ve bölümün çarpımı bölünendir, yani (2) eşitliği doğrudur. **Örnek 3. a)** $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$, çünkü $a^3 \cdot a^2 = a^5$ dir.

b) $a^{n+5} : a^{n-1} = a^{(n+5)-(n-1)} = a^4$. ♦

3. Bir çarpımın kuvveti

Bir çarpımın herhangi bir kuvvetini alırken, her çarpanın ayrı ayrı belirlenen kuvveti alınır, ondan sonra elde edilen kuvvetler birbiriyle çarpılır.

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. (3)

Gerçekten, kuvvet alma kuralına göre, çarpma işleminin değişme ve birleşme özellikleri gereğince

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b)\cdot(a \cdot b)\cdots(a \cdot b)}_{n \text{ defa}} = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ defa}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots b)}_{n \text{ defa}} = a^n \cdot b^n$$ elde edilir.

Örnek 4. $(-2a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5 = -32a^5$. ♦

İki sayının çarpımının kuvvet alma kuralı, daha fazla çarpanlar olduğu durumlar için de uygulanabilir, yani

$$(a \cdot b \cdot c \cdots z)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdots z^n.$$

Örnek 5. $(x \cdot y \cdot z)^3 = x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$. ♦

(3) eşitliğini bazı durumlarda tersine de uygulayabiliriz, yani

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

eşitliği geçerlidir. Bu ise demektir ki, tabanları farklı ve üsleri aynı olan üslü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken tabanlar çarpılır, taban olarak yazılır. Ortak olan üs çarpıma üs olarak yazılır.

Örnek 6. $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64$. ♦

4. Bir bölümün kuvveti

İki sayının bölümünün kuvvetini alırken, bölünen ve bölenin belirlenen kuvvetleri ayrı ayrı alınır ve paydaki sonuç paydadaki sonuçla bölünür, yani

$b \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ dir. (4)

Gerçekten, kuvvet işleminin tanımı ve kesirlerin çarpımı kuralı gereğince

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ defa}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ defa}}} = \frac{a^n}{b^n}$$ elde edilir.

Örnek 7. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$. ♦

Bazı durumlarda (4) eşitliğini tersine okumak yararlıdır, yani kuralı sağdan sola doğru uygulayabiliriz:

$b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ geçerlidir.

Bu ise demektir ki, üsleri eşit olan iki kuvveti bölmek için, tabanlarının bölümüne ortak üs yazılır.

Örnek 8. $\frac{18^5}{9^5} = \left(\frac{18}{9}\right)^5 = 2^5 = 32.$ ♦

5. Kuvvetin kuvvetini alma kuralı

Bir üslü ifadenin kuvveti hesaplanırken üsler çarpılır; bulunan çarpım, tabana üs olarak yazılır.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (5)$$

Gerçekten (1) eşitliği gereğince,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ defa}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ defa}}} = a^{m \cdot n}$$

Örnek 9. $(a^3)^5 = a^{3 \cdot 5} = a^{15}$. ♦

Alıştırmalar

1.Hesaplayınız:

a) $(-5)^2 + (-2)^3$ **b)** $3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)^3$ **c)** $-(-1)^2 + 1$.

2. Verilen işlemleri yapınız:

a) $(-2) \cdot (-3)^2 + (-5)^2 - (-14)^3 : 7$ **b)** $-(-4)^2 \cdot (-0{,}3)^3 + 8 \cdot (-3)$

3. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\frac{-1{,}75 : (-0{,}35) + 8{,}8 : (-0{,}11)}{(-2{,}45 + 3{,}2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}$ **b)** $\left\{\left[4 - 3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right] : \frac{4}{25}\right\} \cdot 5^3 \cdot 2^3$

4. Kuvvetlerle verilen işlemleri yapınız:

a) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$ **b)** $a^n \cdot a^5$ **c)** $x^{n-1} \cdot x$

ç) $a^7 : a^4$ **d)** $b^{n+2} : b^3$ **e)** $a^8 : (a^2 \cdot a^5)$.

5. Hesaplayınız:

a) $(a^2)^3$ **b)** $(a^n)^2$ **c)** $(2a \cdot b^2)^3$

ç) $(-3a^2 \cdot b^2 \cdot c^3)^2$ **d)** $25^3 \cdot 4^3$ **e)** $-(-a^3)^2$

f) $(a^{2n})^3 : (a^3)^{2n}$ **g)** $\left(-\frac{5x^2}{b}\right)^3$ **h)** $\left(\frac{a^3 b}{2c^3}\right)^4$

3.2. Üssü sıfır ve negatif tam sayılı kuvvetler

Üssü doğal sayı olan kuvvetleri tanımladığımızda, n doğal sayı olmak üzere a^0 ve a^{-n} ifadeleri tanımsız kalmıştı. Bu gibi kuvvetler için şu tanımı kabul edeceğiz.

Tanım. (i) Her reel sayı $a \neq 0$ için, a^0 kuvvetinin değeri birdir, yani

$$a^0 = 1$$

(ii) Her reel sayı $a \neq 0$ ve her doğal sayı n için, a^{-n} kuvveti a^n kuvvetinin çarpımsal tersidir.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Örnek 1. a) $7^0 = 1$; **b)** $\pi^0 = 1$; **c)** $\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$;

ç) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; **d)** $0{,}01^{-2} = \frac{1}{0{,}01^2} = \frac{1}{0{,}0001} = 10000$. ♦

Alıştırma 1. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız: $2^{-2} - 2^{-3} + 4^{-1} - (-1)^{-5} + 3^0$

Çözüm.

$$2^{-2} - 2^{-3} + 4^{-1} - (-1)^{-5} + 3^0 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(-1)^5} + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{19}{8}. ♦$$

Bu şekilde $a \neq 0$ olmak üzere a^{-n} kuvvetinin değeri her tam sayı için tanımlanmıştır. Şunu farketmeliyiz ki, yukarıdaki tanımlarda n doğal sayı olduğu durumda a^0 ve a^{-n} kuvvetleri tanımlı değildir ve onlara anlamsız ifadeler diyeceğiz.

Üssü sıfır ve negatif sayı olan kuvvetlere ait kabul edilen tanımla yapılan işlemler, doğal sayılı kuvvetlerle yapılan işlemlerin kuralıyla tamamen uyumludur. Buna göre,

Her $a, b \in$ ○$\setminus\{0\}$ Ve her tam sayı $n, m \in$ için şunlar geçerlidir:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; **2.** $a^n : a^m = a^{n-m}$; **3.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; **5.** $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$.

Şu iddiayı ispatlayalım $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

• $n \in \mathbb{N}$ için iddia ispatlanmıştır.

• $n = 0$ için $(a \cdot b)^0 = 1$ ve $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$, oradan da $(a \cdot b)^0 = a^0 \cdot b^0$ elde edilir.

• $n = -p,\ p \in \mathbb{N}$ için,

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-p} = \frac{1}{(a \cdot b)^p} = \frac{1}{a^p \cdot b^p} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{b^p} = a^{-p} \cdot b^{-p} = a^n \cdot b^n$$ elde edilir.

Diğer iddialar benzer şekilde ispatlanıyorlar.

Örnek 2. a) $x^{-3} \cdot x^{-4} : x^{-6} = x^{-3+(-4)} : x^{-6} = x^{-7} : x^{-6} = x^{-7-(-6)} = x^{-1}$;

b) $(x^{-5})^{-2} = x^{(-5)\cdot(-2)} = x^{10}$; **c)** $\dfrac{(x^5)^{-3} \cdot x^7}{x^{-8}} = \dfrac{x^{-15} \cdot x^7}{x^{-8}} = \dfrac{x^{-8}}{x^{-8}} = 1$. ♦

Alıştırma 2. Verilen işlemleri yapınız:

a) $\dfrac{a^3 \cdot a^{-4} \cdot (-2a^{-2})}{a^{-5}}$; **b)** $\left(\dfrac{b^3 \cdot b^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-1}$.

Çözüm. Yapılan işlemleri izleyiniz

a) $\dfrac{a^3 \cdot a^{-4} \cdot (-2a^{-2})}{a^{-5}} = \dfrac{a^{-1} \cdot (-2a^{-2})}{a^{-5}} = -2 \cdot \dfrac{a^{-3}}{a^{-5}} = -2a^{-3-(-5)} = -2a^2$;

b) $\left(\dfrac{b^3 \cdot b^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{b^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-1} = (b^{-2-(-4)})^{-1} = (b^2)^{-1} = \dfrac{1}{b^2}$. ♦

Üssü negatif tam sayı olan kuvvetin tabanı kesir olduğu durumda, tanım gereğince

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n}$$

elde edilir. Buna göre, bir kesrin negatif tam sayılı kuvvetini alırken, o kesrin çarpımsal tersinin verilen kuvvetin pozitif tam sayılı kuvveti alınarak belirtilir.

Örnek 3. a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{4^2}{3^2} = \dfrac{16}{9}$; **b)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{3^3}{2^3} = -\dfrac{27}{8}$;

a) $(-2)^{-5} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^5} \cdot \left(-\dfrac{2}{1}\right)^2 = \dfrac{1}{(-2)^5} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$. ♦

Alıştırma 3. İşlemleri yapınız:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{12}\right)^0$; **b)** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

Çözüm. Şu şekilde hareket edilir:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1}{12}\right)^0 = 3^1 + 3^2 + 2^1 - 7^1 - 1 = 6$;

b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 4^2 + 2^3 = 24$. ♦

Alıştırma 4. Verilen ifadelerde negatif üsler kalmayacak şekilde dönüştürünüz:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-4}}{c^{-5}}$; **b)** $x^{-3} \cdot y^2$; **c)** $\frac{5x^{-1} \cdot y^{-2} \cdot z^3}{a^{-4} \cdot b^{-1}}$ **ç)** $\frac{(2a^3+3)^0}{b^{-3}}$ **d)** $\frac{1}{a^{-5}b^2}$.

Çözüm. Beraber yapalım

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-4}}{c^{-5}} = \frac{a^2 \cdot \frac{1}{b^4}}{\frac{1}{c^5}} = \frac{\frac{a^2}{b^4}}{\frac{1}{c^5}} = \frac{a^2 \cdot c^5}{b^4}$; **b)** $x^{-3} \cdot y^2 = \frac{1}{x^3} \cdot y^2 = \frac{y^2}{x^3}$;

c) $\frac{5x^{-1} \cdot y^{-2} \cdot z^3}{a^{-4} \cdot b^{-1}} = \frac{5 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot z^3}{\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{b^1}} = \frac{\frac{5z^3}{x \cdot y^2}}{\frac{1}{a^4 \cdot b}} = \frac{5z^3 \cdot a^4 \cdot b}{x \cdot y^2}$; **ç)** $\frac{(2a^3+3)^0}{b^{-3}} = \frac{1}{b^{-3}} = b^3$;

d) $\frac{1}{a^{-5}b^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^5} \cdot b^2} = \frac{a^5}{b^2}$. ♦

Alıştırmalar

1. Hangisi büyüktür:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ yoksa $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ **b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^0$ yoksa $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$?

2. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $8^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10}$ **b)** $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} : (-32)^{-1}$.

3. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) 2^{-4} **b)** -2^4 **c)** $(-2)^4$

ç) $-0{,}5^{-2}$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^0$ **e)** $(5-3\cdot 0{,}37)^{-2}$

4. Verilen ifadeleri negatif üsler kalmamak üzere dönüştürünüz:

a) $\frac{3a^{-2} \cdot c^{-3}}{4x^{-1}}$ **b)** $\frac{2^{-2}a^2}{3^{-1}x^2y^{-4}}$ **c)** $\frac{5a^{-3}c^2}{4a^2c^{-1}x^{-3}}$.

5. Verilen ifadeleri paydasız yazınız :

a) $\frac{x}{ay^2}$ **b)** $\frac{3x}{cy^{-3}}$ **c)** $\frac{2ax^2}{(a-b)^{-3}}$.

6. Verilen işlemleri yapınız:

a) $\frac{4}{5}a^{-2}c^{-3}x \cdot 10a^{-4}x^{-3}$ **b)** $0,5a^{-2} : (0,02a^3b^{-1})$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}x^{-1}y^{-3}\right)^{-2}$.

7. İfadeleri en sade şekilde yazınız:

a) $3x^{-4} : x^{-7} + 0{,}25^{-1}x^{-3} - x^8 : x^5$ **b)** $\left(\frac{2}{5}x^{-3} \cdot (y^2)^{-4}\right)^{-3}$

c) $(x^{-1} - y^{-1})^{-1},\ x \neq 0,\ y \neq 0$ **ç)** $(x^{-2} + y^{-2})^{-2},\ x \neq 0,\ y \neq 0.$

3.3. Rasyonel Cebirsel İfadeler

Tam ve kesirli rasyonel ifadeler

Tanım. Sonlu sayıda sabit ve değişkenlerin toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve üssü tam sayılı kuvvet işlemleriyle bağlı olarak belli matematik anlamı olan ifadelere **rasyonel cebirsel ifade** denir.

Örnek 1. $a+b,\ \frac{m^2+5}{m-n},\ \frac{1}{p+3}$ rasyonel cebirsel ifadelerdir. ♦

Cebirsel ifade sadece sabitlerden, hatta bir sabitten ya da sadece bir değişkenden de oluşabilir. Örnek, a, 1, 7, 2 cebirsel ifadeler olduğunu sayabiliriz. Sadece sabitlerden oluşan cebirsel ifadelere **sayı ifadesi** denir. Cebirsel ifadede değişkenleri karşılıklı değerleriyle değiştirmekle ve ifadede var olan işlemler yapıldıktan sonra elde edilen sayıya ifadenin **sayı değeri** denir.

Örnek 2. $3x - 1$ ifadesinin sayı değeri $x = 1$ için $3 \cdot 1 - 1 = 2$, $x = 2$ için $3 \cdot 2 - 1 = 5$ olur vb. ♦

Bazı rasyonel ifadelerdeki değişkenler herhangi değeri alabilir, bazı ifadelerde ise değişkenler sadece belli değerler alabildiğini hatırlatalım. Verilen rasyonel ifadede değişkenlerin alabildiği değerlere **değişkenin mümkün değerleri** denir.

Değişkenle bölme işlemi ya da değişken içeren bir ifadeyle bölme işlemi olmayan rasyonel ifadelere **tam rasyonel cebirsel ifadeler** denir.

Örnek 3. $2a^2b-1,\ 5x^2-3xy,\ \frac{4x}{3},\ \frac{a^2-2b}{4}$ cebirsel rasyonel ifadelerdir. Dördüncü ve beşinci örnekte sabit sayıyla bölme olduğunu farkedebilirsiniz. Sayıyla bölmeyi, o sayının çarpımsal tersi ile çarpmaya dönüştürmekle bu ifadeler $\frac{4}{3}x$ ve $\frac{1}{4}(a^2-2b)$ biçiminde yazılabilir. Buna göre verilen ifadeler gerçekten tam cebirsel rasyonel ifadeler olduğunu görebiliriz. ♦

Değişkenle bölme işlemi ya da değişken içeren bir ifadeyle bölme işlemi içeren rasyonel ifadelere **kesirli rasyonel cebirsel ifadeler** denir.

Örnek 4. $\frac{2a-1}{b},\ \frac{x}{y-2},\ \frac{5a}{2b}+4c$ ifadeleri kesirli rasyonel ifadelerdir, çünkü değişkenle bölme ya da değişken içeren ifade ile bölme işlemi vardır . ♦

Monomlar (tekterimliler)

Tanım. Sadece çarpma ve doğal sayılı kuvvet işlemlerini içeren tam rasyonel cebirsel ifadeye **monom** (**tekterimli**) denir.

Örnek 4. $5\,x$, $-2a\,b^2$, $-0{,}5\,m$, $\frac{3}{4}ab^2$ ifadeleri monomlardır. ♦

Kuvvet alma işlemi çarpma işleminin özel bir durumu olduğuna göre, monom için sadece çarpma işlemini içeren tam rasyonel ifade monomdur denilebilir.

Monomun tanımı gereğince, sadece bir sabit ya da bir değişken içeren her ifade monom sayılacaktır, çünkü bir monomda çarpma işleminin mevcut olması zorunlu değildir.

Örnek 5. a) x, -2, $-m$, $0{,}5$ monomlardır.

b) $\frac{4ab^2}{5}$ ifadesinde 5 ile bölme işlemi olduğuna rağmen o da bir monomdur. Bu ifade şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{4ab^2}{5}=\frac{4}{5}ab^2=0{,}8ab^2.♦$$

Bir monomun birkaç çarpanı – sabitleri varsa, çarpma işleminin değişme ve birleşme özelliklerini uygulayarak sabitlerin çarpımını değişkenlerin çarpımı önünde yazabiliriz.

Örnek 6. $\frac{-2ab^2\cdot 3x^2y}{5}$ monomunu $-\frac{6}{5}ab^2\cdot 3x^2y$ biçiminde yazıyoruz. ♦

Değişkenler önündeki sabit sayıya **monomun katsayısı**, değişkenlerin çarpımına ise **monomun baş değeri** denir.

Örnek 7. a^2b, $-3\,x$, $\frac{4}{5}ab^2c$ ve $-0{,}5m$ monomlarının katsayıları 1, -3, $\frac{4}{5}$ ve $-0{,}5$, baş değerleri ise a^2b, x, ab^2c ve m dir. ♦

Baş değerleri aynı olan ve sadece katsayılarıyla farklı olan monomlara **benzer monomlar denir.**

Katsayılı ters sayılar olan iki benzer monoma **ters monomlar** denir.

Örnek 8. a) $-2a^2\,b$, $5a^2\,b$, $\frac{3}{4}a^2b$ ve $-a^2b$ monomları benzer monomlardır.

b) $7a^2b$ ve $-7a^2b$ monomları ters monomlardır. ♦

Verilen bir monomun tüm değişkenlerin kuvvetlerinin toplamına **monomun derecesi** denir.

Örnek 9. $7x^2y$ monomunun derecesi 3, $3xy^3$ monomun derecesi ise 4 tür. ♦

Polinomlar

Tanım. Sonlu sayıda monomların cebirsel toplamına **polinom** denir.

Örnek 10. $3a - 2ax + a^2b^2 - bx$ ve $4ax - 3by + x^2y^2$ ifadeleri polinomlardır. ♦

Polinomu oluşturan monomlara **polinomun terimleri** denir. Tam iki terimden oluşan polinoma **binom** (**iki terimli**), tam üç terimden oluşan polinoma da **üç terimli** (**trinom**) denir.

Örnek 11. a) $a + 2b$ ve $x^2 + 5y$ ifadeleri binomlardır.

b) $3a^2 + 2a + 1$ ve $x^2 - 2xy + 3y$ ifadeleri üçterimlidirler (trinomlardır). ♦

Her monom, sadece bir terimi olan polinom sayılabilir. Diğer taraftan her polinom bir ya da birkaç değişken içerebilir.

Örnek 12. $5a^2 - 2a^3 + 3a^4 - a + 4$ polinomu farklı derecelerle sadece bir değişkenden meydana gelmiştir. Birleşme özelliğinden yararlanarak, onun terimlerini değişkenin azalan derecelerine göre sıralayabiliriz.

$$3a^4 - 2a^3 + 5a^2 - a + 4,$$

ya da değişkenin artan derecelerine (kuvvetlerine) göre sıralayabiliriz

$$4 - a + 5a^2 - 2a^3 + 3a^4. \;♦$$

Polinomda bulunan sabitlere **polinomun katsayıları** denir. Derecesi en büyük olan terimin derecesine **polinomun derecesi** denir.

Örnek 13. $3x^3 - 4x^2 + 5$ polinomunda 3, -4 ve 5 sayıları polinomun katsayılarıdır, derecesi ise 3 tür. ♦

Denk (özdeş) rasyonel ifadeler

Tanım kümeleri aynı olan ve değişkenlerin tüm mümkün değerleri için eşit sayı değerleri olan rasyonel ifadelere **denk (özdeş) rasyonel ifadeler denir.**

Örnek 14. $3(a - 4) + 7$ ve $3 - 5a$ ifadeleri, a değişkeninin her değeri için sayı değerleri eşittir. Buna göre onlar denk rasyonel ifadelerdir.

$\frac{a^2-4}{a+2}$ ve $a - 2$ ifadeleri denk ifadeler değildirler, çünkü değişkenin tanım kümeleri, yani alabildikleri mümkün değerleri denk değildir. Nitekim $\frac{a^2-4}{a+2}$ ve $a - 2$ ifadelerin her $a \neq 2$ için sayı değerleri eşittir. ♦

(=) işaretiyle bağlı iki denk ifade **özdeşlik** denilen eşitlik meydana getiriyorlar. Diğer sözlerle özdeşlik, değişkenlerin tüm mümkün değerleri için eşitlik oluşturan bir denklemdir.

Örnek 15. Toplama ve çarpma işlemlerinin temel özelliklerini gösteren eşitlikler en basit özdeşliklerdir:

$$a + b = b + a; \qquad (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$ab = ba; \qquad (ab)c = a(bc); \qquad (a + b)c = ac + bc. \;♦$$

Bir rasyonel ifadeyi ona özdeş bir rasyonel ifadeyle değiştirme işlemine **özdeş dönüşüm** denir. Örnek, bir polinomun terimlerini değişkenlerden birinin derecesine göre sıralanması polinomun özdeş dönüşümüdür.

Örnek 16. $5a^2 + 2a + 4a^3 + a - 3a^2 - 4a + 9$ polinomu verilmiş olsun.

Bu polinomun yedi terimi vardır, fakat aralarında benzer olanları da vardır. Toplama işleminin değişme ve birleşme özelliklerini uygulayarak terimlerin yerlerini değiştirmekle ve gruplaştırmakla ifadeyi $4a^3 + (5a^2 - 3a^2) + (2a + a - 4a) + 9$ şeklinde yazabiliriz. Dağılma özelliğini uygulamakla parantezlerde gruplaştırılmış olan ifadeleri sadeleştirebiliriz, yani $4a^3 + (5-3)a^2 + (2+1-4)a + 9$, bu şekilde polinomun en sade şeklini elde ediyoruz

$4a^3 + 2a^2 - a + 9$ bu ise verilen polinom ile özdeştir. ♦

Verilen bir polinomda birkaç benzer terimin cebirsel toplamını onlara denk olan bir terimle değiştirme işlemine **polinomun benzer terimlerinin en sade hali** denilir.

Örnek 17. Yapılan işlemleri izleyiniz:

$$3a^2 + 2ab - b^2 - 5a^2 + 4b^2 = (3a^2 - 5a^2) + 2ab + (-b^2 + 4b^2) =$$
$$= (3-5)a^2 + 2ab + (-1+4)b^2 =$$
$$= -2a^2 + 2ab + 3b2. \ ♦$$

Alıştırmalar

1. Verilen ifadelerde değişkenlerin hangi değerleri ifadenin mümkün değerleri değildir:

a) $\frac{a+5}{a-3}$ **b)** $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$ **c)** $\frac{2ab}{a-b}$.

2. Verilen monomların katsayılarını belirtiniz:

a) $-4a\,b2$ **b)** $2{,}5a$ **c)** $-cx2$ **ç)** $-\frac{x}{3}$ **d)** $\frac{2xy^2}{5}$?

3. Şu monomlardan hangileri benzerdir:

$-3ab,\ \frac{1}{2}a\,x^2,\ ab,\ -a\,x^2,\ 6a\,x^2,\ -7ax^2,\ ax^2$?

4. Verilen monomların tersini yazınız:

$-6ab,\ a^2b^2,\ -2ax,\ \frac{x}{3},\ -x^2y,\ 0{,}5a.$

5. Verilen polinomun derecesini belirtiniz: $x^3y - x\,y^{22} + 2xy - 3xy^2$.

6. Verilen ifadeler özdeş midir:

a) $a + b = a - (-b)$ **b)** $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ **c)** $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$.

7. Verilen polinomun terimlerini en sade şekilde yazınız:

a) $3ab - 4a^2b^2 - 7ab^2 + 2ab^2 - ab + 4^2b^2$ **b)** $1{,}5a - 2b + 0{,}5b - 0{,}3a - ab$.

3.4. Tam Rasyonel İfadeleri Toplama ve Çıkarma

Polinomları Toplama

Örnek 1. Şu monomları toplayalım:

$7a^2, -5a, -3ab, 2a$ ve $-ab$.

Verilen monomların aranılan cebirsel toplamı

$$7a^2 + (-5a) + (-3ab) + 2a + (-ab)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda toplama işaretlerini ve parantezleri kaldırmakla

$$7a^2 - 5a - 3ab + 2a - ab.$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen polinomun benzer terimleri vardır ve bunları toplayarak polinomun en sade şekli elde edilir:

$$7a^2 - 3a - 4ab. \blacklozenge$$

1. (Monomları toplama kuralı) Birkaç monomu toplamak için, onları işaretleriyle beraber birbiri ardısıra cebirsel toplam biçiminde yazmak yeterlidir. Ondan sonra gerekirse elde edilen polinomu en sade şekilde yazıyoruz.

Örnek 2. Verilen polinomları toplayalım:

$5a^2b - 3a + 2b$ ve $2a - 3a^2b + 4ab - 7$.

Aranılan toplamı yazalım

$$(5a^2b - 3a + 2b)_b + (2a - 3a^2b + 4ab - 7).$$

Polinomları sayıların cebirsel toplamı gibi bakabiliriz, bu nedenle onları toplarken cebirsel toplamı katma kuralına göre hareket edebiliriz. Bu kurala göre, birinci polinoma sırasıyla ikinci polinomun her terimini katıyoruz

$$(5a\,b^2 - 3a + 2b) + (2a - 3a\,b^2 + 4ab - 7) = 5a\,b^2 - 3a + 2b + 2a - 3a\,b^2 + 4ab - 7.$$

Farkedildiği gibi aranılan toplam, içinde verilen polinomların tüm terimleri işaretleriyle beraber bulunduran yeni bir polinomdur. Elde edilen polinomda benzer terimler vardır. Onları toplayarak polinom en sade şekilde dönüştürülür:

$$5a\,b^2 - 3a + 2b + 2a - 3a\,b^2 + 4ab - 7 = 2a\,b^2 - 2a + 2b + 4ab - 7. \blacklozenge$$

2. (**Polinomları toplama kuralı)** İki polinomu toplarken, birinci polinoma sırasıyla ikinci polinomun terimleri işaretleriyle beraber eklenir. Ondan sonra elde edilen yeni polinoma gerekirse sadeleştirme yapılır.

Polinomları Çıkarma

Örnek 3. $4a^2$ monomundan $5ab$ monomunu çıkaralım.

Aranılan farkı

$$5ab - (+4a^2) = 5ab + (-4a^2)$$

biçiminde yazıyoruz. Ondan sonra toplama işlemi kuralına göre

$$5ab + -(4a^2) = 5ab - 4a^2$$

elde edilir. ♦

3.(Monomu monomdan çıkarma kuralı). Bir monomu diğer bir monomdan çıkarmak için, çıkarılana çıkarılacak monomu ters işaretiyle eklememiz yeterlidir.

Örnek 4. Şu örneği izleyiniz

$3ax - (-2by) = 3ax + 2by$. ♦

Örnek 5. Verilen polinomların farkını belirtelim

$(6ax - 5a + 2x) - (+3x2 - 4ax + 2a - 7)$.

Polinomların çıkarma işlemini yapmak için, tıpkı monomu monomdan çıkardığımız gibi, çıkarılana çıkan polinomun tersi eklenir. Buna göre çıkarılana çıkan polinomun her terimi ters işaretiyle yazılarak eklenir. Demek ki

$$(6ax - 5a + 2x) - (+3x^2 - 4ax + 2a - 7) = 6ax - 5a + 2x - 3x^2 + 4ax - 2a + 7 =$$

$$= 10ax - 7a - 3x^2 + 2x + 7 \text{ elde edilir. } ♦$$

4.(Polinomu polinomdan çıkarma kuralı) Polinomlarda çıkarma işlemi yapılırken, ikinci polinomdaki terimlerin işaretini değiştirir ve sonucu ilk polinoma ekleriz. Ondan sonra elde edilen polinomun terimleri düzenlenir.

<u>Parantezleri Kaldırma ve Parantez İçine Alma</u>

Monomlarla ve polinomlarla toplama veya çıkarma işlemlerini yaparken, onları önce parantezler içinde yazıyoruz ve ondan sonra parantezleri kaldırıyoruz. Polinomları toplama ve çıkarma kuraalları gereğince parantezlerin kaldırılması için şu kuralları elde edebiliriz.

5. (Parantezlerin kaldırılması kuralı) Parantez önünde (+) işareti varsa, parantezle silinebilir, parantez içindeki terimlerin işaretleri aynı kalır. Parantez önündeki işaret (−) olduğu durumda, parantezle silinebilir fakat parantez içindeki terimler ters işaretleriyle yazılır.

Örnek 6. Aşağıdakilerde parantezleri kaldırarak

$3a - (2b - 5c) + (-5a + 4b - c) - (-7a + b - 8) =$

$= 3a - 2b + 5c - 5a + 4b - c + 7a - b + 8 =$

$= 5a + b + 4c + 8$ elde edilir. ♦

Bazı durumlarda parantez önünde (+) ya da (−) olacak şekilde verilen bir polinomun parantez içine alınması gerekebilir. Bu işlemi şu kurala göre yapacağız.

6. (Parantezlerde kapatma kuralı) Verilen bir polinomu parantezler içinde yazdığımızda, parantez önünde (+) işaretini yazarsak, polinomun tüm terimleri kendi işaretleriyle yazılır.

Örnek 7.

$3a - b + 5c = +(3a - b + 5c)$ olur. ♦

7. (Parantezlerde kapatma kuralı) Verilen bir polinomu parantezler içinde yazdığımızda, parantez önünde (−) işaretini yazarsak, polinomun tüm terimleri kendi işaretlerini tersine değiştirerek yazılır.

Örnek 8.

$3a - b + 5c = -(-3a + b - 5c)$ olur. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen monomları toplayınız:

a) $7x^4$, $-5x^2$, $-4x^3$, $6x^2$ ve $12x^4$ **b)** $-2xy$, $7xy$, $5xy$ ve $-3xy$.

2. Verilen polinomların toplamını belirtiniz:
a) $(5x2 - ax + a2)+(3x2 + 2ax - a2)+(4ax - 3x2 + 8)$
b) $(2a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 - ab^3)+(a^4 - a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 - b^4)$.

3. Verilen işlemleri yapınız:
a) $-5a - (+3a)$ **b)** $3x - (-2x)$ **c)** $2ab - (+2ab)$ **ç)** $3ax - (-ax^2)$.

4. Polinomlarla çıkarma işlemini yapınız:
a) $(6a^2 x - 2ax^2 + 5) - (4a^2x + ax^2 - 3)$
b) $(x3y - 2xy2 + 3xy - 2) - (-4x3y + xy - 3xy2 + 5x2y + 1)$.

5. Parantezlerden kurtulunuz ve ifadeleri düzenleyiniz:
a) $(2x2 + 3y2) - \{(x2 - 2xy - y2) + [(3x2 + 2xy - (-5xy + 2y2)]\}$
b) $3x2y - \{xyz - (3xyz - x2z) + [2x2y - (5x2y - 4xyz - x2z)]\}$.

3.5. Tam Rasyonel İfadelerin Çarpımı

Monomları Çarpma

Örnek 1. $-5ab^2c$ ve $3a^3bx$ monomlarını çarpalım.

Monomlar aslında birer çarpım olduklarına göre, çarpma işleminin değişme ve birleşme özelliklerini uygulayarak, verilen çarpımı şu şekilde yapabiliriz:

$$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = (-5\cdot 3)\cdot(a\cdot a^3)\cdot(b^2\cdot b)\cdot c\cdot x.$$

Parantezlerdeki çarpımları yaptıktan sonra

$$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = -15a^4b^3cx$$ elde edilir. ♦

İki monomdan daha fazla sayıda monomun çarpılması gerektiğinde de benzer şekilde hareket ediyoruz.

Örnek 2. $4a^2b$, $0{,}5ac^3$ ve $-3b^3c^2$ monomların çarpımını belirtelim.

Şu şekilde hareket ediyoruz:

$$4a^2b\cdot 0{,}5ac^3\cdot(-3b^3c^2) = [4\cdot 0{,}5\cdot(-3)]\cdot(a^2a)\cdot(b\cdot b^3)\cdot(c^3\cdot c^2) = -6a^3b^4c^5. ♦$$

elde edilir. ♦

1. (Monomları çarpma kuralı) Monomları çarparken önce katsayıları çarpılır, ondan sonra aynı tabanlı kuvvetler birbiriyle çarpılır ve sonunda Sadece bir monomda bulunan kuvvet varsa çarpımda olduğu gibi eklenir.

2. (Monomlarda kuvvet alma kuralı) Bir monomun kuvvetini alırken, önce monomdaki her çarpanın kuvveti alınır, ondan sonra da elde edilen kuvvetler çarpılır.

Örnek 3. $(3a^2xy^3)^4 = 81a^8x^4y^{12}$ elde edilir. ♦

Polinomu monomla çarpma

Örnek 4. $2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2$ polinomun $4a^2b$ monomu ile çarpımını hesaplayalım.

Çarpma işleminin dağılma özelliği gereğince verilen çarpım şu şekilde yazılabilir:

$$(2a^3-3ab^2+5bc^2)\cdot(4a^2b)=2a^3\cdot4a^2b-3ab^2\cdot4a^2b+5bc^2\cdot4a^2b.$$

Elde edilen ifadede mevcut olan çarpımları yaptıktan sonra

$$(2a^3-3ab^2+5bc^2)\cdot(4a^2b)=8a^5b-12a^3b^3+20a^2b^2c^2$$ elde edilir. ♦

3. (Polinomu monomla çarpma kuralı) Polinomu monomla çarparken, polinomun her terimi verilen monomla çarpılır. Ondan sonra elde edilen çarpımlar toplanır.

Örnek 5. Beraber çarpalım

$$(-5ax^2+4xy^3-2y+1)\cdot(-3a^2xy)=15a^3x^3y-12a^2x^2y^4+6a^2xy^2-3a^2xy.$$ ♦

<u>Polinomları Çarpma</u>

Örnek 6. $2x^2-5xy+y^2$ ve $4x+3y$ polinomlarının çarpımını hesaplayalım.

Birinci polinomu M ile işaret edelim, yani $M=2x^2-5xy+y^2$ olsun. O halde aranılan çarpım $M\cdot(4x+3y)$ şekline dönüşür.

Polinomu monomla çarpma kuralı gereğince

$$M\cdot(4x+3y)=M\cdot4x+M\cdot3y$$

Elde edilir. Simdi M değerini verine kovmakla

$$(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)=(2x^2-5xy+y^2)\cdot4x+(2x^2-5xy+y^2)\cdot3y.$$

Elde edilir. Farkedildiği gibi, birinci polinom ikinci polinomun her terimiyle ayrı ayrı çarpılmıştır. Bu şekilde

$$(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)=8x^3-20x^2y+4xy^2+6x^2y-15xy^2+3y^3=$$
$$=8x^3-14x^2y-11xy^2+3y^3.$$ ♦

elde edilir.♦

4. (Polinomu polinomla çarpma kuralı) İki polinomu çarparken, birinci polinomun her terimi ikinci polinomun her terimiyle çarpılır ve sonunda elde edilen çarpımlar toplanır. Sonunda gerekirse elde edilen polinom en sade şekilde yazılır.

Örnek 7. Beraber çarpalım

$$(2a^3-a^2b+3ab^2-5b^3)\cdot(a^2-3ab+2b^2)=$$
$$=2a^5-a^4b+3a^3b^2-5a^2b^3-6a^4b+3a^3b^2-9a^2b^3+$$
$$+15ab^4+4a^3b^2-2a^2b^3+6ab^4-10b^5=$$
$$=2a^5-7a^4b+10a^3b^2-16a^2b^3+21a^4b-10b^5.$$ ♦

<u>Kısa Çarpma Formülleri</u>

Şimdi, kısa çarpma formülleri diye adlandırılan beş tane özdeşlik ile tanışacağız. Şunu da hatırlatalım, A ve B ile sadece sayı değil herhangi ifade olabilir.

1. İki ifadenin toplamının karesi (toplamın açılımı)

İki ifadenin toplamının karesini belirtmek için, birinci ifadenin karesi artı birinci ve ikinci ifadenin iki kat çarpımı, artı ikinci ifadenin karesi toplamı olarak hesaplanır, yani

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ olduğunu görüyoruz

Örnek 8. Beraber çözelim

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2. \ \blacklozenge$$

$$76^2 = (70+6)^2 = 70^2 + 2\cdot 70\cdot 6 + 6^2 = 4900 + 840 + 36 = 5776.$$

2. İki ifadenin farkının Karesi (farkın açılımı)

İki ifadenin farkının karesini belirtmek için, birincinin karesi, eksi birinci ve ikincinin iki kat çarpımı, artı ikincinin karesi toplamı biçiminde hesaplanır, yani,

$$\boxed{(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$$

Gerçekten

$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$ olduğunu görüyoruz.

Örnek 9. Beraber çözelim,

$$(3a^2b - 2ab)^2 = (3a^2b)^2 - 2\cdot 3a^2b\cdot 2ab + (2ab)^2 = 9a^4b^2 - 12a^3b^2 + 4a^2b^2.$$

$$38^2 = (40-2)^2 = 40^2 - 2\cdot 40\cdot 2 + 2^2 = 1600 - 160 + 4 = 1444. \ \blacklozenge$$

3. İki ifadenin toplamı ve farkının çarpımı

İki ifadenin toplamı ve farkının çarpımı, birinci ve ikinci ifadenin karelerinin farkına eşittir, yani

$$\boxed{(A+B)(A-B) = A^2 - B^2}$$

Gerçekten

$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB + B^2 = A^2 - B^2$

olduğunu görüyoruz.

Örnek 10. Beraber çözelim

$$(4x+3y)(4x-3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2. \ \blacklozenge$$

İki ifadenin toplamı ve farkının çarpımına ait formülünü, bazı durumlarda iki sayının çarpımını daha çabuk bulmamız için de kullanabiliriz.

Örnek 11. Beraber çözelim

$58\cdot 62 = (60-2)(60+2) = 60^2 - 2^2 = 3596. \ \blacklozenge$

Yukarıdaki formülü ters yönde yazarsak

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

formülünü elde edeceğiz. Bu ise demektir ki, iki ifadenin karelerinin farkı bu iki ifadenin toplamı ve farkının çarpımına eşittir.

İki ifadenin kareleri farkı formülünü, iki sayının karelerinin farkını daha çabuk bulmak için kullanabiliriz.

Örnek 12. Beraber çözelim

$237^2 - 236^2 = (237+236)(237-236) = 437\cdot 1 = 437. \ \blacklozenge$

4. İki küp toplamı biçiminde ifadenin çarpanlara ayrılışı

$(A+B)(A^2 - AB + B^2)$ çarpımını hesaplayalım.

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + A^2B - A^2B - AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + B^3.$$

Bu şekilde şu formülü elde ediyoruz

$$\boxed{(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3}$$

Örnek 13. Beraber çözelim

$$(3+x)(9-3x+x^2) = 3^3+x^3 = 27+x^3. \blacklozenge$$

Yukarıdaki formülü ters yönde yazarsak

$$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$$

Formülünü elde edeceğiz. Buna iki kübün toplamının açılım formülü denir.

Örnek 14. Beraber çözelim

$$8x^3+27 = (2x)^3+3^3 = (2x+3)(4x^2-6x+9). \blacklozenge$$

5. İki küp farkının çarpanlara ayrılışı

$(A-B)(A^2+AB+B^2)$ çarpımını hesaplayalım

$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3+A^2B-A^2B+AB^2-AB^2-B^3 = A^3-B^3.$$

Bu şekilde şu formülü elde ediyoruz:

$$\boxed{(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3}$$

Örnek 15. Beraber çözelim

$$(m-2)(m^2+2m+4) = m^3-8. \blacklozenge$$

Yukarıdaki formülü ters yönde yazarsak

$$A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$$

Formülün elde edeceğiz. Bu formüle küplerin farkının açılım formülü denir.

Örnek 16. Beraber çözelim

$$8-x^3 = 2^3-x^3 = (2-x)(4+2x+x^2). \blacklozenge$$

Alıştırmalar

1. Monomları çarpınız:

а) $-5a^2b^3$ и $-2a^3b$ **б)** x^3y и $-3a^2x^5y^3$ **в)** $-\frac{3}{4}x^2y^3z$ и $-\frac{4}{7}xy^2$.

2. Çarpımı belirtiniz:

а) $(8x^3-4x^2y-5xy^2+3y^2)\cdot(-2x^2y)$ **б)** $(3ab^2c-7a^2bc^2-a^2bc)\cdot(-3abc)$.

3. Polinomları çarpınız:

a) $x^2-xy+2y+3x$ ve $x-4y+5$

b) $3a^4-6a^3b+5a^2b^2-7ab^3-9b^4$ ve $a^2-3ab+b^2$.

4. Şu kareleri ve küpleri hesaplayınız:

a) $(x-5)^2$ **b)** $(3c+2)^2$ **c)** $(1-3)x^2$ **ç)** $(3x-y+5)^2$

d) $(x+y-z)^2$ **e)** $(8-y^2-7z)^2$ **f)** $(2a+b)^3$ **g)** $(x-3y)^3$ **.**

5. Verilenlerde gereken işlemleri yapınız ve ifadeleri en sade şekilde yazınız:

a) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+6x+9)$

b) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$

3.6. Tam Rasyonel İfadeleri Bölme

Monomu monomla bölme

Örnek 1. $12a^3b^2c : (-3ab^2)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ bölme işlemini yapalım.

Bölen $(-3ab^2)$ bir çarpım olduğuna göre, çarpım ile bölme kuralı gereğince, bölünen bölenin ilk çarpanıyla yani -3 ile bölünecektire, ondan sonra elde edilen sonuç ikinci çarpan a ile bölünecek ve sonunda elde edilen sonuç üçüncü çarpan b^2 ile bölünecektir.

Halbuki, bölünen de bir çarpımdır. Bu nedenle çarpımın bir sayıyla bölümü kuralı gereğince, $12a^3b^2c$ bölüneni -3 sayısı ile bölünmesi için, sadece çarpanlarından biri, örneğin 12 katsayısının -3 ile bölünmesi yeterlidir. Benzer şekilde elde edilen sonuç a sayısıyla bölünmesi için, çarpanlardan sadece biri mesela a^2 nin a ile bölünmesi yeterlidir vb. Bu şekilde

$$12a^3b^2c : (-3ab^2) = \frac{12}{-3} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2} \cdot c = -4a^2c$$ elde edilir. ♦

1. (Monomu monomla bölme kuralı) Monomu monomla bölerken, bölünenin katsayısı bölenin katsayısıyla bölünür, bölünenin baş değerindeki kuvvetler ise bölenin karşılıklı aynı tabanlı kuvvetleriyle bölünür ve sonunda elde edilen sonuçlar çarpılır.

Monomu monomla bölerken sonuç daima monom (tam rasyonel ifade) olmayabilir.

Örnek 2. $6a^5$ monomunu $5a^2b$ ile bölelim.

Herhangi bir monom $5a^2b$ ile çarpıldığında çarpımın kapsamında b sayısının var olması mecburi olduğunu biliyoruz, bu sayı ise verilen bölünende yoktur. Bu nedenle böyle durumda aranılan bölüm kesirli rasyonel ifade olacaktır. Bu blümü

$$\frac{6a^5}{5a^2b}$$

kesir biçiminde ifade edeceğiz. ♦

Buna göre bölen monomda bölünende bulunmayan herhangi bir kuvvet varsa, ya da bölünendeki aynı tabanlı karşılıklı kuvvetinden daha yüksek dereceden kuvvet bulunursa, bölüm kesirli rasyonel ifade olur.

Polinomu monomla bölme

Örnek 3. $6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2$ polinomunu $2a^3b$ monomuyla bölelim.

Bir cebirsel toplamın verilen bir sayıyla bölme kuralını uygulayarak

$$(6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2) : 2a^3b = 6a^5b^3 : 2a^3b - 5a^4b : 2a^3b + 7{,}6a^3b^2c^2 : 2a^3b =$$

$$= 3a^2b^2 - 2{,}5a + 3{,}8bc^2$$ elde edilir. ♦

2. (Polinomu monomla bölme kuralı) Polinomu monomla bölerken, polinomun her terimi verilen monomla bölünür ve elde edilen sonuçlar toplanır.

Örnek 4. $(-12x^4 + 9x^3 y - 6x^2 y^2) : (-3x^2) = 4x^2 - 3xy + 2y^2$. ♦

Polinomu polinomla bölme

Bir polinomu diğer bir polinomla bölmek için, öyle üçüncü bir polinomun bulunması gerekir ki, onun ikinci polinomla çarpımı birinci polinoma eşit olsun. Polinomu polinomla bölerken elde edilen sonuç çok nadir bir polinom ya da monom biçimide gösterilebilir.

Örnek 5. Beraber bölelim

$$(a^2 - 4):(a + 2) = a - 2$$

çünkü $(a + 2) \cdot (a - 2) = (a^2 - 4)$.♦

Genel durumda, iki polinomun bölümü kesirli rasyonel ifade biçiminde yazılabilir.

Örnek 6. Beraber çözelim

$$(a^2 + b^2) : (a + b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Çünkü $a + b$ ile çarpımı $a^2 + b^2$ verecek bir polinom yoktur. ♦

Polinomu polinomla bölerken, sayıları böldüğümüz gibi benzer yöntemi kullanıyoruz.

$B \neq 0$ olmak üzere A ve B verilen iki polinom olsun. A polinomunu B polinomuyla bölerken:

a) bölüm Q ve kalan $R = 0$ elde edilir ve onu

$$\frac{A}{B} = Q \quad \text{ya da} \quad A = B \cdot Q \quad \text{biçiminde yazıyoruz.}$$

Böyle durumda, yani $R = 0$ olduğunda A polinomu B polinomuyla bölünür denir, ya da B polinomu A nın kapsamındadır denir.

b) bölüm Q ve kalan R elde edilir ve onu

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \quad \text{yani} \quad A = B \cdot Q + R \quad \text{biçiminde yazıyoruz.}$$

Bölme işlemini şu örnekle göstereceğiz.

Örnek 7. Beraber yapalım

$$\begin{array}{l}
(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) = \\
(2x^2 + x - 3) : (2x + 3) = x - 1 \\
\underline{\pm 2x^2 \pm 3x} \\
\quad -2x - 3 \\
\quad \underline{\mp 2x \mp 3} \\
\qquad 0
\end{array}$$

Bölünenin ilk terimi $2x^2$ bölenin ilk terimi $2x$ ile bölünür ve bu şekilde bölümün ilk terimi x elde edilir. Ondan sonra bölümün ilk terimi bölenle çarpılır ve elde edilen çarpım bölünenden çıkarılır. Bu şekilde bölümün ilk kalanı elde edilir, örneğimizde $-2x - 3$ tür.

Birinci kalanın ilk terimi bölenin ilk terimiyle bölünür. Bu şekilde bölümün ikinci terimi -1 elde edilir. Bölümün ikinci terimi bölenle çarpılır ve elde edilen sonuç birinci kalandan, yani $-2x - 3$ ten çıkarılır. Bu şekilde sıfır olan ikinci kalan elde edilir.

$(x - 3 + 2x^2):(3 + 2x) = x - 1$, yani $(x - 3 + 2x^2) = (3 + 2x)(x - 1)$ dir. ♦

Alıştırma 1. $x^2 - 1 + x + 2x^3$ polinomunu $1 + x + x^2$ polinomuyla bölelim.

Çözüm. Beraber çözelim

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - 1 + x + 2x^3):(1 + x + x^2) = \\
(2x^3 + x^2 + x - 1):(x^2 + x + 1) = 2x - 1 \\
\underline{\pm 2x^3 \pm 2x^2 \pm 2x} \\
\qquad -x^2 - x - 1 \\
\qquad \underline{\mp x^2 \mp x \mp 1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Bölme işlemi bittiğinde $(x^2 - 1 + x + 2x^3):(1 + x + x^2) = 2x - 1$,
yani $x^2 - 1 + x + 2x^3 = (1 + x + x^2)(2x - 1)$. ♦

Örnek 8. $x^4 - x^2 + 2$ polinomunu $x^2 - x + 1$ polinomuyla bölelim.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^2 + 2):(x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 \\
\underline{\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2} \\
\qquad x^3 - 2x^2 + 2 \\
\qquad \underline{\pm x^3 \mp x^2 \pm x} \\
\qquad\qquad -x^2 - x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{\mp x^2 \pm x \mp 1} \\
\qquad\qquad\qquad -2x + 3
\end{array}
$$

Kalanın ilk terimi $-2x + 3$, bölenin ilk terimiyle bölünmediğine göre bölme işlemini sonlandırıyoruz. Bunu

$(x^4 - x^2 + 2):(x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 + \dfrac{-2x + 3}{x^2 - x + 1}$ şeklinde yazacağız. ♦

Daha fazla değişkenli polinom söz konusu olursa, hem bölünen hem de bölen değişkenlerin birinin en büyük dereceden en küçüğüne kadar azalan kuvvetlerine göre sıralayacağız.

Örnek 9. $17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4$ polinomunu $x^2 + 2y^2 - 3xy$ polinomuyla bölelim.

$$
\begin{array}{l}
(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4):(x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2 \\
(3x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4):(x^2 - 3xy + 2y^2) = 3x^2 + 11y^2 \\
\underline{\pm 3x^4 \mp 9x^3y \pm 6x^2y^2} \\
\qquad 11x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4 \\
\qquad \underline{\pm 11x^2y^2 \mp 33xy^3 \pm 22y^4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Bölme bittikten sonra

$$(17x^{2\,2}y + 3x^4 - 33xy^3 - 9x\,y^3 \quad + 22y^4):(x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$$

yani $17x^{2\,2}y + 3x^4 - 33xy^3 - 9x\,y^3 \quad + 22y^4 = (x^2 + 2y^2 - 3xy)(3x^2 + 11y^2)$ elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen monomları bölünüz:

a) $12x : (-3)$ **b)** $(-6a^3b^2c) : (-2a^2bc)$ **c)** $3x^2\,y^2\,z : (-5x^2\,yz)$.

2. Verilen bölmeyi yapınız:

a) $(12a - 15b):3$ **b)** $(4x^2y - 12x^4y^3):(-4x^2y)$

c) $(6a^2x^4 - 9a^3x^5 + 15a^4x^3):ax^3$ **ç)** $(-15a^3x^5 + 10a^4x^4 - 25a^5x^3):(-5a^3x^3)$.

3. Verilen ifadelerdeki işlemleri yapınız:

a) $(a^2 - 2ab)\cdot 3a + (6ab^3 - 12a^4b^2):3ab$

b) $(15a^2x^3 - 6a^3x^2):(-3a^2x^2) - 2x^2(3 + 4a^2x)$

c) $(x+3y)(x-3y)-\frac{1}{4}(2x+y)(2x-y):\frac{y}{2}$

4. Verilen polinomları bölünüz:

a) $(x^4 + x^2 + 1):(x^2 + x + 1)$

b) $(6a^3b - 11a^2b^2 + b^4):(3a - b)$

c) $(3x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 1):(x^2 - 2x + 1)$.

5. $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$ polinomu verilen polinomla bölünür olup olmadığını yoklayınız

a) $x - 2$ **b)** $x - 1$ **c)** $x + 2$ **ç)** $x + 3$.

3.7. Polinomları Çarpanlarına Ayırma

Bir polinomu çarpanlarına ayırma, ona denk olacak iki yada daha fazla rasyonel ifadenin çarpımı biçiminde yazmak demektir.

Örnek 1. Çarpma işleminin dağılma özelliğini uygulamakla $ax + bx - cx$ polinomu $x(a + b - c)$ biçiminde iki rasyonel ifadenin çarpımı olarak yazılabilir. ♦

Polinomların çarpanlara ayrılması için, gereken dönüşümlerin yapılmasına ait genel bir kural yoktur. Bu nedenle ilerde polinomların çarpanlarına ayrılması için daha çok uygulanan birkaç kuralı inceleyeceğiz.

Ortak çarpanı parantez önüne alarak çarpanlara ayırma

Polinomların ortak çarpanı parantez önüne alarak çarpanlara ayırma yöntemi çarpma işleminin dağılma özelliğine dayanır. Örneğin $(a + b - c)m = am + bm - cm$ eşitliğinin taraflarını değiştirmekle

$am + bm - cm = (a + b - c)m$ elde edilir.

1. (Ortak çarpanı parantez önüne alarak çarpanlara ayırma kuralı)
Verilen polinomun tüm terimlerinin aynı bir ortak çarpanı varsa, onu parantez önüne alabiliriz. Bu durumda parantez içinde, verilen polinomu parantez önündeki ortak çarpanla bölümüyle elde edilen polinom kalacaktır.

Örnek 1. $10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3$ polinomunu asal çarpanlarına ayıralım.

İlk önce her terimin katsayısında 5 sayısı ortak çarpan olduğunu farkedelim. Bundan başka her terimde a ve b farklı kuvvetler biçiminde ortak çarpanları da olduğunu görüyoruz. Onları da ortak a ikinci ve b birinci derece olmak üzere en küçük kuvvetleriyle parantez önüne alabiliriz. x değişkeni ortak çarpan değildir, çünkü üçüncü terimde x yoktur.

Buna göre, verilen polinomun tüm terimlerinin ortak çarpanı $5a^2b$ monomudur. Bu şekilde elde edilen monom parantez önünde yazılır, parantez içinde ise verilen polinomun ve $5a^2b$ ortak çarpanın bölümünden elde edilen polinom yazılır. Yani

$$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3 = 5a^2b(2ax^2 - abx - 3b^2). \blacklozenge$$

Parantez önüne -1 çarpanı da alınabilir.

Örnek 2. Şunu da kaydedelim: $b - a = -(-b + a) = -(a - b)$, $1 - x = -(x - 1)$. ♦

Parantez önünde alınan ifade sadece monom olmayabilir, polinom da olabilir.

Örnek 3. Beraber çözelim, $2a(x-3)+b(x-3)-5c(x-3) = (x-3)(2a+b-5c)$. ♦

Terimleri gruplandırarak çarpanlara ayırma

Polinomları gruplaştırarak çarpanlara ayırma yöntemi, polinomların birbiriyle çarpımı özelliğine dayanmaktadır. Örneğin,

$$(a-b)(c+d) = (a-b)c + (a-b)d = ac - bc + ad - bd.$$

olduğuna göre, $ac - bc + ad - bd$ polinomunu çarpım şeklinde yazılmasını istediğimiz durumda, yukarıdaki eşitliği ters yönde uygulayacağız.

$$ac - bc + ad - bd = (a-b)c + (a-b)d = (a-b)(c+d).$$

Burada ilk terimi ikincisi ile gruplaştırıp onlardan c ortak çarpanını parantez önüne alıyoruz, ondan sonra üçüncü terimi dördüncüsüyle gruplaştırıp onlardan ortak olan çarpanı d yi parantez önüne alıyoruz. Bu şekilde $c(a-b) + d(a-b)$ ifadesini elde ediyoruz. Burada, $a - b$ ortak çarpan olduğu açıktır. Bu ortak çarpanı parantez önüne almakla ifadenin çarpım biçiminde yazılışı $(a-b)(c+d)$ elde edilir. Polinomun bu şekilde çarpanlara ayrılmasına **gruplandırarak çarpanlara ayırma yöntemi** denir.
.

Örnek 4. Verilen polinomu çarpanlarına ayıralım

$$3ax + 2b - bx - 6a$$

Verilen polinomu, birinci terimi dördüncüsü ile ve ikinci terimi üçüncüsü ile gruplaştırarak çarpanlara ayırabiliriz. Beraber yapalım

$$3ax + 2b - bx - 6a = (3ax - 6a) + (2b - bx) =$$
$$= 3a(x-2) - b(x-2) = (x-2)(3a-b). \blacklozenge$$

2. (Gruplandırarak çarpanlara ayırma yöntemi) Verilen polinomun terimleri o şekilde gruplandırılır ki, her grupta ortak çarpan olmalıdır. Parantezlerde aynı polinom kalacak şekilde her gruptan ait olduğu işaretle ortak çarpan parantez önüne alınır. Ondan sonra ortak olan bu polinomu parantez önüne almakla verilen polinom çarpanlarına ayrılmış olacaktır.

Örnek 5. Beraber çözelim

$$2xy - 2y - x + 1 = 2y(x-1) - (x-1) = (x-1)(2y-1). \blacklozenge$$

Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Bazı polinomlar bildiğimiz özdeşliklerden (kısa çarpma formüllerinden) yararlanarak çarpanlarına ayrılabiliyorlar. Bu durumda tanıdığımız özdeşlikleri ters yönde yazıyoruz.

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Örnek 6. $4a^2 - 25b^2$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.
$4a^2 = (2a)^2 = A^2$ и $25b^2 = (5b)^2 = B^2$ biçiminde yazılabildiğini görebiliyoruz, yani verilen polinom $A^2 - B^2$ cinsinden olduğunu farkediyoruz. Yukarıdaki özdeşliklerden birincisini uygulayarak

$4a^2 - 25b^2 = (2a)^2 - (5b)^2 = (2a - 5b)(2a + 5b)$ elde edilir. ♦

Örnek 7. $8y^3 + 1$ polinomunu çarpanlarına ayıralım. $8y^3 = (2\ )y^{\ 3} = A^3$ ve $1 = 1^3 = B^3$ olduğuna göre bu polinom $A^3 + B^3$ cinsinden olduğunu farkediyoruz. Yukarıdaki özdeşliklerden üçüncüsünü uygulayarak

$8y^3 + 1 = (2y)^3 + 1^3 = (2y + 1)((2y)^2 - 2y + 1) = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$ elde edilir. ♦

Alıştırma 1. Verilen polinomları çarpanlarına ayırınız:

a) $(3x + 2)^2 - 16y^2$ **b)** $y^3 - 8$ **c)** $a^3b^3 + 125$.

Çözüm. Beraber çözelim

a) $(3x + 2)^2 - 16y^2 = ((3x + 2) - 4y)((3x + 2) + 4y) = (3x - 4y + 2)(3x + 4y + 2)$

b) $27y^3 - 8 = ((3y) - 1)((3y)^2 + 3y + 1) = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

c) $a^3b^3 + 125 = ((ab) + 5)((ab)^2 - ab + 5) = (ab + 5)(a^2b^2 - ab + 5)$. ♦

Sırasıyla birkaç yöntemin uygulanmasıyla çarpanlara ayırma

Bazı durumlarda bir polinomun sonuna kadar çarpanlarına ayrılması için, sırasıyla birkaç farklı yöntemin uygulanması gerekebilir. Bu işlem genellikle şu sıraya göre yapılıyor:

- Polinomun her teriminde aynı çarpanın var olup olmadığını tespit ediyor ve varsa ortak çarpanlar parantez önüne alınır, ondan sonra
- Parantez içinde elde edilen polinom gruplandırmakla ya da kısa çarpma formüllerinden (özdeşliklerden) birinin uygulanması mümkün olup olmadığına bakarız.

Alıştırma 2. Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $24x^3y^2 - 3y^2$ **b)** $^3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3$.

Çözüm. Beraber çözelim

a) $24x^3y^2 - 3y^2 = 3y^2(8x^3 - 1) = 3y^2(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

b) $3x^2y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3 = 3x^2(y^2 - 5y + xy - 5x) =$

$= 3x^2(y(y - 5) + x(y - 5)) = 3x^2(y - 5)(y + x)$.♦

Alıştırmalar

Verilen polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

1. a) $3x+6y$ **b)** $2ab-2ac$ **c)** $7x^5+21x^3$.

2. a) $27ab^3-9b^4$ **b)** a^2y-ay^3 **c)** $9ax-6ay+12az$

3. a) $2a(b-3)+5c(b-3)$ **b)** $a(x+1)-b(x+1)$ **c)** $5(x+y)-2(x+y)^2$.

4. a) a^2b^2-4 **b)** $100x^2-1$ **c)** $\frac{1}{9}a^2-c^2$.

5. a) a^3-8 **b)** $27x^3+1$ **c)** $8m^3-n^3$.

6. a) $4a^2-b^2-2bc-c^2$ **b)** x^2-3x-y^2+3y **c)** $xa^3-xb^3-ya^3+yb^3$.

3.8. Tam Rasyonel İfadelerin En Büyük Ortak Böleni ve En Küçük Ortak Katı

Tam rasyonel ifadelerin en büyük ortak böleni

İki ya da daha fazla rasyonel ifadenin **ortak böleni**, verilen tüm rasyonel ifadelerin kalansız bölündüğü tam rasyonel ifadedir.

Örnek 1. a) $12a^3x^2$ ve $18a^2x^4y^2$ monomlarının ortak bölenleri 1, $2a$, $6x^2$, $3a^2x$, $6a^2x^2$ vb. monomlardır.

b) $ab(a-b)$ и $b(a-b)^2$ polinomlarının ortak bölenleri 1, b, $a-b$, $b(a-b)$ dir. ♦

Tanım 1. $A_1 A_2, ,\dots, A_n$ gibi birkaç rasyonel ifadenin ortak bölenlerinden en büyüğü, yani mümkün olduğu kadar en büyük dereceli en çok çarpanları olan bölene **en büyük ortak bölen** denir ve

EBOB ($A_1 A_2, ,\dots, A_n$) biçiminde işaret edilir.

Tam katsayılı birkaç monomun en büyük ortak bölenini belirtmek için şu şekilde hareket ediyoruz:

- Tüm katsayıların EBOB'i belirtilir, ondan sonra
- Monomda bulunan ortak asal çarpanlardan derecesi en küçük olanların çarpımı en büyük ortak böleni verir.

Örnek 2. EBOB$(^{(14}a^2b^2x,\ 35ab^3x^2,\ 42a^2b^3xy^2) = 7ab^2x$. ♦

Tam katsayılı birkaç polinomun en büyük ortak bölenini belirtmek için şu şekilde hareket ediyoruz:

- Polinomlar asal çarpanlarına ayrılır, ondan sonra
- ortak asal çarpanlardan derecesi en küçük olanları sırasıyla çarpım biçiminde yazıyoruz.

Örnek 3. Örnek 1 de verilen polinomların en büyük ortak böleni

EBOB$(ab(a-b),\ b(a-b)^2) = b(a-b)$ dir. ♦

Alıştırma 1. EBOB $(3x^2+6x+3,\ 9x^2-9,\ 6x+6)$ belirtilsin.

Çözüm. Beraber çözelim

$$3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=\underline{3(x+1)^2},$$

$$9x^2-9=9(x^2-1)=\underline{9(x-1)(x+1)}, \quad \text{ve}$$

$$6x+6=\underline{6(x+1)},$$

EBOB$(3x^2+6x+3,\ 9x^2-9,\ 6x+6) = 3(x+1)$ elde edilir. ♦

Verilen ifadelerin hiçbir ortak böleni (çarpanı) olmayabilir. Bu durumda onların en büyük ortak böleni 1 dir. Bu gibi ifadelere **aralarında asal olan ifadeler** denir.

Örnek 4. $x-y$ ve $3x^2+y$ ifadeleri aralarında asal ifadelerdir, yani

EBOB$(x-y,\ 3x^2+y) = 1$ dir.

Tam Rasyonel İfadelerin En Küçük Ortak Katı

İki ya da daha fazla rasyonel ifadenin **ortak katı** verilenlerin hepsi ile kalansız bölünen tam rasyonel ifadedir.

Örnek 5. $4a^3b$ ve $6a^2x^4$ monomların ortak katı

$12a^3bx^4$, $24a^5b^3x^6$,$60a^3bx^5(a-b)^5(-b)$ vb. monomlarından herhangi biri olabilir. ♦

Tanım 2. $A_1, A_2,\ldots, A_n$ gibi birkaç rasyonel ifadenin ortak katlarından en az ortak çarpanı ve mümkün olduğu kadar en küçük dereceli kuvvetleri içeren ortak kata, o ifadelerin **en küçük ortak katı** denir ve

EKOK$(A_1, A_2,\ldots, A_n)$ biçiminde işaret edilir.

Örnek 6. EKOK$({}^4a^3b,\ 6a^2x^4) = 12a^3bx^4$. ♦

Tam katsayılı birkaç monomun en küçük ortak katını bulmak için şu şekilde hareket edilir:

- Tüm katsayıların EKOK bulunur, ondan sonra
- Ortak asal çarpanlardan derecesi en büyük olanlarla ortak olmayanların tümünün çarpımı belirtilir.

Örnek 7. EKOK$({}^4a^3b,\ 6a^2x,\ 9a^3bx^2) = 36a^3bx^2$. ♦

Tam katsayılı birkaç polinomun en küçük ortak katını belirtmek için şu işlemler yapılır.

- Polinomlar asal çarpanlarına ayrılır, ondan sonra
- Ortak asal çarpanlardan derecesi en büyük olanlarla ortak olmayanların tümünün çarpımı en küçük ortak katı verir.

Alıştırma 2. EKOK $(4x^3-4x^2y, 15x^3y^2-15xy^4,\ 6x^2y+12xy^2+6y^3)$ belirtilsin.

Çözüm. Polinomları asal .arpanlarına ayırıyoruz

$$4x^3-4x^2y=\underline{4x^2(x-y)},$$

$$15x^3y^2-15xy^4=15xy^2(x^2-y^2)=\underline{15xy^2(x-y)(x+y)}, \quad \text{ve}$$

$$6x^2y+12xy^2+6y^3=6y(x^2+2xy+y^2)=\underline{6y(x+y)^2}.$$

Buna göre,

$\text{EKOK}(4x^3 - 4x^2 y, 15x^3 y^2 - 15xy^4, 6x^2 y + 12xy^2 + 6y^3) = 60x^2 y^2 (x - y)(x + y)^2$ dir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen sayıların EBOB ini belirtiniz:

a) 42 ve 18 **b)** 105 ve 45 **c)** 30 ve 75 **ç)** 12, 32, 40 ve 56.

2. Verilen ifadelerin en büyük ortak bölenini belirtiniz:

a) $3ab$ ve $12ab^2$ **b)** $15x^3 y^2$ ve $24x^2 y^3$ **c)** $5a(a + b)$ ve $8a^2b(a + b)^3$

ç) $x^2 - y^2$ ve $x^3 + y^3$ **d)** $x^2 y^2 - y^4$, $x^4 - x^2y^2$ ve $x^3y - xy^3$.

3. Verilen sayıların EKOK ını belirtiniz:

a) 12, 50, 45 ve 18 **b)** 84, 56 ve 21 **c)** 125, 100 ve 450 **ç)** 96, 64 ve 180.

4. Verilen ifadelerin en küçük ortak katını belirtiniz:

a) $6a\,b^{2\,3}$, $15ab^2$ ve $24a\,bc^{32}$ **b)** $a\,(x + 2)$ ve $x(b + 2)$

c) x ve $x^2 + xy^2$ **ç)** $a^2 - 9b^2$ ve $a^3 + 3a\,b^2$

d) $x^2 - x$, $1 - x^2$, $1 + x^3$ ve $x^2 - x + 1$

e) $x^2 - 4y^2$, $3x^2 - 12xy + 12y^2$ ve $5\,y(x - 2\,y)^3$.

3.9. Cebirsel Kesirler

Cebirsel Kesir Kavramı

Kesirli rasyonel ifadelerde değişkenle bölme ya da değişkenli ifadeyle bölme işlemi olduğunu biliyoruz.

Örnek 1. Aşağıdakiler kesirli rasyonel ifadelerdir

$$\frac{3}{x-4},\quad \frac{a^2+2}{3ab^2},\quad 2ax+\frac{a^2}{x},\quad \frac{x+\frac{2}{x}}{3x^2-5},\quad \frac{2ab-4a^2}{ab^2-5c}$$ vb. ♦

Tanım. Payı ve paydası tam rasyonel ifade olan kesirli rasyonel ifadeye **cebirsel kesir** denir.

Cebirsel kesirlerin normal kesirlerde olduğu gibi, ancak paydaları sıfır olmamak koşuluyla anlamarı vardır. Bu nedenle bir cebirsel kesrin değişkenlerinin **mümkün** değerleri, sadece kesrin paydasını sıfırdan farklı kılan değerlerdir.

Örnek 2. $\frac{a+3}{a-4}$ kesrin $a = 4$ değeri için anlamı yoktur ve a değişkeninin tüm diğer değerleri için anlamı vardır. Buna göre, a değişkeninin mümkün değerleri $a \neq 4$ olmak üzere tüm reel sayılardır. $a = -3$ için kesrin paydası sıfırdan farklı, payı ise sıfırdır. Buna göre $a = -3$ için verilen kesrin sayı değeri sıfırdır. ♦

Örnek 3. $\frac{x^2+1}{x-y}$ kesri birbirinden farklı her x ve y, yani tüm $x \neq y$ değerleri için anlamı vardır. Kesrin payı x^2+1 değişkenin hiçbir değeri için sıfır olmadığına göre, bu kesrin sayı değeri sıfır olamaz. ♦

Cebirsel Kesrin Genişletilmesi ve Kısaltılması

Her cebirsel kesir iki tam rasyonel ifadenin bölümü gibi sayılabilir. İki rasyonel sayının bölümünde, bölünen ve bölen sıfırdan farklı bir sayıyla çarparsak (ya da bölersek) bölümün değişmediğini artık biliyorsuk, yani

$b \neq 0$ ve $m \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}=\frac{a \cdot m}{b \cdot m}$ ve $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$ geçerlidir.

Aynısını A ve B iki tam rasyonel ifade ve M herhangi sayı ya da tam rasyonel ifade olduğu durumda $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$ şu özdeşlikler:

$B \neq 0$ ve $M \neq 0$ olmak üzere $\frac{A}{B}=\frac{A \cdot M}{B \cdot M}$ ve $\frac{A}{B}=\frac{A:M}{B:M}$ geçerlidir.

Diğer sözlerle, bir cebirsel kesrin pay ve paydası sıfırdan farklı aynı bir sayıyla ya da aynı bir tam rasyonel ifadeyle çarpılırsa ya da bölünürse, verilene denk olan yeni bir cebirsel kesir elde edilecektir.

Bir cebirsel kesrin pay ve paydası $M \neq 0$ olmak üzere bir tam rasyonel ifadeyle çarpıldığında, cebirsel kesir genişletilmiştir denir, yapılan işleme de **cebirsel kesrin genişletilmesi** işlemi olduğunu diyoruz.

Örnek 4. $\frac{a}{a+2}$, $a \neq -2$ cebirsel kesrini $a-2$, $a \neq 2$ ile genişletelim.

$\frac{a(a-2),}{(a+2)(a-2)}=\frac{a^2-2,}{a^2-4}$, $a \neq 2$ elde edilir. ♦

Bir kesrin pay ve paydası, onların ortak çarpanlarının çarpımıyla bölündüğü durumda, cebirsel kesir pay ve paydanın ortak çarpanlarının çarpımıyla kısaltılmış olur. Bu işleme **cebirsel kesrin kısaltılması** denir.

Örnek 5. Pay ve paydası monomlar olan $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$ kesrin ortak çarpanları : 6, a^2 ve b^2 dir. Bu kesrin pay ve paydasını sırasıyla bu çarpanlarla ya da pay ve paydanın en büyük ortak böleni olan, onların çarpımıyla $6a^2b^2$ ile bölersek, kesri daha sade şekilde dönüştürebiliriz. Buna göre, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ koşuluyla

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}=\frac{12a^2b^3c:6a^2b^2}{18a^4b^2:6a^2b^2}=\frac{2bc}{3a^2}$$

elde edilir. ♦

Bir kesrin pay ve paydası polinomlar olduğu durumda, onları önce çarpanlarına ayırıyoruz, ondan sonra ortak çarpanları varsa onları kısaltıyoruz.

Alıştırma 1. Verilen kesirleri kısaltalım

a) $\dfrac{6a^2b}{3a^2-3ab}$ $a \neq 0$ ve $a \neq b$ **b)** $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}$, $x \neq 3$ ve $x \neq 0$.

Çözüm. a) $\dfrac{6a^2b}{3a^2-3ab}=\dfrac{6a^2b}{3a(a-b)}=\dfrac{2ab}{a-b}$ $a \neq 0$ ve $a \neq b$

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}=\dfrac{(x-3)^2}{2x(x-3)}=\dfrac{x-3}{2x}$, $x \neq 3$ ve $x \neq 0$. ♦

Cebirsel Kesirleri Eşit Paydalı Kesirlere Dönüştürme

Paydaları farklı olan iki ya da daha fazla kesirleri genişletme işlemiyle eşit paydalı kesirlere dönüştürebiliriz. Bu dönüşüme **kesirleri ortak paydaya dönüştürme** denir. Birkaç cebirsel kesrin ortak paydası, genellikle verilen kesirlerin tüm paydalarıyla kalansız bölünen rasyonel ifadedir. Böyle ifadelerden biri tüm paydaların çarpımı olabilir. Aynı özelliğe sahip verilen kesirlerin paydalarının en küçük ortak katıdır.

Verilen kesirlerin paydalarının en küçük ortak katına eşit olacak şekilde cebirsel kesirleri eşit paydalı kesirlere dönüştürmek için şu işlemleri yapacağız:

• Verilen cebirsel kesirlerin paydalarının en küçük ortak katını buluyoruz;

• Her kesrin paydasını genişletmek için gereken çarpanlar belirtilir. Bu ifadeleri bulmak için en küçük ortak kat karşılıklı kesrin paydasıyla bölünür;

• Ondan sonra her kesrin pay ve paydası karşılıklı belirtilen genişletici çarpanlarla çarpılır.

Örnek 6. Verilen kesirleri en küçük ortak paydaya dönüştürelim:

$$\frac{a}{2x^2y},\ \frac{b}{3y} \text{ ve } \frac{c}{4xy}$$

En küçük ortak payda

EKOK $(2x^2y, 3y, 4xy) = 12x^2y$ dir.

Buna göre

$$\frac{a}{2x^2y}=\frac{a\cdot 6}{2x^2y\cdot 6}=\frac{6a}{12x^2y}$$

$$\frac{b}{3y}=\frac{b\cdot 4x^2}{3y\cdot 4x^2}=\frac{4bx^2}{12x^2y};$$

$$\frac{c}{4xy}=\frac{c\cdot 3x}{4xy\cdot 3x}=\frac{3cx}{12x^2y}.$$ elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. x in hangi değerleri için verilen kesirlerin anlamı yoktur, hangi değerleri için ise kesrin değeri sıfırdır?

a) $\frac{x+2}{x}$ **b)** $\frac{x-3}{x-1}$ **c)** $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$

2. Kesirleri kısaltınız:

a) $\frac{6ax}{8a^2}$ **b)** $\frac{3x^{n+2}}{x^n y}$ **c)** $\frac{x^2-y^2}{ax+ay}$

$\frac{3a+1}{9a^2-1}$ $\frac{3a+6}{a^3+8}$ $\frac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$

3. Kesirleri kısaltınız ve değerini hesaplayınız:

a) $\frac{a-1}{2a-2a^2}$, $a = 3$ için **b)** $\frac{x^2-4}{x+2}$, $x = 3{,}5$ için **c)** $\frac{x-1}{1-x}$, $x = a$ için.

4. Verilen kesirlerin paydalarını eşitleyiniz:

a) $\frac{1}{a}$ и $\frac{2}{a+1}$ **b)** $\frac{2}{3a^2b^3}$, $\frac{5a}{6b^3c^2}$ и $\frac{1}{5abc}$

$\frac{a}{x+y}$ и $\frac{b}{(x+y)^2}$ $\frac{2x}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ и $\frac{xy}{x^2-y^2}$

$\frac{5}{2x-1}$ и $\frac{x}{4x^2-2x}$ $\frac{2a}{a^3-ax^2}$, $\frac{3x}{x+a}$ и $\frac{5a}{x^2+2ax+a^2}$

3.10. Cebirsel Kesirlerle İşlemler

Cebirsel Kesirleri Toplama ve Çıkarma

Cebirsel kesirlerin toplamı ve farkına ait kurallar normal kesirlerle yapılan işlemlere ait kurallarla aynıdır.

1. (Toplama kuralı) Paydaları eşit olan cebirsel kesirleri toplarken, payların toplamı paya, ortak payda da paydaya yazılır, yani payların toplamı onların ortak olan paydasıyla bölünür; $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$, $C \neq 0$.

Örnek 1. **a)** $\frac{3a}{2a^2x}+\frac{5ab}{2a^2x}+\frac{a-2b}{2a^2x}=\frac{4a+5ab-2b}{2a^2x}$, $ax \neq 0$

b) $\frac{2a}{x-1}+\frac{3a-1}{x-1}+\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a+3a-1+2-ab}{x-1}=\frac{5a+1-ab}{x-1}$, $x \neq 1$. ♦

2. (Çıkarma kuralı) Paydaları eşit olan cebirsel kesirleri toplarken, payların toplamı paya, ortak payda da paydaya yazılır, yani payların toplamı onların ortak olan paydasıyla bölünür;

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}, C \neq 0.$$

Örnek 2. **a)** $\frac{a}{c}-\frac{a+3}{c}=\frac{a-(a+3)}{c}=\frac{a-a-3}{c}=-\frac{3}{c},\ c\neq 0$

b) $\frac{2a}{x-1}-\frac{3a-1}{x-1}-\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a-3a+1-2+ab}{x-1}=\frac{-a-1+ab}{x-1},\ x\neq 1.$ ♦

Paydaları farklı cebirsel kesirlerin toplamında yapılması gereken ilk işlem, kesirlerin paydalarını eşitlemektir, ondan sonra yukarıda gösterildiği gibi eşit paydalı kesirler gibi işlemler uygulanır.

Örnek 3. **a)** $\frac{5b}{2a^2}+\frac{3}{4ab}+\frac{2b}{a}=\frac{5b\cdot 2b+3\cdot a+2b\cdot 4ab}{4a^2b}=\frac{10b^2+3a+8ab^2}{4a^2b}$

b) $\frac{2}{c-x}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=-\frac{2}{x-c}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=\frac{-2x+3x-(x-c)}{x(x-c)}=\frac{c}{x(x-c)}$

c) $a+\frac{ax}{a-x}=\frac{a}{1}+\frac{ax}{a-x}=\frac{a(a-x)+ax}{a-x}=\frac{a^2}{a-x}$

ç) $\frac{b^2}{2a+b}+2a-b=\frac{b^2}{2a+b}+\frac{2a-b}{1}=\frac{b^2+(2a-b)(2a+b)}{2a+b}=\frac{4a^2}{2a+b}.$ ♦

<u>Cebirsel Kesirleri Çarpma ve Bölme</u>

Cebirsel kesirlerin çarpımı ve bölümü basit kesirlerde geçerli olan kurallarla yapılır.

3. (Çarpma kuralı) Cebirsel kesirlerin çarpımında paylar çarpılarak paya, paydalar çarpılarak paydaya yazılır, yani

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\ B\neq 0,\ \ D\neq 0.$$

Örnek 4. **a)** $\frac{5a^2x}{3by^3}\cdot\left(-\frac{9b^2y}{10ax^2}\right)=-\frac{5a^2x\cdot 9b^2y}{3by^3\cdot 10ax^2}=-\frac{3ab}{xy^2},\ abxy\neq 0$

b) $\frac{x-1}{2y}\cdot\frac{4y^2}{(1-x)^2}=\frac{4y^2(x-1)}{2y(x-1)^2}=\frac{2y}{x-1},\ \ x\neq 1,\ \ y\neq 0.$♦

Cebirsel kesirleri çarparken, kesirlerin kısaltılmasının mümkün olup olmadığına bakılmalıdır. Bu nedenle her rasyonel ifadenin pay ve paydası çarpanlarına ayrılarak sadeleştirmeler yapıldıktan sonra paylar çarpılarak paya, paydalar çarpılarak paydaya yazılır.

Cebirsel kesirlerin kuvvet alma işlemine ait kural, bayağı kesirlerdeki kuralla aynıdır.

4. (Kuvvet alma kuralı) Cebirsel kesirlerin kuvveti alınırken, aynı kuvvete göre pay ve paydanın ayrı ayrı kuvvetleri alındıktan sonra, paydaki kuvvet paydadaki kuvvetle bölünür, yani

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\ B\neq 0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Örnek 5. $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3=\frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3}=\frac{8a^6x^3}{27b^3}$. ♦

5. (Bölme kuralı) Cebirsel kesirleri bölerken, bölünen kesir bölenin çarpımsal tersiyle çarpılır.

Örnek 6. a) $-\dfrac{28a}{5b^3}:\dfrac{14a^2}{15b^4}=-\dfrac{28a}{5b^3}\cdot\dfrac{15b^4}{14a^2}=-\dfrac{28a\cdot 15b^4}{5b^3\cdot 14a^2}=-\dfrac{6b}{a},\ a\neq 0,\ b\neq 0$

b) $\dfrac{x}{x^2-16}:\dfrac{x^3+4x^2}{x-4}=\dfrac{x}{x^2-16}\cdot\dfrac{x-4}{x^3+4x^2}=\dfrac{x}{(x-4)(x+4)}\cdot\dfrac{x-4}{x^2(x+4)}=$

$=\dfrac{x(x-4)}{x^2(x-4)(x+4)^2}=\dfrac{1}{x(x+4)^2},\ x\neq\pm 4,\ x\neq 0$

c) $\dfrac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2}:(a-b+1)=\dfrac{(a+1)^2-b^2}{3x^2}:\dfrac{a-b+1}{1}=$

$=\dfrac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2}\cdot\dfrac{1}{a-b+1}=\dfrac{a+b+1}{3x^2},\ a-b+1\neq 0,\ x\neq 0.$ ♦

Tanım 1. Payı ya da paydası, ya da hem payı hem de paydası cebirsel kesir olan kesre **iki kat cebirsel** kesir denir.

Örnek 7. Şu kesirler

$$\dfrac{\dfrac{2a}{a+1}}{x-5},\quad \dfrac{x+1}{\dfrac{a+1}{x-1}},\quad \dfrac{\dfrac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\dfrac{a^2-4}{x^2+x}}\quad \text{ve}\quad \dfrac{\dfrac{a^2}{b^3}+\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{a}{b^2}},$$

iki kat cebirsel kesir örnekleridir. ♦

Bir iki katlı cebirsel kesrin pay ve paydası, kesirlerin cebirsel toplamı ya da herhangi bir rasyonel ifade olabilir.

$\dfrac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}}$, iki kat kesrinde A ve D ifadelerine **dış terimler,** B ve C ifadelerine ise **iç terimler** denir.

Her iki katlı cebirsel kesirin payını paydasıyla bölmekle verilen ifade en kolay şekilde bayağı cebirsel kesre dönüşebilir.

Örnek 8. Beraber çözelim

a) $\dfrac{\dfrac{2a}{a+1}}{x-5}=\dfrac{2a}{a+1}:(x-5)=\dfrac{2a}{a+1}\cdot\dfrac{1}{(x-5)}=\dfrac{2a}{(a+1)(x-5)},\quad a\neq -1,\ x\neq -5.$

b) $\dfrac{\dfrac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\dfrac{a^2-4}{x^2+x}}=\dfrac{a^2-4a+4}{x^2-1}:\dfrac{a^2-4}{x^2+x}=\dfrac{a^2-4a+4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+x}{a^2-4}=$

$=\dfrac{(a-2)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{x(x+1)}{(a-2)(a+2)}=\dfrac{x(a-2)}{(x-1)(a+2)},\ x\neq\pm 1,\ a\neq\pm 2$ и $x\neq 0.$♦

Bayağı kesirlerde geçerli olan kurallar iki katlı kesirler için de aynen geçerlidir.

6. (İki katlı cebirsel kesrin bayağı kesre dönüştürme kuralı) İki katlı cebirsel kesri bayağı (normal) kesre dönüştürmek için, dış terimlerin çarpımı pay ve iç terimlerin çarpımı payda olarak yazılır.

Örnek 9. Beraber çözelim

$$\frac{\dfrac{x}{x^2-9}}{\dfrac{x^3+3x^2}{x-3}}=\frac{x(x-3)}{(x^3+3x^2)(x^2-9)}=\frac{x(x-3)}{x^2(x+3)(x-3)(x+3)}=$$
$$=\frac{1}{x(x+3)^2},\ x\neq\pm3,\ x\neq0.\ \blacklozenge$$

Alıştırmalar

Kesirlerle verilen işlemleri yapınız:

1. a) $\dfrac{a+2}{b}+\dfrac{2a-5}{b}$ **b)** $\dfrac{2a+1}{a}+\dfrac{3x-1}{a}-\dfrac{x-2}{a}$

2. a) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{5}{2x+1}$ **b)** $\dfrac{1}{x^2-4x+4}+\dfrac{5}{x^2-4}$

3. a) $\dfrac{2}{x^4-1}+\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{1}{x+1}$ **b)** $\dfrac{5}{2a+4}-\dfrac{4}{a^2-4}+\dfrac{1}{a-2}$

4. a) $\dfrac{3a+1}{2a+6}-\dfrac{a-1}{a+3}$ **b)** $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x+1}{x^2-9}+\dfrac{2}{x^2+6x+9}$

5 a) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{2a}{a-b}$ **b)** $\dfrac{x-2}{6x+2y-2z}\cdot\dfrac{3x+y-z}{2x-x^2}$

6 a) $\dfrac{x-1}{2y}:\dfrac{(1-x)^2}{4y^2}$ **b)** $\dfrac{x^2-xy}{a^2+a}:\dfrac{2x-2y}{3a+3}$

DEĞERLENDİRME ALIŞTIRMALARI

1. Verilen işlemleri yapınız:

a) $(-0{,}81):[-5-(6-10):2]-3,5\cdot(-8)$ **b)** $(-6)^2-(-2)^4+(-3)^3-5^2$

2. a) Verilen ifadelerin değerlerini hesaplayınız:

a) $\dfrac{1+0{,}5\cdot\dfrac{1}{0{,}25}}{6-\dfrac{46}{4+1{,}8\cdot10}}$ **b)** $\dfrac{\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right)\cdot1{,}5}{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{1}{8}}-\dfrac{3}{4}.$

3. Verilen işlemleri yapınız:

a) $x \cdot x^5 \cdot x^2$ **b)** $(a \cdot b)^4 \cdot a^3$ **c)** $\left(\frac{a}{2c}\right)^3$

4. Verilen ifadelerden hangileri tam rasyonel, hangileri ise kesirli rasyonel ifadelerdir:

5. **a)** $0{,}34ax^3 - 6bxc^2$ **b)** $1 : x$ **c)** $\frac{y-1}{y+1} + x^2$ **ç)** $\frac{1}{2}$?

6. Aşağıdaki formüller özdeşlik midir?

a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc$

b) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

6. $3x^2 - x + 1$, $2x^2 + 5x - 3$ ve $4x - 5$ polinomlarını toplayınız.

7. Verilen monomların farkını hesaplayınız:

a) $4xy - (+3x)$ **b)** $2{,}5x - (-0{,}5x)$

8. $A = x^2 - xy + 2y - 5$, $B = 2x^2 + 3xy - y^2$ ve $C = -3x^2 + xy + 4x + 1$ polinomları veriliyor.

$C - (A - B)$ ifadesini hesaplayınız.

9. İşaretlenen işlemleri yapınız ve ifadeleri sadeleştiriniz:

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x - y)(x + y)$

b) $(c + 1)^2 + 3(c - 1)^2 - 5(c + 1)(c - 1)$.

10. Verilenleri en kısa şekilde hesaplayınız:

a) 401^2 **b)** 703^2 **c)** 1002^2

11. $2(a - 1)^2 - (a + 5)(a^2 - 5a + 25) + (a + 1)^3$ ifadesini sadeleştiriniz.

12. $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$ polinomları bölünüz.

13. Polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$ **b)** $12ax - 6bx + 2ay - by$

14. Polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ **b)** $x^3 + y^3 + (x + y)^2 + x^2 - y^2$

15. Polinomları asal çarpanlarına ayırınız:

a) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ **b)** $x^3 - 3x^2 + x + ax^2 - 3ax + a$

16. Verilen ifadelerin EBOB ini belirtiniz:

a) 60, 900 ve 75 **b)** $2ab$, $3bc$ ve $4ac$.

17. Verilen ifadelerin EKOK ını belirtiniz:

a) 75, 60 ve 125 **b)** $3x^3ab$, $5xa^4$ ve $10x^2b^3$.

18. Kesirleri kısaltınız:

a) $\dfrac{xy-x^2}{xy^2-x^2y}$ **b)** $\dfrac{x^2-1}{1-2x+x^2}$.

19. Verilen kesirlerin paydalarını eşitleyiniz: $\dfrac{2a^2}{b}$, $\dfrac{5b^2}{c}$, $\dfrac{7c^2}{a}$.

20. Verilen işlemleri yapınız:

a) $\dfrac{1}{x-c}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1-2c}{x^2-c^2}$ **b)** $\dfrac{(x+1)^2}{x}-\dfrac{(x-1)^2}{x}$.

21. $\left(\dfrac{a^2+1}{2a}-1\right):\left(\dfrac{a^2+1}{2a}+1\right)$ ifadesini en sade şekilde yazınız.

22. $\dfrac{(a+b)^3-a^3-b^3}{a+b}$, ifadesinin değerini $ab=5$ için hesaplayınız.

4. BÜYÜKLÜKLERDE ORANTILILIK

4.1. Orantı Kavramı ve Temel Özellikleri

Oran ve Orantı

Ölçüleri aynı ölçü birimiyle ifade edilmiş olan aynı cinsten a ve b büyüklükleri (çoklukları) verilmiş olsun. Bu büyüklükleri karşılaştırırken şu sorularla karşılaşıyoruz:

a) Bu büyüklüklerden biri diğerinden kaç defa daha büyüktür, ya da

b) Bir büyüklüğün hangi parçası diğer büyüklüğe eşittir?

Bu soruları cevaplamak için, birinci büyüklüğün ölçü sayısını diğer büyüklüğün ölçü sayısıyla bölmemiz gerekir, yani $a : b$ (ya $\frac{a}{b}$ da), $b \neq 0$ bölümünü oluşturmamız gerekir.

Tanım. Aynı cinsten iki büyüklüğün (çokluğun) birbirine bölünerek karşılaştırılmasına **oran** denir, yani $a : b$ (ya da $\frac{a}{b}$) o büyüklüklerin oranıdır.

a ve b sayılarına **oranın terimleri** denir, daha doğrusu a terimine **birinci terim,** b ye ise **ikinci terim** denir. Hesaplanan bu bölümün değerine **Oranın değeri** denir.

Sadece yerleriyle farklaşan a: b ve b: a oranlarına **birbirine ters oranlar** denir.

Örnek 1. 5:8 ve 8:5 oranları birbirine ters oranlardır. ♦

Tanım. Değerleri eşit olan ve eşitlik işaretiyle bağlı olan iki ya da daha fazla oranın eşitliğine **orantı** denir.

Bu anlamda a: b = c: d verilmiş olduğunda, a nın b ye oranı c nin d ye oranı gibidir denir, ya da a nın b ye oranı c nin d ye oranına eşittir denir.

Örnek 2. Aşağıdaki eşitlikler orantılardır:

a) 12:3 = 20:5, çünkü 12:3 = 4 ve 20:5 = 4;

b) $\frac{1}{4}:3=\frac{5}{6}:10$, çünkü $\frac{1}{4}:3=\frac{1}{12}$ ve $\frac{5}{6}:10=\frac{1}{12}$;

c) 1,2 : 0,4 = 4,5 : 1,5, çünkü 1,2 : 0,4 = 3 ve 4,5 : 1,5 = 3.♦

Her orantı dört terimden oluşur ve bunlara soldan başlayarak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü terim denir. Orantının birinci ve dördüncü terimlerine **dış terimler**, ikinci ve üçüncü terimlerine ise orantının **iç terimleri** denir.

Örnek 3. 3 : 15 = 5 : 25 orantısında 3 ve 25 sayıları dış terimler, 15 ve 5 sayıları ise iç terimlerdir. ♦

<u>Orantının Özellikleri</u>

İlerde orantıların birkaç özelliğini öğreneceğiz.

1. (Orantıların temel özellikleri) Bir orantının dış terimlerinin çarpımı iç terimlerinin çarpımına eşittir.

Örnek 4. Bo 7:21= 2:6 orantısında $7\cdot 6 = 42 = 21\cdot 2$.♦

2. Sıfırdan farklı iki sayının çarpımı, diğer bir iki sayının çarpımına eşit ise, o dört sayı ile orantı oluşturulabilir.

Örnek 5. 2, 3, 6 ve 9 sayılarıyla orantı yazılabilir, çünkü $2\cdot 9 = 3\cdot 6$ eşitliği, $2:3 = 6:9$ biçiminde yazılabilir. ♦

3. Bir orantının bir dış ve bir iç terimi sıfırdan farklı bir sayıyla çarpılırsa, ya da tüm terimleri aynı sayıyla çarpılır ya da bölünürse orantı değişmez.

Bu son özellik orantıların sadeleştirilmesinde kullanılır: Orantının bazı terimleri kesirler ya da ondalık sayılar olduğu durumda ve bir dış ve bir iç terim ya da tüm terimlerinin ortak çarpanı olduğu durumda bu özellikle orantı sadeleşebilir.

Bir orantının üç terimi bilindiği durumda dördüncü terimin bulunmasına orantının çözümünden bahsedilir.

Alıştırma 1. $8 : 5 = x : 7{,}5$ orantısında bilinmeyen terimi bulunuz.

Çözüm. Orantının temel özelliğini uygulayarak

$$5 \cdot x = 8 \cdot 7{,}5$$

Elde edilir, yani $5x = 60$, oradan da $x = 12$ elde edilir. ♦

Tanım. Üç ya da daha fazla oranın eşitliğine **çoklu orantı** denir, yani

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Çoklu doğru orantılar çok kez daha kısa olarak şu şekilde de yazılır:

$$a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$$

4. Çoklu doğru orantıda, tüm ilk terimlerin toplamının tüm ikinci terimlerinin toplamına göre oranı, herhangi ilk terimin karşılıklı ikinci terimine oranına eşittir, yani $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$ çoklu doğru orantı için

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Örnek. 10 : 6 : 4 =15 : 9 : 6 çoklu orantıdan aşağıdakiler gibi birkaç orantı elde edebiliriz:

(10+6+ 4):(15+9+6) =10:15, yani 20:30 =10:15

(10−6+ 4):(15−9+6) = 6:9, yani 8:12 = 6:9

(10+6−4):(15+9−6) = 4:6, yani 12:18 = 4:6 ♦

Alıştırma 2. $x : 4 = 6 : y = 3 : 2$ üçlü orantıda x ve y belirtilsin

Çözüm. Verilen üçlü orantıdan birer bilinmeyenli iki orantı oluşturacağız.

$$x : 4 = 3 : 2 \quad \text{ve} \quad 6 : y = 3 : 2,$$

oradan $x = 6$ ve $y = 4$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırma 3. Verilen orantılardan bir çoklu orantı oluşturunuz

$$a : b = 4 : 3, \quad b : c = 3 : 8 \quad \text{ve} \quad c : d = 4 : 5.$$

Çözüm. $c : d = 4 : 5$ orantısından $c: d= 8:10$ elde edilir, o halde çoklu doğru orantı

$$a: b: c: d = 4:3:8:10 \text{ elde edilir.} ♦$$

Alıştırma 4. 450 sayısını 2:3:5:8 oranında kısımlara ayırınız.

Çözüm. k orantı katsayısı olmak üzere, bu kısımları $2k$, $3k$, $5k$ ve $8k$ ile işaret edelim.

$2k + 3k + 5k + 8k = 450$ olduğuna göre $k = 25$ elde edilir. O halde aranılan kısımlar $2 \cdot 25 = 50$, $3 \cdot 25 = 75$, $5 \cdot 25 = 125$ **ve** $8 \cdot 25 = 200$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen orantıların doğruluğunu denetleyiniz:

a) $3:5 = 12:20$ **b)** $4:5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ **c)** $x^2 : y^2 = xy : \frac{y^3}{x}$

2. Verilen orantılardan bilinmeyen x sayısını belirtiniz:

a) $3x :8= 9:5$ **b)** $12:(x+1) = 3:4$ **c)** $3:4 = (7- x):(7+ x)$

3. Verilen orantıda bilinmeyen terimleri belirtiniz:

$$2:3 = x:6 = 8: y = z :18$$

4. Verilen orantılardan çoklu orantı oluşturunuz:

$$a: b = 2:3, \quad b: c= 6:5 \quad \text{ve} \quad c: d=15:11$$

5. 600 sayısını 1:3:6 oranında kısımlara ayırınız.

4.2. Doğru ve Ters Orantı

Doğru Orantı

İki değişken büyüklüğün arasında en çok rastlanan durumlar, büyüklüklerin doğru orantı durumudur.

Tanım. A ve B gibi iki değişken büyüklükte, birincisinin herhangi iki mümkün değerinin oranı, ikinci büyüklüğün karşılıklı büyüklüklerin oranına eşit ise, diğer sözlerle biri arttığı zaman diğeri de aynı oranda artıyor, azaldığı zaman diğeri de aynı oranda azalıyor ise bu tür büyüklüklere **doğru orantıda** bulunuyorlar denir.

Örnek 1. 1 kilo elma 30 denar ederse 2, 3, 4, 5, ... kilo elma için ödenmesi gereken parayı tablo halinde gösterelim:

Elma miktarı (kilogram)	1	2	3	4	5	6	7	...
Değeri (denar)	30	60	90	120	150	180	210	...

Tablodan görüldüğü gibi 1:2 = 30:60, 2:3 = 60:90, 3:4 = 90:120 vb. dir.
Buna göre, büyüklüklerden biri (miktar) 2, 3, 4, 5, ... defa arttıkça diğer büyüklük (malın değeri) de aynı o kadar defa arttığını görüyoruz ve tersine. ♦

Doğru orantılı bağımlılığı olan büyüklüklere **doğru orantılı büyüklükler** denir.

Örnek 2. Doğru orantılı büyüklükler: çemberin uzunluğu ve onun yarıçapı; karenin çevresi ve kenarının uzunluğu; sabit sıcaklıkta bir cismin ağırlığı ve hacmi; işçi sayısı ve yapılan iş vb. doğru orantılı büyüklükler için örnekledir. ♦

X ve Y doğru orantılı iki büyüklük olsun. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ce, X büyüklüğünün birkaç mümkün değeri, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ ise onlara karşılık gelen Y büyüklüğünün mümkün değerleri olsun. Bu durumda karşılıklı değerlerin bölümü sabit sayıdır, yani

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

olur. k sayısına doğru orantıda olan X ve Y büyüklüklerinin **orantı katsayısı** denir.

Ters Orantı

Tanım. A ve B gibi iki değişken büyüklükte, birincisinin herhangi iki mümkün değerinin oranı, ikinci büyüklüğün karşılıklı büyüklüklerin ters oranına eşit ise, diğer sözlerle biri arttığı zaman diğeri aynı oranda azalıyor ise, bu tür büyüklüklere **ters orantıda** bulunuyorlar denir.

Örnek 3. İki kent arasındaki uzaklık 120*km* dir. Bu mesafe hareket hızına bağlı olarak farklı zamanda geçilebilir. Hız ve zaman arasındaki bağıntıyı incelemek için, geçilen yol a ait şu tabloyu oluşturacağız:

Hız, kilometre saatte	5	10	15	20	30	60	120	...
Zaman, saat	24	12	8	6	4	2	1	...
Geçilen yol, kilometre	120	120	120	120	120	120	120	...

Tablodan şu sonuca varıyoruz: 5:10 =12:24, 5:15 = 8:24, 5:30 = 4:24 ve benzer, yani $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 20 \cdot 6 = 30 \cdot 4 = \ldots = 120 \cdot 1 = 120$. olduğunu görüyoruz. Görüldüğü gibi, büyüklüklerden biri (hız) 2, 3, 4, 5, ... defa arttıkça, ikinci büyüklük (zamanın) da aynı oranda azaldığını ve tersine. ♦

Ters orantıda bağlı olan büyüklüklere **ters orantılı büyüklükler** denir.

Örnek 4. Ters orantılı büyüklükler için şu örnekleri sayabiliriz: belli bir miktar gazın sabit sıcaklıkta basıncı ve hacmi; alanı sabit olan dikdörtgenin uzunluğu ve genişliği; belli bir işin yapılması için işçi sayısı ve zaman vb. ♦

X ve *Y* iki ters orantılı büyüklük olsun. x_1, x_2 , x_3 ,…, x_n değerleri *X* büyüklüğünün mümkün değerleri, y_1, y_2, y_3 ,…, y_n ise *Y* büyüklüğünün mümkün değerleri ise, bunların karşılıklı değerlerinin çarpımı sabit sayıdır, yani

$$y_1x_1 = y_2x_2 = \ldots = y_nx_n = k.$$

k sayısına, *X* ve *Y* ters orantılı büyüklüklerinin **orantı katsayısı** denir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki büyüklükler nasıl bağıntıda bulunuyorlar:

a) Aynı malzemeden olan bir cismin ağırlığı ve hacmi

b) Geçilen belli bir yolda arabanın hızı ve zamanı

c) Eşkenar üçgenin çevresi ve kenarı

ç) Belli bir işi bitirmek için. işçi sayısı ve bitirme zamanı ?

2. Bir düzgün altıgenin çevresi ve kenarı nasıl bağıntıdadır? Orantı katsayısı nedir?

3. Karenin alanı kenarının uzunluğuyla doğru orantıda mıdır?

4. Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar arasındaki bağıntı nasıldır?

5. Bir havuzun su ile doldurulmasında, dolma hızı (dakika litre olarak) ve dolma süresi (dakika) arsında ki bağıntı nasıldır? Orantı katsayısı ne kadardır?

4.3. Basit ve Bileşik Üçlü Kural

Basit Üçlü Kural

Orantılar ve orantılı büyüklüklerin özelliklerini uygulayarak, günlük hayattan birçok problemi kolaylıkla çözebiliriz. Bu gibi alıştırmalarda bir büyüklüğün bir A değeri ve diğer büyüklükte onunla doğru ya da ters orantıdaki karşılığı B değeri veriliyor. Bu durumda büyüklüklerden birinde verilen bir değere karşılık gelecek diğer büyüklüğün değerinin bulunması isteniyor. Bu gibi alıştırmalara **Basit üçlü kural** alıştırmaları denir.

Alıştırma 1. Bir tarım kooperatifi 4*ha* lık bağda 68 ton üzüm toplamıştır. Bu kooperatifin 15*ha* bağ üzümü olduğuna göre, kooperatif kaç ton üzüm toplamıştır?

Çözüm. Bu ödevde iki büyüklük vardır: bağ alanı ve toplanan üzüm miktarı. Üzüm miktarı bağın alanıyla doğru orantıda olduğuna göre, bağların alanlarının oranı, toplanan üzüm miktarıyla aynı orantıda olacaktır. Toplanacak üzüm miktarını *x* ile işaret edersek şu orantıyı kurabiliriz:

$$4:15 = 68: x$$

Oradan da

$$x = \frac{68 \cdot 15}{4} = 255 \text{ ton elde edilir.}$$

Yukarıdaki işlemi şu şekilde de ifade edebiliriz:

4 *ha* dan	68 ton üzüm
15 *ha* dan	*x t* üzüm

Oradan, $x:68 = 15:4$, $x = 68\frac{15}{4} = 255$ ton olduğunu buluyoruz. Demek ki, 15*ha* bağdan kooperatif 255 ton üzüm toplayabilir. ♦

Yukarıdaki şemada, oklardan birinin x ten başladığını ve yönü yukarıya doğru çizilmiş olduğunu fark etmeliyiz ve ilerde bunu daima uygulayacağız. İkinci ok ise orantının türüne bağlıdır; büyüklükler doğru orantılı ise oklar aynı yönde, ters orantılı ise oklar ters yönde çizilecektir.

Alıştırma 2. Bir miktar iplikle genişliği 140 *cm* olmak üzere 92 metre kumaş üretilir. Aynı miktar iplikle 80 *cm* genişliğinde kaç metre kumaş üretilecektir?

Çözüm. Aynı malzemeyle üretilmesi gereken kumaşın genişliği ve uzunluğu ters orantılı değişkenlerdir. Bu nedenle bir büyüklüğün herhangi değeri, diğer büyüklüğün karşılıklı değeriyle ters orantıda olacaktır, yani $x:92 = 140:80$ orantısını yazabiliriz. Oradan.

$$x = \frac{92 \cdot 140}{80} = 161 \text{ metre elde edilir.}$$

Yukarıdaki işlem şu şekilde de gösterilebilir:

92*m* kumaş	140*cm* geniştir
xm kumaş	80*cm* geniştir

Oradan $x : 92 = 140:80$, $x = 92 \frac{140}{80} = 161$ metre, Buna göre aynı miktar iplikten 80 *cm* genişlikte 161 *m* kumaş üretilir. ♦

Bileşik Üçlü Kural

Günlük hayatta çok kez üç ya da daha fazla orantılı büyüklüklerele problemlere rastlıyoruz. Bu durumda üç ya da daha fazla büyüklüğün değerleri verildiğinde karşılıklı bilinmeyen değeri **bileşik üçlü kural** denilen yöntemle belirtebiliriz.

Alıştırma 3. 4*m* geniş, 6*m* yüksek ve 1600*m* uzun bir tünelin yapımı için 640000 Euro harcanmıştır. Aynı çalışma koşullarla 6*m* geniş 8*m* yüksek ve 1000*m* uzun olacak şekilde tunel için ne kadar para harcanacaktır?

Çözüm. Burada tünelin yapımındaki tüm büyüklükler: genişlik, yükseklik ve uzunluk doğru orantılı büyüklüklerdir. Bu nedenle tüm okların yönleri aynıdır. Bir büyüklüğün herhangi iki değerinin oranı, diğer büyüklüğün karşılıklı değerlerinin oranıyla aynıdır, yani

$$\begin{aligned} x:640000 &= 1000:1600 \\ &= 6:4 \\ &= 8:6 \end{aligned}$$

Oradan da

$$x:640000 = (1000\cdot 6\cdot 8):(1600\cdot 4\cdot 6)$$

$$x = \frac{640000\cdot(1000\cdot 6\cdot 8)}{1600\cdot 4\cdot 6}$$

x = 800000 Euro elde edilir.

Yukarıdaki yöntem şu şekilde de yazılabilir:

↑	↑	↑	↑
1600*m* uzun	4*m* geniş	6*m* yüksek	640000 Euro
1000*m* uzun	6*m* geniş	8*m* yüksek	*x* Euro

Buna göre, 1000*m* uzunlukta, 6*m* geniş ve 8*m* yükseklikte aynı çalışma koşullarıyla bir tünelin yapımı için 800000 Euro harcanacaktır. ♦

Alıştırma 4. 20 işçi 5gün 8 er saat çalışarak 20000 *kg* şeftali toplamışlar. Aynı şartlar altında 30 işçi günde 5 saat çalışarak kaç günde 6000 *kg* şeftali toplayacaklar?

Çözüm. İlk çizilen ok daima *x* ten başlayarak yukarıya doğru çizilir. Ondan sonra şunu görüyoruz: eğer 20 işçi bu işi 5 günde bitiriyorsa o halde 30 işçi aynı işi daha az günde bitirebilir (ters orantılı büyüklükler). Ondan sonra günde 8 saat çalıştıkları durumda işi 5 günde bitirebilirler, günde 5 saat çalışırlarsa işin bitirilmesi için daha fazla gün gerekecektir (ters orantılı büyüklükler) ve sonunda 20000 kg şeftali 5 günde toplandığına göre, 60000 *kg* şeftalinin toplanması için daha fazla gün gerekir (doğru orantılı büyüklükler.

↓	↑	↓	↑
20 işçi	5 gün	8 saat	20000 kilogram
30 işçi	*x* gün	5 saat	60000 kilogram

Okların yönüne göre şu orantıyı oluşturuyoruz

$$\begin{aligned} x:5 &= 20:30 \\ &= 8:5 \\ &= 60000:20000 \end{aligned}$$

Oradan da

$$x = \frac{5 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 60000}{30 \cdot 5 \cdot 20000} = 16 \quad \text{gün}$$

Demek ki, 30 işçi günde 5 saat çalışarak 60000 *kg* şeftali 16 günde toplayacaklar. ♦

Alıştırmalar

1. 4 işçi bir iş gününde 12 metre kanal kazmıştır. Bir iş gününde 18 metre kanalın kazılması için kaç işçiye ihtiyaç vardır?

2. 20 kilogram şeker pancarından 1,5 kilogram şeker elde edilir. 768 kilogram şeker pancarından kaç kilogram şeker elde edilecektir?

3. Bir havuz altı eşit borudan 4,5 saatte dolar. Aynı havuzu aynı borulardan beş tanesi kaç saatte dolduracaktır?

4. Altı işçi günde 8 saat çalışarak bir işi 10 günde bitiriyor. Aynı işi 10 işçi günde 12 saat çalışarak kaç günde bitirebilir?

5. $1200kW$ gücündeki altı makine belirli bir işi 8 günde yapabilmektedir. 4 makinenin aynı işi 6 günde yapabilmesi için makinelerin gücü ne olmalıdır?

4.4. Yüzde Hesapları

Yüzde Kavramı

Günlük hayatta bazı başarılar ya da başarısızlıklar, malların fiyat artışı ya da indirimi ya da üretimin değişimi bazı özel ölçülerle ifade edilmesi yaygındır.

Tanım. $a:100$ biçiminde ifadeye **yüzde** denir ve % a ile işaret edilir.

Yüzde kavramı bir oran olduğuna göre, oranın tüm özellikleri yüzdelere de geçerlidir.

Örnek 1. Bir okulda matematik yarışmasında İna, toplam 25 sorudan 17'sini doğru cevaplamıştır. Aynı yarışmada Murat, toplam 20 sorudan 13 soruyu doğru cevaplamıştır. Acaba yarışmacılardan hangisi daha başarılı olmuştur?

İna toplam 25 sorudan 17'sini doğru cevaplamıştır. Sonucu 17 : 25 oranıyla ifade edebiliriz. Benzer şekilde Murat'ın sonucunu da toplam 20 sorudan 13 doğru cevabı 13 : 20 biçiminde oranla ifade edebiliriz. Şimdi, bu iki orandan hangisinin daha büyük olduğunu tespit etmekle, yani 17:25 daha büyüktür yoksa 13:17 belirterek, sorunun cevabını bulmuş oluyoruz. Şu orantıları kuralım:

İna: $17:25 = x:100$, oradan $x = 68$ elde edilir.

Murat: 13:20 = y :100, oradan y = 65 elde edilir.

Buna göre İna'nın başarısı 17:25 oranı 68:100 ile denktir, Murat'ın başarısı ise 13:20 oranı 65:100 ile denktir. Bu testte İna daha başarılı olduğunu diyebiliriz, çünkü soruların %68'ine doğru cevap vermiştir, Murat ise, sorulan soruların %65'ine doğru cevap vermiştir. ♦

Örnekte görüldüğü gibi, yüzde hesabında şu parametreler bulunmaktadır:

- sabit 100,
- temel sayı (baş değer) (S),
- yüzde oranı (p) ,ve
- yüzde payı (P),

ve bunlar $P : S = p : 100$ orantısıyla birbirine bağlıdır. Orantıda üç değişkenden ikisinin değeri bilindiği durumda üçüncüsünün değerini şu formüllerle hesaplayabiliriz:

$$P = \frac{S \cdot p}{100}, \quad S = \frac{100 \cdot P}{p}, \quad p = \frac{100 \cdot P}{S}.$$

Bu üç büyüklükten birinin hesaplanmasına **yüzde hesap** denir.

Alıştırma 1. İrina'nın 500 denarı varmış. Loto oyununda parasının %12'si kadar para kazandığına göre, bakiyesi ne kadar artmıştır?

Çözüm. Burada temel sayı (ana para) $S = 500$ ve yüzde oranı $p = 12$ dir ve yüzde payı P' nin bulunması gerekir. Yukarıdaki formüle göre

$$P = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{500 \cdot 12}{100} = 60 \text{ elde edilir.}$$

Buna göre İrina'nın hesabındaki bakiyesi 60 denar artmıştır.

Alıştırma 2. Bir çift ayakkabının fiyatı %12 artmıştır. Buna göre yeni fiyatı 840 denar olmuştur. Ayakkabıların önceki fiyatı ne kadarmış?

Çözüm. Burada $P = 840$ yüzde payı ve $p = 12$ yüzde oranı verilmiş, temel sayı S aranılmaktadır. Formül gereğince

$$S = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 840}{12} = 7000$$

elde edilir, demek ki ayakkabıların zam yapılmadan önceki fiyatı 7000 denarmış. ♦

Alıştırma 3. Bir şirket 30 tonluk meyveyi 3 tonluk ambalaj ile satın almıştır. Ambalajın yüzdesi ne kadardır?

Çözüm. Burada temel sayı $S = 30$ ve yüzde payı $P = 3$ biliniyor. Yüzde oranı p aranılmaktadır. Yukarıdaki formül gereğince

$$P = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10$$

elde edilir, yani $p = 10\%$. ♦

<u>Yüz altında ve yüz üstünde yüzde hesabı</u>

Pratikte çok kez temel sayı, yüzde payı kadar arttığı ya da yüzde payı kadar azaldığı $S \pm P$ gibi durumlarda temel sayının hesaplanmasına rastlıyoruz. Böyle durumda $S + P$ verildiğinde **yüz üstünde yüzde hesabı**, ya da $S - P$ verildiğinde **yüz altında yüzde hesabı** işlemi söz konusu olur.

S ve P' yi bulmak için, $S : P = 100 : p$ temel orantıdan hareket edeceğiz, oradan da

$(S \pm P) : P = (100 \pm p) : p$, yani

$(S \pm P) : (100 \pm p) = P : p = S : 100$,

buna göre şu formülleri elde ediyoruz

$$S = \frac{(S \pm P) \cdot 100}{100 \pm p} \quad \text{ve} \quad P = \frac{(S \pm P) \cdot p}{100 \pm p}$$

Alıştırma 4. Bir atölyede el işi 1800 tane parça yapılarak norm %20 artmıştır.

a) El işi parçaların normu ne kadarmış?

b) Norm kaç el işi parçası için aşılmıştır?

Çözüm. Burada $S + P = 1800$ ve yüzde oranı $p = 20$ verilmiş olarak, temel sayı S ve temel payı P aranılmaktadır. Yukarıdaki formül gereğince

a) $S = \frac{(S+P) \cdot 100}{100 + p} = \frac{1800 \cdot 100}{100 + 20} = 1500$ ve

b) $P = (S + P) - S = 1800 - 1500 = 300$

elde edilir. Demek ki, norm 1500 el işi parça ve bununla norm 300 parça kadar aşılmıştır. ♦

Alıştırma 5. Yaz indirimi esnasında, bir gömleğin fiyatı %12 indirimle 1276 denara satılıyor.

a) Gömleğin önceki fiyatı ne kadarmış?

b) İndirimle yapılan zarar ne kadardır?

Çözüm. $S - P = 1276$ ve yüzde oranı $p = 12$ verilmiş olarak, temel sayı S ve yüzde payı P nin ne kadar olduğunu bulmamız gerekir.

a) $S = \frac{(S+P) \cdot 100}{100 + p} = \frac{1800 \cdot 100}{100 + 20} = 1500$, ve

b) $P = (S + P) - S = 1800 - 1500 = 300$

Buna göre, indirim öncesi gömleğin fiyatı 1450 denar ve indirimle elde edilen zarar 174 denar olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Hesaplayınız:

a) 750 kilometrenin %15' i **b)** 6000 denarın %12'si

2. Bir bezelye konservesinin fiyatı 40 denardan 34 denara indirilmiştir. Fiyat yüzde kaç indirilmiştir?

3. Bir sınıfta 7 öğrenci pek iyi başarılı olarak sınıf mevcudunun %20'sini oluşturuyorlar. Sınıfta toplam kaç öğrenci varmış?

4. 23 tonluk bir malın teslim alınmasının ardından nakliye sırasında %0,5 hasar tespit edilmiştir. Kaç kilogram mal hasar görmüştür?

5. Bir malın fiyatına %15 indirin yapıldıktan sonra elde edilen fiyata %5 zam yapılarak malın fiyatı 1606 denar olmuştur. İndirimden önce malın fiyatı ne kadarmış?

4.5. Paylaşım Hesabı

Orantıların özelliklerinden yararlanmakla çözülen başka bir cins alıştırmalar **paylaşım hesabı** alıştırmalarıdır. Bu alıştırmalarda verilen bir büyüklük ya da çokluk doğru ya da ters orantıda önceden belirlenmiş kısımlara bölünmesi istenilmektedir. Bu nedenle paylaşım **doğru orantılı** ya da **ters orantılı** yapılabilir.

İlerde, doğru orantılı paylaşım olan alıştırmayı çözeceğiz.

Alıştırma 1. 370 sayısını öyle üç kısma (toplanana) ayırınız ki 2, 3 ve 5 sayılarıyla doğru orantılı olsun.

Çözüm. 370 sayısı öyle üç kısma (toplanana) ayırmalıyız ki, birincisi ikincisine göre 2 : 3 oranında, birincisi üçüncüsüyle de 2:5 oranında olmalıdır. Aranılan kısımları x, y ve z ile işaret edersek,

$$x : y = 2:3, \quad y : z : = 3:5 \text{ ve } x : z = 2:5.$$

Elde edeceğiz. Bu orantılardan

$$x : y : z = 2 : 3 : 5 \text{, yani } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

çoklu orantıyı elde ediyoruz . Buradan çoklu orantıların özelliği gereğince

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{370}{10}$$

elde edilir. Oradan da

$$\frac{x}{2} = \frac{370}{10}, \quad \frac{y}{3} = \frac{370}{10} \quad \text{ve} \quad \frac{z}{5} = \frac{370}{10}$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre, aranılan parçalar: $x = 74$, $y = 111$ ve $z = 185$ olduğunu buluyoruz. ♦

İlerdeki alıştırma ters orantılı paylaşım ile ilgilidir.

Alıştırma 2. Ahmet, Yusuf ve İlmi sırasıyla 5, 8 ve 12 yaşındadır. Onlar 122500 denarı yaşlarının ters orantısına göre paylaşıyorlar. Her biri kaçar denar almıştır?

Çözüm. 122500 denar x, y ve z gibi üç kısma ayrılmalıdır, öyle ki

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12} \quad \text{ya da } x : y : z = 24 : 25 : 10$$

oradan, çoklu orantının özelliği gereğince

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{24+15+10} = \frac{122500}{49} = 2500$$

elde edilir. Oradan da

$$\frac{x}{24} = 2500, \quad \frac{y}{15} = 2500 \quad \text{ve} \quad \frac{z}{10} = 2500$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre $x = 60000$, $y = 37500$ ve $z = 25000$ elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. 1860 sayısını üç kısma o şekilde ayırınız ki:

a) 2, 3 ve 5 ile doğru orantılı olsun.

b) 2, 3 ve 5 ile ters orantılı olsun

2. 1080 sayısını $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$ oranında üç kısma ayırınız.

3. 27200 denarı üç kişiye yaşlarıyla doğru orantıda olacak şekilde paylaştırınız. Kişiler 20, 32 ve 40 yaşında olduğuna göre her birinin payına düşen parayı hesaplayınız.

4. 1092000 denar para üç şirkete o şekilde ayrılmalıdır ki, her biri kendinden öncekinden %20 kadar fazla alacaktır. Her şirkete ayrılacak parayı hesaplayınız.

5. 135500 denarı üç kişiye o şekilde paylaştırınız ki, her kişi kendinden önceki kişiden %10 daha az para alsın. Her birinin payına ne kadar para ayrılacaktır?

4.6. Faiz Hesabı

Günlük hayatta borç para almak çok rastlanan bir olaydır. Borç alan, parayı işleterek kazanç sağlayabilir. Diğer taraftan borç veren, bu parası için **faiz** adı verilen bir geri ödemesi alarak kazanç sağlamaktadır. Banka hesaplarına paralarını yatıran kişilere ve şirketlere bankalar faiz ödüyor ve tersine kişiler ve şirketler bankadan borç para aldıklarında bankaya faiz ödüyorlar.

Borç alınan para miktarı ya da bankaya yatırılan para miktarına **anapara (esas değer)** denir.

Borç olarak alınan paranın geri ödeme zamanına **borç vadesi** denir. Bu zaman aralığı genel olarak gün, ay ya da yıl zaman birimleriyle ölçülmektedir.

Bir zaman biriminde ödenmesi gereken faiz değeri anapara ile doğru orantılıdır, yani ana paranın herhangi bir kısmı olabilir ve buna **faiz oranı** denir. Dolayısıyla faiz oranı, belli bir zaman dilimine ilişkin bir yüzde orandır. Bu nedenle faiz miktarı sadece anaparaya değil, aynı zamanda borç vadesine de bağlıdır.

Faiz miktarını K, anaparayı G, borç vadesini t ve faiz oranını s ile işaret edelim.

Örnek 1. Meli, Sami'ye 120 denar borç para vermiş. Karşılığında Sami her ay Meli'ye ana paranın %15'i kadar faizle bu borcu 6 ayda ödeyecektir.

Bu durumda $G = 120$ denar, borç vadesi $t = 6$ ay ve aylık faiz oranı $s = 15\%$ dir. Sami her ay Meli'ye 120 denarın %15'ini ödemesi gerekir ve bu miktar 18 denardır. Buna göre Meli altı ayda $18 \cdot 6 = 108$ denar faiz ödeyecektir. ♦

Buna göre ana para *G'*den, faiz vadesi *t* ve faiz oranı *t* ile elde edilen faiz miktarı *K* için şu formül yazılabilir.

$$K = s\cdot G\cdot t\ .$$

Şunu fark etmeliyiz ki, faiz miktarını hesaplarken borcun süresi faiz oranıyla aynı ölçü biriminde olmalıdır.

Alıştırma 1. Bir bankada yıllık faiz oranı %12 dir. Yatırılan 5000 denar para için üç yılda faiz miktarı ne kadar olacaktır?

Çözüm. Alıştırmadaki koşullara göre $G = 5000$ denar , yıllık faiz oranı s =%12 ve faiz vadesi $t = 3$ yıldır.
Bu durumda yatırılan para için faiz miktarı

$K = s\cdot G\cdot t = 0,12\cdot 5000\cdot 3 = 1800$ denar olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Bir şirket 3000 Euro yıllık %12 faiz oranıyla bankaya yatırmıştır.
a) Şirket, ilk yılın sonunda ne kadar faiz miktarı elde etmiştir?
b) Şirket, ikinci yılın sonunda ne kadar faiz miktarı elde etmiştir?
c) Şirket, üçüncü yılın sonunda ne kadar faiz miktarı elde etmiştir?

2. Semra ve Leyla'nın 10000 er denar paraları vardır. Semra parasını %11 faiz oranıyla 3 yılına, Leyla ise %8 faiz oranıyla 4 yılına bankaya yatırmıştır.
a) Semra'nın aldığı faiz miktarı ne kadardır?
b) Leyla'nın aldığı faiz miktarı ne kadardır?
c) Hangisi daha fazla faiz miktarı almıştır?

3. Viktor bir bankaya 3000 denar yatırarak 3 yılda 675 denar faiz miktarı elde etmiştir. Yıllık faiz oranını belirtiniz.

4. Deyan, her yılın sonunda 5000 dinar almak için belirli bir miktar para yatırmaya karar vermiştir. Yıllık faiz oranı %13 ise ne kadar yatırım yapmalıdır?

5. Sûzan yatırdığı paradan 3 yıl için 7000 dinar kazanmıştır. Yıllık faiz oranı %14,25 olduğuna göre, Sûzan ne kadar para yatırmıştır?

TEKRARLAMA ve KONUYU PEKİŞTİRME

1. Verilen oranları sadeleştir:
a) 18:72 **b)** $6\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3}:16$ **c)** $5\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}:8$ **ç)** $16a:48ab$

2. *A* ve *B* parselleri dikdörtgen biçimindedir. *A* parselinin boyutları 80*m* ve 60*m*; *B* parselinin boyutları 90*m* ve 50*m* ise, onların alanlarının oranını belirtiniz.

3. Verilen orantılarda *x* bilinmeyenini belirtiniz:

a) $(15 - x) : x = 3:2$ **b)** $8:(5 + x) = 3 : x$ **c)** $a : b = (a + x) : x$

4. 160 sayısını 2:5:7:6 oranında dört kısma ayırınız.

5. 80 tane otobüs biletinin fiyatı 640 denardır. Aynı fiyata göre 60 bilet için ödenecek para ne kadardır?

6. Bir oduncu ormanda 9 günde 486 metre küp odun kesmiştir. Aynı işçi 16 günde kaç metre küp odun kesebilir?

7. 9 işçi bir işi 30 günde bitirmiştir. Aynı işi 10 günde bitirmek için kaç işçi çalıştırılmalıdır?

8. Bir yaya (A), 3 kilometre saatte hızla hareket ederek bir kenti diğer kente bağlayan yolu 4 saatte geçmiştir. Aynı yolu B yayası saatte 8 kilometre hızla giderse ne kadar zamanda geçecektir?

9. Bir şirkette 8 işçi 13 gün çalışarak 6240 denar para kazanmıştırlar. Aynı koşullar ile 15 işçi 6 gün çalışarak kaç para kazanacaklar?

10. Bir maden ocağında, 10 madenci 8 saatte 40 ton kömür kazmıştır. Aynı koşullarda 8 madenci 6 saatte kaç ton kömür kazabilir?

11. Uzunluğu 6*km*, genişliği 3*m* ve dolgu yüksekliği 60*cm* olan bir yolu 80 işçi 45 günde bitiriyor. 120 işçi 10 *km* uzunluğunda, 6*m* geniş, dolgu yüksekliği 80*cm* olacak şekilde günde 8 saat çalışarak kaç günde bitirebilir?

12. Damla, 24 kruvasan satmayı planladı. Bu arada 13 kruvasan satmış olduğuna göre, satılmamış kruvasanların yüzdesini belirtiniz.

13. Bir süpermarkette her Çarşamba yemek ürünlerine %15 indirim yapılıyor. Meryem 102 denar alışveriş yaptığına göre ne kadar tasarruf etmiştir?

14. Bir ülkenin yıllık nüfus artışı %0,3 tür. Bu ülkenin nüfusu 3 yıl önce 40 milyon olduğuna göre, ülkenin bugünkü nüfusunu belirtiniz.

15. %15 mevsim indiriminde Nikola 520 denar ayakkabı satın almıştır. Ayakkabıların önceki fiyatı ne kadarmış?

16. 5 dükkana 2480 litre süt dağıtılmalıdır. Birinci dükkânın 600 müşterisi, ikinci dükkanın 800 müşterisi, üçüncü dükkanın 440 müşterisi, dördüncü ve beşinci dükkânın da 320 müşterisi varsa, her dükkana kaç litre süt dağıtılmalıdır?

17. Üç kişiye bir miktar para şu şekilde paylaşılıyor: Birincisine paranın $\frac{1}{4}$ ‘ini, ikincisine paranın $\frac{2}{5}$ ‘sini ve üçüncü kişi 126000 denar almıştır. Para miktarı ne kadar olduğunu belirtiniz.

18. Sandra, 25000 denarı 2 yıl ve 6 ay için yatırım yaparak karşılığında 11562,5 denar elde etmiştir. Yıllık faiz oranını belirtiniz.

19. 7000 denar parayı 3 yılına, yıllık %12,25 faiz oranıyla bankaya yatıran İsmet, ne kadar faiz elde etmiştir?

20. Yılmaz, 10500 denarı 3 yıl ve 3 ay için yıllık %13,2 faiz oranıyla yatırmıştır.
a) Elde ettiği faiz miktarı ne kadardır?
b) Yatırım süresi bittiğinde Yılmaz’ın ne kadar parası olmuştur?

5. LİNEER DENKLEMLER, EŞİTSİZLİKLER VE BİR BİLİNMEYENLİ LİNEER EŞİTSİZLİKLER SİSTEMİ

5.1. Bir bilinmeyenli lineer (birinci dereceden) denklem

Denklem çeşitleri

„=“(eşitlik) işaretiyle bağlı olan iki rasyonel ifadeden oluşan ifadeye **eşitlik** denir. Her eşitlikte sol ve sağ olmak üzere iki taraf fark ediyoruz.

Eşitliğin her iki tarafı sayı ifadesi olduğu durumda ona **sayı eşitliği** denir. Sayı eşitlikleri matematik simgeleriyle yazılmış olan önermelerdir, o halde onlar doğru (gerçek) ya da yanlış olabilirler.

En az bir tarafında bir ya da daha fazla değişken içeren eşitliğe **denklem** denir. Denklemdeki değişkenlere **bilinmeyenler** denir ve genellikle x, y,... ile işaret ediliyorlar. Bilinmeyenlerin mümkün değerlerine eşitliğin **tanım kümesi** denir ve D ile işaret edilir.

Örnek 1. a) $3+2=10-5$ doğru olan bir sayı eşitliğidir.

b) $5x+3=2$ eşitliği, $D=\mathbb{R}$ olmak üzere bir denklemdir. ♦

Bilinmeyenlere tanım kümesinden değerler verilmekle her denklem sayı eşitliğine dönüşür.

Örnek 2. $7+3x=2$ denklemi $x=2$ için $7+3\cdot 2=2$ yanlış olan bir sayı eşitliğine dönüşür. ♦

Tanım kümesinin tüm değerleri için doğru sayı eşitliğine dönüşen eşitliğe **özdeşlik** denir.

Tanım kümesinin tüm değerleri için yanlış sayı eşitliğine dönüşen eşitliğe **çelişki (imkânsız eşitlik)** denir.

Örnek 3. $6+3x=3(2+x)$ eşitliği özdeşliktir, $7+3x=2+3x$ eşitliği ise çelişkidir. ♦

Denk Denklemler

Tanım kümeleri aynı ve çözüm kümeleri aynı olan iki denkleme **denk denklemler** denir.

Örnek 4. $2+x=5$ ve $x-3=0$ denklemleri denktir, çünkü her ikisinin tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir ve çözüm kümeleri her ikisinin $R=\{3\}$ dir. ♦

Verilen bir denklemi çözmek için, onu verilene denk olan daha basit bir denklemle değiştiriyoruz. Ondan sonra elde edileni üçüncü daha basit bir denklemle değiştirir ve bu şekilde denklemin çözümüne varıncaya kadar devam ediyoruz. Bir denklemi diğer daha basit bir denklemle değiştirme işlemine denklemin dönüştürülmesi denir. Bu işlem denk denklemlerin şu iki özelliğine dayanmaktadır.

1. $f(x) = g(x)$ (1)

Denklemi $f(x) + \phi(x) = g(x) + \phi(x)$,

denklemiyle denktir. Burada $\phi(x)$ ifadesi, (1) denklemindeki x'in tüm mümkün değerleri için tanımlıdır.

Diğer sözlerle, verilen denklemin her iki tarafına, bilinmeyenin tüm mümkün değerleri için tanımlı olan aynı bir ifade katarsak, verilene denk olan ifade elde edilecektir. Bu özelliğin sonucu olarak denklemlerin şu özelliğini ifade edebiliriz:

• Bir denklemin her iki tarafında aynı işaretli eşit terimler varsa onlar silinebilir (yok sayılabilir).

• Denklemin her terimi ters işaretiyle denklemin bir tarafından denklemin diğer tarafına geçebilir.

Örnek 5. a) $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$ denkleminde farklı taraflardaki eşit terimleri silmekle, ona denk olan $7x + 2 = 9$ denklemi elde edilir.

b) $5x - 4 = 2x + 5$ denkleminde sol tarafta bilinmeyen içeren terimleri gruplaştırmak istiyoruz. Bu nedenle $2x$ terimini denklemin sol tarafına geçirirken işaretini değiştiriyoruz. Aynı şekilde -4 terimi sağ tarafa ters işaretiyle yazılır. Bu şekilde verilene denk olan $5x - 2x = 5 + 4$ denklemi elde edilir. ♦

2. $f(x) = g(x)$ (2)

Denklemi $f(x) \cdot \phi(x) = g(x) \cdot \phi(x)$,

denklemiyle denktir. Burada $\phi(x)$ sıfırdan farklı ve (2) denklemindeki x değişkeninin tüm mümkün değerleri için tanımlı olan bir ifadedir.

Diğer sözlerle, verilen denklemin her iki tarafını, bilinmeyenin tüm mümkün değerleri için tanımlı olan sıfırdan farklı aynı bir ifadeyle çarparsak, verilene denk olan ifade elde edilecektir. Bu özelliğin sonucu olarak denklemlerin şu özelliğini ifade edebiliriz:

• Denklemin her iki tarafı -1 ile çarpıldığında, denklemin her teriminin işareti değişir.

• Denklemin her iki tarafında sıfırdan farklı olmak üzere bilinmeyen içermeyen ortak çarpanı varsa, denklemin iki tarafı bu çarpanla bölünebilir. Bu durumda denklemi sadeleştirmiş oluyoruz.

Örnek 6. a) $-3x + 7 = 3$ denklemin her iki tarafını -1 ile çarparsak, verilene denk olan $3x - 7 = -3$ denklemini elde edeceğiz.

b) $2x - 4 = 6$ denklemi $x - 2 = 3$ denklemiyle denktir. Denklemin her iki tarafı 2 ile bölünmüştür, yani $\frac{1}{2}$ ile çarpılmıştır. ♦

Şunu kaydedelim: Bu özelliğin uygulanmasıyla, kesirli katsayıları olan denklemde, denklemin her iki tarafı kesirlerin paydalarının bir ortak katıyla çarpılırsa denklem tam katsayılı denkleme dönüşecektir. Bu dönüşüme, denklemin paydalarından kurtulma denir.

Örnek 7. $\frac{x-1}{2}-5=\frac{x+2}{3}$

Denkleminde paydalardan kurtulmak için, denklemin her terimi paydaların bir katıyla çarpılmalıdır. Örnek, $2\cdot 3 = 6$ ile çarpalım. Bu şekilde verilen denklem

$6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 5=6\cdot\frac{x+2}{3}$ denklemiyle denk olacaktır. Bu ise

$3(x-1)-30 = 2(x+2)$ denklemine dönüşür. ♦

Bir denklemde bulunan kesirlerin paydasında bilinmeyen olduğu durumda, denklemin paydalarından kurtulunca elde edilen denklem verilen denklemin tüm çözümlerini içerir. Halbuki denklemin mümkün değerleri olmayan da bazı çözümler elde edilebilir, yani paydaların EKOK' ını sıfır yapan değerler de elde edilebilir. Böyle çözümler olduğu durumda onları çözüm kümesinden çıkarmalıyız.

Örnek 8. $\frac{x^2-4x}{x-2}=-\frac{4}{x-2}-4$

denkleminde paydalardan kurtulmak için, denklemin her terimini sıfırdan farklı olduğunu var sayarak $x-2$ ile çarpacağız. Buna göre $x-2 \neq 0$ koşuluyla $x^2-4x=-4-4x+8$, denklemiyle denktir. Bu ise $x^2-4=0$ ile denk olarak $(x-2)(x+2)=0$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla çözümler $x=2$ ve $x=-2$ elde edilir. $x=-2$ çözümü verilen denklemin çözümüdür, fakat $x=2$ çözümü verilen denklemin çözümü değildir, çünkü o değer için $x-2=0$ olur. Buna göre verilen denklemin bir tek çözümü vardır, o da $x=-2$ dir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen denklemler denk midir?

a) $x^2+3x=12+x^2$ **ve** $3x=12$ **b)** $3=\frac{15}{x}$ **ve** $3x=15$ $x+\frac{1}{x}=5+\frac{1}{x}$ **ve** $x=5$?

2. x in hangi değeri için $5x-2$ ifadesinin değeri:

a) 8 **b)** 7 **c)** 0 **ç)** 6 dır?

3. x in hangi değeri için $3x-2$ ve $4x+1$ ifadelerin eşit sayı değerleri vardır?

4. Verilen denklemlerden hangileri özdeşliktir:

a) $5x-2x=3x$ **b)** $3x-2=x+1$ **c)** $(y+5)^2=y^2+10y+25$?

5.2. Birinci Derece (Lineer) Denklemlerin ve Birinci Derece Denklemlere Dönüşebilen Denklemlerin Çözümü

Bir Bilinmeyenli Birinci Derece Denklemin Genel Şekli

Yukarıda yapılan işlemlerle a ve b sayılar ya da x değişkenini içermeyen ifadeler olmak üzere her lineer denklem

$$ax+b=0 \qquad (1)$$

biçiminde denkleme dönüşür. (1) denklemine **birinci derece bir bilinmeyenli denklemin genel şekli** denir. Burada a bilinmeyen önündeki **katsayı**, b ise **serbest terimdir**. Bu denklemin çözüm kümesini inceleyelim.

1. $ax+b=0$ denkleminde katsayı $a \neq 0$ olduğu durumda ona denk olan $x=-\frac{b}{a}$ denklemine dönüşür. Bu denklemin **bir tek çözümü vardır** $x_0=-\frac{b}{a}$.

2. $ax+b=0$ denkleminde katsayı $a=0$ ve serbest terim $b \neq 0$ olduğu durumda, denklem $0 \cdot x = -b$ denklemiyle denktir. Bu ise imkansızdır, çünkü sıfır ile çarpımı sıfırdan farklı olacak sayı yoktur. Buna göre bu durumdaki denklem **çelişkidir.**

3. $ax+b=0$ denkleminde katsayı a = 0 ve serbest terim $b=0$ olduğu durumda denklem $0 \cdot x = 0$ denklemine dönüşür. Bu denklemin sonsuz çok çözümleri vardır, çünkü sıfır ile çarpılan her reel sayının çarpımı sıfıra eşittir. Dolayısıyla denklem bir **özdeşliktir.**

Alıştırma 1. Denklemi çözünüz

$$\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x+14}{2}-2.$$

Çözüm. Paydalardan kurtulmak için, denklemin her iki tarafını 12 ile çarpıyoruz.

$$12\cdot\frac{5x-2}{3}-12\cdot\frac{x-8}{4}=12\cdot\frac{x+14}{2}-12\cdot 2$$

kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$4(5x-2)-3(x-8)=6(x+14)-12\cdot 2$$

elde edilir. Parantezleri kaldırmakla

$$20x-8-3x+24=6x+84-24$$

Denklemini elde ediyoruz. Bilinmeyen içeren tüm terimleri sol tarafta, serbest terimleri ise sağ tarafa gruplaştırmakla

$$20x-3x-6x=+84-24+8-24, \text{ yani } 11x=44$$

Denklemini elde etmiş oluyoruz. Denklemin her iki tarafını bilinmeyen önündeki katsayıyla bölersek verilene denk olan $x=4$ denklemini elde ediyoruz. Oradan da çözüm $x_0=4$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırma 2. Verilen denklemi çözünüz

$$\frac{15}{x}-\frac{7-x}{x-2}=1.$$

Çözüm. Paydalardan kurtulmak için denklemin her iki tarafını $x(x-2)$ ifadesiyle çarpacağız. $x(x-2)\neq 0$ koşuluyla, yani $x\neq 0$ ve $x\neq 2$ olmak üzere

$$\frac{15x(x-2)}{x}-\frac{(7-x)\cdot x\cdot(x-2)}{x-2}=x(x-2)$$

ve mevcut kısaltmalar yapıldıktan sonra denklemdeki paydalardan kurtulunur. Böylece,

$$15(x-2)-x(7-x)=x(x-2)$$

denklemi elde edilir. Burada parantezleri kaldırmakla

$$15x-30-7x+x^2=x^2-2\,.x$$

elde edilir. Benzer terimleri toplayarak ve bilinmeyen terimleri bir tarafa , sabit terimleri ise diğer tarafa almakla $10x = 30$ elde edilir. Oradan da $x_0 = 3$ elde edilir. $3 \neq 0$ ve $3 \neq 2$ olduğuna göre, $x_0 = 3$ denklemin çözümüdür. ♦

Alıştırma 3. Verilen denklemi çözünüz

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$$

Çözüm. Paydalardan kurtulmak için**,** denklemin her iki tarafını $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ ifadesiyle çarpacağız. $x^2 - 4 \neq 0$, yani $x \neq -2$ ve $x \neq 2$ olduğunu varsayarak verilen denklem

$$(x-2) - (x+2) = 2x$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü $x_0 = -2$ dir. $x_0 = -2$ varsayıma göre denklemin çözümü olamayacağından, verilen denklemin çözüm kümesi boş olduğunu, yani çözümü olmadığı sonucuna varıyoruz. ♦

Alıştırma 4. Verilen denklemi çözünüz:

$$\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$$

Çözüm. Paydalardan kurtulmak için, denklemin her iki tarafını $x - 5$ ifadesiyle çarpalım. $x - 5 \neq 0$ koşuluyla

$$(2x-7) = x - 5 - (2 - x)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $0 \cdot x = 0$ denklemiyle denktir. Son denklem özdeşliktir, fakat onun çözümleri ancak $x - 5 \neq 0$ olan x değerleridir. Buna göre, verilen denklemin çözüm kümesi $R = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. ♦

Bir Bilinmeyenli Lineer Denklemlere Dönüşen Mutlak Değerli Denklemler

Bir x reel sayısının mutlak değeri $|x|$, şu şekilde tanımlanır:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{eğer } a > 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } a = 0 \text{ ise} \\ -a, & \text{eğer } a < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

x bilinmeyeni mutlak değer işareti içinde bulunan denklemlere **mutlak değerli denklemler** denir. Burada bizi daha fazla ilgilendiren, bir bilinmeyenli birinci derece denkleme dönüşen mutlak değerli denklemlerdir. Bu gibi denklemleri çözerken, ilk işlem mutlak değer işaretinden kurtulmak olacaktır. Bunu yaparken mutlak sayıların mutlak değeri tanımından yararlanacağız. Devamında özdeş dönüşümler yaparak, denklem, bir bilinmeyenli lineer denklemin genel şekline dönüştürülür ve çözümü önceki bölümde gösterdiğimiz gibi bulunur.

Alıştırma 5. Verilen denklemi çözünüz

$$|x - 5| = 2$$

Çözüm. Reel sayının mutlak değerinin tanımı gereğince

$$|x-5|=\begin{cases} x-5, & x\in[5,\infty) \\ 5-x, & x\in(-\infty,5) \end{cases}$$

olduğuna göre şu iki durum mümkündür:

I. $x \in (-\infty,5)$, ise verilen denklem $5- x = 2$ ile denktir. Bu denklemin çözümü $x = 3$ tür.

II. $x \in [5, \infty)$, ise verilen denklem $x -5 = 2$ ile denktir. Bu denklemin çözümü $x = 7$ dir.

Sonuç olarak, verilen denklemin çözümü $x = 3$ ve $x= 7$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırma 6. Verilen denklemi çözünüz:

$$|x| - |x + 2| = 0$$

Çözüm. Mutlak değer tanımından

$$|x|=\begin{cases} x, & x\in[0,\infty) \\ -x, & x\in(-\infty,0) \end{cases} \quad \text{ve} \quad |x+2|=\begin{cases} x+2, & x\in[-2,\infty) \\ -x-2, & x\in(-\infty,-2) \end{cases}$$

olduğunu görebiliriz. Şu üç durum mümkündür:

I. $x\in(-\infty,-2)$ ise, verilen denklem $-x + x + 2 = 0$, yani $2 = 0$ şeklinde dönüşür; bu ise imkansızdır. Dolayısıyla verilen aralıkta denklemin çözümü yoktur.

II. $x\in [-2,0)$ ise, verilen denklem $- x - x - 2 = 0$, şekline dönüşür, yani $x = -1$ dir. Dolayısıyla denklemin çözümü $x = -1$ elde edilir.

III. $x\in [0,\infty)$ ise verilen denklem $x - x - 2 = 0$ şekline dönüşür, yani $-2= 0$ elde edilir. Bu ise imkansızdır, dolayısıyla verilen aralıkta denklemin çözümü yoktur.

Sonuç olarak, verilen denklemin çözümü $x=-1$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $(x -1)(x -2)-(x -3)(x -4) = 6$ **b)** $3x^2 -(3x + 2)(x -1) = 8$

2. Denklemleri çözünüz:

a) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3}$ **b)** $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}$

3. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $1+\dfrac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x-\frac{1+x}{3}}{3}$ **b)** $x+\dfrac{1+\frac{3x}{2}}{4}+\dfrac{2+\frac{x}{4}}{3}=2$

4. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x-3}{x}=2$ **b)** $\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9}$

5. a) $2x + |x| = 3$ **b)** $|2x +1| + |x + 3| = |x + 6|$

5.3. Bir Bilinmeyenli Birinci Derece (Lineer) Denklemlerin Oluşturulması ve Onların Çözümü

Doğal ve sosyal bilimlerden birçok problemin, yanı sıra günlük yaşantımızdan birçok problemin çözümü bizi bir bilinmeyenli birinci derece (lineer) denklemlerin çözümüne götürür. Bunu yaparken, problemin çözümünde en ciddi kısmı, problemin uygun bir cebirsel şekle çevrilmesidir. Bu ödevleri çözmek için kesin olan kurallar olmamasına rağmen, sorunun çözümüne kademeli olarak nasıl ulaşılacağına dair bazı genel talimatlar verebiliriz.

1. adım. Verilen problemi dikkatle inceler ve cevaplanması gereken soruları belirliyoruz.

2. adım. Problemde bulunan tüm bilinmeyen büyüklükleri ve onların her birinin ölçü birimlerini belirleyerek *x, y,…*vb.. harflerle işaret ediyoruz.

3. adım. 2. adımda ayrılan büyüklükler arasındaki cebirsel bağıntıyı belirlemek için, problemde verilen tüm bilgilerden yararlanıyoruz.

4. adım. Ödevin koşulları gereğince denklem oluşturuyoruz.

5. adım. Elde edilen denklemi çözüyoruz.

6. adım. Elde edilen çözümü, ödevin koşullarını sağlayıp sağlamadığını tespit etmek için yoklamasını yaparız.

Yoklamanın yapılması zorunlu olduğunu hatırlatalım, çünkü denklem doğru oluşturulmuş ve doğru çözülmüş olduğuna rağmen, elde edilen çözümlerin değerleri verilen problemde anlamı olmayabilir.

Alıştırma 1. İki sayının toplamı 94'e eşittir. Büyük sayı küçük sayının iki katından 5 kadar küçüktür. Bunlar hangi sayılardır?

Çözüm. 1. adım. Soru: Bu iki sayı hangileridir?

2. adım. Bilinmeyen büyüklükler: sayılardan küçüğü x olsun. O halde büyük sayı $94-x$ olacaktır, çünkü onların toplamı 94 tür.

3. adım. Verilen bilgiler: Büyük olan sayı küçüğünün iki katından 5 küçüktür.

4. adım. $94-x=2x-5$ denklemini oluşturuyoruz.

5. adım. $94-x=2x-5$ denklemini çözüyoruz. Bu denklem $94+5=2x+x$ ile denktir ve devamında bu denklemin çözümüne devam ederek $99=3x$ denklemine , oradan da $x_0=33$ çözümü elde edilir. Demek ki küçük sayı 33, büyük sayı ise $94-33=61$ olduğunu buluyoruz.

6. adım. Sonucun yoklamasını yapalım: $33+61=94$ ve $94-33=2\cdot 33-5$. ♦

Alıştırma 2. Yana kardeşinden 7 yaş büyüktür. 5 yıl sonra onların yaşlarının toplamı 63 olacaktır. Her birinin yaşı ne kadardır?

Çözüm. 1. adım. Soru: Yana ve kardeşi kaç yaşındadır?

2. adım. Bilinmeyen büyüklükler: Yana'nın yaşı x sayısı olsun. O halde kardeşinin yaşı $x-7$ olacaktır.

3. adım. Verilenler bilgiler: Alıştırmada verilmiş olan koşullar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Büyüklükler	Yana	Yana'nın kardeşi
Yaşların sayısı	x	$x-7$
5 yıl sonra yaşların sayısı	$x+5$	$(x-7)+5$

Yana'nın 5 yıl sonraki yaşı ve kardeşinin 5 yıl sonraki yaşının toplamı 63 tür.

4. adım. Şu denklemi oluşturuyoruz: $(x+5)+[(x-7)+5] = 63$.

5. adım. Denklemi çözüyoruz: $(x+5)+[(x-7)+5] = 63$ denklemi $2x+3 = 63$ denklemiyle denktir ve bunun çözümü $x_0 = 30$ dur. Buna göre Yana'nın şimdiki yaşı 30, kardeşinin yaşı ise $30-7 = 23$ olduğunu buluyoruz.

6. adım. Sonucun sağlanması: $(30+5) + (23+5) = 63$. ♦

Alıştırma 3. Polat'ın 50, 100 ve 500 denarlık banknotlar olmak üzere 6500 denarı vardır. Banknotların her çeşidinin sayısı eşittir. Polat'ta her banknottan kaçar tane varmış?

Çözüm. Polat'ın her banknottan x'er tane olsun. Alıştırmadaki koşullar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Büyüklükler	50 denarlık banknotlar	100 denarlık banknotlar	500 denarlık banknotlar
Banknot sayısı	x	x	x
Denar olarak değeri	50	100	500
Toplam değeri	$50x$	$100x$	$500x$

Polat'ın toplam parası 6500 denar olduğuna göre, şu denklemi oluşturabiliriz:

$$50x+100x+500x = 6500.$$

Bu denklemin çözümü $x_0 = 10$ olduğunu buluyoruz. Buna göre, Polat'ın her banknottan 10'ar tanesi varmış.

Yoklama: $50\cdot 10+100\cdot 10+500\cdot 10 = 6500$. ♦

Alıştırma 4. Bir süpermarkette gıda ürünlerinin fiyatları %40 indirilmiştir. Bir ürünün fiyatı 180 denar olduğuna göre, onun indirimden önceki fiyatı ne kadarmış?

Çözüm. Bu ürünün indirim yapılmadan önce fiyatı x denar olsun. Ürünün fiyatı %40 indirildiğine göre, ürünün fiyatı $0{,}4x$ denar azalmıştır. Ürünün şimdiki fiyatı 180 denar olduğuna göre

$$x-0{,}4x = 180$$

olduğunu yazabiliriz. Bu denklemin çözümü $x_0 = 300$ olduğunu buluyoruz. Dolayısıyla, ürünün indirimden önceki fiyatı 300 denarmış.

Yoklama: $300-0{,}4\cdot 300 = 180$. ♦

Alıştırma 5. Dikdörtgen biçiminde bir bahçenin telle sarılması için 130 metre tel gerekir. Onun uzunluğu, genişliğinden 5 metre fazla olduğuna göre, bahçenin boyutlarını belirtiniz.

Çözüm. Bahçenin genişliği x metre olsun. O halde onun uzunluğu $x+5$ metre olacaktır. Bahçeyi bir sıra telle sarılması için 130 metre tel gerektiğini bildiğimize göre,

$$2x + 2(x+5) = 130$$

denklemini oluşturabiliriz. Bunun çözümü $x_0 = 30$ dur. Demek ki, bahçe 30 metre geniş ve dolayısıyla uzunluğu 35 metre olacaktır.

Yoklama: $2\cdot 30\cdot + 2(30+5) = 130$. ♦

Alıştırma 6. İki traktör beraber bir tarlayı 6 günde sürebilir. Birinci traktör kendi başına tarlayı 10 günde sürdüğüne göre, ikinci traktör kendi başına tarlayı kaç günde sürebilir?

Çözüm. Birinci traktör kendi başına tarlayı 10 günde sürdüğüne göre, bir günde tarlanın $\frac{1}{10}$ kısmını sürecektir. İkinci traktör tarlayı kendi başına x günde bitirebildiğini farz edelim. O halde ikinci traktör bir günde tarlanın $\frac{1}{x}$ kısmını sürecektir.

İki traktörün bir günde tek başına ya da beraber sürdüklerinde tarlanın sürülen kısmı aynı olduğundan, her iki traktör beraber çalıştığına göre

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$$

denklemini oluşturabiliriz. $x \neq 0$ için, denklem $3x+30=5x$ denklemiyle denktir ve onun çözümü $x_0=15$ olduğunu buluyoruz. Buna göre ikinci traktör kendi başına tarlayı 15 günde sürebilir...

Yoklama: $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$. ♦

Alıştırmalar

1. Bir sayının dörtte biri, aynı sayının altıda birinden 3 fazladır. Bu hangi sayıdır?

2. Damla'nın annesi, Damla'dan 3 kat yaşlıdır. 14 yıl sonra annesi Damla'dan 2 kat daha yaşlı olacaktır. Her biri kaç yaşındadır?

3. Sonya'nın takımının fiyatına geçen yıla göre %38 zam yapılmıştır. Bu yıl takımın fiyatı 2700 denar ise, geçen yıl takımın fiyatı ne kadarmış?

4. Bir ikizkenar üçgenin yan kenarı 36cm, tabanı ise yan kenardan 3*cm* küçüktür. Üçgenin kenarları ne kadardır?

5. Bir havuz bir borudan 4 saatte dolar. Havuz dolu iken diğer bir borudan 7 saatte boşalır. Her iki boru açık olduğu durumda havuz kaç saatte dolacaktır?

5.4. Bir Bilinmeyenli Birinci Derece (Lineer) Eşitsizlikler

<u>**Eşitsizlikler çeşitleri**</u>

Eşitsizlik işaretiyle bağlı olan iki rasyonel ifadeye eşitsizlik oluşturuyorlar denir. Eşitsizlikte her iki ifade sayı ifadesi olduğu durumda eşitsizliğe **sayı eşitsizliği** denir.

İki ifadeden en az birinde bir ya da daha fazla bilinmeyen varsa ona **eşitsizlik** denir. Eşitsizlikteki değişkenlere **bilinmeyenler** denir ve genel olarak *x, y,* ... ile işaret edilir. Bilinmeyenlerin mümkün değerlerine eşitsizliğin **tanım kümesi** denir ve D ile işaret edilir.

Örnek 1. a) $15-2\cdot 6>1$ doğru olan bir sayı eşitsizliğidir.

b) $5x+3<2$ ifadesi $D=\circ$. ile bir eşitsizliktir. ♦

Bir eşitsizliğin bilinmeyeni, tanım kümesinden değerler alarak yerine konulursa eşitsizlik sayı eşitsizliğine dönüşür.

Örnek 2. a) $6+4x>3$ eşitsizliği $x=3$ için, doğru olan $6+4\cdot 3>2$ eşitsizliğe dönüşür.

b) $6+8x<-2$ eşitsizliği $x=0$ için, $6<-2$ sayı eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda bu eşitsizlik yanlıştır. ♦

Tanım kümesinin tüm mümkün değerlerinin değiştirilmesiyle doğru sayı eşitsizliğine dönüşen eşitsizliğe **denk** (**özdeş) eşitsizlik** denir.

Tanım kümesinin tüm mümkün değerlerinin değiştirilmesiyle yanlış sayı eşitsizliğine dönüşen eşitsizliğe **imkânsız eşitsizlik** ya da **çelişki** denir.

Örnek 3. $x^2\geq 0$ eşitsizliği özdeşliktir, $x^2<0$ eşitsizliği ise imkansız eşitsizliktir. ♦

<u>Denk Eşitsizlikler</u>

İlerde $f(x)>g(x)$ şeklinden eşitsizlik üzerinde daha fazla duracağız. Bunlarla ilgili elde edilen tüm sonuçlar $f(x)<g(x)$, $f(x)\geq g(x)$ ya da $f(x)\leq g(x)$ şeklinden eşitsizliklere de geçerli olacaktır.

Tanım kümeleri aynı ve çözüm kümeleri aynı olan iki eşitsizliğe **denk** eşitsizlikler denir.

Örnek 4. $x>2$ ve $x-2>0$ eşitsizlikleri denktirler, çünkü onların tanım kümeleri $\boldsymbol{R}$ dir ve çözüm kümeleri $R=(2,+\infty)$ aynıdır. ♦

Verilen bir denklemi çözmek için, onu daha basit olan ve kendisine denk olan diğer bir eşitsizlikle değiştiriyoruz. Ondan sonra yine elde edilen eşitsizliğe denk olacak üçüncü ve daha basit bir eşitsizlikle değiştiriyoruz; bu şekilde çözümü açık olan son eşitsizliğe varıncaya kadar bu işlem devam edilir. Verilen eşitsizliği kendisine denk ve daha basit olan bir eşitsizlikle değiştirme işlemine eşitsizliğin dönüşümü denir ve denk eşitsizliklerin şu iki özelliğine dayanmaktadır.

1. Eşitsizlik

$$f(x)>g(x) \qquad (1)$$

$$f(x)+\phi(x)>g(x)+\phi(x)$$

eşitsizliğiyle denktir. Burada $\phi(x)$ ifadesi, (1) eşitsizliğin tanımlı olduğu x değişkeninin tüm mümkün değerleri için tanımlı olan bir ifadedir.

Diğer sözlerle, bir eşitsizliğin her iki tarafına değişkenin tüm mümkün değerleri için tanımlı olduğu bir ifade eklenirse verilene denk olan eşitsizlik elde edilir. Bu özelliğin sonucu olarak şu özellikler de geçerlidir:

• Bir eşitsizliğin her iki tarafında aynı işaretli terimler varsa onları yok edebiliriz (silebiliriz).

• Eşitsizliğin her terimi, eşitsizliğin bir tarafından diğer tarafına geçebilir ve bu durumda ters işaretiyle yazılır.

Örnek 5. a) $5x - 2x + 3 > 8 - 2x$ eşitsizliğinde her iki tarafta aynı olan terimleri silmekle verilene denk olan $5x + 3 > 8$ eşitsizliği elde edilir.

b) $4x - 5 > 3x - 2$ eşitsizliğinde, sol tarafa bilinmeyen içeren terimleri gruplaştırmak istiyoruz. Bu nedenle $3x$ terimini eşitsizliğin sol tarafına işaretini değiştirerek göçürebiliriz. Benzer şekilde -5 terimini de eşitsizliğin sağ tarafına geçirerek ters işaretle yazabiliriz. Bu şekilde verilene denk olan $4x - 3x > -2 + 5$ eşitsizliği elde edilir. ♦

2. $$f(x) > g(x) \qquad (2)$$

eşitsizliği

$$f(x) \cdot \phi(x) > g(x) \cdot \phi(x)$$

eşitsizliğiyle denktir. Burada $\phi(x)$ ifadesi, (2) eşitsizliğin tanımlı olduğu x değişkeninin tüm mümkün değerleri için tanımlı ve pozitif değerler alan bir ifadedir.

Diğer sözlerle, verilen bir eşitsizliğin her iki tarafını değişkenin her değeri için tanımlı ve pozitif değerler alan bir ifadeyle çarparsak verilene denk bir eşitsizlik elde edeceğiz.

Bunun sonucu olarak, bir eşitsizliğin her iki tarafında değişken olmayan ortak pozitif çarpanı varsa, bu çarpanla eşitsizliğin her iki tarafını bölebiliriz. Bu işleme eşitsizliklerin sadeleştirilmesi denir.

Örnek 6. a) $3(x - 2) < 15$ eşitsizliğin her iki tarafını 3 ile bölersek ya da $\frac{1}{3}$ ile çarparsak verilene denk olan $x - 2 < 5$ eşitsizliğini elde edeceğiz. ♦

Şunu kaydetmeliyiz ki, yukarıdaki özelliğin uygulanmasıyla, kesirli katsayılı eşitsizliklerin her terimini paydalarının pozitif bir ortak katıyla çarpmakla tam katsayılı eşitsizliklere dönüştürüyoruz. Bu dönüşüme eşitsizliğin paydalarından kurtulma işlemi denir.

Örnek 7.

$$\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5$$

Eşitsizliğin paydalarından kurtulmak için, her terimi paydaların bir pozitif ortak katıyla çarpacağız, örneğin $2 \cdot 3 = 6$ ile çarpıyoruz. Bu şekilde verilene denk olan $4x - 14 < 3x + 3 - 30$ eşitsizliği elde edilir. ♦

3. $$f(x) > g(x) \qquad (3)$$

eşitsizliği

$$f(x) \cdot \phi(x) < g(x) \cdot \phi(x)$$

eşitsizliğiyle denktir. Burada $\phi(x)$ ifadesi, (3) eşitsizliğin tanımlı olduğu x değişkeninin tüm mümkün değerleri için tanımlı ve negatif değerler alan bir ifadedir.

Diğer sözlerle, verilen bir eşitsizliğin her iki tarafını değişkenin her değeri için tanımlı ve negatif değerler alan bir ifadeyle çarparsak eşitsizliğin yönü değişir, yani

(< ü > ile, > ü < ile, ≤ i ≥ ile, ≥ i ≤ ile değiştirmekle) verilene denk bir eşitsizlik elde edilir.

Bu özelliğin sonucu olarak, verilen bir eşitsizliğin iki tarafı -1 ile çarpılırsa eşitsizliğin yönü değişir.

Örnek 7. $-x > 7$ eşitsizliğin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirerek $x < -7$ olur. ♦

Yapılan incelemelerde elde edilen iki özellikten şu sonuca varıyoruz: Verilen eşitsizliğin her iki tarafı belli bir ifadeyle çarpıldığı durumda, ifadenin işareti göz önünde bulundurulmalıdır, yani pozitif, negatif yoksa sıfır olup olmadığını tespit etmeliyiz.

Alıştırmalar

1. Verilen eşitsizlikler denk midirler:

a) $3x^2+3x>12+3x^2$ ve $3x>12$ **b)** $x+\frac{1}{x}\le 5+\frac{1}{x}$ ve $x \le 5$?

2. Verilen eşitsizliklerden hangileri özdeşliktir:

a) $5x^2-2x^2\ge x^2$ **b)** $3x-2 < 3x+1$ **c)** $(y+5)^2 \ge y^2+10y+5$?

5.5. Birinci Derece Bir Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözümü ve Birinci Derece Eşitsizliklere Dönüşebilen Eşitsizliklerin Çözümü

Yukarıda adı geçen tüm dönüşümleri uygulamakla her birinci derece bir bilinmeyenli eşitsizlik

$$ax+b>0 \text{ (ya da } ax+b\ge 0) \qquad (1)$$

biçiminde birinci derece eşitsizliğe dönüşür. Burada a ve b bilinmeyen x içermeyen sayılar ya da ifadeler olabilir. (1) eşitsizliğine **birinci derece bir bilinmeyenli eşitsizliğin genel şekli** denir; a sayısına bilinmeyen önündeki **katsayı**, b ise **serbest terimdir**. Bu eşitsizliğin çözümler kümesini inceleyelim.

1. $a > 0$ olduğu durumda, eşitsizlik $x>-\frac{b}{a}$ (ya da $x\ge-\frac{b}{a}$) eşitsizliğiyle denktir ve bunun çözümler $\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$ ya da $\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$ aralığıdır.

2. $a < 0$ olduğu durumda eşitsizlik $x<-\frac{b}{a}$ (ya da $x\le-\frac{b}{a}$) eşitsizliğiyle denktir ve bunun çözümler kümesi $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$ (ya da $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$) aralığıdır.

3. $a = 0$ ise, eşitsizlik $0\cdot x+b>0$ (ya da $0\cdot x+b\ge 0$), yani $b>0$ (ya da $b\ge 0$) eşitsizliğine denktir. b pozitif sayı (ya da pozitif sayı veya eşit sıfır) ise, eşitsizlik denk eşitsizliktir, b negatif sayı ya da sıfır (ya da sıfır) olduğu durumda da eşitsizlik imkansızdır.

Alıştırma 1. Verilen denklemi çözünüz

$$\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2.$$

Çözüm. Eşitsizlikte paydalardan kurtulmak için, eşitsizliğin her iki tarafını paydaların EKOK'ıyla yani 6 ile çarpacağız. Bu şekilde

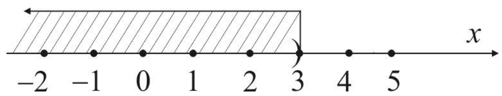
$$2(x-3)-6>3(x-1)-12.$$

Ondan sonra parantezlerden kurtularak değişken içeren terimleri eşitsizliklerin sol tarafına, serbest terimleri de eşitsizliğin sağ tarafına gruplaştırıyoruz. Böylece verilene denk olan

$$2x-3x>-3-12+6+6, \text{ yani } -x>-3$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun her iki tarafını -1 ile çarpmakla $x<3$ elde edilir. Buna göre, verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,3)$ aralığında bulunan tüm reel sayılardır.

Çözümler kümesini grafiksel şekilde sayı doğrusu üzerinde gösterebiliriz. Bunun için eşitsizliği sağlayan sayılara karşılık gelen noktaları sayı doğrusunda tarıyoruz (şek.1).♦



Şek.1

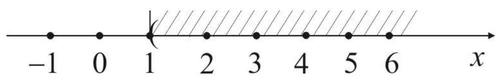
Alıştırma 2. Verilen denklemi çözünüz

$$(x-2)^2-3x<x(x-3).$$

Çözüm. Verilen eşitsizlik

$$x^2-4x+4-3x<x^2-3x$$

eşitsizliğiyle denktir. Onu sadeleştirerek $-4x<-4$ elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını -4 ile bölersek, $x>1$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla eşitsizliğin çözüm kümesi 1'den büyük olan tüm reel sayılardır (şek.2). ♦



Şek. 2

Alıştırmalar

1. Verilen eşitsizliklerin çözüm kümelerini grafiksel şekilde gösteriniz:

a) $x>3$ **b)** $x<-4$ **c)** $x+7>0$ **ç)** $6x<24$.

2. Eşitsizliği çözünüz

a) $3x-4>2-x$ **b)** $5-2y<y+8$ **c)** $x-(2-x)<3x+7$.

3. Eşitsizliği çözünüz.

a) $(x-3)^2<x(x+1))$ **b)** $\frac{x-5}{2}-3>\frac{3x-2}{6}$ **c)** $\frac{y}{2}-\frac{1-y}{4}>5-\frac{2+y}{3}.$

4. Eşitsizliği çözünüz.

a) $2x-1<\frac{8-x}{2}$ **b)** $\frac{4x-3}{2}>\frac{2-x}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}(2z-1)-\frac{2}{5}z\leq 4$

5. Sabit telefon abonelik tutarı 350 denardır. Telefon faturasında 1000 denarı geçmemek koşuluyla kaç arama yapabiliriz?

5.6. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler Sistemi ve Birleşmesi

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Bilinmeyeni aynı olan iki ya da daha fazla eşitsizliğin kümesinde her eşitsizliği sağlayacak değişkenin tüm değerlerinin belirtilmesi gerektiğinde, onlara bir **bilinmeyenli eşitsizlikler sistemi oluşturuyorlar** denir.

Birinci derece bir bilinmeyenli eşitsizlikler sisteminin, sistemdeki tüm eşitsizliklerini doğru sayı eşitsizliğine dönüştüren her x reel sayısı sistemin **çözümüdür**.

Bir bilinmeyenli birinci dereceden eşitsizlikler sistemini sağlayan tüm reel sayıların kümesine sistemin **çözüm kümesi** denir, yani sistemde bulunan her eşitsizliğin çözüm kümelerinin kesişimidir.

Bir bilinmeyenli birinci dereceden iki eşitsizlikler sistemin aynı çözümler kümeleri varsa onlara **denktirler** denir. Sistemdeki eşitsizliklerden biri, kendisine denk olan başka bir eşitsizlikle değiştiriliyorsa, elde edilen sistem verilene denktir. Dolayısıyla, bir eşitsizlik sistemini çözmek için, her birini ayrı ayrı çözerek, elde edilen çözüm kümelerinin kesişimini bulmamız yeterlidir. Bu kesişim boş küme olduğu durumda, sistemin çözümü yoktur ve o sisteme **aykırıdır** denir.

Alıştırma 1. Verilen eşitsizlik sistemini çözünüz:

$$\begin{cases} 3x-5>7-x \\ -x+8>0 \end{cases}.$$

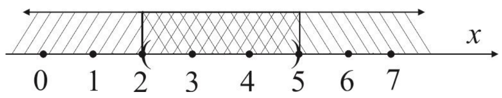
Çözüm. Verilen sistem $\begin{cases} x>3 \\ x<8 \end{cases}$ sistemiyle denktir. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi, 3 ve 8 sayıları arasında bulunan tüm reel sayılar kümesidir. ♦

Her eşitsizliğin çözümler kümesini ayrı ayrı belirterek sayı doğrusu üzerinde grafiksel şekilde göstermekle, sistemin çözümler kümesinin belirtilmesi çok kolaylaşmaktadır. Bunu yapmak için, sistemdeki her eşitsizliğin çözüm kümesini ayrı ayrı sayı doğrusu üzerinde göstererek tarıyoruz. Bu durumda sayı doğrusu üzerinde çift taranan bölge varsa verilen sistemin çözüm kümesidir.

Alıştırma 2. Verilen eşitsizlik sistemini çözünüz:

$$\begin{cases} x>2 \\ x<5 \end{cases}.$$

Çözüm. Verilen sistemdeki her eşitsizliğin çözüm kümelerini grafiksel şekilde sayı doğrusu üzerinde gösterirsek, verilen sistemin çözümler kümesi şek. 3'te gösterildiği gibi (2,5) arasında bulunan tüm reel sayılar kümesi olduğunu görüyoruz. ♦



Şek.3

Bazı durumlarda bir bilinmeyenli eşitsizliğin çözümü, birinci dereceden eşitsizliğin çözümüne dönüşebilir. İlerde bununla ilgili birkaç örnek göstereceğiz:

Alıştırma 3. Eşitsizliği çözünüz:

$(x + 5)(x - 2) < 0.$

Çözüm. Verilen eşitsizliğin sol tarafı iki binomun çarpımı biçimindedir. Bu çarpım negatif olması için gerek ve yeter koşul çarpanların farklı işaretli olmasıdır. Dolayısıyla bu eşitsizliğin çözümü şu eşitsizlik sistemlerin çözümüne dönüşür:

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-2<0 \end{cases} \text{ veya } \begin{cases} x+5<0 \\ x-2>0 \end{cases}.$$

Birinci sistem $\begin{cases} x>-5 \\ x<2 \end{cases}$ sistemiyle denktir ve çözümleri (-5,2) aralığında bulunan tüm reel sayılardır.

İkinci sistem $\begin{cases} x<-5 \\ x>2 \end{cases}$ sistemiyle denktir ve bu sistemin çözümü yoktur, yani çelişkidir; çünkü hem −5'ten küçük hem de 2'den büyük olan sayı yoktur.

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesini (−5,2) aralığında bulunan tüm reel sayılar oluşturuyorlar. ♦

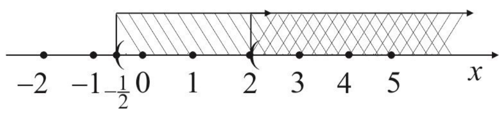
Alıştırma 4. Eşitsizliği çözünüz:

$$\frac{5x}{2x+1} > 2.$$

Çözüm. Verilen eşitsizlik $\frac{5x}{2x+1} - 2 > 0$ eşitsizliğiyle ya da ona denk olan $\frac{x-2}{2x+1} > 0$ eşitsizlikle denktir. Elde edilen eşitsizliğin sol tarafı bir kesirli rasyonel ifade, sağ tarafı ise sıfırdır. Bu kesrin pozitif olması için hem payı hem de paydası aynı işaretli olmalıdır. Buna göre x bilinmeyeni şu koşulları sağlamalıdır:

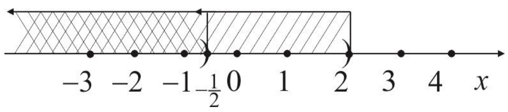
$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \text{ ya da } \begin{cases} x-2<0 \\ 2x+1<0 \end{cases}.$$

Birinci sistem, $\begin{cases} x>2 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$ sistemiyle denktir ve çözüm kümesi 2' den büyük olan tüm reel sayılardır, çünkü birinci eşitsizliğin çözümler kümesi ikinci eşitsizliğin çözümler kümesinin kapsamındadır (şek.4),



Şek.4

İkinci sistem $\begin{cases} x < 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$ sistemiyle denktir ve çözüm kümesi $-\frac{1}{2}$ den küçük olan tüm reel sayılardır, çünkü ikinci eşitsizliğin çözüm kümesi birinci eşitsizliğin çözüm kümesinin kapsamındadır (şek.5).



Şek.5

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ aralığının dışında bulunan tüm reel sayılardır, yani $\mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ kümesine ait tüm reel sayılar verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir. ♦

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Bileşik Eşitsizlikler

İki ya da daha fazla birinci dereceden aynı bilinmeyenden oluşan eşitsizliklerde, çözüm kümesi aranırken sistemindeki eşitsizliklerden en az birini sağlayan çözümlerin bulunması gerektiği durumlara, **birinci dereceden bir bilinmeyenli bileşik eşitsizlikler** denir.

Sistemdeki eşitsizliklerden en az birini doğru sayı eşitsizliğine dönüştüren tüm x reel sayıları, birinci derece bir bilinmeyenli bileşik eşitsizliklerin **çözümüdür.**

Birinci derece bir bilinmeyenli eşitsizliklerin birleşmesinin çözümünü oluşturan tüm reel sayılar, yani her eşitsizliğin çözüm kümelerinin birleşimi, birinci derece bir bilinmeyenli bileşik eşitsizliklerin **çözümler kümesidir.**

Alıştırma 5. Bileşik eşitsizliği çözünüz:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+3 > 9-4x \\ 6x+7 < 4x-3 \end{array}\right.$$

Çözüm. Verilen bileşik eşitsizlik $\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -5 \end{array}\right.$ eşitsizliğiyle denktir. Bu eşitsizliğin çözümü 1 den büyük tüm reel sayılar, yani $x > 1$ ve -5 ten küçük tüm reel sayılar, yani $x < -5$ dir. Bu çözüm aslında $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$ aralıkların birleşimidir. ♦

Alıştırmalar

Verilen birinci dereceden eşitsizlikler sistemlerini çözünüz:

1. $\begin{cases} x-1<0 \\ -5x+2>0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -x-5<0 \\ 3x-8>0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x-1>x-5 \\ x+3<3x-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}<x+1 \\ 2x<2(x+1) \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x-3>x+1 \\ x<2(x-1) \\ \dfrac{x-1}{2}<3x-5 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x}{2}>\dfrac{3x}{2}-4 \\ x-\dfrac{x-2}{3}>3-\dfrac{x+1}{2} \end{cases}$

Verilen eşitsizlikleri çözünüz:

7. $(x-5)(x+1)>0$ **8.** $\dfrac{4-x}{2x+3}>0$ **9.** $\dfrac{x-3}{x+1}>2$

Verilen bileşik eşitsizlikleri çözünüz:

10. $\left[\begin{array}{l} x-3>9-3x \\ 5x+7<10x-3 \end{array}\right.$ **11.** $\left[\begin{array}{l} 4-x<8-2x \\ 9x+14>4x-6 \end{array}\right.$ **12.** $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x+3}{2}>\dfrac{9-4x}{3} \\ \dfrac{x+7}{4}<\dfrac{x-3}{3} \end{array}\right.$

13. Bir banka çalışanı çalıştığı ilk yıl için 2 hafta ve sonraki her yıl için 3'er hafta izin hakkına sahiptir. Kaç yıl çalıştıktan sonra tatilde geçirilen hafta sayısı 30'dan fazla olur?

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

Denklemleri çözünüz:

1. a) $7(x-3)=4(x+5)-47$ **b)** $16-9(3-u)+4u=15$

2. a) $t(t-3)+4=t^2-2(t+4)$ **b)** $(w-1)(w-2)=(w+3)(w-4)-3(w-1)$

3. a) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$ **b)** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{6}=3\left(x+\dfrac{1}{9}\right)$

4. a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x+2}{x(x-2)}=\dfrac{4}{x(x-2)}$ **b)** $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3}{x-1}$

5. a) $\dfrac{4y-3}{y+2}=\dfrac{7y-2}{y-5}-3$ **b)** $\dfrac{7}{x-1}=\dfrac{9}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}$

6. a) $|x+5|-|2x-3|=2$ **b)** $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

7. 38 sayısını öyle iki toplanana ayır ki, küçük olan toplananın yarısı, büyük toplananın dörtte birinden 4 kadar büyük olsun. Toplananlar hangi sayılardır?

8. Maide kardeşinden 3 yaş büyüktür. Dört yıl sonra onların yaşlarının toplamı 33 olacaktır. Her birinin yaşı ne kadardır?

9. Bir karenin kenarı $5cm$ artarsa alanı $345cm^2$ artacaktır. Karenin kenarı ne kadardır?

10. Bir havuz üç borudan sırasıyla 10, 12 ve 15 saatte dolar. Üç boru beraber havuzu kaç saatte doldurabilir?

Eşitsizlikleri çözünüz:

11. a) $\dfrac{4x-3}{6} \leq \dfrac{x+1}{2}$ **b)** $\dfrac{7x-8}{3} \geq \dfrac{1-x}{4}$

12. a) $\dfrac{1-x}{2} + \dfrac{3-x}{4} < 2$ **b)** $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{3x+1}{2} > 0$

13. Mehmet'in 700 denarı var. Pastanın fiyatı 55 denar olduğuna göre, Mehmet parasıyla en çok kaç tane pasta alabilir?

Verilen eşitsizlik sistemlerini çözünüz:

14. $\begin{cases} 4-x>0 \\ 2x+5>0 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x+4<0 \\ -2x+1>0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 8-2x<3x-5 \\ 2x+5>0 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} 3(x-2)-5>3+x \\ 2(x-1)-3<2 \\ 4x>3(x-1) \end{cases}$

Verilen bileşik eşitsizlikleri çözünüz:

18. $\left[\begin{array}{l} 9x-27>15+4x \\ 12x+1<14x-13 \end{array}\right.$ **19.** $\left[\begin{array}{l} \dfrac{5x-1}{4} > \dfrac{3-2x}{6} \\ \dfrac{x+5}{3} > \dfrac{6x+2}{4} \end{array}\right.$

Eşitsizlikleri çözünüz:

20. $(2x-1)(x+3)<0$ **21.** $\dfrac{2x}{x+1} > \dfrac{3}{4}$ **22.** $\dfrac{x^2+2x-5}{x-2} < x$

6. BİRİNCİ DERECEDEN (LİNEER) FONKSİYON VE BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMİ

6.1. Birinci Dereceden (Lineer) Fonksiyon

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklinden fonksiyona **birinci dereceden (lineer) fonksiyon** denir.

a ve b reel sayılarına **parametreler** (a parametresine x değişkeni önündeki katsayı, b ise serbest terimdir) ve x **bağımsız değişkendir.**

Birinci dereceden fonksiyonun D_f **tanım kümesi** $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir, V_f **değerler kümesi** de $a \neq 0$ olmak şartıyla $\mathbb{R}$ dir. $a = 0$ durumunda $f(x) = b$ elde edilir ve ona **sabit fonksiyon** denir. Sabit fonksiyon için $V_f = \{b\}$ dir.

Örnek 1. $f(x) = x + 1$ birinci dereceden fonksiyondur. Burada $a = 1$ ve $b = 1$, tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}$ ve $V_f = \mathbb{R}$ dir. ♦

fonksiyonun değerini sıfır yapan değişkenin değerine **fonksiyonun sıfırı** denir.

$a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ birinci derece fonksiyonun sıfırı $x_0 = -\frac{b}{a}$ dir.

Alıştırma 1. Verilen fonksiyonun sıfırını belirtiniz:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = 5x$

c) $f(x) = 3x + 7$

Çözüm. a) $x_0 = \frac{4}{2} = 2$, çünkü $a = 2$ ve $b = -4$, b) $x_0 = 0$, c) $x_0 = -\frac{7}{3}$. ♦

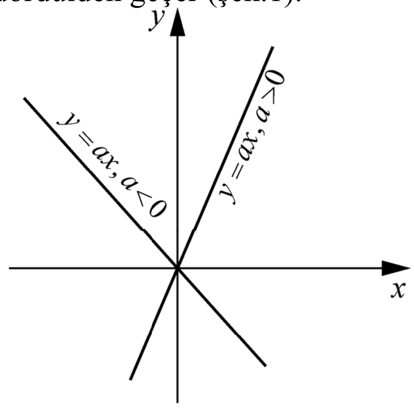
Alıştırma 2. $f(x) = ax + 7$ fonksiyonunun sıfırı $x_0 = \frac{-2}{3}$ olduğuna göre a parametresini belirtiniz.

Çözüm. $-\frac{7}{a} = -\frac{2}{3}$ eşitliğinden $a = \frac{21}{2}$ elde edilir. ♦

$y = ax + b$ kuralıyla belirli olan $f(x) = ax + b$ fonksiyonunu kastettiğimize rağmen, onu çok kez $y = ax + b$ diye ifade ediyoruz.

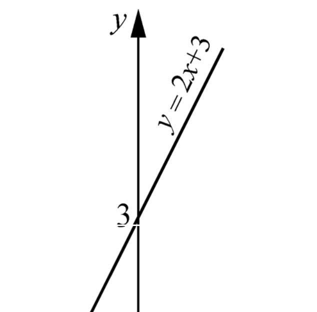
Birinci derece (lineer) fonksiyonun grafiği $G_f=\{(x,y) \mid y = ax + b\}$ kümesidir. Bu kümenin geometrik anlamı, x- eksenini $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ noktasında, y-eksenini $(0,b)$ noktasında kesen bir doğrudur.

$b = 0$ ise, $f(x)= ax$ fonksiyonun grafiği koordinat başlangıcından (orijinden) geçen bir doğrudur. Bu durumda $a > 0$ ise, doğrı birinci ve üçüncü dördülden, $a < 0$ ise doğru ikinci ve dördüncü dördülden geçer (şek.1).



Şek.1

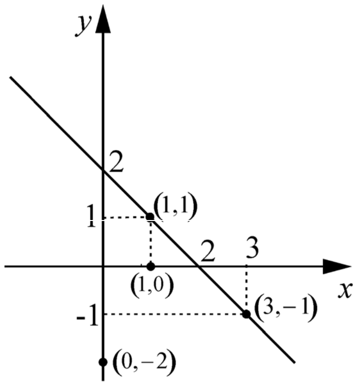
Örnek 2. $f(x) = 2x + 3$ lineer fonksiyonun grafiği $G_f=\{(x,y) \mid y = 2x + 3\}$ kümesidir. Bu kümenin geometrik anlamı bir doğrudur ve onu bu kümeden iki noktayı seçerek onların birleştirilmesiyle çizilebilir. $G_f=\{(x,y) \mid y = 2x + 3\}$ kümesinden örnek olarak $(0,3)$ ve $(-1,1)$ noktalarını seçelim (şek. 2). ♦



Şek.2

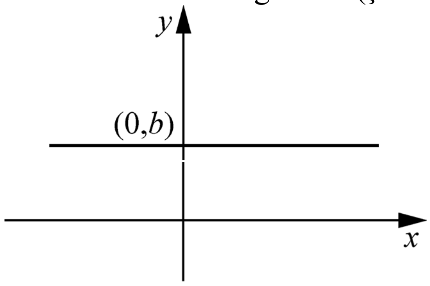
Alıştırma 3. $(1,0)$, $(3,-1)$, $(0,-2)$ ve $(1,1)$ noktaları $G_f=\{(x,y) \mid y = -x + 2\}$ kümesine ait midir?

Çözüm. Bu noktalar $f(x)=-x + 2$ fonksiyonun grafiğine ait olup olmadığını yoklamak için, noktaların karşılıklı koordinatlarını doğrunun denkleminde değiştirmekle, doğru eşitlik elde edilip edilmediğini yoklamamız gerekir. Bu şekilde $(3,-1)$ ve $(1,1)$ noktaları doğruya ait, $(1,0)$ ve $(0,-2)$ noktaları ise doğruya ait olmadığını kolay doğrulayabiliriz (şek.3). ♦



Şek.3

$a = 0$ ise, $f(x) = b$ fonksiyonun grafiği $G_f = \{(x,b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ x-eksenine paralel olan ve y eksenini $(0,b)$ noktasında kesen bir doğrudur (şek.4).



Şek.4

Alıştırmalar

1. Verilen fonksiyonlarda a ve b parametrelerini belirtiniz:

a) $f(x) = 6x - 1$ $\qquad f(x) = 1 - 2x$

$f(x) = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$ $\qquad f(x) = \frac{3x-5}{7}$

2. Fonksiyonun sıfırını belirtiniz:

a) $f(x) = x - 3$ $\qquad f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$

$f(x) = \frac{4-x}{9}$ $\qquad f(x) = \frac{2}{7} - \frac{x+1}{3}$

3. Verilen fonksiyonda a parametresinin değerini belirtiniz:

a) $f(x) = (a+1)x + 3$, $x_0 = -1$ fonksiyonun sıfırıdır.

b) $f(x) = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$ fonksiyonun grafiği $M(1,1)$ noktasından geçsin .

c) $f(x) = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$ fonksiyonun grafiği y −eksenini $N(0,3)$ noktasında keser.

4. $f(x) = \dfrac{3x+1}{6}$ fonksiyonu veriliyor. Verilen noktalardan hangileri fonksiyonun grafiğine ait olup olmadığını yoklayınız:
$A(1,1)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2},-3\right)$ и $D\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

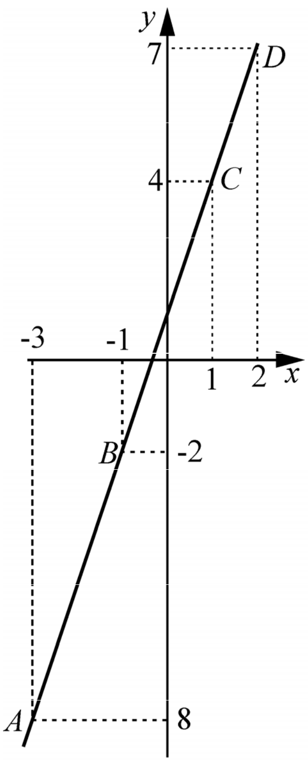
5. Verilen koşullara göre $f(x) = ax + b$ fonksiyonunu belirtiniz:

a) $a = 3b$ ve $A(1,1)$ noktasından geçsin.

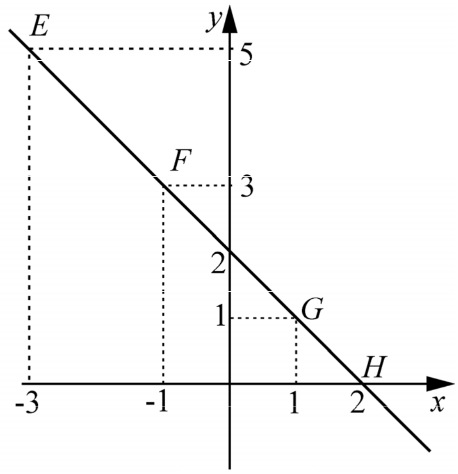
b) $5 - a = 2b$ ve koordinat başlangıcından geçsin.

6.2. Birinci Derece Fonksiyonun Özellikleri

$f(x) = 3x + 1$ fonksiyonun grafiğini inceleyelim (şek.1). Koordinat sisteminde bu fonksiyonun grafiğine ait birkaç nokta gösterilmiştir. $A(-3,-8)$, $B(-1,-2)$, $C(1,4)$ ve $D(2,7)$ noktalarının koordinatlarını karşılaştırırsak, birinci koordinatın değeri arttığı durumda ikinci koordinatın da değeri artmaktadır, yani $-3 < -1 \Rightarrow -8 < -2$, $-1 < 1 \Rightarrow -2 < 4$ vb. Buna göre $x_1 < x_2$ ise, $f(x_1) < f(x_2)$ olduğunu görüyoruz. Böyle durumda fonksiyona **monoton artandır** denir.



Şek.1



Şek.2

Aynı karşılaştırmayı $f(x) = -x + 2$ fonksiyonunda $E(-3,5)$, $F(-1,3)$, $G(1,1)$ ve $H(2,0)$ noktaları için yaparsak (şek.2), şu sonuca varacağız: Birinci koordinatın değeri artarken ikinci koordinatın değeri azaldığını göreceğiz, yani $-3 < -1 \Rightarrow 5 > 3$, $-1 < 1 \Rightarrow 3 > 1$ vb. Demek ki $x_1 < x_2$ ise, $f(x_1) > f(x_2)$ olduğunu görüyoruz. Bu durumda fonksiyon **monoton eksilendir** denir.

Genel olarak şunu tespit edebiliriz:

1. $a > 0$ ise fonksiyon monoton artandır

2. $a < 0$ ise, fonksiyon monoton eksilendir.

$f(x) = b$ sabit fonksiyonuna ne artan ne de eksilendir denir.

Örnek 1. $f(x) = 4x - 11$ monoton artandır, çünkü $a = 4 > 0$ dır, $f(x) = 3 - x$ fonksiyonunda ise, $a = -1 < 0$ olduğundan fonksiyon monoton eksilendir. ♦

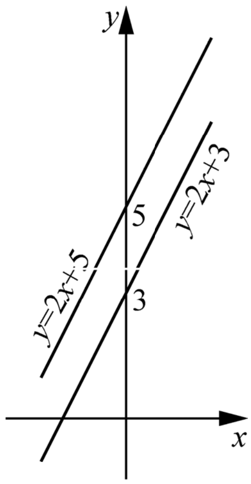
Alıştırma 1. Verilen fonksiyonda m parametresinin değerini aşağıdaki koşullara göre belirtiniz:

a) $f(x) = (m-1)x + 3$ monoton artan olsun;

b) $f(x) = (2m+1)x + 1$, monoton eksilen olsun

Çözüm. a) $m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$, yani $m \in (1, \infty)$,

b) $2m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$ т.е. $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.



Şek.3

$f(x) = 2x + 3$ ve $g(x) = 2x + 5$ fonksiyonların grafiklerini inceleyelim (şek.3). Görüldüğü gibi iki paralel doğru söz konusudur. ♦

Genel olarak $f(x) = a\,x_1 + b_1$ ve $g(x) = 2x + 5$ fonksiyonunda $a_1 = a_2$ olduğu durumda doğrular paraleldir. Bu eşitliğe daha da, iki lineer fonksiyonun grafiklerinin **paralel olma şartı** denir.

Genel olarak $f(x) = a\,x_1 + b_1$ ve $g(x) = a\,x_2 + b_2$ fonksiyonları için $a_1 \neq a_2$ ise, onlara ait doğruların bir ortak noktası vardır.

Alıştırma 2. a nın hangi değeri için verilen doğrular paraleldir:

a) $f(x) = 1 - x$ ve $g(x) = ax + 5$

b) $f(x) = 7x + 1$ ve $g(x) = (a+1)x - 7$

Çözüm. a) Paralel olma şartına göre, $a = -1$, **b)** $a + 1 = 7 \Rightarrow a = 6$ dır .♦

$f(x) = a\,x_1 + b_1$ ve $g(x) = a\,x_2 + b_2$ lineer fonksiyonları inceleyelim. Her ikisinin grafiği $(0, b)$ noktasından geçmesi için, yani ordinat ekseninde bir noktada kesişmeleri için nasıl bir koşul gerekir?

Fonksiyonlarda noktanın koordinatlarını değiştirmekle $a_1 \cdot 0 + b_1 = b$ ve $a_2 \cdot 0 + b_2 = b$, yani $b_1 = b_2 = b$ elde edilir. Bu eşitliğe, iki lineer fonksiyonun grafikleri ordinat ekseninde bir noktada **kesişme şartı** da denir.

Örnek 2. $y = 3x + 1$ ve $y = -2x + 1$ doğruları $(0,1)$ noktasında kesişiyorlar. ♦

Alıştırmalar

1. $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+2$, $h(x)=\frac{4}{5}-\frac{7}{8}x$ fonksiyonlarından hangileri monoton artan, hangileri ise monoton eksilendir?

2. Verilen fonksiyonda k parametresinin değerini o şekilde belirtiniz ki:

a) $f(x)=(2k+3)x+3$ monoton artan olsun.

b) $f(x)=(-5k+1)x+1$, monoton eksilen olsun.

3. a parametresinin hangi değeri için, verilen doğrular birbirine paraleldir:

a) $y=1-(2a-3)x$ ve $y=ax+5$

b) $y=(a-7)x+1$ и $y=(a+1)x-7$

4. Verilen doğrular ordinat ekseni üzerinde kesişir mi? belirtiniz:

a) $y=3x+2$ ve $y=2-5x$

b) $y=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}x$ и $y=\frac{9}{12}-x$

c) $y=-3-4x$ ve $y=-5-6x$

5. s parametresinin hangi değeri için, verilen doğrular ordinat ekseni üzerinde kesişiyorlar:

a) $y=3\frac{1}{4}x+\left(2\frac{1}{7}-2s\right)$ и $y=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{7}-s\right)$

b) $y=3x-(7-8s)$ и $y=\frac{1}{4}x-(4-9s)$

6.3. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

Tanım. $a, b, c \in \mathbb{R}$, x ve y bilinmeyen olmak üzere $ax+by=c$ biçimindeki denkleme birinci dereceden x ve y bilinmeyenli denklem denir.

Buna, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemin **genel şekli** denir. a ve b sayılarına **bilinmeyenler önündeki katsayılar** ve c sayısına **serbest terim** denir.

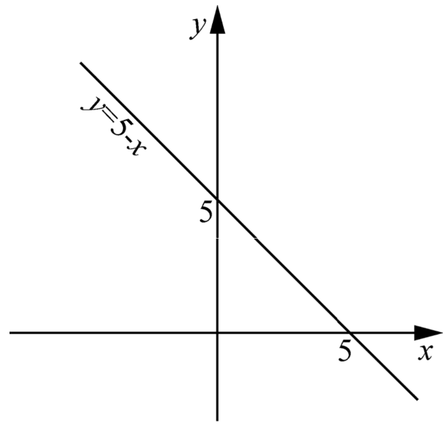
Örnek 1. $5x-6y=9$, $3x=4y$, $y=1-x$ vb. İki bilinmeyenli denklemlerdir. ♦

Birinci dereceden iki bilinmeyenli (lineer) denklemi doğru sayı eşitsizliğine dönüştüren her sıralı reel sayı çiftine iki bilinmeyenli lineer denklemin **çözümü** denir.

Örnek 2. $2x+3y=4$ denklemin çözümleri $2x+3y=4$ ce $\left(0,\frac{4}{3}\right),\left(1,\frac{2}{3}\right)$, v.b. dir.♦

$a \neq 0 \wedge b \neq 0$ ise, iki bilinmeyenli denklemin sonsuz çok çözümleri vardır. Yani her $x \in \mathbb{R}$ icin $\left(x, \frac{c-ax}{b}\right)$ ılı çifti $ax + by = c$ denkleminin çözümüdür. $y = \frac{c-ax}{b} = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ olduğuna göre, birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem bir dogrudur. Burada $-\frac{a}{b}$ sayısına, **doğrunun eğimi** (açı katsayısı) denir.

Bilinmeyenler önündeki katsayılardan biri sıfır ise, örnek $b = 0$ olduğu durumda $ax = c$, yani $x = \frac{c}{a}$ de edilir. Buradan denklemin çözümler kümesi $\left\{\left(\frac{c}{a}, y\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$ olduğunu buluyoruz. Bu durumda denklemin çözümü y-eksenine paralel olan bir doğrudur. Benzer şekilde, $a = 0$ olduğu durumda denklemin çözümü x-eksenine paralel olan bir doğru elde edilir. Her iki katsayı sıfıra eşit olduğu durumda ise, yani $a = b = 0$ olduğu durumda $c = 0$ olur ve eşitlik her x ve y reel sayı için doğrudur, $c \neq 0$ için ise denklemin çözümü yoktur.



Şek.3 Чертеж 1

Örnek 3. $x + y = 5$ denkleminin sonsuz çok çözümleri vardır ve çözüm kümesi

$$\{(x, 5-x) | x \in \mathbb{R}\},$$

dir, yani $y = 5 - x$ doğrusudur (şek.1). ♦

Çözüm kümeleri aynı olan iki denkleme denk denklemler denir.

Şu dönüşümlerle (denk dönüşümler diye adlandırılır) denk denklemler elde edilir:

1. Denklemin bir tarafı ona denk bir ifadeyle değiştirilir.
2. Denklemin her iki tarafına denk ifade ilave edilir.
3. Denklemin iki tarafı sıfırdan farklı aynı bir sayıyla çarpılır ya da bölünür.

Örnek 4. $3x + 7y = 2$ denklemi aşağıdaki her denklemle denktir.

$$3x + 7y = 2 - x + x,\ x + \frac{7}{3}y = \frac{2}{3},\ 3x + 7y - 7y = 2 - 7y,\ 2 - 3x = 7y\ .\ ♦$$

Alıştırma 1. $\frac{x}{2} - \frac{y-3}{5} - 2 = 3 - x$ denkleminine denk dönüşümler uygulayarak genel şekline dönüştürünüz

Çözüm.

$$\frac{x}{2} - \frac{y-3}{5} - 2 = 3 - x \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{y-3}{5} - 2 = 3 - x \Big/ \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 2(y-3) - 20 = 30 - 10x \big/ + 10x \Leftrightarrow 15x - 2y + 6 - 20 = 30 \big/ + 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x - 2y = 44. ♦$$

Alıştırmalar

1. b'nin hangi değeri için $2x + by = 5$ fonksiyonun grafiği $A(-1,3)$ noktasından geçer?

2. $2x - 7y = c$ denkleminde c parametresini o şekilde belirtiniz ki grafiği $B(1,-1)$ noktasından geçsin.

3. Denk dönüşümler uygulayarak verilen $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3$ denklemi genel şekle dönüştürünüz.

4. $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{5}-1=0$ nkleminin çözümler kümesini yazınız.

5. $3(x - y)+ 2 = x - 5y + 1$ denkleminin çözümler kümesinde $x = 2y$ bağıntısını sağlayan çözümü belirtiniz.

6.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemi Çözüm Yöntemleri

Tanım. Değişkenleri birinci dereceden ve aynı olan iki denklemin kümesine birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi denir.

Örnek 1. $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-4y=-2 \end{cases}$ iki lineer denklemden oluşan iki bilinmeyenli denklem sistemidir. ♦

Sistemdeki her denklem kendine denk olan ifadeyle değiştirilirse, ilk sisteme denk olan sistem elde edilir. Dolayısıyla iki bilinmeyenli birinci dereceden her sistem,

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ şeklinde yazılabilir. Burada a_1, a_2, b_1 ve b_2 değişkenler önündeki katsayılar, c_1 ve c_2 ise serbest terimlerdir.

Alıştırma 1. $\begin{cases} 2(x+1)-3=5(y+2) \\ \frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1 \end{cases}$ sistemini genel şekilde dönüştürünüz.

Çözüm. Birinci denklem $2x - 5y = 11$ ile denktir, ikincisi ise $5x - 3y = 21$ denklemiyle denktir. Buna göre, verilen sistem $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 5x-3y=21 \end{cases}$ ile denktir. ♦

Bir denklem sistemini çözmek, her iki denklemi aynı anda sağlayacak, yani doğru sayı eşitliğine dönüştüren x ve y sayılarını, yani (x, y) sıralı ikilisini bulmak demektir.

Örnek 2. $(1,-2)$ sıralı çifti $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ sistemin çözümüdür, fakat $\begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ sisteminnin çözümü değildir; çünkü $2 \cdot 1 - 2 \neq 4$.♦

Bazı durumlarda sistemin çözümü olmayabilir. Örneğin $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ sistemin çözümünün olmadığı açıktır, çünkü iki sayının toplamı aynı anda iki farklı sayı olamaz. Diğer taraftan $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ sisteminin sonsuz çok çözümleri vardır $\{(x,1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Çünkü toplamı bir olan sonsuz çok reel sayı vardır.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerin Çözüm Yöntemleri

Denk dönüşümleri uygulamakla bir sistem $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ şeklinde getirilirse, (p,q) sıralı çifti sistemin çözümüdür.

Örnek 3. $\begin{cases} 2(x+y)-3=2y+1 \\ 3x-y+1=-2x+5(x+1) \end{cases}$ sistemi $\begin{cases} 2x=4 \\ -y=4 \end{cases}$, yani $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ sistemiyle denktir. Buna göre $(2,-4)$ sıralı çifti sistemin çözümü olduğu açıktır. ♦

Bu gibi sistemleri çözerken, birinci hedef daima sistemi $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ şekline dönüştürmektir. İlerde daha sık uygulanan bazı çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz.

1. Grafik Çizme Yöntemi

Bir sisteme ait her lineer denklemi doğru ile gösterip, doğruların birbirine göre durumundan sistemin çözümü belirtilir. Bu yönteme grafik çizme yöntemi denir.

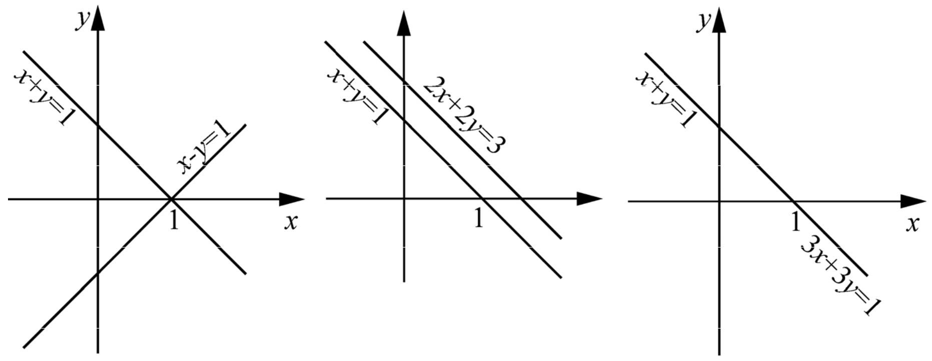
İki doğru kesişiyorsa, kesişim noktasının koordinatları verilen sistemin çözümüdür (sistem bellidir).

İki doğru birbirine paralel olduğu durumda sistemin çözümü yoktur (sistem aykırıdır)

İki doğru çakışıyorsa, sistemin sonsuz çok çözümleri vardır (sistem belirli değildir)

Alıştırma 2. Verilen sistemi grafiksel şekilde çözünüz:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$



a)

Şekillerden her sistemin çözümü açık şekilde görülür. ♦

Şimdi, bir sistemin belirli, aykırı veya belirsiz olması için hangi koşulların gerektiğini inceleyelim.

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ sisteminde $b_1 = 0$ (ya da $b_2 = 0$) ise, sistemin çözümü $x=\frac{c_1}{a_1}$ ve $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$ doğruların kesişimindedir.

$a_1 = 0$ (ya da $a_2 = 0$) ise, sistemin çözümü $y=\frac{c_1}{b_1}$ ve $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$ doğruların kesişim noktasındadır.

Sonunda, $a_1 = 0 \wedge b_2 = 0$ (ya da $a_2 = 0 \wedge b_1 = 0$) olduğu durumda sistemin çözümü $y=\frac{c_1}{b_1}$ ve $x=\frac{c_2}{a_2}$ doğruların kesişimindedir.

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ genel şekilde bir iki bilinmeyenli denklem sistemi olsun. Bu durumda $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ olmak üzere sistemdeki her denklem $\begin{cases} y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \\ y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$ şeklinde yazılabilir.

$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ ise, yani bilinmeyenler önündeki katsayılar birbirine orantılı değilse, doğruların eğimleri farklı olduğundan onlar kesişiyorlar. Bu durumda sistemin bir tek çözümü vardır, yani sistem belirlidir.

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ olduğu durumda $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ ya da $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$ durumları olabilir. Birinci durumda doğrular çakışır, dolayısıyla doğrunun her noktası sistemin çözümüdür (sistem belirsizdir); diğer durumda ise doğrular paraleldir, dolayısıyla sistemin çözümü yoktur (aykırı sistem). Buna göre, karşılıklı katsayılar ve serbest terimler orantılı olduğu durumda, sistem belirsizdir (sonsuz çok çözümleri vardır) deriz.

Alıştırma 3. m parametresinin hangi değeri için sistem

a) $\begin{cases} 2x+my=1 \\ -4x+2y=5 \end{cases}$ aykırıdır.

b) $\begin{cases} mx-y=3 \\ 2x-my=2 \end{cases}$ belirlidir.

c) $\begin{cases} x+3y=5 \\ x+my=m+2 \end{cases}$ belirsizdir.

Çözüm. a) $b_1 \neq 0$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ ve $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$ koşullarından $m \neq 0$ elde edilir,

$\frac{2}{m}=-\frac{4}{2}$ ve $\frac{1}{m}\neq\frac{5}{2}$, yani $m \neq 0$, $m = -1$ ve $m\neq\frac{2}{5}$; eğer $m = 0$ ise $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$ sistemi elde edilecektir. m için aranılan değer $m = -1$ dir.

b) $b_2 \neq 0$ ve $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ olduğundan $m \neq 0$ ve $m \neq \frac{2}{m}$ elde edilir, yani $m^2 \neq 2 \Leftrightarrow m\neq\pm\sqrt{2}$; $m = 0$ durumunda ise $\begin{cases} y=-3 \\ x=1 \end{cases}$ elde edilir.

c) $b_2 \neq 0$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ ve $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ koşulundan $m \neq 0$, $\frac{1}{3}=\frac{1}{m}$ ve $\frac{5}{3}=\frac{m+2}{m}$ elde edilir, yani $m \neq 0$ ve $m = 3$ olur; $m = 0$ olduğu durumda ise $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$ elde edilir. Buna göre m'in aranılan değeri $m = 3$ tür.

2. Yerine Koyma Yöntemi

Bu yöntemi uygularken, verilen denklemlerden birinden bilinmeyenlerden biri diğeri cinsinden bulunur. Bu değer, diğer denklemde yerine yazılarak elde edilen sistem verilene denk olduğuna göre, bir bilinmeyenli denklem çözülür.

$b_1 \neq 0$ olmak üzere, $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ sisteminde $y=\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}$ ifadesini ikinci denklemde yerine yazarsak $a_2x+b_2\left(\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}\right)=c_2$ elde edilecektir. Bu şekilde $a_2b_1-a_1b_2\neq 0$ olmak şartıyla verilene denk olan $\begin{cases} y=\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \\ x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_2b_1-a_1b_2} \end{cases}$ sistem elde edilir.

Alıştırma 4. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-3y=1 \end{cases}$ sistemini yerine koyma yöntemiyle çözünüz.

Çözüm. Sistemin birinci denklemini $y = 3-2x$ biçiminde yazarak, ikinci denklemde y yerine değiştirmekle, ikinci denklem $x - 3(3-2x) = 1 \Leftrightarrow 7x = 10$ olur, yani $x = \frac{10}{7}$. ♦

3. Yok Etme Yöntemi

Sistemdeki denklemlerden en az biri sıfırdan farklı bir sayıyla çarpılır ve diğer denkleme ilave edilirse verilene denk olan sistem elde edilir. Bu arada elde edilecek ikinci denklem bir bilinmeyenli denkleme dönüşmesi için dikkat edilmesi gereken husus, çarpılacak sayının seçilmesi önemlidir. Bu yönteme yok etme ya da ters katsayılar yöntemi denir.

Alıştırma 5. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 5x-y=4 \end{cases}$ sisteminin yok etme yöntemiyle çözünüz.

Çözüm. İkinci denklemi 2 ile çarpar ve birinci denkleme ilave edersek $x + 2y + 2\cdot(5x - y) = 3 + 2\cdot4$, yani $11x = 11$ elde edilir. Bu denklem verilen sistemin herhangi bir denklemiyle denk sistem oluşturur. Demek ki $\begin{cases} x+2y=3 \\ 11x=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$.

Dolayısıyla sistemin çözümü $(1,1)$ dir. ♦

4. Kramer Kuralı

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} a\cdot d - b\cdot c$ ifadesine ikinci dereceden determinant denir (*a* ve *d* asal köşegenin elemanlarıdır, *b* ve *c* ise yedek köşegenin elemanlarıdır)

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ Genel şekilde bir sistem olsun.

Şu ifadelere:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ ve $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ sistemin determinantları denir. Burada Δ katsayılar determinantı, Δ_x ve Δ_y ise bilinmeyenlere karşılık determinantlardır.

$\Delta \neq 0$ olduğu durumda sistemin bir tek çözümü vardır: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ve $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Sistemin çözümüne ait bu formüllere **Kramer formülleri** denir.

$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ olduğu durumda sistem belirsizdir, $\Delta = 0$ ve diğerlerinden en az biri $\Delta_x \neq 0$ ya da $\Delta_y \neq 0$ ise, sistem aykırıdır (çözümü yoktur).

Alıştırma 6. Kramer kuralını uygulayarak $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ sistemini çözünüz.

Çözüm. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -2-3 = -5$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$ ve $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -15$ olduğuna göre, $x = \frac{-10}{-5} = 2$ ve $y = 3$ elde edilir. ♦

5. Gaus Yöntemi

Bir sistemi Gaus yöntemiyle çözmek için şu denk dönüşümleri yapmalıyız:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 / : a_1, a_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} / (-a_2) \\ a_2x + b_2y + (-a_2)\cdot\left(x + \frac{b_1}{a_1}y\right) = c_2 + (-a_2)\cdot\frac{c_1}{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1} \\ \left(b_2 + (-a_2)\frac{b_1}{a_1}\right)y = c_2 + (-a_2)\cdot\frac{c_1}{a_1} \end{cases}$$

Bu şekilde y bilinmeyeninin değerini belirttikten sonra, x bilinmeyenin değeri de belirtilir. Benzer şekilde $b_1 \neq 0$ durumunda birinci denklemi b_1 ile bölmekle bu dönüşümleri yapabiliriz.

Alıştırma 7. $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 8x + 3y = 30 \end{cases}$ sistemini Gaus yöntemiyle çözünüz.

Çözüm.

$$\begin{cases} 5x - 7y = 1 / : 5 \\ 8x + 3y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{5}y = \frac{1}{5} / \cdot(-8) \\ 8x + 3y - 8x + \frac{56}{5}y = -\frac{8}{5} + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{5}y = \frac{1}{5} \\ \frac{71}{5}y = \frac{142}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}. \ ♦$$

6. Eşitleme Yöntemi

Bu yöntem, iki denklemin sol tarafları birbirine eşit olduğu durumda sağ tarafları da birbirine eşittir özelliğine göre tertiplenmiştir. Buna göre, sistemdeki denklemlerden her biri, aynı bilinmeyene göre ifade edildikten sonra, elde edilen ifadeler birbiriyle eşitlenir. $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sisteminde her iki denklemde x bilinmeyenini ($a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0$ koşuluyla) diğerleriyle ifade edersek ve elde edilen ifadeleri eşitlersek $\frac{c_1 - b_1y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}$ denklemini elde edeceğiz. Bu denklem bir bilinmeyenli olduğuna göre y nin değeri bulunur. Ondan sonra sistemdeki denklemlerden birinde y nin değeri değiştirilerek x değeri belirtilir.

Alıştırma 8. Eşitleme yöntemiyle $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ sistemi çözünüz.

Çözüm. x bilinmeyenine karşılık gelen ifadeleri eşitlemekle $\frac{3-2y}{4}=\frac{1+2y}{3}$ denklemi elde edilir. Oradan $y=\frac{5}{14}$ bulunur; ondan sonra $x=\frac{4}{7}$ elde edilir. ♦

7. Yardımcı Bilinmeyen Yöntemi

$$\begin{cases} \frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1 \\ \frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=c_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{a_1}{x+y}+\frac{b_1}{x-y}=c_1 \\ \frac{a_2}{x+y}+\frac{b_2}{x-y}=c_2 \end{cases}$$

şeklinde sistemleri çözmek için, $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ (ya da $x + y \neq 0$ ve $x - y \neq 0$) olmak üzere $\frac{1}{x}=m$ ve $\frac{1}{y}=n$ (ya da $\frac{1}{x+y}=m$ ve $\frac{1}{x-y}=n$) yardımcı bilinmeyen kullanacağız. Bu şekilde $\begin{cases} a_1m+b_1n=c_1 \\ a_2m+b_2n=c_2 \end{cases}$ sistemi elde edilir. Bu sistem m ve n iki bilinmeyenli denklem sistemidir ve yukarıda incelenen yöntemlerden biriyle çözülür.

Alıştırma 9 $\begin{cases} \frac{2}{3x-y}+\frac{5}{3x+y}=3 \\ \frac{3}{3x-y}-\frac{10}{3x+y}=1 \end{cases}$ sistemini beraber çözelim.

Çözüm. Sistemi x ve y bilinmeyenleri için, $3x - y \neq 0$ ve $3x + y \neq 0$ koşullarını sağlayan değerler için çözüyoruz. $\frac{1}{3x-y}=m$ ve $\frac{1}{3x+y}=n$ yardımcı bilinmeyenleri kullanacağız. Bu şekilde $\begin{cases} 2m+5n=3 \\ 3m-10n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$ elde edilir. m ve n için elde edilen değerleri yerlerine değiştirmekle $\frac{1}{3x-y}=1 \Rightarrow 3x-y=1$ ve $\frac{1}{3x+y}=\frac{1}{5} \Rightarrow 3x+y=5$ şu sistemi elde edeceğiz: $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Bu değerler sistemin çözümüdür, çünkü $3x - y \neq 0$ ve $3x + y \neq 0$ koşullarını sağlamaktadır. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen sistemleri grafiksel şekilde çözünüz

a) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

2. Verilen sistemleri yerine koyma yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

3. Verilen sistemleri yok etme yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-10y=1 \end{cases}$

4. Verilen sistemleri Kramer formülüyle çözünüz

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

5. Verilen sistemleri Gaus yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases} x-3y=4 \\ x-y=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x-y=10 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

6. Verilen sistemleri eşitleme yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+2y=26 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x-5y=8 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

6.5. Birinci dereceden iki Bilinmeyenli Denklem Sistemlerin Uygulanması

Günlük hayatta, teknikte ve bilimde birçok problem genel olarak denklemlerin çözümüne ve denklem sistemlerinin çözümüne götürmektedir.

Örnek 1. Bir matematik testinde 10 soru vardır. Doğru cevaplanan her soruya 3 puan verilir, fakat yanlış cevaplanan her soruya 2 ceza puanı verilir. Tüm soruları cevaplayan bir öğrenci 15 puan aldığına göre kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

Doğru cevaplanan soru sayısını x ile, yanlış hesaplanan soru sayısını y ile işaret edersek, $3x - 2y = 15$ denklemini elde ediyoruz. Bu denklemin sonsuz çok çözümleri vardır.Testte 10 soru olduğunu ve öğrenci tüm soruları cevaplamış olduğunu göz önünde bulunduruyorsak $x + y = 10$ koşulunu da ilave etmeliyiz. Bu denklemin de sonsuz çok çözümleri vardır. Bize önemli olan her iki denklemi sağlayan, yani doğru sayı eşitliğine dönüştüren x ve y değerlerini bulmaktır, yani şu sistemi çözmeliyiz:

$\begin{cases} 3x-2y=15 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$. Öğrenci 7 soruyu doğru cevaplamıştır. ♦

Örnek 2. 144 ve 100 litrelik 2 kabımız vardır. Kablarda belli bir miktarda sıvı vardır. Küçük kabdan büyüğüne doluncaya kadar sıvı boşaltırsak, küçüğünde ilk miktarının $\frac{1}{5}$ i kadar sıvı kalacaktır. Büyük kabdan küçüğüne doluncaya kadar sıvı aktarırsak, büyüğünde ilk miktarının $\frac{7}{12}$ si kadar sıvı kalacaktır. Boşaltmalardan önce kablarda ne kadar sıvı varmış?

Çözüm. Aranılan sıvı miktarlarını x ve y ile işaret edelim. O halde

$$\begin{cases} x+\frac{4}{5}y=144 \\ y+\frac{5}{12}x=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=96 \\ y=60 \end{cases}$$ elde edilir. ♦

Örnek 3. Bir havuz iki borudan dolar. Birinci boru 7 saat, ikincisi ise 4 saat açık olarak havuzun $\frac{5}{9}$ ini dolduruyorlar. Ondan sonra daha 4 saat iki boru açık olarak beraber havuza su aktardıktan sonra, havuzun $\frac{1}{18}$ ‘i boş kaldığı tespit edilmiştir. Nekadar zamanda her boru havuzu kendi başına doldurabilir?

Çözüm. Borulardan biri kendi başına havuzu doldurmak için gereken zamanı x ile, ikinci boru için ise y ile işarety edersek, o halde bir saatte birinci boru havuzun $\frac{1}{x}$ kısmını, ikinci boru ise havuzun $\frac{1}{y}$ kısmını dolduracaktır. Birinci boru 7 saat açık olduğuna göre, bu boru havuzun $\frac{7}{x}$ kısmını, ikinci boru ise 4 saat açık olduğuna göre, bu boru havuzun $\frac{4}{y}$ kısmını dolduracaktır. Dolayısıyla bu iki boru beraber havuzun $\frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9}$ kısmını doldurmuştur. Her iki beraber dört saat açık olduklarında havuzun $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}$ kısmını dolduruyorlar. O halde sorunun cevabına karşılık şu sistemi yazabiliriz:

$$\begin{cases} \frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9} \\ \frac{4}{x}+\frac{4}{y}=1-\frac{5}{9}-\frac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9} \\ \frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{18} \end{cases}.$$

$\frac{1}{x}=m$ ve $\frac{1}{y}=n$ yerine koyarsak şu sistemi elde edeceğiz:

$$\begin{cases} 7m+4n=\frac{5}{9} \\ 4m+4n=\frac{7}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{18} \\ n=\frac{3}{72} \end{cases}.$$

Sistemi çözerek $x=18, y=\frac{72}{3}=24$ elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Bir grup öğrenci, belli bir sayıda fidan dikmek için para topluyorlar. Öğrencilerden her biri 150 şer denar verirse, 170 denar para eksik kalır, her biri 180’ er denar verirse 100 denar artacaktır. Grupta kaç öğenci varmış ve toplanması gereken para miktarı ne kadarmış?

2. İki sayının toplamı 130, onların farkı ise 22 dir. Bunlar hangi sayılardır?

3. İki sayının toplamı 20, onların farkı ise 4 tür.Bunlar hangi sayılardır?

4. Bir ikizkenar üçgenin tepe açısı taban açısından dört kere daha büyüktür. Üçgenin açılarının ölçüsünü belirtiniz.

5. Bir dikdörtgenin uzunluğu genişliğinden iki defa büyüktür. Dikdörtgenin çevresi $72cm$ olduğuna göre, dikdörtgenin uzunluğu ve genişliği ne kadardır?

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Fonksiyonun sıfırını belirtiniz:

a) $f(x)=3x-3$ **b)** $f(x)=2x+11$

c) $f(x)=\frac{4-5x}{9}$ **ç)** $f(x)=\frac{x+1}{3}+\frac{2x+3}{2}$

2. Verilen fonksiyonda a parametresini belirtiniz:

a) $f(x) = (a+3)x+1$, fonksiyon un sıfırı $x_0 = -2$ dir.

b) $f(x)=\frac{a-3}{2}x-\frac{1+(a+1)x}{3}$, grafiği $M(1, 0)$ noktasından geçerse

c) $f(x)=\frac{1}{a+3}x+\frac{3}{a+2}$, grafiği x -eksenini $N(1,0)$ noktasından geçerse

3. Verilen koşullara göre $f(x)= ax+b$ fonksiyonun parametrelerini belirtiniz:

a) $a = 3b$ ve $A(2,1)$ noktasından geçer;

b) $3-a = 2b$ ve koordinat başlangıcından geçer .

4. Verilenlere göre fonksiyonun k parametresini belirtiniz:

a) $f(x)= (3k+1)x-2$ monoton artandır;

b) $f(x)= (x-5k-1)x+3$ monoton eksilendir.

5. a parametresinin hangi değeri için doğrular paraleldir:

a) $y = 1-(12a-3)x$ ve $y = (a+1)x+5$

b) $y = (2a-7)x+1$ ve $y = (3a+1)x-7$

6. m parametresinin hangi değeri için doğrular ordinat ekseni üzerinde bir noktada kesişiyorlar:

a) $y=3\frac{1}{4}x+\left(2\frac{1}{7}-3m\right)$ и $y=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{7}+m\right)$

b) $y = 3x-(7-m)$ ve $y = \frac{1}{4}x+(4-2m)$

7. b nin hangi değeri için $2x+by = 5$ fonksiyonun grafiği $A(-1,5)$ noktasından geçer?

8. $2x-8y = c$ denkleminde c o şekilde belirtilsin ki, grafiği $B(1,-1)$ noktasından geçsin.

9. Denk dönüşümler uygulayarak $\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{4}=3$ denklemini genel şekline dönüştürünüz.

10. $\frac{x+5}{3}-\frac{y+3}{5}-1=0$ denkleminin çözüm kümesini yazınız.

11. $5(x-y)+2=3x-2y+1$ denklemin çözüm kümesinden $x=2y$ eşitliğini sağlayan çözümü belirtiniz.

12. Verilen sistemleri grafiksel şekilde çözünüz

a) $\begin{cases}5x+y=7\\2x+y=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x+y=3\\x-2y=0\end{cases}$

13. Verilen sistemleri yerine koyma yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases}3x+2y=7\\x-3y=-5\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x-2y=2\\3x-y=10\end{cases}$

14. Verilen sistemleri yok etme yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases}x+2y=7\\3x-2y=5\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}2x+y=5\\3x-2y=4\end{cases}$

13. Verilen sistemleri Kramer formülleriyle çözünüz

a) $\begin{cases}x+2y=5\\3x-y=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}-3x+2y=-5\\4x-y=5\end{cases}$

14. Verilen sistemleri Gaus yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases}x-3y=4\\x+2y=8\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}4x-y=10\\2x+3y=4\end{cases}$

15. Verilen sistemleri eşitleme yöntemiyle çözünüz

a) $\begin{cases}4x-3y=7\\5x+y=16\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}6x-5y=8\\-2x+3y=2\end{cases}$

16. Dört arkadaş bir top satın almak için para topluyorlar. Birincisi topun fiyatından yarısı kadar para vermiş, ikincisi kalan üçünün üçte biri kadar vermiş, üçüncüsü diğer üç arkadaşın verdiğinin dörtte biri kadar vermiş ve dördüncüsü 50 denar vermiştir. Topun fiyatı ne kadarmış?

17. $8l$ sıcak suya $2l$ daha soğuk olan su ilave ederek $66^{\circ}C$ sıcaklıkta su elde edilir; diğer taraftan $7l$ sıcak suya $3l$ daha soğuk olan su ilave edilirse $59^{\circ}C$ sıcaklıkta su elde edilecektir. Sıcak suyun ve daha soğuk olan suyun sıcaklıkları ne kadardır?

18. $\begin{cases}(2x-3):(y+5)=3:4\\(5x-4):(3y+1)=5:2\end{cases}$ denklem sistemini çözünüz.

19. $8l$ sıcak suya $2l$ ılık su ilave edilirse 66ºC sıcaklıkta su elde edilir, fakat $7l$ sıcak suya $3l$ ılık su ilave edilirse 59ºC sıcaklıkta su elde edilir. Sıcak ve ılık suyun sıcaklık derecesi ne kadarmış?

20. Verilen sistemi çözünüz: $\begin{cases}(2x-3):(y+5)=3:4\\(5x-4):(3y+1)=5:2\end{cases}$.

7. DÜZLEMDE GEOMETRİK ŞEKİLLER

7.1. Temel ve Türetilmiş Kavramlar

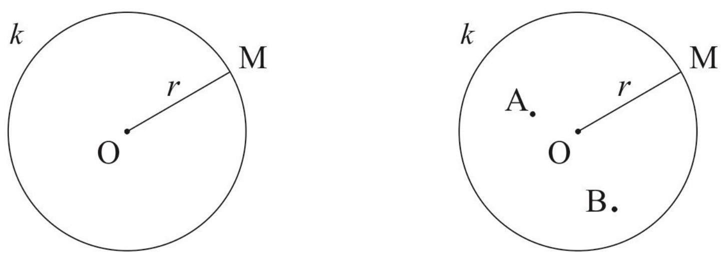
Şimdiye dek gördüğümüz eğitimde geometriden birçok kavramı öğrendik: nokta, doğru, düzlem, çember, daire, açı vb. Bu kavramlardan bazılarını sözlerle açıklayarak (tümcelerle) anlamlaştırıyor, diğerleri ise sadece sezgisel olarak bilinen veya kabullenebilen örneklerdir.

Belli bir kavramın anlamını ve içeriğini ifade eden tümceye o kavramın **tanımı** denir.

Örnek 1. Çember ve daire kavramlarını şu tanımlarla ifade edeceğiz:

„Bir düzlemde verilen bir O noktasından r uzaklığında bulunan düzlemdeki noktaların kümesine, O merkezli ve r yarıçaplı **çember** denir. Bunu $k(O, r)$ biçiminde işaret edeceğiz " (şek. 1a).

„Bir düzlemde verilen bir O noktasından r' den daha küçük ya da eşit uzaklıkta bulunan düzlemdeki noktaların kümesine, O merkezli ve r yarıçaplı **daire** denir. Bunu $K(O, r)$ biçiminde işaret edeceğiz " (şek. 1b). ♦



Şek. 1a Şek. 1b

Görüldüğü gibi, çember ve daire kavramlarını tanımlarken: küme, nokta, düzlem ve uzaklık gibi diğer kavramları kullanıyoruz. Diğer kavramları da tanımlarken aynı duruma düşüyoruz. Buna göre, bir kavramı tanımlarken, onun anlamı ve içeriği diğer "artık bilinen" kavramlar vasıtasıyla ifade edilir. Halbuki "tanınmış olan" bu kavramlar da onlardan önceki kavramlarla açıklanmıştır ve bu şekilde devam edilir.

Bir kavramı diğer kavramlarla tanıtım sinciri bir yerde son bulacağı açıktır. Çünkü tanımı mümkün olmayan bazı kavramlara varacağız, yani o kavramı "artık bilinen" daha basit kavramla açıklanması mümkün olmayacaktır. Böyle kavramları tanımsız kabul etmek mecburiyetindeyiz ve onları sadece örnekler vererek açıklayabiliriz. Tanımsız kabul ettiğimiz kavramlara **ilkel** ya da **temel kavramlar** denir, diğer tüm kavramlara ise **türetilmiş kavramlar** denir.

Düzlem geometrisini inşa ederken **nokta, doğru, düzlem** ve **uzaklık** temel kavramlarından hareket edilir, ondan sonra bu temel kavramları ve diğer matematik kavramlarını kullanarak diğer geometrik kavramları tanımlanır.

Çember ve daireyi tanımlarken, onları düzlem üzerinde belli bir özelliğe sahip noktalar kümesi olduğunu gördük. Geometride, düzlemde her noktalar kümesine **düzlemsel geometrik şekli** denir. Bu nedenle bunlara düzlemsel geometrik şekiller yerine geometrik şekiller diyeceğiz. Dolayısıyla çember ve daire birer geometrik şeklidir.

Temel kavramlardan nokta, doğru ve düzlem gibi geometrik şekillere, temel geometrik şekiller denir. Σ ile işaretlenmiş olan düzlem, *A, B, C, D,* .... harfleriyle işaretlenmiş olan noktalar kümesidir. Her doğru, düzlemin altkümesi olan noktalar kümesidir. Doğruları *a, b, c, p, q, r,* ....harfleriyle işaret edeceğiz. Her noktayı bir düzlem şekli gibi sayabiliriz - bir elemanlı küme.

Her geometrik şeklini tanımlarken, çember ve dairede yaptığımız gibi hareket ediyoruz – şekli oluşturan noktaların özelliklerini sayıyoruz.

Bir nokta, verilen bir doğrunun noktalar kümesine ait ise, **nokta doğruya aittir**, aynı şekilde **doğru noktadan geçer** de diyoruz. Bir A noktası a doğrusuna ait ise, onu $A \in a$ biçiminde işaret edeceğiz. Aynı doğru üzerinde olan noktalara **doğrudaş noktalar** denir. Aynı noktadan geçen doğrulara ise **doğru demeti (noktadaş doğrular**) denir. Adı geçen şu dört kavram türetilmiş kavramlardır.

Alıştırmalar

1. Bir yabancı, Boran'a "su birikintisi" nedir diye sormuş. Boran " çok küçük göldür" diye cevap vermiş. Yabancı, gölün ne olduğunu bilmediği için yine "göl nedir" diye sormuş. Boran bu soruya: "göl, çok büyük bir su birikintisidir" diye cevap vermiş. Boran'ın verdiği bu cevaplardan, yabancı "su birikintisi" sözünün ne anlama geldiğini anlaybilmiş midir? Su birikintisine ait verilen cevaplara "kısır döngü" denir.

2. „Kare nedir" sorusuna Meryem şu cevabı vermiştir: „ Kare, eş kenarlı bir dikdörtgendir". "dikdörtgen nedir?" sorusunun hangi cevabı "kısır döngüye" götürür?

3. Kısır döngüye götüren diğer örnekler sayınız.

4. Birkaç tanınmış geometrik şekli sayınız.

7.2. Düzlem Geometrisine Ait Aksiyomlar

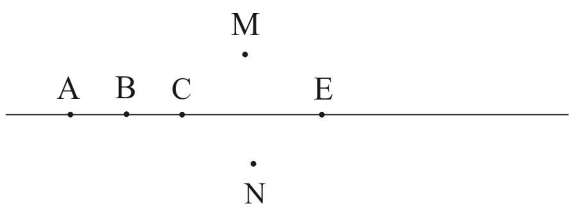
Temel ve Türetilmiş Kavramlar

Matematik kavramlarını ve bölümlerini, yani matematiksel modelleri kurarken, temel kavramlardan hareket edilir ve onlara dayanarak kavramlar türetilir. Tüm bu kavramlara ait özellikleri ve onlara ait iddialar ifade edilir. Bunların doğruluğu yoklayarak, çizimler yaparak, belli ölçümler yaparak ya da doğruluğu önceden ispatlanmış olan özelliklerinden yararlanarak mantık yürütme ile yapılır. Benzer şekilde yeni kavramları anlatırken, hareket edilen, yani doğruluğu daha basit iddialar ile ispatlanması mümkün olmayan bazı özellikler ya da iddialara gelinmesi kaçınılmazdır. Bu gibi özellikler ve iddiaların doğru olduğunu en azından sezgisel olarak bilinen veya kabullenebilen kavramlar tanımlamaya ihtiyaç duymadan alınır. Doğru olduğunu varsaydığımız bu gibi özelliklere ve iddialara **temel özellikler** ya da **iddialar** yani **aksiyomlar** denir.

<u>Nokta ve Doğru Arasındaki Durumlar</u>

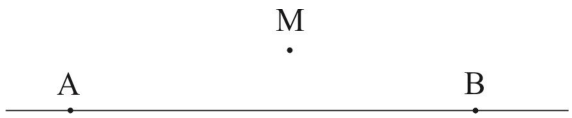
Düzlem geometrisini inşa ederken, temel kavramlardan başka, doğruluğu ispatsız kabul edilen $\mathbf{A_k}$ ile işaret edilen aksiyomlar kullanılır.

$\mathbf{A_1}$. Her doğruya ait sonsuz çok nokta vardır (şek. 2).



Şek. 2

$\mathbf{A_2}$. Aynı doğruya ait olmayan en az üç nokta vardır (şek 3).



Şek. 3

$\mathbf{A_3}$**.** İki farklı noktadan bir tek doğru geçer (şek. 3).

„bir tek" , „tam bir tane", ya da „bir ve yalnız bir" sözleri aynı anlamı ifade ediyorlar.

Temel var sayımlardan şu sonuca varıyoruz: A ve B ya **farklı** noktalardır ($A \neq B$ biçiminde yazılır) ya da **çakışıyorlar** ($A \equiv B$). $A \equiv B$ ifadesi, A ve B aynı noktanın iki farklı işaretlenmesidir.

<u>İki Doğru Arasındaki Durumlar</u>

İki farklı doğrunun aralarındaki durum nasıldır? Bu durum için şu türetilmiş özellik, yani teorem doğrudur.

Teorem 1. İki farklı doğrunun birden fazla ortak noktası yoktur.

Gerçekten, a ve b gibi iki farklı doğrunun M ve N gibi iki ortak noktası olduğunu varsayarsak, o halde bu iki noktadan bir doğru değil iki farklı doğru geçecektir. Bu ise A_3 aksiyomuyla çelişir. Dolayısıyla a ve b doğrularının birden fazla ortak noktası olamaz.

Tanım 1. Sadece bir ortak noktaları olan iki doğruya **kesişirler** denir. Ortak noktaları olmayan iki farklı a ve c doğrularına **paraleldirler** denir ve $a \parallel c$ biçiminde işaret edilir. İki doğruyu temsil eden noktaların kümeleri denk ise, onlara **çakışan** (**üst üste**) doğrular denir.

Teorem 1 den ve karşılıklı türetilmiş kavramlardan şu sonuca varılır: iki doğru ya çakışır, ya kesişeir ya da paraleldirler.

A_4. Verilen bir a doğrusuna ait olmayan bir A noktasından, a doğrusuna paralel olan bir tek c doğrusu geçer.

Uzaklık

Düzlem geometrisini inşa ederken, nokta doğru ve düzlem temel kavramları yanı sıra **uzaklık** temel kavramı da kullanılmaktadır.

A ve B noktaları arasındaki uzaklığı $\overline{AB}$ ile işaret ediyoruz. Uzaklık için şu temel özelliklerin doğru olduğu var sayılır.

A_5. Bir A noktasından diğer bir B noktasına uzaklık pozitif sayı ya da sıfırdır, yani $\overline{AB} \geq 0$. Noktalar farklı olduğu durumda uzaklık pozitif sayıdır ve çakıştıkları durumda sıfırdır; yani

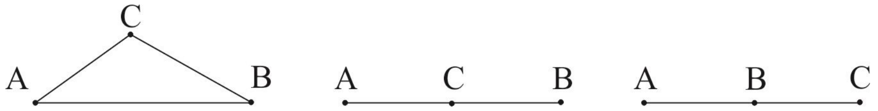
$$A \neq B \text{ ise } AB > 0 \text{ ve } A = B \text{ ise } \overline{AB} = 0 \text{ dır.}$$

A_6. Herhangi iki nokta A ve B için, A' dan B'ye uzaklık, B' den A'ya uzaklığına eşittir, yani $\overline{AB} = \overline{BA}$ dir.

A_7. Herhangi üç nokta A, B ve C için, A'dan C'ye uzaklık $\overline{AB}$ ve $\overline{BC}$ uzaklıklarının toplamından büyük değildir, yani

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Şek.3a ve şek.3b' de $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ dir, şek.3c de ise $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ dir.



Şek.3a Şek.3b Şek.3c

A_7 aksiyomunu uygulayarak şu teoremi ispatlayacağız:

Teorem 2. A, B ve C gibi üç farklı nokta için $\overline{AC}$ uzaklığı, $\overline{AB}$ ve $\overline{BC}$ uzaklıkların farkından büyüktür, yani $AB > BC$ koşulu sağlandığı durumda

$$\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}$$

geçerlidir.

Gerçekten, A_7 gereğince $AB \leq AC + BC$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafını BC kadar azaltırsak $AB - BC \leq AC + BC - BC$ elde edilir, yani $AB - BC \leq AC$ dir. Dolayısıyla $AC \geq AB - BC$ elde edilir.

Doğru Parçası, Yarı Düzlem ve Yarı Doğru

Uzaklık kavramını kullanarak, şu türetilmiş kavramları tanımlıyoruz.

Tanım 2. Üç farklı nokta A, B ve S için

$$AS + SB = AB$$

eşitliği sağlanırsa, S noktası A ve B noktaları **arasındadır** denir,

Arasındadır kavramını kullanarak, şu iki aksiyomu ifade edeceğiz.

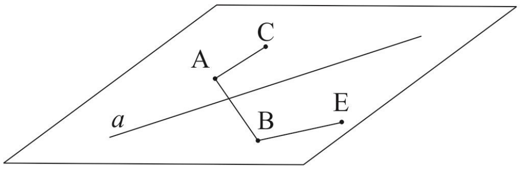
A_8. Bir nokta diğer iki nokta arasında olduğu durumda, o noktalar doğrudaş noktalardır. Doğrudaş olan herhangi üç noktadan biri, daima diğer iki nokta arasındadır.

Tanım 3. İki farklı nokta A ve B ve onlar arasıda bulunan tüm noktaların kümesine **doğru parçası** denir ve $[AB]$ biçiminde işaret edilir.
A ve B noktalarına **uç noktalar**, ve onlar arasında bulunan her noktaya $[AB]$ doğru parçasının **iç noktaları** denir.
İki doğru parçası veya doğru parçası ve doğrunun bir ortak noktaları varsa, onlara **kesişiyorlar** denir.

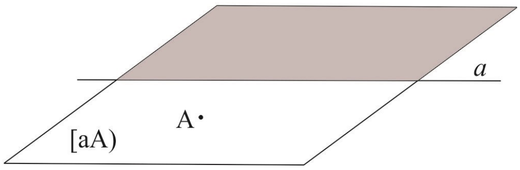
A_9. Düzlemde bir a doğrusuyla ortak noktaları olmayan M_1 ve M_2 iki ayrık alt küme olsun. Bu durumda düzlem $M_1 \cup a \cup M_2$ birleşiminden oluşan noktalar kümesidir. Bununla ilgili şu özellik geçerlidir: M_1 'e ait her A ve C noktaları ve M_2 ye ait her B ve E noktaları için $[AB]$ doğru parçası a doğrusunu keser, $[AC]$ ve $[BE]$ doğru parçaları ise a doğrusunu kesmez.

Tanım 4. Her $M_1 \cup a$ ve $a \cup M_2$ noktaların kümelerine yani düzlemin kısımlarına, **sınır doğrusu (sınırı ya dayanak doğrusu)** a olan **yarı düzlem** denir (şek.4).

Dolayısıyla her doğru a, düzlemi sınır doğrusu a ile tam iki yarı düzleme ayırıyor. Bu yarı düzlemlerden her biri a doğrusuyla ve a doğrusuna ait olmayan bir A noktasıyla tamamen bellidir (şek.5). Bu şekilde belirlenmiş olan yarı düzlemi $[aA)$ ile işaret edeceğiz.



Şek. 4



Şek. 5

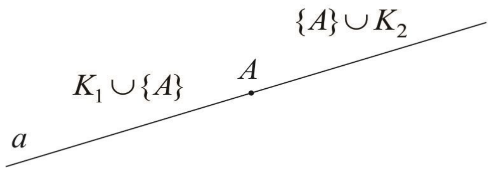
Şu özellik A_9 aksiomuna benzeşmedir (analojidir).

Teorem 3. Bir a doğrusunun herhangi bir A noktası ve onu içermeyen K_1 ve K_2 doğrunun iki ayrık alt kümesi olsun. Bu durumda doğru $K_1 \cup \{A\} \cup K_2$ birleşiminden oluşan noktalar kümesidir. Bununla ilgili şu özellik geçerlidir: K_1' e ait B, ve E noktaları ve K_2' ye ait C ve T noktaları için, A noktası $[BC]$ doğru parçasına ait, fakat A noktası $[BE]$ ve $[CT]$ doğru parçalarına ait değildir.

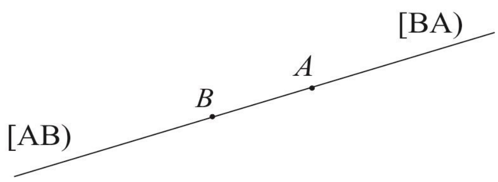
Gerçekten, Bir düzlemde doğrudaş olmayan en az üç nokta olduğuna göre, A noktasından düzlemi iki yarı düzleme ayıran bir c doğrusu geçer. B ve C noktaları farklı yarı düzlemlere ait olduklarından ötürü $[BC]$ doğru parçası a doğrusunu A noktasında kesecektir; buna göre A noktası $[BC]$ doğru parçasına ait olacaktır. Diğer taraftan B, E ve C, T aynı yarı düzlemlere ait olduklarından a doğrusunu kesmediklerine göre A noktası onlara ait değildir.

Tanım 5. Teorem 3'e ait, $K_1 \cup \{A\}$ ve $\{A\} \cup K_2$ kümelerinden her birine **başlangıcı A olan yarı doğru** (**ışın**) denir. Bu yarı doğrulara **ters** (**bitişik**) yarı doğrular denir (şek.6).

Dolayısıyla, verilen bir doğruya ait olan her A noktası doğruyu ortak başlangıç nokta A ile iki yarı doğruya ayırmaktadır. Bu yarı doğrulardan her biri, başlangıç noktası A ve A noktasından farklı olan daha bir noktayla tamamen bellidir. B noktası $K_1 \cup \{A\}$ yarı doğrusuna ait ise, onu $[AB)$ ile işaretediyoruz. Benzer şekilde $\{A\} \cup K_2$ yarı doğrusu da işaret edilir. İki farklı nokta bir tek doğruyu belirttiği gibi, benzer şekilde iki farklı nokta A ve B tam iki yarı doğru belirtir: $[AB)$ ve $[BA)$ (şek. 7).



Şek. 6



Şek. 7

Doğru parçası ve yarı doğru kavramlarının tanımından, herhangi iki farklı nokta A ve B için, $[AB]$ doğru parçası $[AB)$ ve $[BA)$ yarı doğruların kesişimidir.

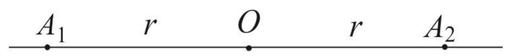
Düzlem geometrisinin inşasında kullanılacak son aksiyom şudur.

A_{10}. Her $[OX)$ yarı dıoğrusu üzerinde, O başlangıcından r uzaklığında bulunacak bir tek A noktası vardır. (şek.8).

Buna göre şu teorem geçerlidir:

Teorem 4. Verilen bir p doğrusu üzerinde, bir O noktasından r uzaklığında bulunan tam iki nokta A_1 ve A_2 vardır (şek.9)

Şek. 8



Şek. 9

$[AB]$ doğru parçasının uç noktaları arasındaki $\overline{AB}$ uzaklığa, $[AB]$ **doğru parçasının uzunluğu** denir. Doğru parçasının uzunluğunu ölçerek belirtiyoruz. Bu nedenle uzunluğu 1 (cm) , yani $\overline{MN} = 1(cm)$ olduğunu varsayarak bir $[MN]$ doğru parçasını seçeriz. Örneğin, şek. 10'da $[AB]$ doğru parçasının uzunluğu $4(cm)$ dir; bunu $\overline{AB} = 4(cm)$ biçiminde yazarız.

Şek. 10

Şek.11

Bir doğru parçasına ait bir iç S noktasından doğru parçanın uç noktalarına uzaklık eşit ise, S noktasına **orta nokta** ya da doğru parçasının **ortası** denir (şek.11).

Tanım 6 . Uzunlukları eşit olan iki doğru parçasına **eşittirler** ya da **denktirler** denir.

Uzunlukları a ve c olan iki doğru parçasını karşılaştırmak için (uzunluklarına bakılır) ve bu durumda şu üç olanaktan biri doğrudur: $a = c$, $a<c$ ya da $a>c$ dir.

Aksiom A_{10} eşit doğru parçaları sadece cetvel ve pergel kullanarak çizimine ve doğru parçalarla grafisel işlemlerin yapılmasına olanak sağlamaktadır. Verilen bir geometrik şeklini sadece cetvel ve pergel kullanarak yapılan çizime şeklin **çizimi** denir.

Alıştırmalar

1. Şek.2 de verilen noktalardan hangileri p doğrusuna ait, hangileri ise ait değildir? Bunu simgelerle yazınız.

2. İki nokta A ve B' den geçen kaç eğri çizgi çizilebilir ? O iki noktadan kaç doğru geçer?

3. Verilen bir noktadan kaç doğru geçer?

4. Şu iddialar doğru mudur? Her noktadan

a) geçen doğrular vardır **b)** geçmeyen doğrular vardır?

5. Doğru mudur?

a) Her iki nokta daima doğrudaştır **b)** verilen her üç nokta daima doğrudaştır?

6. Doğrudaş olmayan üç nokta kaç doğru belirtiyorlar?

7. $AB = 7cm$ uzaklığı biliniyor. BA uzaklığı ne kadardır?

8. A, B, C noktaları için $AB = 5cm$ ve $AC = 7cm$ biliniyor. uzaklığı:

a) 12 cm **b)** 5 cm **c)** 13 cm **ç)** 2 cm olabilir mi?

9. A, B, C ve D noktaların belirlediği uzaklıklar için $AB = 4cm$, $CB = 2cm$ ve $AD = 7cm$ geçerlidir. BC, CC, BA, BB ve DA uzaklıklarını hesaplayınız.

10. "arasındadır" kavramını tanımlarken hangi geometri kavramı kullanılmıştır?

11. Üç farklı nokta K, S ve M için, $KS + KM = SM$ geçerli olduğu durumda noktaların durumuyla ilgili ne diyebiliriz? Bu noktalardan hangisi diğer ikisinin arasındadır?

12. S noktası A ve B arasında, M noktası ise S ve B arasındadır. A, B, S ve M noktaları için ne diyebilirsiniz? Noktalar doğrudaş mıdır?

13. $BM + BA = AM$ geçerli olduğu durumda A, B ve M noktalarının durumu nasıldır?

14. $[AB)$ ve $[BA)$ yarıdoğruları birbirinden farklı mıdır?

15. İki yarı doğrunun:

a) bir tek ortak noktası; **b)** sadece iki ortak noktası olabilir mi?

16. Üç farklı nokta veriliyor. Onlar kaç doğru parçası belirtiyorlar?

17. $[AB]$ doğru parçası,

a) iki farklı iç noktasıyla kaç parçaya ayrılır?

b) üç farklı iç noktasıyla kaç parçaya ayrılır?

18. $[AB)$ ve $[BA)$ yarı doğruların kesişiminde hangi şekil elde edilir?

19. Hangi iddiaya aksiom, hangisine ise teorem denir?

20. Aşağıdaki önermelerden hangileri aksiom, hangileri teorem, hangileri ise tanımdır?

a) Bir noktadan sonsuz çok doğrular geçer.

b) Bir doğru, bir düzleme ait iki farklı noktadan geçerse, bu doğrunun tümü düzlem üzerindedir.

c) Üç farklı noktadan bir ya da üç doğru geçer.

ç) Bir doğrunun dışında sonsuz çok nokta vardır.
d) İki doğrunun bir tek ortak noktası varsa, doğrular kesişiyorlar.

7.3. Geometrik Şekiller

Çember ve Daire

Bir önceki bölümde, çember ve dairenin tanımını uzaklık temel kavramını kullanarak açıkladık. Bunlarla ilgili birkaç kavramı ve özelliği daha bu bağlamda ispatsız vereceğiz.

Uç noktaları verilen bir çember üzerinde olan doğru parçasına **kiriş** denir. Çemberin merkezinden geçen kirişe **çap** denir. Bir uç noktası çemberin merkezinde, diğer uç noktası çember üzerinde olan doğru parçasına çok kez **yarıçap** denir. Burada aynı terim doğru parçasına ve onun uzunluğu için kullanılır. Aynı kavramlar daire için de kullanılır.

Bir düzlem üzerinde verilen bir $k(O, r)$ çemberi ve bir A noktası arasında şu durumlar mümkündür:

1. O merkezinden A noktasına uzaklık r dir (A noktası **çember üzerindedir**);
2. O dan A noktasına uzaklık r'den küçüktür (A noktası $K(O,r)$ dairesinin **iç noktasıdır**);
3. O'dan A noktasına uzaklık r'den büyüktür (A noktası $K(O,r)$ dairesinin **dışındadır**);

O noktasından uzaklıkları r' den küçük olan noktaların kümesine $K(O,r)$ dairesinin **içi** denir. Dolayısıyla her $K(O,r)$ dairesi, onun içi ve $k(O, r)$ çemberinin birleşimidir.

Tanım 1. Uç noktalarıyla beraber her doğru parçasını içeren şekillere **konveks (dışbükey)** şekiller denir.

Her daire konvekstir, fakat her çember konveks şekil değildir.

Düzlem, doğrular, yarı doğrular ve doğru parçaları konveks şekillerdir.

Bir düzlem üzerinde verilen bir $k(O, r)$ çemberi ve bir doğrunu arasında şu durumlar mümkündür:

1. a doğrusu ve çemberin ortak noktaları yoktur.
2. a doğrusu ve çemberin bir tek orta noktaları vardır. Bu durumda doğruya çemberin **teğeti** denir ($K(O,r)$ dairesinin **teğeti**).
3. a doğrusu ve çemberin iki orta noktaları vardır. Bu durumda doğru çemberi o noktalarda **keser** denir.

Düzlemde iki çember arasında şu durumlar mümkündür:

1. Onların ortak noktaları yoktur. Şunu da kaydedelim

- Merkezleri aynı fakat yarıçapları farklı olabilir (**iç içe** çemberler).
- Merkezleri farklı noktalarda olabilir(**eksantrik**, dış merkezli).

2. Bir tek ortak noktaları vardır(birbirine **değen**).
3. Sadece iki ortak noktaları vardır (çemberler **kesişir)**

Verilen bir çemberin herhangi iki farklı noktası çemberi iki kısma ayırır, onların her birine **çember yayı** denir.

Açı. Açı Çeşitleri

Açı kavramını şu şekilde üretiyoruz.

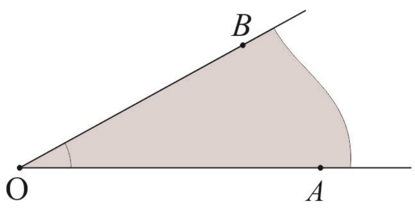
Her doğru, düzlemi iki yarı düzleme ayırdığı gibi, başlangıçları *O* noktasında olan iki yarı doğru [*OA*) ve [*OB)* düzlemi iki kısma ayırır; bunlardan biri *K* ile işaret edilmiş olan ve *a* = *OA* ve *c* = *OB* olmak üzere [*aA*) ve [*cB)* yarı düzlemlerin kesişimidir. İkinci kısım ise *K'*ya ait olmayan düzlemin tüm noktalarıdır.

Tanım 2. Ortak başlangıç noktaları *O* olan iki farklı yarı doğru [*OA*) ve [*OB)*' nin birleşimi ve yukarda açıklanan düzlemin kısımlarından birine **açı** denir ve $\angle AOB$ ile işaret edilir.

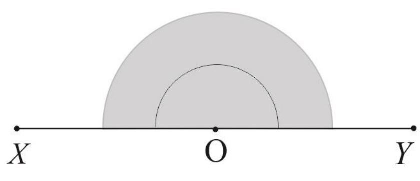
OA ve *OB* yarıdoğrularına **açının kenarları**, onların ortak başlangıç *O* noktasına **açının köşesi** denir, açının kenarlarına ait olmayan tüm noktaların kümesine de **açının iç bölgesi** denir (şek.1).

Açıktır ki, ortak başlangıç noktaları olan iki yarı doğru, ortak kenarlı iki açı belirtiyorlar ve bunlardan biri konveks şekildir. Açının bölgesinin durumu konveks ya da konkav olmasına bağlı olarak, açılar da **konveks** ya da **konkav** (**konveks olmayan)** açılar diye sınıflandırılıyorlar. Buna göre, Bir açı ortak başlangıçlı iki yarı doğruyla ve onlara ait olmayan bir nokta ile tamamen bellidir.

Tanım 3. Ortak başlangıcı olan iki zıt yarıdoğrudan oluşan açıya **doğru açı denir** (şek.2).

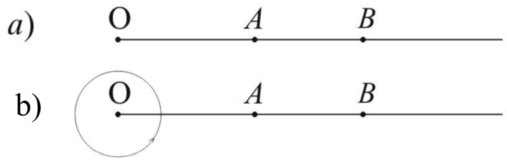


Şek. 1

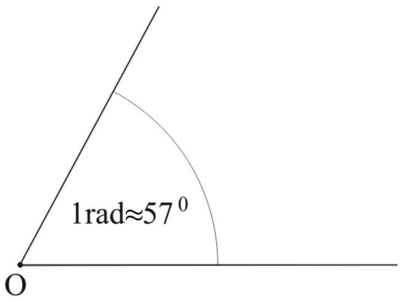


Şek. 2

Özel durumda, ortak başlangıç noktaları olan (*OA* ve *OB*) yarı doğruları çakışık durumda olduklarında da yine iki açı oluşturuyorlar (şek. 3). Bu açılardan birinin iç bölgesi boş kümedir ve ona **sıfır açı** denir (şek.3a), o açılardan ikincisi ise düzlemin tümünü kapsar ve ona **tam açı** denir(şek.3b).



Şek.3



Şek.4

"Birbiri üzerine konulduğunda"kenarları ve iç bölgeleri çakışık durumda gelen iki açıya **denk** ya da **eşit açılar** denir. Bunlar birbiriyle çakışık duruma gelemezse, o halde biri diğerinden daha küçüktür (ya da bir kısmıdır) denir veya büyüktür. Dolayısıyla açıları karşılaştırabiliriz. Her açının belli bir **büyüklüğü** (**ölçüsü**) vardır. Tüm doğru açılar birbirine eşittir. Aynı şekilde tüm tam açılar da birbirine eşittir, devamında tüm sıfır açılar da birbirine eşittir.

Tanım 4. Verilen bir açıyı iki eş açıya ayıran *OS* yarıdoğrusuna açının **açıortayı** (**bisektris**) denir.

Açılar daha fazla eş parçalara ayrılabilir. Doğru açıyı 180 eş açıya ayıralım. Bu açıların her birinin ölçüsüne **açı derecesi** ya da daha kısa sadece **derece** denilmesine kabul edilmiştir ve 1^{o} biçiminde işaret edilir. Buna göre sıfır açısının ölçüsü 0^{o}, doğru açının ölçüsü 180^{o}, tam açının ölçüsü ise 360^{o} olduğu açıktır,

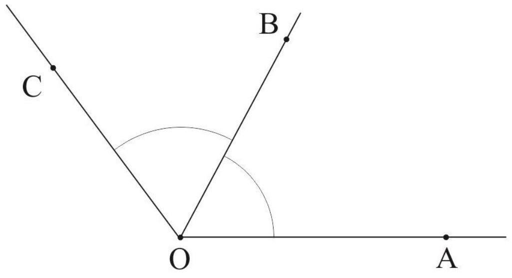
Matematikte açıların ölçüsünü ifade ederken dereceden mada başka ölçü birimleri de kullanılmaktadır. $k\,(O, r)$ çemberi verilmiş olsun. Onun uzunluğu $2\pi r$ dir. O merkezli öyle bir α açısını belirtelim ki, çemberin yarıçapına eşit bir yay kessin. Bu açının (derecelerle) ölçüsünü bulmak için 360'i 2π ile bölmekle elde edeceğiz. Bu şekilde aranılan α açısının ölçüsü yaklaşık 57^{o} olduğunu elde ediyoruz. Bu açı α ölçü birimi gibi kabul edilmitir ve **radyan** diye adlandırılmıştır. Buna göre $\alpha = 1rad$ (şek.4). Radyan işareti gibi kullanılan "rad" sözcüğünü genellikle kullanmıyoruz, örnek $360^{0} = 2\pi$, $180^{0} = \pi$, $90^{0} = \frac{\pi}{2}$, vb.

Köşesi verilen bir çemberin merkezinde olan açıya **merkez açı** denir. Bu açının kenarlarının çemberi kestiği noktalar bu açıya karşılık gelen kirişin uç noktalarıdır.

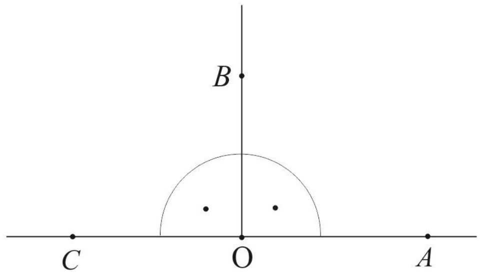
Şek.5'te köşeleri ve bir kenarları ortak olan iki açı $\angle AOB$ ve $\angle BOC$ çizilmiştir. Burada ortak olan kenar *OB* bu açıların kesişimidir, yani $\angle AOB \cap \angle BOC = [OB)$. Bu gibi iki açıya **komşu açılar** denir, $\angle AOC$ açısı ise onların **toplamıdır**.

Tanım 5. Birer kenarları bir doğruyu tamamlayan iki komşu açıya **komşu bütünler açılar** denir.

Genel durumda iki komşu bütünler açı birbirinden farklıdır, halbuki özel durumda onlar birbirine eşit de olabilirler. Böyle açılar şek.6 da olan $\angle AOB$ ve $\angle BOC$ açılarıdır.



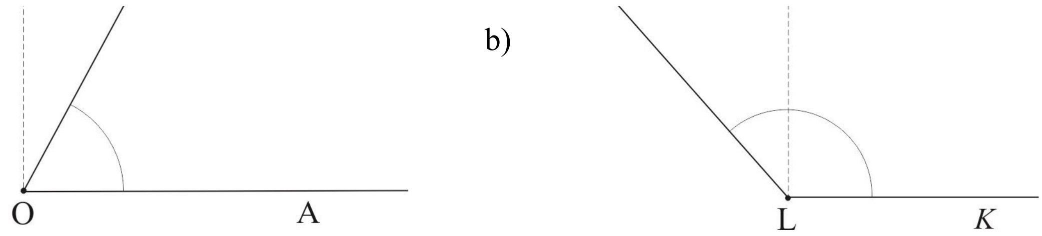
Şek. 5



Şek.6

Tanım 6. Bütünleyenine eşit olan açıya **dik açı** denir. Tüm dik açılar birbirine eşit olduğu açıktır ve hepsinin ölçüsü 90^0 dir.

Tanım 7. Dik açıdan küçük olan her açıya **dar açı**, dik açıdan büyük ve doğru açıdan küçük olan açıya **geniş açı** denir (şek.7a ve şek.7b).



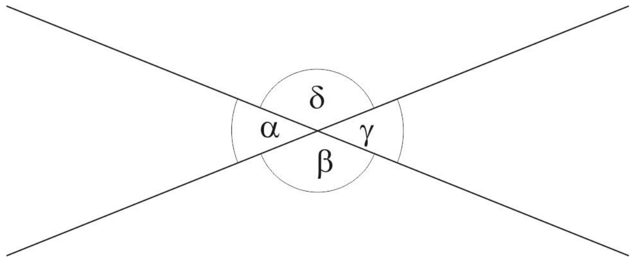
Şek. 7

İki açıdan birinin ölçüsü α, diğerinin ölçüsü β olarak $\alpha+\beta=90^0$ ise, onlara **tümler açılar** denir. Bu durumda bu açılardan her biri diğerinin **tümleyenidir**.

α ve β açıları için $\alpha+\beta=180^0$ ise, onlara **bütünler açılar** denir ve her biri diğerinin **bütünleyenidir**.

Verilen bir α açısının tümleyeni $90^0-\alpha$ olduğu, bütünleyeni ise $180^0-\alpha$ açısıdır. Herhangi iki komşu bütünler açılar, aynı zamanda bütünleyen açılar olduğu da açıktır.

Kesişen iki *a* ve *b* doğrusu (doğru açıdan farklı) α, β, γ ve δ gibi dört konveks açı oluşturuyorlar (şek. 8). Onlardan altı çift farklı açılar oluşturulabilir: (α,β), (β,γ), (γ,δ), (δ,α), (α,γ) ve (β,δ). Bunlardan ilk dördünü **komşu bütünler açılar** olduğunu artık biliyoruz,



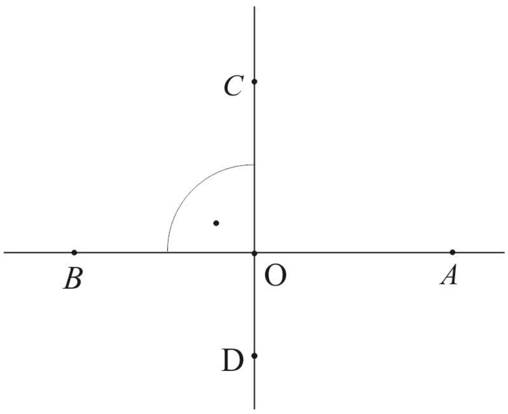
Şek. 8

(α,γ) ve (β,δ) çiftleri **ters açılardır**. Şekil 8 de görüldüğü gibi, α ve γ ters açıların köşeleri ortak , kenarları ise birbirini doğruya tamamlayan yarı doğrulardır; ya da daha kısa bir ifadeyle iki doğrunun kesişmesiyle karşılıklı açılardır. Aynısı β ve δ ters açıları için de geçerlidir (şek. 8).

Tanım 8. İki doğrunun kesiştiği yerde birbirinin tersi olan açılara **ters açılar** denir. Bunların köşeleri ortak, kenarları ise birbirini doğruya tamamlayan yarı doğrulardır.

Şekil 8 de gösterilmiş olan α ve γ açılarını inceleyelim. Görselden görüldüğü gibi β açısı hem α hem de γ açısıyla komşu bütünler açıdır. Dolayısıyla β açısı α ve γ açılarını doğru açıya tamamlamaktadır. Oradan da γ ve α açıları eşit olduğu elde ediyoruz. Demek ki, ters açılar birbirine eşittir.

Şekil 9'da *O* noktasında kesişen *AB* ve *CD* doğruları çizilmiştir. Onlar dört tane konveks açı meydana getiriyorlar ve onlardan ∠AOC dik açı olduğunu görüyoruz. Niçin?



Şek. 9

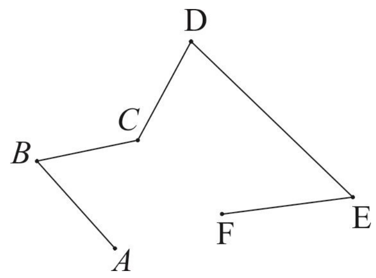
Tanım 9. Kesiştiklerinde dik açılar oluşturan iki doğruya **birbirine dik** doğrular olarak kabul edilir.

Bu durumda *AB* doğrusu *CD* doğrusuyla **diktir** denir ve tersine. Bunu simgelerle: $AB \perp CD$ ya da $CD \perp AB$ biçiminde işaret ediyoruz.

Çok kez „dik doğru" yerine **dikme** ve „birbirine göre dik doğrular" yerine sadece **dik doğrular** deriz.

Kırık Çizgi. Çokgen

Şekil 10'da, herhangi iki komşu doğru parçası bir doğru üzerinde olmayacak şekilde *AB*, *BC*, *C*D, *DE* ve *EF* doğru parçaların birleşiminden meydana gelen *ABCDEF* şekli çizilmiştir. Böyle şekle **kırık çizgi** denir.

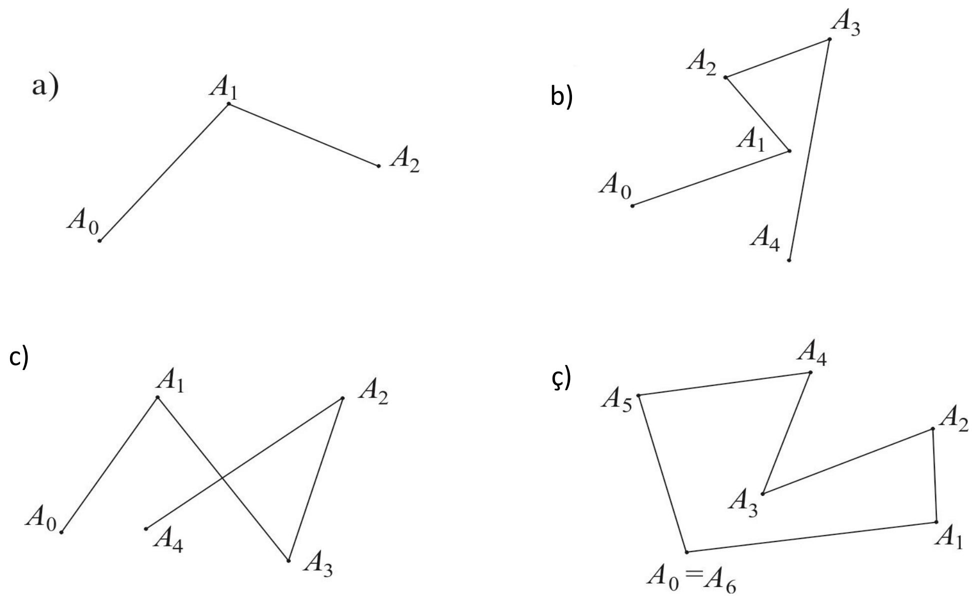


Şek. 10

AB, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* doğru parçalarına kırık çizginin **kenarları** denir, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ve *F* noktalarına ise kırık çizginin **köşeleri** denir, *A* ve *F* noktalarına da kırık çizginin **uç noktaları** denir (şek.10). Kırık çizginin aynı kenarına ait olan köşelere **komşu köşeler**; ortak köşede birleşen iki kenara ise kırık çizginin **komşu kenarları** denir.

Komşu olmayan herhangi iki kenarının ortak noktaları olmayan kırık çizgiye **basit kırık çizgi** denir. Örnek, Şekil 11'de a), b), ç) şıklarındaki kırık çizgiler basit, şekil 11' de c) şıkkındaki kırık çizgi ise basit değildir, çünkü onun komşu olmayan A_1A_2 ve A_3A_4 kenarları kesişiyorlar.

Bir kırık çizginin uç noktaları çakışıyorsa (şek.11ç) ona **kapalı** kırık çizgi denir, şek.11' de a) ,b), c) şıklarındaki kırık çizgiler ise **açık** (kapalı olmayan) kırık çizgilerdir.



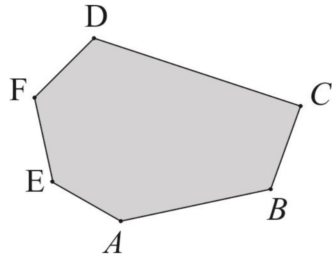
Şek. 11

Kırık çizginin tüm kenarlarının uzunluklarının toplamına **kırık çizginin uzunluğu** denir.

Şekil 12'de bir basit kırık çizgi çizilmiştir. Şekli inceleyerek şu sonuca varıyoruz: kırık çizgi düzlemin noktalarını (ona ait olmayanları) – **iç böge** ve **dış bölge** olmak üzere iki **bölgeye** ayırmaktadır. Kırık çizgi aslında bu iki bölgenin **ortak sınırıdır**, yani bu iki bölgenin kesişimidir.

Tanım 10. Bir basit kapalı kırık çizgi ve onun iç bölgesinden oluşan geometrik şekle **çokgen** denir.

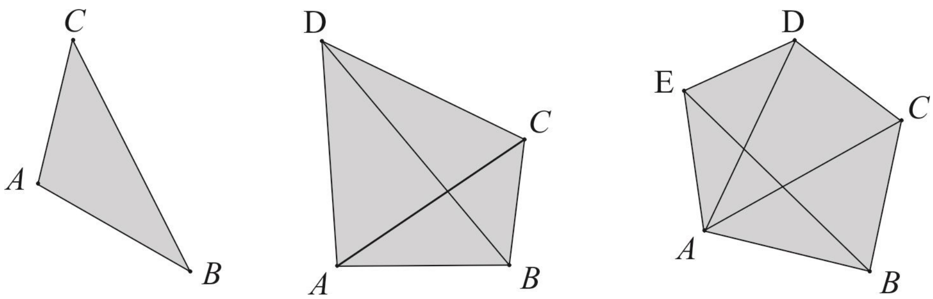
Kırık çizgiye ait noktalara **sınır noktaları denir**, iç bölgesinin noktalarına ise çokgenin **iç noktaları** denir. Kırık çizginin köşeleri ve kenarları, çokgenin **köşeleri** ve **kenarlarıdır**. Çokgen simgesel olartak tüm köşelerinin adlandırılmasıyla işaretlenir; ABC, $ABCD$, $ABCDE$ gibi (şek.13).



Şek. 12

Aynı kenara ait olan iki köşeye **komşu köşeler**, ortak köşesi olan iki kenara ise **komşu kenarlar** denir.

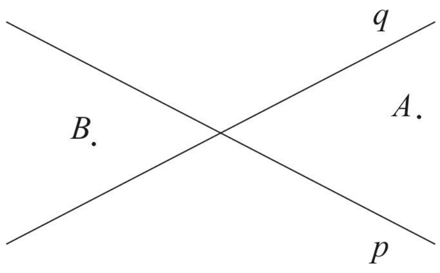
Her çokgende köşe sayısı, kenar sayısına eşittir. Kenar ya da köşelerin sayısına göre çokgenler: üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen vb. olabilir (şek. 13).



Şek. 13

Çokgenin komşu olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçasına **köşegen** denir. Beşgenin beş köşegeni, dörtgenin iki köşegeni, üçgenin ise köşegenleri yoktur. Neden? (şek.13).

Çokgenin tüm kenarlarının uzunluklarının toplamına **çokgenin çevresi** denir.



Şek. 14

Alıştırmalar

1. Şekil 14' te, Kesişen iki doğru *p* ve *q* çizilmiş ve iki nokta *A* ve *B* işaret edilmiştir. Buna benzer bir şekil çiz ve aşağıdaki yarı düzlemlerin kesişimleriniden elde edilen şekli tarayınız:

a) [*pA*) ve [*qB*) **b)** [*pA*) ve [*qA*) **c)** [*pA*) ve [*pB*) **ç)** [*qA*) ve [*pB*).

2. Hangi şekle konveks, hangisine ise konkavdır (konveks olmayan) denir?

3. *S* noktasıda kesişen *AB* ve *CD* gibi iki doğru çiziniz. Şekilde kaç konveks açı görebilirsiniz? Onları yazınız.

4. Herhangi bir açıyı çizdikten sonra onun komşu bütünleyen açısını da çiziniz. Böyle kaç açı vardır? Bu açıların nasıldır?

5. İki farklı açı çizdikten sonra, onla ters olan açıları çiziniz.

6. Verilen bir *p* doğrusuna verilen bir *A* noktasından geçen dikmeyi çiziniz. *A* noktası:

a) $A \in p$ **b)** $A \notin p$ olsun.

7. Çemberin çapına karşılık gelen merkez açı ne kadardır?

8. En az kenarlı kırık çizgi çiziniz:

a) açık **b)** kapalı olsun.

9. a) konveks, b) konveks olmayan

a) çokgenin en az kaç köşesi vardır?

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Üç farklı nokta bir ya da üç doğru belirtir. Çizim yaparak, dört farklı nokta bir, dört ya da altı doğruyu belirttiğini gösteriniz.

2. Üç farklı doğrudaş nokta A, B ve C için, $AC = 12cm$ ve $BC = 7cm$ olduğu biliniyor AB uzunluğu ne kadar olabilir? Mümkün olan her durum için çizim yapınız.

3. Aşağıdakiler geçerli olacak A, B ve C noktaları var mıdır:

a) $AC < 0$ **b)** $AB = BC = CA$ **c)** $AC \geq AB + BC$

ç) $AB > AC + CB$ **d)** $AB \leq 0$?

4. M noktası A ve B arasında ise, bu üç nokta doğrudaştır iddiası doğru mudur?

5. Aşağıdaki durumlarda K, L ve M noktaları doğrudaş mıdır:

a) $KL = 7cm$, $KM = 5cm$ ve $LM = 4cm$

b) $KL = 5cm$, $KM = 9cm$ ve $LM = 4cm$?

6. Yarı doğru kaç tane ve hangi noktalarla tek olarak bellidir?

7. Aynı doğru üzerinde olan iki yarı doğrunun birleşimi nasıl şekildir? Bunu çizim yaparak gösteriniz.

8. Bir p doğrusu ve $A \in p$ noktası veriliyor. p doğrusuna ait A noktasından aşağıda verilen uzaklıkta bulunan noktaların kümesi nedir:

a) $3cm$'den küçük olmayan **b)** $3cm$'ye eşit **c)** $3cm$'den küçük ya da eşit ?

9. AB doğru parçasının uzunluğu $12cm$ dir. Aşağıda verilen durumlarda M noktası $[AB]$ doğru parçası üzerinde midir:

a) $AM = 7cm$ ve $MB = 5cm$ **b)** $AM = 9cm$ ve $MB = 6cm$ **c)** $AM = MB$?

10. A, B ve C noktaları şu sıraya göre bir doğru üzerindedirler: S noktası AB doğru parçasının orta noktası, T noktası ise BC doğru parçasının orta noktasıdır. $AB = a$ ve $BC = b$ ise, ST doğru parçasının uzunluğu ne kadardır?

11. Saatın büyük ibresi:

a) 1 saatte **b)** 1 günde **c)** 1 ayda kaç dik açı yapacaktır?

12. 60^0 açı kaç radyandır?

13. Bir konveks

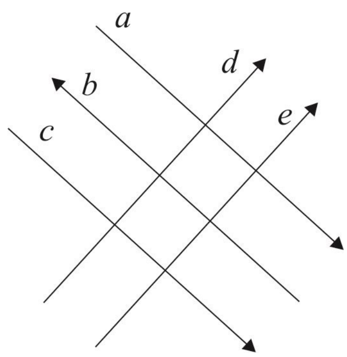
a) dörtgenin **b)** beşgenin **c)** yedigenin
bir köşesinden kaç köşegen çizilebilir?

14. $a \parallel b \parallel c$ ve $d \parallel e$ olmak üzere, şekil 1'deki yarı doğrulardan hangileri aynı yönlü, hangileri ise ters yönlüdür?

15. Aynı doğru üzerinde olan iki ters yönlü yarıdoğrunun

a) kesişimi **b)** birleşimi

nasıl bir şekildir?



Şek. 1

16. Aynı doğru üzerinde olan iki ters yönlü yarıdoğrunun

a) kesişimi **b)** birleşimi nasıl bir şekildir?

8. DÜZLEMSEL ŞEKİLLERİN ALANI VE ÇEVRESİ

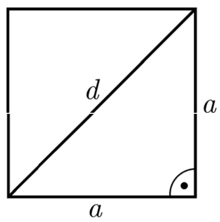
8.1. Alan Kavramı

Paralelkenarın Alanı ve Çevresi

Çokgenin alanı, çokgenin içini oluşturan düzlem kısmına ait büyüklüğünün bir ölçüsüdür. Bu büyüklüğün hesaplanması, aslında çokgenin iç kısmını doldurmak için birbirini örtmeme koşuluyla birim karelerin sayısını belirtmektir. Şunu da kaydedelim, eş şekillerin alanları eşittir.

Kare ve Dikdörtgenin Alanı ve Çevresi

Kenarı a olan karenin alanı $\boxed{P = a^2}$. Kenarı a olan karenin çevresi $\boxed{L = 4a}$ dir.



Örnek 1. Kenarı $a = 3$cm olan karenin alanı $P = a^2 = 3^2 = 9\text{cm}^2$, çevresi ise $L = 4 \cdot 3 = 12cm$ dir. ♦

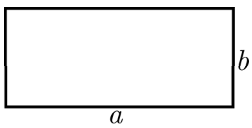
Örnek 2. Köşegeni $d = 5$cm olan bir karenin alanını hesaplamak için, önce karenin köşegeni ve kenarı arasındaki bağıntıyı belirtmeliyiz. Pisagor teoremine göre

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$ oradan da $a^2 = d^2$ dir. O halde $P = d^2 = 5^2 = 25 = 12{,}5\text{cm}^2$ dir. ♦

Buna göre şu sonuca varabiliriz:

Köşegeni d olan karenin alanı $P =$ …… formülüyle hesaplanabilir.

Kenarları a ve b olan dikdörtgenin alanı $\boxed{P = ab}$ formülüyle hesaplanır. Kenarları a ve b olan dikdörtgenin çevresi $\boxed{L = 2(a + b)}$ formülüyle hesaplanır.



Örnek 3. Kenarları $a = 7$cm ve $b = 4$cm olan dikdörtgenin alanı $P = a \cdot b = 7 \cdot 4 = 28\text{cm}^2$, çevresi ise $L = 2 \cdot (7 + 4) = 22cm$ dir. ♦

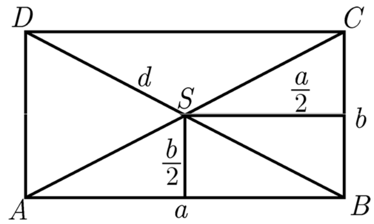
Alıştırma 1. Kenar uzunlukları 3 : 7 oranında ve alanı 756cm^2 olan dikdörtgenin çevresini hesaplayınız.

Çözüm. $a : b = 3:7$ olduğuna göre, $a = 3k$ ve $b = 7k$ olarak yazabiliriz; k orantı katsayısıdır. $ab = 756$ olduğuna göre $3k \cdot 7k = 756$, oradan da $k^2 = 36$ elde edilir. Buna göre $k = 6$ ya da $k = -6$ elde edilir. $k = -6$ mümkün değildir, çünkü $a = 3k > 0$ dır. Dolayısıyla $k = 6$ olduğuna göre, kenarlar $a = 18$cm ve $b = 42$cm olduğunu, oradan da $L = 2(18+42) = 120$cm olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırma 2. Bir dikdörtgenin bir kenarı 1dm, diğer kenarı ise köşegeninden 2cm küçük olduğuna göre, çevresini ve alanını hesaplayınız.

Çözüm. $a = 10$cm ve $b + 2 = d$ olsun. Pisagor teoremine göre, $a^2 + (d-2)^2 = d^2$ olduğundan $4d = 100+4$ elde edilir, oradan $d = 26$cm olduğunu buluyoruz. O halde $b = 24$cm , dolayısıyla dikdörtgenin çevresi $L = 2(10+24) = 68$cm ve alanı $P = 10\cdot 24 = 240$cm^2 dir. ♦

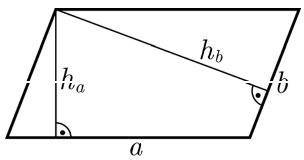
Alıştırma 3. Bir dikdörtgenin köşegenlerinin kesişim noktasının büyük kenara uzaklığı, küçük kenara uzaklığından 4cm daha yakındır. Dikdörtgenin çevresi 56cm olduğuna göre alanını hesaplayınız. ♦



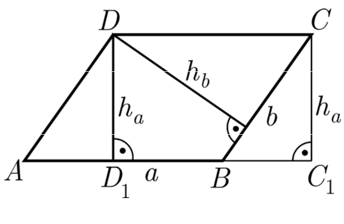
Çözüm. Нека $a > b$ olsun. $\frac{a}{2} = 4+\frac{b}{2}$, yani $a = 8+b$ dir. Diğer taraftan $2a + 2b = 56$, yani $a + b = 28$ dir. Denklemi çözerek $8+2b = 28$, oradan da $b = 10$cm elde edilir. O halde $a = 18$cm dir ve dolayısıyla dikdörtgenin alanı $P = 180$cm^2 dir.♦

<u>Paralelkenarın Alanı ve Çevresi</u>

Kenarları a ve b olan ve o kenarlara ait yükseklikleri h_a ve h_b olan bir paralelkenarın alanı $\boxed{P = ah_a = bh_b}$ formülüyle hesaplanır.

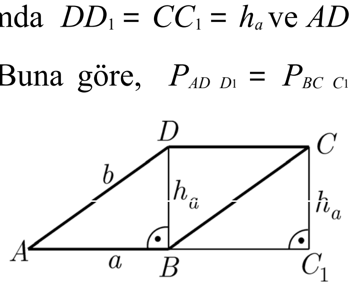


İspat. $P = ah_a$ olduğunu ispatlayacağız.



D noktasından çizilen h_a yüksekliğnin dikme ayağı D_1 olsun.

a) D_1 noktası AB kenarına aittir. C noktasından AB kenarına çizilen yüksekliğin dikme ayağı C_1 olsun. Açıktır ki C_1 noktası AB kenarının uzantısındadır. O halde ADD_1 ve BCC_1 dik üçgenlerdir ve $\sphericalangle DAD = \sphericalangle CBC$ olduğundan $\sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle BCC_1$ elde edilir. Bu durumda $DD_1 = CC_1 = h_a$ ve $AD = BC = b$ dir, dolayısıyla $\Delta ADD_1 \cong \Delta BCC_1$ gerekir. Buna göre, $P_{ADD_1} = P_{BCC_1}$ olduğunu görüyoruz.

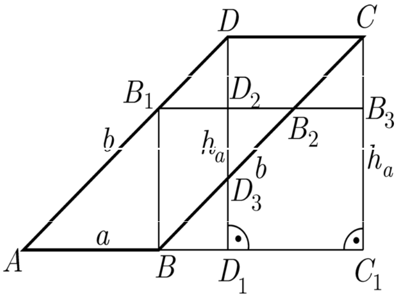


Şimdi, $P_{ABCD} = P_{ADD_1} + P_{DBCD_1} = P_{BCC_1} + P_{DBCD_1} = P_{DCC_1D_1}$ olduğuna göre, $\Delta ADD_1 \cong \Delta BCC_1$ den $AD_1 = BC_1$ gerekir. Dolayısıyla DCC_1D_1 dörtgeni kenarları a ve h_a olan bir dikdörtgendir. Sonuç olarak $P_{ABCD} = P_{DCC_1D_1} = ah_a$ elde edilir.

b) D_1 noktası B ile çakışır. a) şıkkında olduğu gibi, benzer şekilde $\Delta ABD \cong \Delta BCC_1$ dir. O halde

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BDC} = P_{BCC_1} + P_{BDC} = P_{BCCD_1} = ah_a \text{ dir.}$$

c) D_1 noktası AB' nin uzantısına aittir .



Yukarıda olduğu gibi C_1 noktası C' den çizilen yüksekliğin dikme ayağı olsun. B noktasından AB' ye dikme çizelim ve bu dikme AD doğrusunu B_1 noktasında kessin. Açıktır ki B_1 noktası AD doğru parçasına aittir. B_1 noktasından AB' ye paralel olacak p doğrusunu çiziyoruz. Bu durumda $\{B_2\} = BC \cap p$, $\{B_3\} = p \cap CC_1$, $\{D_2\} = DD_1 \cap B_1B_3$ ve $\{D_3\} = DD_1 \cap BC$ olsun. b) şıkkı gereğince $P_{ABB_2B_1} = P_{D_1CB_3D_2}$, dir. Bu iki dörtgenin kesişimi $D_2B_2D_3$ üçgenidir. Oradan olduğuna göre, $P_{ABB_2B_1} = P_{D_1CB_3D_2}$ gerekir. Benzer şekilde, *a)* şıkkında olduğu gibi, $\Delta B_1D_2D \cong \Delta B_2B_3C$ elde edilir. demek ki onların alanları eşittir. Sonuç olarak,

$$P_{ABCD} = P_{ABD_3D_2B_1} + P_{D_2B_2D_3} + P_{B_1D_2D} + P_{DD_2B_2C} =$$

$$= P_{D_1D_3CB_3D_2} + P_{D_2B_2D_3} + P_{B_2B_3C} + P_{DD_2B_2C} = P_{DCC_1D_1} = ah_a \text{ elde edilir.}$$

Bu formülden görüldüğü gibi, kenarı a ve yüksekliği h olan eşkenar dörtgenin alanı $P = ah$ dir. ♦

Kenarları a ve b olan paralelkenarın çevresi $\boxed{L = 2(a+b)}$ formülü ile, kenarı a olan eşkenar dörtgenin çevresi ise $\boxed{L = 4a}$ formülüyle hesaplanır.

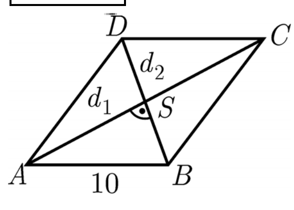
Örnek 4. $a = AB = 12\text{cm}$ ve $h_a = 7\text{cm}$ olan $ABCD$ paralelkenarın alanı $P = a \cdot h_a = 12 \cdot 7 = 84\text{cm}^2$ dir. ♦

Örnek 5. Alanı 56cm^2 ve kenarları $a = 5{,}2\text{cm}$ ve $b = 4{,}8\text{cm}$ olan paralelkenarın yükseklikleri $h_a = \frac{P}{a} = \frac{56}{5{,}2} = \frac{140}{13} \approx 10{,}77\text{cm}$ ve $h_b = \frac{P}{b} = \frac{56}{4{,}8} = \frac{35}{3} \approx 11{,}7\text{cm}$ dir. ♦

Alıştırma 4. Bir paralelkenarın iki kenarı 3:4 oranında ve çevresi 28 dir. Paralelkenarın kenarlarının uzunluklarıni belirtiniz.

Çözüm. $a : b = 3:4 = k$, oradan $a = 3k$, $b = 4k$ yazabiliriz. Burada k orantı katsayısıdır, $L = 28 = 2(a+b)$ olduğuna göre $a+b = 14$, yani $7k = 14$ ve $k = 2$ elde edilir. Dolayısıyla $a = 6$, $b = 8$ olduğunu buluyoruz. ♦

Köşegenleri d_1 ve d_2 olan eşkenar dörtgenin alanı $\boxed{P = \frac{d_1d_2}{2}}$. formülüyle hesaplanır.

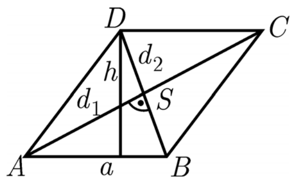


Alıştırma 5. Kenarı 1 dm ve bir köşegeni 12 cm olan eşkenar dörtgenin alanını hesaplayınız. .

Çözüm. $d_2 = 12\text{cm}$ olsun. ABS dik üçgeninden

$$\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 10^2$$

elde edilir. Denklemi çözerek $d_1 = 16\text{cm}$ elde edilir. Demek ki $P = \frac{d_1d_2}{2} = 96\text{cm}^2$ dir. ♦



Alıştırma 6. Bir eşkenar dörtgenin yüksekliği 48cm ve büyük köşegeni 8dm dir. Eşkenar dörtgenin çevresini hesaplayınız.

Çözüm. Demek ki, h = 48cm , d_1 = 80cm dir. Eşkenar dörtgenin kenarı a olsun. $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ olduğuna göre, $48a = \frac{80d_2}{2}$, yani $a = \frac{5}{6}d_2$ elde edilir.

ABS dik üçgeninden $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, yani $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ oradan da d_2 = 60 cm olduğunu buluyoruz.

Buna göre, $a = \frac{5}{6}60 = 50\text{cm}$ olduğunu bulduktan sonra, çevre $L = 4a = 200cm$ elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilenler:

a) Karenin alanı P=36cm^2 dir. Karenin kenarı ve köşegeninin uzunluğunu belirtiniz.

b) Karenin çevresi L=12cm dir. Karenin kenarı ve köşegeninin uzunluğunu belirtiniz.

2. a) Alanı 108dm^2 ve kenarı a =120cm olan bir dikdörtgen verilmiştir. Dikdörtgenin diğer kenarının uzunluğunu belirtiniz.

b) Çevresi 246cm ve kenarı b=80cm olan bir dikdörtgen veriliyor. Dikdörtgenin diğer kenarının ve köşegeninin uzunluğunu belirtiniz.

3. Yarıçapı 12,5 cm olan bir çember, bir kenarı 7cm olan dikdörtgenin çevrel çemberidir. Dikdörtgenin alanını hesaplayınız.

4. Kenarı a olan bir kare içinde, köşeleri karenin kenarlarını 2:3 oranında bölen diğer bir kare çizilmiştir. Karelerin alanlarının oranını belirtiniz.

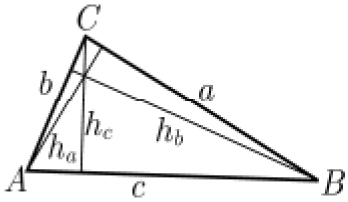
5. Kenarları 8cm ve 6cm olan bir $ABCD$ dikdörtgeni verilmiştir. Dikdörtgen AC köşegeniyle, içinde içten teğet olarak birer çemberin çizilmiş olduğu iki üçgene ayrılmıştır. Bu çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığı belirtiniz.

6. Çevresi 124dm ve kenarı a = 12dm olan paralelkenarın b kenarının uzunluğunu ve yüksekliklerinin oranını belirtiniz.

7. Küçük köşegeni 6cm ve içten teğet çemberinin yarıçapı 24mm olan eşkenar dörtgenin alanını hesaplayınız.

8.2. Üçgenin Alanı ve Çevresi

Kenarları a, b, c ve bu kenarlara karşılık gelen yükseklikleri h_a , h_b , h_c olan ABC üçgeninin alanı $\boxed{P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}}$ formülüyle, çevresi ise $\boxed{L = a + b + c}$ ile hesaplanır.

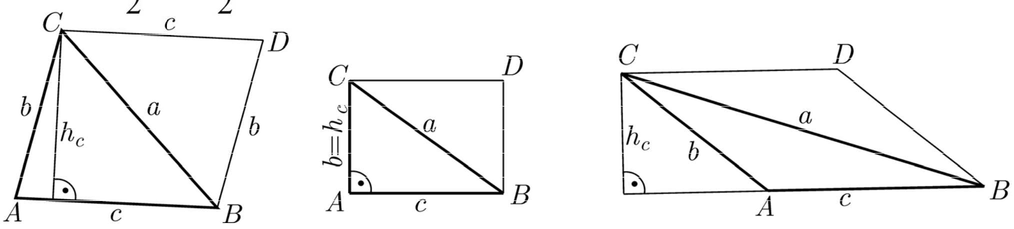


İspat. $P=\frac{ch_c}{2}$. olduğunu ispatlayacağız. Diğer eşitlikler tamamen benzer şekilde ispatlanır.

A ve *B* köşelerindeki açılar dar (yani üçgen daraçılı) yoksa, o açılardan biri dik ya da geniş (yani dik üçgen ya da geniş açılı üçgen) olduğuna bağlı olarak, aşağıdaki şekilde gösterilmiş olan durumlar elde edilir.

B noktasından *AC* doğrusuna paralel ve *C* noktasından *AB* doğrusuna paralel doğrular çizilir. Bu iki doğrunun kesişim noktası *D* olsun. *ABDC* dörtgeni paralelkenardır. Buna göre, $AB = CD$ ve $AC = BD$ dir. *BC* ortak kenar olduğuna göre, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ dir. Dolayısıyla $P_{ABC} = P_{DCB}$ elde edilir. Buna göre,

$P_{ABC} = \frac{P_{ABDC}}{2} = \frac{ch_c}{2}$. ♦



Örnek 1. Kenarı $b = 7$cm ve $h_b = 4$cm olan üçgenin alanı $P=\frac{bh_b}{2}=\frac{28}{2}=14\,\text{cm}^2$ dir. ♦

Kenarı a olan **eşkenar üçgenin** alanı $\boxed{P=\frac{ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ ile hesaplanır.

ABC üçgeninin kenarları *a, b, c* ve $\boxed{s=\frac{a+b+c}{2}}$ çevresinin yarısı olsun. Bu durumda üçgenin alanı $\boxed{P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ formülüyle hesaplanabilir. Bu formüle **Heron formülü** denir.

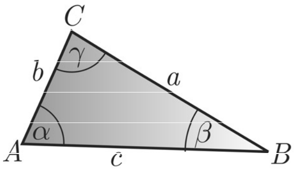
Örnek 2. Kenarları $a = 5$, $b = 4$ ve $c = 7$ olan üçgenin alanını hesaplayalım. $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}=\sqrt{8\cdot3\cdot4\cdot1}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$ elde edilir. Burada $s=\frac{5+4+7}{2}=8$ dir. ♦

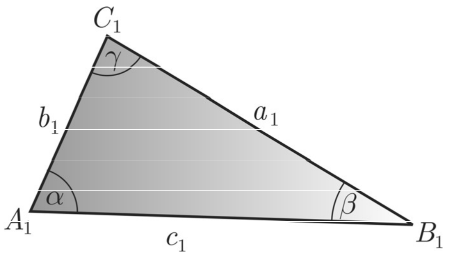
ABC üçgeninde çevrenin yarısı *s* ve içten teğet çemberin yarıçapı *r* olsun. Bu durumda üçgenin alanı $\boxed{P = rs}$ dir.

ABC üçgeninin kenarları *a, b, c* ve *R* üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı olsun. Bu durumda üçgenin alanı $\boxed{P=\frac{abc}{4R}}$ ile hesaplanabilir.

Örnek 3. Kenarları $a = 4cm$, $b = 6cm$ ve $c = 8cm$ olan ABC üçgeninin içten teğet çemberinin yarıçapı $r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{9\cdot(9-4)\cdot(9-6)\cdot(9-8)}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}cm$ dir, çevrel çemberinin yarıçapı ise $R = \frac{abc}{4P} = \frac{192}{12\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}cm$ dir. ♦

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ olsun. Burada $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ geçerli ve ΔABC ve $\Delta A_1B_1C_1$ üçgenlerin alanları sırasıyla P ve P_1 olsun. Bu durmda $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}$ geçerlidir.



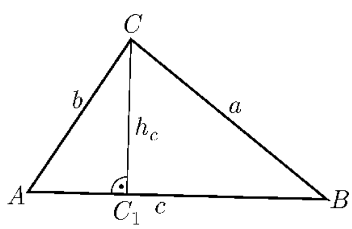


Örnek 4. İki benzer üçgenin alanları 15 ve 18, birinci üçgenin kenarı $a = 5$ ise, buna karşılık gelen diğer üçgenin a_1 kenarı yukarıdaki eşitlikten $a_1^2 = \frac{a^2P_1}{P} = \frac{25\cdot 18}{15} = 30$ olduğunu elde ediyoruz, oradan da $a_1 = \sqrt{30}$ elde edilir. ♦

Alıştırma 1. Bir ikizkenar üçgenin çevresi 64cm, yan kenarı ve tabanı arasındaki fark 11cm dir. Üçgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm. a taban, b üçgenin yan kenarı olsun. O halde $a + 2b = 64$ ve $b-a = 11$ eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak $3b = 75$, oradan $b = 25$cm elde edilir, oradan da $a=14$cm olduğunu buluyoruz. Pisagor teoremini uygulayarak $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625-49} = 24\,\mathrm{cm}$ elde edilir, o halde alanı $P = \frac{ah}{2} = 168\,\mathrm{cm}^2$ dir.♦

Alıştırma 2. Bir üçgenin kenarları $a = 73$dm, $b = 52$dm ve yüksekliği $h_c = 48$dm verilmiştir. Alanını hesaplayınız.



Çözüm. Pisagor teoremine göre ΔCBC_1 ve ΔAC_1C

$\overline{C_1B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 55\,\mathrm{dm}$ ve $\overline{AC_1} = \sqrt{b^2 - h_c^2} = 20\,\mathrm{dm}$

bulunduktan sonra $c = 75$dm elde edilir. Buna göre alanı $P = \frac{75\cdot 48}{2} = 1800\,\mathrm{dm}^2$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Kenarları $a = 21$, $b = 17$ ve $c = 10$ olan bir üçgen veriliyor. Onun alanını, yüksekliklerini, içten teğet ve çevrel çemberlerinin yarıçaplarını belirtiniz.

2. Tabanı $a = 10cm$ ve yan kenarı $b = 13cm$ olan bir ikizkenar üçgen veriliyor. Üçgenin alanını, yüksekliklerini, içten teğet ve çevrel çemberlerin yarıçaplarını belirtiniz.

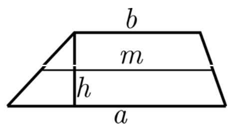
3. Bir üçgenin iki kenarının uzunluğu 27cm ve 29cm, üçüncü kenara karşılık gelen kenarortayın uzunluğu 26cm dir. Üçgenin alanını hesaplayınız.

4. S noktası ABC üçgeninin içten teğet çemberinin merkezi ve $P_{\Delta ASB} = 36cm^2$, $P_{\Delta ASC} = 40cm^2$ ve $P_{\Delta CSB} = 68cm^2$ olsun. Üçgenin kenarlarını hesaplayınız.

5. Bir üçgenin kenarları 13cm, 14cm ve 15cm dir. Merkezi en büyük kenarın üzerinde ve diğer iki kenara değen çemberin yarıçapını belirtiniz.

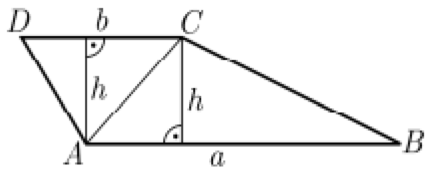
8.3. Yamuk, Deltoid ve Çeşitkenar Dörtgenin Alanı

Yamuk, bir çift paralel kenarları olan dörtgendir. Paralel kenarlara yamuğun tabanları, paralel kenarlar arasındaki uzaklığa yamuğun yüksekliği denir. Tabanları a, b ve yüksekliği h olan yamuğun alanı $\boxed{P=\frac{(a+b)h}{2}}$ formülüyle hesaplanır. Tabanları a ve b olan yamuğun orta tabanı m, $\frac{a+b}{2}$ olduğuna göre, yamuğun alanı $\boxed{P=mh}$ formülüyle de hesaplanır.



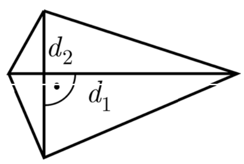
$P=\frac{a+b}{2}h$ formülünü ispatlayacağiz.

$ABCD$ yamuğunun tabanları a ve b ve yüksekliği h olsun. Yamuğu AC köşegeniyle iki üçgene ayırıyoruz. O halde $P=P_{ACD}+P_{ABC}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=\frac{a+b}{2}h$. dir. ♦

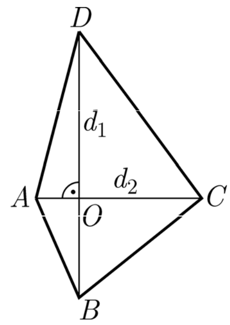


Örnek 1. Tabanları $a = 4$, $b = 8$ ve yüksekliği $h = 10$ olan yamuğun alanı $P=\frac{8+4}{2}10=60$ dir. ♦

Köşegenleri d_1 ve d_2 birbirine dik olan dörtgenin alanı $\boxed{P=\frac{d_1d_2}{2}}$ formülüyle hesaplanır.



Gerçekten, $ABCD$ dörtgeninin alanı için şunu yazabiliriz:



$$P = P_{ABO} + P_{BOC} + P_{COD} + P_{AOD} =$$

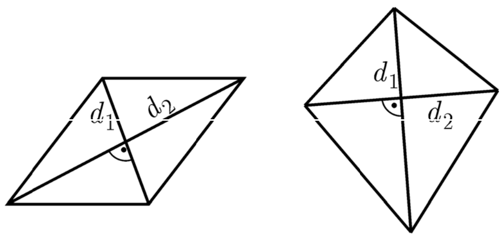
$$= \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2} + \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2} =$$

$$= \frac{(\overline{AO}+\overline{CO})\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{(\overline{AO}+\overline{CO})\cdot\overline{OD}}{2} =$$

$$= \frac{(\overline{OB}+\overline{OD})(\overline{AO}+\overline{CO})}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Örnek 2. Bir dörtgenin köşegenleri $d_1 = 12$ ve $d_2 =$ 7 birbirine diktir. Bunun alanı $P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12\cdot 7}{2} = 42$ dir. ♦

Eşkenar dörtgen ve deltoid, köşegenleri birbirine dik olan dörtgenlerdir. O halde onların alanı $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ formülüyle hesaplanır.



Alıştırma 1. tabanları a=15cm, b=11cm ve yan kenarı c=5cm olan bir ikizkenar yamuk verilmitir. Yamuğun yüksekliklerini ve alanını belirtiniz.

Çözüm. Şekilden $15 = 2x + 11$ ve oradan $x = 2$ olduğunu buluyoruz. Şimdi Pisagor teoremini uygulayarak $h = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$.

Dolayısıyla $P = \frac{(15+11)\sqrt{21}}{2} = 13\sqrt{21}$ elde edilir. ♦

Alıştırma 2. Tabanları a = 35cm, b =14cm ve yan kenarları c =13cm, d = 20cm olan yamuk veriliyor. Yamuğun yüksekliğini ve alanını belirtiniz.

Çözüm. Şekilden $AN + MB = 35 - 14 = 21$ olduğunu görebiliriz. $AN = x$ yazarsak,

$MB = 21 - x$ olur. ΔAND ve ΔMBC üçgenlerine Pisagor teoremini uygulayarak

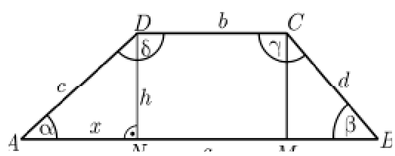
$h^2 = 13^2 - x^2$ ve $h^2 = 20^2 - (21 - x)^2$ doğrudur. O halde

$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$$

$$169 - \cancel{x^2} = 400 - 441 + 42x - \cancel{x^2}$$

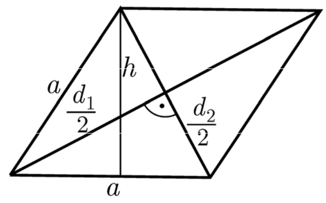
$$42x = 210$$

$x = 5$ elde edilir.



Buna göre, $h^2 = 13^2 - 5^2$, yani h =12cm elde edilir. Dolayısıyla yamuğun alanı $P = \frac{(35+14)}{2}\cdot 12 = 294\,\text{cm}^2$ olduğunu buluyoruz. ♦

Örnek 3. Köşegenleri d_1=16cm ve d_2=12cm olan eşkenar dörtgenin alanı

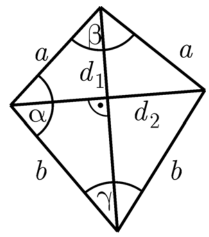


$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = 96\,\text{cm}^2,\; a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10\,\text{cm}$$

ve yüksekliği $h = \frac{P}{a}$ = 9,6 cm dir. ♦

Örnek 4. Kenarları $a = 4dm$, $b = 5dm$ ve köşegeni $d_1 = 7dm$ (d_1 simetri ekseni) verilmiş olan deltoidin alanı $P = 2\cdot P_\Delta = 8\ 6dm^2$ dir. Burada P_Δ kenarları a, b, ve d_1 olan üçgendir ve bu alan Heron formülünü kullanarak hesaplanmıştır; $L = 2(a + b) = 18dm$ ve $d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{16\sqrt{6}}{7}dm$ dir.♦

Örnek 5. Kenarları a=4dm , b=5dm ve d_2 =7dm olan deltoidin (d_2 simetri ekseni olmayan köşegen) diğer köşegeni $d_1 = x + y = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} + \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 5{,}51dm$ dir. Burada x ve y ikizkenar üçgenlerle belirlenen köşegen kısımlarıdır. Buna göre alanı $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \approx 19{,}29\ dm^2$ ve $L=2(a+b)=18dm$ dir. ♦



Alıştırmalar

1. Dar açısı α=45°, küçük tabanı 12cm ve yüksekliği 3cm olan ikizkenar yamuğun alanını hesaplayınız.

2. Tabanları 20cm ve 12cm ve köşegenleri birbirine dik olan ikizkenar yamuğun alanını hesaplayınız.

3. tabanları 20cm ve 11cm ve yan kenarları 17cm ve 10cm olan yamuğun alanını hesaplayınız.

4. Kenarları 4 ve 5 olan bir deltoidin içine içten teğet olmak üzere yarıçapı 2 olan bir çember çiziliyor. Deltoidin alanını hesaplayınız.

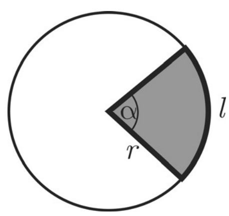
5. Bir eşkenar dörtgende içten teğet olan r yarıçaplı bir çember çizilmiştir. Eşkenar dörtgenin kenarı, köşegenlerinin toplamından altı defa küçük olduğu bilindiğine göre, eşkenar dörtgenin kenarını yarıçap ile ifade ediniz.

8.4. Çemberin Çevresi. Daire ve Daire Parçalarının Alanı

Yarıçapı r olan çemberin uzunluğu (çevresi) $L = 2r\pi$ formülüyle hesaplanır, yarıçapı r olan bir dairenin alanı ise $P = r^2\pi$ formülüyle hesaplanır.

Örnek 1. Yarıçapı 7 olan bir çemberin çevresi $L = 2\cdot 7\,\pi = 14\,\pi$, alanı ise $P = 7^2\pi = 49\pi$ dir. ♦

Daire yayı, bir çemberin iki noktası arasında kalan kısmıdır.



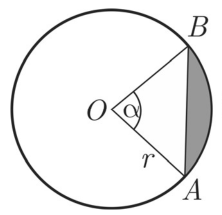
Yarıçapı r olan bir çemberin merkez açısı α' ya karşılık gelen yayın uzunluğu $\boxed{l=\frac{r\pi\alpha}{180^0}}$ formülüyle hesaplanır.

Örnek 2. Yarıçapı 6 ve merkez açısı 45° olan çember yayının uzunluğu

$l=\frac{6\pi 45^0}{180^0}=\frac{3\pi}{2}$ dir. ♦

Daire dilimi, r yarı çaplı bir dairenin iki yarı çapı ile aralarındaki yayın çevrelediği alandır. r yarı çaplı bir dairede merkez açısı α olan daire diliminin alanı $\boxed{P=\frac{r^2\pi\alpha}{360^0}}$ ya da $\boxed{P=\frac{lr}{2}}$ formülüyle hesaplanır.

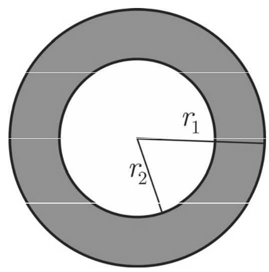
Örnek 3. Yarıçapı 6 cm olan bir dairede merkez açısı 45° olan daire diliminin alanı $P=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}6=\frac{9\pi}{4}\text{cm}^2$ dir. ♦



Daire kesmesi, dairede bir kirişin sınırladığı yay ile kiriş arasında kalan bölgedir. Daire kesmesinin alanı $P = P_1 - P_{\Delta ABO}$ formülüyle hesaplanır. Burada P_1, r yarıçaplı çemberde α merkez açısına karşılık gelen daire diliminin alanıdır.

Örnek 4. Yarıçapı 6cm olan dairede merkez açısı 45° karşılık gelen daire kesmesinin alanı

$P=\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{2}r^2\sin 45^\circ=\frac{9\pi}{4}-18\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\pi-36\sqrt{2}}{4}\text{cm}^2$ dir . ♦



Daire yüzüğü, ortak merkezli (konsantrik) çemberle sınırlı düzlem bölgesidir. Büyük çemberin yarıçapı r_1 ve küçüğünün yarıçapı r_2 olan ortak merkezli çemberlerin oluşturduğu daire yüzüğünün alanı $\boxed{P=r_1^2\pi-r_2^2\pi}$ ya da $\boxed{P=\left(r_1^2-r_2^2\right)\pi}$ formülüyle hesaplanır.

Örnek 5. Yarıçapları 5 ve 4 olan iki daireden oluşan daire yüzüğünün alanı $P = (5^2 - 4^2)^2\pi = 9\pi$ dir. ♦

Örnek 6. Yarıçapı 6 olan bir daire 6 eşit parçaya, yarıçapı 8 olan bir daire ise 8 eşit parçaya ayrılmış ve her birinden birer daire dilim alınmıştır. Hangi dilimin alanı daha büyüktür?

$P_1=\frac{6^2\pi\frac{360^0}{8}}{360^0}=\frac{36\pi}{8}$ ve $P_2=\frac{8^2\pi\frac{360^0}{6}}{360^0}=\frac{64\pi}{6}$ elde edilir. Demek ki $P_1 > P_2$ dir. ♦

Örnek 7. Bir daire yüzüğünün alanı, ona ait olan küçük dairenin alanının dörtte birine eşittir. Onun yarıçaplarının oranını şu şekilde belirteceğiz:

$(R^2 - r^2)\pi = 1/4\, r^2\pi$ oradan $R^2 = 5/4 r^2$ yani $R : r = 5 : 2$. ♦

Örnek 8. Merkez açısı α = 45° olan *AB* yayının uzunluğu π*cm* ise, ait olduğu çemberin çevresini şu şekilde hesaplayacağız:

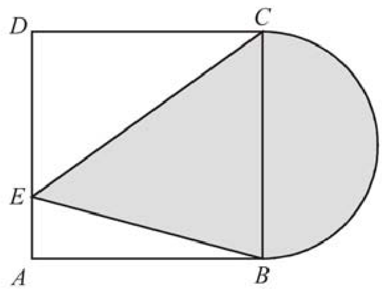
$l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^0}$ eşitliğinden $l = \dfrac{2r\pi\alpha}{360^0} = \dfrac{L\alpha}{360^0}$ yani $L = \dfrac{l \cdot 360^0}{\alpha}$ elde edilir.

Demek ki aranılan çevre $L = 24\pi cm$ dir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen bir çemberin herhangi bir *A* noktasından uzunlukları 9cm ve 17cm olmak üzere iki kiriş çizilmiştir. Kirişlerin orta noktaları arasındaki uzaklık 5*cm* olduğuna göre çemberin yarıçapını belirtiniz.

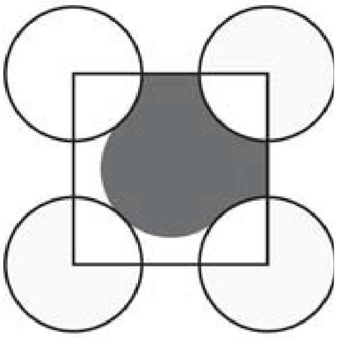
2. *AB*=6*cm* ve *AC*=8*cm* kirişleri birbirine diktir. Ait oldukları dairenin alanını hesaplayınız.



3. Yandaki şekilde *ABCD* karesinin köşegeni 4*cm* dir. *BC* dairenin çapı ve *E* noktası *AD* kenarının hehangi bir noktasıdır. Taralı kısmın alanını hesaplayınız.

4. Yarıçapı $R = 10cm$ olan bir yarım daireden, merkezleri yarım dairenin çapı üzerinde olmak üzere $r_1 = 3cm$ ve $r_2 = 7cm$ yarıçaplı birbirine değen iki yarım daire kesilmiştir. Dairenin kalan kısmının alanını belirtiniz.

5. Alttaki şekilde merkezleri karenin köşelerinde ve yarıçapları 1*cm* olan çemberler çizilmiştir. Daha da bu çemberler, kare içinde olan beşinci bir çembere değerler. Bu şekilde elde edilen taralı bölgenin alanını hesaplayınız.



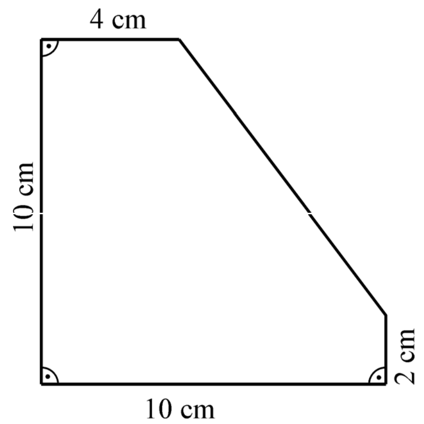
PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. Tabanları $a = 25$ ve $b = 15$ ve bir yan kenarı $c = 8$ olan bir yamuk veriliyor. Büyük tabana ait olan açılarının toplamı 90° olduğuna göre yamuğun çevresini ve alanını belirtiniz.

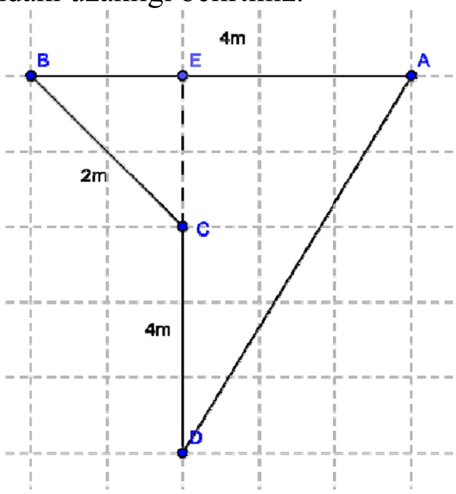
2. Bir kenarı diğer kenardan üç kat büyük olan dikdörtgen biçiminde bir karton parçasını boyalamak için, bir kutu boya yeterlidir. Başka bir karton parçasından yeni bir dikdörtgen o şekilde keselim ki, birincisine göre uzun kenarı 18*cm* daha kısa, ikinci kenarı ise $8cm$ daha uzun olsun. Bu şekilde elde edilen ikinci karton parçasına da aynı boya miktarı harcandığına göre ikincisinin çevresini hesaplayınız.

3. $ABCD$ karesinin kenarı $36cm$ dir. AB kenarı üzerinde B köşesinden $12cm$ uzaklıkta bir E noktası seçilir. BC kenarının ortasında F ve CD kenarı üzerinde C noktasından $12cm$ uzaklıkta olan G noktası seçiliyor. EFG üçgeninin iç kısmına ait ve AFD üçgeninin dış kısmına ait bölgenin alanını belirtiniz.

4. Verilen şeklin alanını hesaplayınız.



5. Çayırda bulunan bir tavşan, önce $4m$ batıya, ondan sonra $2m$ güney doğuya ve güneye doğru daha $4m$ hareket ediyor. Tavşanın hareket noktası ve geldiği nokta arasındaki uzaklığı belirtiniz.



6. Bir dik yamuğun içten teğet çemberinin merkezinden daha büyük olan yan kenarının köşelerine uzaklığı 6 ve 8 dir. Yamuğun orta tabanının uzunluğunu belirtiniz.

7. AB doğru parçası bir düzgün altıgenin iki karşıt köşesinin birleştirir. CD doğru parçası ise altıgenin iki karşıt kenarın orta noktalarını birleştirir. Altıgenin alanı 60 olduğuna göre, AB ve CD doğru parçaların uzunluklarının çarpımını belirtiniz.

8. Kenarları $a = 2$, $b = 3$ ve $c = 4$ olan üçgenin alanını hesaplayınız.

9. Köşegenleri $d_1 = 15$ ve $d_2 = 12$ olan deltoidin alanını hesaplayınız.

10. Bir dik üçgenin hipotenüs uzunluğu $6{,}5cm$ ve bir kateti $2{,}5cm$ dir. Bu üçgenin çevresini hesaplayınız.

11. Bir ikizkenar üçgenin tabanına karşılık gelen yüksekliği $8cm$, yan kenarı ise $10cm$ dir. Üçgenin alanını hesaplayınız.

12. Bir daire yüzüğü, çevreleri 8π ve 20π olan iki çemberle sınırlıdır. Alanını hesaplayınız.

13. Bir çembere, köşeleri çember üzerinde olmak üzere bir düzgün sekizgen, etrafına ise dıştan teğet kare çizilmiştir. Çokgenlerin alanlarının oranını belirtiniz.

14. Bir düzgün altıgene içten teğet olarak çizilen dairenin alanı 9π dir. Altıgenin alanını belirtiniz.

15. Bir eşkenar dörtgene içten teğet r yarıçaplı bir çember çizilmiştir. . Eşkenar dörtgenin kenarı, köşegenlerin toplamından dört defa daha küçük olduğu bilindiğine göre, kenarının uzunluğunu r yarıçapı ile ifade ediniz.

16. Tabanları $40cm$ ve $24cm$ olan bir ikizkenar yamuğun köşegenleri birbirine diktir. Yamuğun alanını hesaplayınız.

17. Kenarı a olan bir karede, köşeleri karenin kenarları üzerinde ve onları 1:4 oranında bölen diğer bir kare çizilmiştir. Karelerin alanlarının oranını belirtiniz.

18. Tabanları $a= 9cm$, $b= 3cm$ ve yan kenarları $c = 8cm$ ve $d =10cm$ olan yamuğun alanını hesaplayınız.

19. Tabanı a ve yan kenarı b olan ABC ikizkenar üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R hesaplansın.

20. Köşegenleri $30cm$ ve $40cm$ olan eşkenar dörtgenin içten teğet çemberi, değme noktasıyla kenarını iki kısma ayırmaktadır. Büyük kısmın uzunluğunu belirtiniz.

CEVAPLAR VE TAVSİYELER

Modüler Ünite 1

1.1.

1. **c)** ve **ç)** önermelerdir.

2. **a)** yanlış önerme, **b)** doğru önerme, **c)** doğru önerme, **ç)** doğru önerme

3. **a)** $\perp$, **b)** $\top$, **c)** $\perp$, **ç)** $\perp$.

4. a) bileşik, **b)** basit, **c)** bileşik, **ç)** basit.

1.2.

1. **a)** $\top$, **b)** $\perp$, **c)** $\top$, **ç)** $\perp$, **d)** $\top$, **e)** $\top$.

2. **a)** $\perp$, **b)** $\top$, **c)** $\top$, **ç)** $\top$.

3. a) $p \Leftrightarrow r$: Her karenin köşegenleri eşittir, ancak ve ancak her yamuğun köşegenleri birbirine eşit ise, $\tau(p \Leftrightarrow r) = \perp$,

b) $q\ r\vee$: Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirine diktir ya da her yamuğun köşegenleri birbirine eşittir, $\tau(q \vee r) = \top$,

c) $r \Rightarrow p$: Her yamuğun köşegenleri eşit ise, her karenin de köşegenleri birbirine eşit olmalıdır, $\tau(r \Rightarrow p) = \top$.

4.a) $\top$, **b)** $\top$, **c)** $\perp$.

5. **a)** $\perp$, **b)** $\top$, **c)** $\perp$, **ç)** $\top$, **d)** $\perp$, **e)** $\top$.

1.3.

1. a) tarafsız önerme formülü, **b)** tarafsız önerme formülü.

4. **a)** evet (Tavsiye: p, q ve r için 8 olanaklı tablo oluşturunuz), **b)** evet

5. **a)** evet, **b)** evet

1.4.

1. $B = \{3,6,9,12,15,18\}$, $C = \{2,4,6,8,10,12,14\}$, $B \neq C$.

2. **a)** doğru önerme, **b)** doğru önerme, **c)** yanlış önerme.

3. $B = \{15,20,35,40,55\}$.

4. $\{2,5,8,10,13,17,18,20,25,26,29\ .\ \}$

5. $\varnothing$ kümesinin elemanları yoktur, $\{\varnothing\}$ ise bir elemanlı kümedir.

1.5.

1.

1. a) $A \cap B = \{2,4,5\}$, $B \cap C = \{4,5,7\}$ **ve** $A \cap C = \{3,4,5\}$,

b) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ **ve** $C \cup A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$,

c) $A \setminus B = \{1,3\}$, $B \setminus C = \{2,6\}$ **ve** $C \setminus A = \{7,8\}$,

ç) $A\Delta B = \{1,3,6,7\}$, $B\Delta C = \{2,3,6,8\}$ **ve** $C\Delta A = \{1,2,7,8\}$.

2. a) $A \cap B = A$, **b)** $A \cup B = B$, **c)** $A \setminus B = \varnothing$, **ç)** $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$, **d)** $A\Delta B = B \setminus A$,

e) $A'_B = B \setminus A$.

3. a) $A \setminus B = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19\}$, **b)** $A\Delta B = A \setminus B$.

4. a) $(A \times A) \cap A = A^2 \cap A = \varnothing$, **b)** $A \times (A \cap A) = A \times A = A^2$, **c)** $A\Delta A' = \mathcal{U}$.

5. a) $A \setminus C = \varnothing$, **b)** $B\Delta C = \{1,2,4\}$, **c)** $B \cup C = \{1,2,3,4\}$,

ç) $A \times C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$.

1.6.

1. a) $M_{P_1(x)\wedge P_2(x)}=\{6\}$, **b)** $M_{P_1(x)\vee P_2(x)}=\{2,3,4,6,8,9,10\}$,

c) $M_{\neg P_1(x)}=D\setminus M_{P_1(x)}=\{1,3,5,7,9\}$.

2. a) $M_{P_1(x)\veebar P_2(x)}=\{-3,-1,0,1\}$, **b)** $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=\{-4,-3,-2,0,2,3,4\}$,

c) $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=\{-4,-2,2,3,4\}$.

PEKIŞTIRME ALIŞTIRMALARI

1. a hayır, **b)** evet, **c)** hayır, **ç)** hayır.

2.a) doğru önerme, **b)** doğru önerme, **c)** doğru önerme, **ç)** yanlış önerme.

3. **a)** $\top$, **b)** $\perp$, **c)** $\top$, **ç)** $\top$.

4. **4. a)** „ 12 sayısı 3 ile bölünür “, „ 12 sayısı 4 ile bölünür“, **b)** „ $\frac{2}{3}$ rasyonel sayıdır“,
„0, (3) rasyonel sayıdır“, **c)** „ 3 bileşik sayıdır“, „ 3 tek sayıdır“ .

5. **a)** $\perp$, **b)** $\top$, **c)** $\top$, **ç)** $\perp$, **d)** $\perp$.

6. **a)** $\top$, **b)** $\top$, **c)** $\perp$.

7. **a)** $\top$, **b)** $\top$, **c)** $\top$.

8. **a)** totoloji, **b)** çelişki.

11. $B=\{6,12\}$, $C=\{4,8,12\}$, $B\neq C$.

12. a) $\perp$,**b)**$\top$, **c)** $\top$.

13. $B=\{15,20,30,35,40\}$.

14. $\{3,6,9\}$.

15. a) $A\cap B=\{3,4,5\}$, **b)** $B\cup C=\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$, **c)** $A\setminus B=\{1,2\}$, **ç)** $C\Delta A=\{9\}$.

16. a) $A\cap B=B$, **b)** $B\setminus A=\varnothing$, **c)** $A\Delta B=A\setminus B$.

17. $A\setminus B=\{10,11,13,14,16,17,19\}$, **b)** $A\Delta B=\{3,6,9,10,11,13,14,16,17,19\}$.

18. a) $(A\cap A)\Delta A'=\mathcal{U}$, **b)** $A\times(A\cup A)=A^2$, **c)** $(A\cap A')\times A'=\varnothing$.

19. $A\times B=\{0,2\}\times\{0,-1\}=\{(0,0),(0,-1),(2,0),(2,-1)\}$.

20. a) $M_{P_1(x)\veebar P_2(x)}=\{-3,1,-2,-1\}$, **b)** $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=\{-4,-2,-1,0,2,3,4\}$,

c) $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=\{-4,0,2,3,4\}$.

Modüler Ünite 2

2.1.

1. **a)** doğru önerme, **b)** yanlış öerme, **c)** doğru önerme.

2. **a)** 1310, **b)** 330, **c)** 1275, **ç)** 10000.

3. **a)** bileşik, **b)** bileşik, **c)** basit.

4. **a)** 2 , **b)** 117780.

5. $EKOK(3,5,7)=105$ ve $2\cdot 105=210$, aranılan sayı 210 .

2.2.

1. **a)** 7 , **b)** 0 , **c)** 33.

2. **a)** 18, **b)** 38.

3. **a)** 19, **b)** 27 .

4. $A=24<72=B$.

5. $(-2+3-5+11)+(-3+2-6+10)+(-1+4-4+12)+(2-3+5-11)=14$

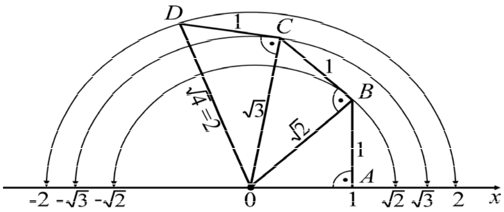
2.3.

1. a) 0,625, b) 0,16 , c) 0,8125. **2**. a) 5,(83) > 5,8 3( ) , b) 4, 371( ) < 4,(37).

3. a) −752, **b)** 8550. **4. a)** $\frac{62}{15}$, **b)** $\frac{1559}{660}$ **5.** 1.

2.4.

1.



2. $(-3,6]\cap[-5,2)=(-3,2)$ ve $(-3,6]\cup[-5,2)=[-5,6]$.

3. a) $3,4567<3,4576$, **b)** $-3,1223>-3,1224$.

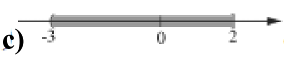
4. a) $7\sqrt{7}$, **b)** $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$.

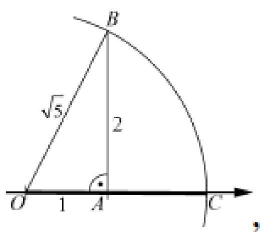
5. a) farklı işaretli, **b)** aynı işaretli ve pozitifdirler, **c)** aynı işaretli ve negatifdirler, **ç)** aynı işaretli.

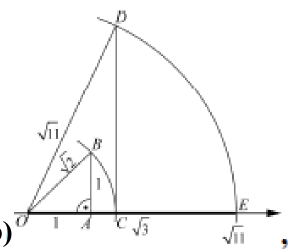
PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

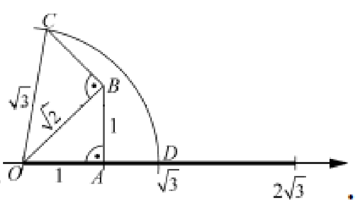
1. a) $2\cdot2\cdot2\cdot\quad 3\cdot3\cdot5$, **b)** $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$, **c)** $3\cdot3\cdot3\cdot31$.
2. a) 1404, **b)** 6.
3. a) 1000, **b)** 855.
4. 84.
5. $5460cm=54,6m$.
6. $\{105,140,175\}$.
7. a) 10, **b)** −1.
8. a) 0, **b)** 179, **c)** −1014, **ç)** −724.
9. a) 42, **b)** 41, **c)** 31, **ç)** 8.
10. a) −678, **b)** $\frac{2143}{234}$.
11. a) 1,39, **b)** 0,125.
12. a) $\frac{139}{12}$, **b)** $-\frac{29}{90}$.
13. a) $\frac{133}{18}$, **b)** $\frac{245}{99}$.
14.
a) 

, **b)** 

, **c)** 

.
15.
a) 

, **b)** 

, **c)** 

.

16. a) $[0,4]$**, b)** $(-2,5)$**. 17.** $[-3,8;3,2]$**. 18. a)** $8\sqrt{5}$ **, b)** $13\sqrt{2}$**. 19. a)** $15,2$ **, b)** $7,8$**,** $42,55$**.**
20. hayır

Modüler Ünite 3

3.1.

1. a) 17; **b)**5; 0. **2. a)** 399; **b)** $-23,568$. **3. a)** 150; **b)** 4375.
4. a) a^{10}; **b)**a^{n+5}; **c)** x^n; **ç)** a^3; **d)** b^{n-1}; **e)** a.
5. a) a^6; **b)** a^{2n}; **c)** $8a^3b^6$; **ç)** $9a^4b^4c^6$; **d)**$100^3=1000000$; **e)** $-a^6$ **e)** 1;
f) $-\dfrac{125x^6}{b^3}$; **g)** $\dfrac{a^{12}b^4}{16c^{12}}$

3.2.

1. a) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; $\left(\dfrac{4}{5}\right)^0$. **2.** b) 2; b) 128.

3. a) $\dfrac{1}{16}$; b) -16; c) 16; ç) -4; d) 1; e) $\dfrac{1}{15,1321}$. **4. a)** $\dfrac{3x}{4a^2c^3}$; b) $\dfrac{3a^2y^4}{2^2x^2}$; c) $\dfrac{5c^3x^3}{4a^5}$.

5. a) $xa^{-1}y^{-2}$; b) $3xc^{-1}y^3$; c) $2ax^2(a-b)^3$. **6. a)** $\dfrac{40}{5x^2c^3a^6}$; b) $\dfrac{25b}{a^5}$; c) $4x^2y^6$.

7. a) $2x^3+\dfrac{4}{x^3}$; b) $\dfrac{125}{8}x^9y^{24}$; c) $\dfrac{xy}{y-x}$; ç) $\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^2}$;

3.3.

1. a) $a=3$; b) $x=-2$; c) $a=b$. **2. a)** -4; b) $2,5$; c) -1; ç) $-\dfrac{1}{3}$; d) $\dfrac{2}{5}$.

3. $-3ab$ ve ab, $\dfrac{1}{2}a^2x$, $-a^2x$ ve $6a^2x$, $-7ax^2$ ve ax^2. **4.** $6ab$, $-a^2b^2$, $2ax$, $-\dfrac{x}{3}$, x^2y, $-0,5a$.

5. 4. **6. a)** Evet; b) Evet; c) Hayır. **7. a)** $2ab-5ab^2$; b) $1,2a-1,5b-ab$.

3.4.

1. a) $19x^4-4x^3+x^2$; b) $7xy$. **2. a)** $5x^2+5ax+8$; b) $3a^4+2a^3b+a^2b^2+3ab^3-b^4$.
3. a) $-8a$; b) $5x$; c) 0; ç) $3ax+ax^2$.
4. a) $2a^2x-3ax^2+8$; b) $5x^3y+xy^2+2xy-5x^2y-3$.
5. a) $-2x^2-5xy+6y^2$; b) $6x^2y-2xyz-2x^2z$.

3.5.

1. a) $10a^5b^4$; b) $-3a^2x^8y^4$; c) $\dfrac{3}{7}x^3y^5z$.
2. a) $-16x^5y+8x^4y^2+10x^3y^3-6x^2y^3$; b) $-9a^2b^3c^2+21a^3b^2c^3+3a^3b^2c^2$.
3. a) $x^3-5x^2y+4xy^2+8x^2-15xy-8y^2+10y+15x$;
b) $3a^6-15a^5b+26a^4b^2-28a^3b^3+17a^2b^4+20ab^5-9b^6$.
4. a) $x^2-10x+25$; **б)** $9c^2+12c+4$; b) $1-6x+9x^2$; c) $9x^2+y^2+25-6xy+30x-10y$;
ç) $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$; d) $64y^4+49z^2+112y^2z$; e) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$;
g) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$. **5. a)** $27-4x$; b) $-c^2$.

3.6.

1. a) $-4x$; b) $3ab$; c) $-\frac{3}{5}y$.

2. a) $4a-5b$; b) $-1+3x^2y^2$; c) $6ax-9a^2x^2+15a^3$; ç) $3x^2-2ax+5a^2$.

3. a) $3a^3-6a^2b+2b^2-4a^3b$; b) $-5x+2a-6x^2-8a^2x^3$; c) $x^2-9y^2-\frac{2x^2}{y}+\frac{y}{2}$

4. a) x^2-x+1; b) $2a^2b-3ab^2-b^3$; c) $3x^3-2x^2+x-1$. **5.**

3.7.

1. a) $3(x+2y)$; $2a(b-c)$; $7x^3(x^2+3)$.

2. a) $9b^3(3a-b)$; $ay(a-y^2)$; $3a(3x-2y+4z)$.

3. a) $(2a+5c)(b-3)$; b) $(a-b)(x+1)$; c) $(5-2x-2y)(x+y)$.

4. a) $(ab-2)(ab+2)$; b) $(10x-1)(10x+1)$;c) $\left(\frac{1}{3}a-c\right)\left(\frac{1}{3}a+c\right)$.

5. a) $(a-2)(a^2+2a+4)$; b) $(3x+1)(9x^2-3x+1)$; c) $(2m-n)(4m^2+2mn+n^2)$.

6. a) $(2a-b-c)(2a+b+c)$; b) $(x-y)(x+y-3)$; c) $(a-b)(x-y)(a^2+ab+b^2)$.

3.8.

1. a) 6; b) 15; c) 15; ç) 4. **2. a)** $3ab$; b) $3x^2y^2$; c) $a(a+b)^2$; ç) $x+y$; d) x^2-y^2.

3. a) 900; 168; 4500; 2880.

4. a) $120a^3b^3c^2$; b) $ab(x+2)$; c) $x(x+y)$; ç) $a^2(a+3b)(a-3b)$;

d) $x(1-x)(x^3+1)$; e) $15y(x-2y)^3(x+2y)$.

3.9.

1. a) x = 0 için anlamı yoktur, x=−2 için değeri 0 olur;
b) x =1 için anlamı yoktur, x = 3 için değeri 0 olur;
c) x= 2 ve x = 5 için anlamı yoktur, hçbir zaman değeri sıfır olamaz.

2. a) $\frac{3x}{4a}$; b) $\frac{3x^2}{y}$; c) $\frac{x-y}{a}$; ç) $\frac{1}{3a-1}$; d) $\frac{3}{a^2-2a+4}$; e) $-\frac{1}{3a}$.

3. a) $-\frac{1}{2a}$, $-\frac{1}{6}$; b) $x-2$; 1,5; c) -1.

4. a) $\frac{a+1}{a(a+1)}$ ve $\frac{2a}{a(a+1)}$; b) $\frac{20c^2}{30a^2b^3c^2}$, $\frac{25a^3}{30a^2b^3c^2}$ ve $\frac{6ab^2c}{30a^2b^3c^2}$; c) $\frac{a(x+y)}{(x+y)^2}$ ve $\frac{b}{(x+y)^2}$;

ç) $\frac{2x(x-y)}{x^2-y^2}$, $\frac{2y(x+y)}{x^2-y^2}$ ve $\frac{xy}{x^2-y^2}$; d) $\frac{10x}{2x(2x-1)}$ ve $\frac{x}{4x^2-2x}$;

e) $\frac{2a(a+x)}{a(a-x)(a+x)^2}$, $\frac{3ax(a^2-x^2)}{a(a-x)(a+x)^2}$ ve $\frac{5a^2(a-x)}{a(a-x)(a+x)^2}$.

3.10.

1. a) $\frac{3(a-1)}{b}$; b) $\frac{2(a+x+1)}{a}$. **2. a)** $\frac{x-2}{(x+1)(2x+1)}$; b) $\frac{6x-8}{(x-2)^2(x+2)}$.

3. a) $-\frac{1}{x^2+1}$; b) $\frac{7}{2(a+2)}$. **4. a)** $\frac{1}{2}$; b) $\frac{4x}{(x-3)(x+3)^2}$. **5. a)** $\frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}$; b) $-\frac{1}{2x}$.

6 a) $\frac{2y}{x-1}$; b) $\frac{3x}{2a}$.

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALAR

1. a) 28,27; **b)** -32 **2. a)** $\frac{33}{43}$; **b)** $-0,3$. **3. a)** x^8; **b)** a^7b^4; **c)** $\frac{a^3}{8c^3}$.

4. Tam rasyonel ifadeler a) ve ç), kesirli rasyonel ifadeler b) ve c).

5. a) Hayır; **b)**Evet. **6.** $5x^2+8x-7$. **7. a)** $4xy-3x$; **b)** $3x$. **8.** $-2x^2+5xy-y+2y^2$

9. a) $x^2+4xy-y^2$; **b)** $-c^2+4c-9$. **10. a)** 160801; **b)** 494209; **c)** 1004004.

11. $5a^2-a-122$. **12.** Polinomları bölünüz x^2+x+1.

13. a) $(a+3)(a^2+3)$; **b)** $(2a-b)(6x+y)$.

14. a) $(x^2-1)(x^3-1)$; **b)** $(x+y)(x^2-xy+y^2+2x)$.

15. a) $(a-b-c)(a-b+c)$; **b)** $(x+a)(x^2-3x+1)$.**16. a)** 15; **b)** 1. **17. a)** 1500 **b)** $30x^3a^4b^3$

18. a) $\frac{1}{y}$; b) $\frac{x+1}{x-1}$. **19.** $\frac{2a^3c}{abc}$, $\frac{5b^3a}{abc}$, ve $\frac{7c^3b}{abc}$. **20. a)** $\frac{1}{x^2-c^2}$; b) 4. **21.** $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$. **22.** 15.

Modüler Ünite 4

4.1.

1. Orantıların hepsi doğrudur. **2. a)** $x=4,8$; **b)** $x=15$; **c)** $x=1$. **3.** $x=4$, $y=12$, $z=12$.
4. $a:b:c:d=12:18:15:11$. **5.** Birinci kısım 60, ikincisi 180, üçüncüsü de 360 dir.

4.2.

1. a) Doğru orantılı, **b)** ters orantılı, **c)** Doğru orantılı, **ç)** ters orantılı.
2. Onlar doğru orantılı, orantı katsayısı 6 dır.
3. Hayır. **4.** Doğru orantılı bağıntı.
5. Ters orantılı bağıntı ve orantı katsayısı litre olarak ifade edilen havuzun hacmidir.

4.3.

1. 6 işçi. **2.** 57,6 kilogram şeker. **3.** 5 saat ve 24 dakika. **4.** 4 gün. **5.** 2400kW.

4.4.

1. a) 112,5 kilometre; b) 720 denar. **2.** %15. **3.** 35 öğrenci. **4.** 120 kilogram.
5. 1800 denar.

4.5.

1. a) 372, 558 ve 930; **b)** 900, 600 ve 360. **2.** 540, 360 ve 180.
3. 5913 denar, 9461 denar ve 11826 denar.
4. 300000 denar, 360000 denar ve 432000 denar.
5. 50000 denar, 45000 denar ve 40500 denar.

4.6.

1. a) 360 euro; **b)** 360 euro; **c)** 4080 euro. **2. a)** 3300; **b)** 3200; **c)** Semra. **3.** 7,5%.
4. 38465 denar. **5.** 16347 denar

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. a) 1:4; **b)** 2:5; **c)** …… **ç)** $1:3b$; **2.** 16:15. **3. a)** $x=6$; **b)** $x=3$; **c)** $x=\frac{ab}{a-b}$.

4. 16, 40, 56, 48. **5.** 480 denar. **6.** 864 metre küp. **7.** 27 işçi.
8. 1 saat ve 30 dakika. **9.** 5400 denar. **10.** 24 ton. **11.** 100 gün. **12. %**45,83
13. 18 denar. **14.** 40360000 kişi. **15.** 612 denar.
16. 600 litre, 800 litre, 440 litre, 320 litre ve 320 litre. **17.** 360000 denar. **18.** 18,5%.
19. 2572,5 denar. **20. a)** 4504,5 denar; **b)** 15004,5 denar.

Modüler Ünite 5

5.1.

1. a) Evet; **b)** Hayır; **c)** Hayır. **2. a)** $x = 2$; **b)** $x = \frac{9}{5}$; **c)** $x = \frac{2}{5}$; **ç)** $x = \frac{8}{5}$. **3.** $x = -3$.
4. a) Evet; **b)** Hayır; **c)** Evet.

5.2.

1. a) $x = 4$; **b)** $x = 6$. **2. a)** $x = 4$; **b)** $y = 13$. **3. a)** $x = \frac{5}{13}$; **b)** $x = \frac{26}{35}$.
4. a) $x = \frac{9}{4}$; **b)** $y \in {}^{\circ}$ ve $y \neq \pm 3$. **5. a)** $x = 1$; **b)** $x = -2$ **ve** $x = 1$.

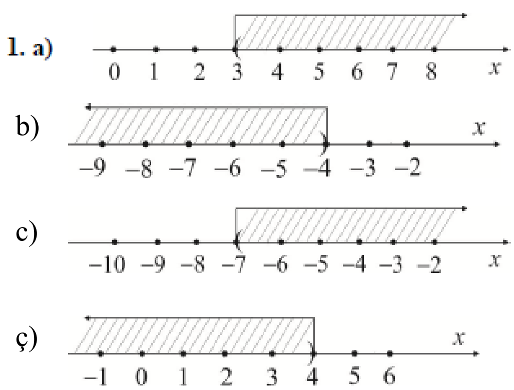
5.3.

1. 36. **2.** Anne 42 yaşında, Damla 14 yaşında. **3.** 1956, 5 denar.
4. Yan kenar $13cm$, tabanı$10cm$. **5.** 9 saat ve 20 dakika.

5.4.

1. a) Evet; **b)** Evet. **2. a)** Evet; **b)** Evet; **c)** Evet.

5.5.



2. a) $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ b) $(-1,\infty)$ c) $(-9,\infty)$. **3. a)** $\left(\frac{9}{7},\infty\right)$ b) $\varnothing$ c) $\left(\frac{55}{13},\infty\right)$
4. a) $(-\infty,2)$ b) $\left(\frac{13}{14},\infty\right)$ c) $\left(-\infty,\frac{70}{14}\right]$ **5.** En çok 32.

5.6.

1. $\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)$. **2.** $\left(\frac{8}{3},\infty\right)$. **3.** $\left(\frac{5}{2},\infty\right)$. **4.** $(-2,\infty)$. **5.** $(4,\infty)$. **6.** $\left(\frac{11}{7},11\right)$. **7.** $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$.
8. $\left(-\frac{3}{2},4\right)$. **9.** $(-5,-1)$. **10.** $(2,\infty)$. **11.** $(-\infty,\infty)$. **12.** $\left(\frac{9}{14},\infty\right)$.
13. 11 yıl çalıştıktan sonra.

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. a) $x = -2$; **b)** $u = 2$. **2. a)** $t = 12$; **b)** $w = -11$. **3. a)** ....; **b)** $x = \frac{3}{16}$.
4. a) Çözümü yoktur; **b)** $x = -5$. **5. a)** $y = -\frac{1}{4}$; **b)** $x = \frac{19}{5}$. **6. a)** $x = 0$ **ve** $x = 6$; **b)** $x = -2$.
7. 18 ve 20. **8.** Maide 14 yaşında, kardeşi ise 11 yaşındadır. **9.** $32cm$.

10. 4 saat. **11. a)** $(-\infty,6]$; b) $\left[1\frac{4}{31},\infty\right)$. **12. a)** $(-1,\infty)$; b) $\left(-\infty,\frac{3}{7}\right)$.

13. 12 pasta. **14.** $\left(-\frac{5}{2},4\right)$. **15.** $(-\infty,-4)$. **16.** $\left(\frac{13}{5},\infty\right)$.

17. Sistemin çözümü yoktur. **18.** $(7,\infty)$. **19.** $(-\infty,\infty)$.

20. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$. **21.** $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{5},\infty\right)$. **22.** $\left(\frac{5}{4},2\right)$.

Modüler Ünite 6

6.1.

1. a) $a = 6, b = -1$, **b)** $a = -2,\ b = 1$, **c)** ...., **ç)** .... **2. a)** $x_0 = 3$, **b)** $x_0 =$ .... , **c)** $x_0 = 4$, **ç)** .... **3. a)** $a = 2$, **b)** .... , **c)** $a = 1$. **4.** .... fonksiyonun grafiğine aittir. **5. a)** $a =$....... $b =$, **b)** $a = 5, b = 0$.

6.2.

1. f e monoton artan, g ve h monoton eksilendir. **2. a)** k .... , **b)** ...., **3. a)** $a = 1$. **b)** çünkü daima $a - 7 \neq a + 1$ olduğundan ilkleri a nın hiçbir değeri için paralel değildirler. **4. a)** (0,2) de kesişiyorlar, **b)** ….. noktasında kesişiyorlar, c) ordinat ekseninde kesişmiyorlar . **5. a)** $s = 2$, **b)** $s = -3$.

6.3.

1. $b =$ … **. 2.** $c = 9$ **. 3.** $2x - y = 12$**. 4.** $5x - 3y = 16$**. 5.** $(x, y) =$ ….. **.**

6.4.

1. a) $(2,1)$ **, b)** …... **2. a)** $(1,2)$ **, b)** ….. **. 3. a)** $(2,1)$ **, b)** …... **4. a)** $(1,2)$ **, b)** $(2,3)$**. 5. a)** $(10,2)$**, b)** $(3,2)$ **. 6. a)** $(4,3)$**, b)** $(3,2)$**.**

6.5.

1. 9 öğrenci, 1520 denar. **2.** 76 ve 54. **3.** 12 ve 8. **4.** 80° , 80° ve 20° . **5.** $24cm$ ve $12cm$

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

1. a) $x_0 = 1$, **b)** $x_0 = -\frac{11}{2}$, **c)** $x_0 = \frac{4}{5}$, **ç)** $x_0 = -\frac{11}{8}$. **2. a)** $a = -\frac{5}{2}$, **b)** $a = 13$, **c)** $a = -\frac{11}{4}$. **3. a)** $a = \frac{3}{7}$, $b =$ ….. , **b)** $a = 3, b = 0$. **4. a)** $k > -\frac{1}{3}$, **b)** $k > -\frac{1}{5}$**. 5. a)** $a = \frac{2}{13}$, **b)** $a = -8$. **6. a)** $m =$ … , **b)** $m = \frac{11}{3}$**. 7.** $b = \frac{7}{5}$**. 8.** $c = 10$. **9.** $2x - y = 8$.

$\left\{\left(x, \frac{5x+1}{3}\right) | x \in \mathbb{R}\right\}$. **11.** $(x,y)=(-2,-1)$. **12. a)** $(2,-3)$ b) $(2,1)$. **13. a)** $(1,2)$, $\left(\frac{18}{5}, \frac{4}{5}\right)$. **14. a)** $(3,2)$, b) $(2,1)$. **15. a)** $(1,2)$, b) $(1,-1)$. **16. a)** $\left(\frac{32}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{17}{7}, -\frac{2}{7}\right)$. **17. a)** $\left(\frac{55}{19}, \frac{29}{19}\right)$, b) $\left(\frac{17}{4}, \frac{7}{2}\right)$. **18.** topun fiyatı 1000 denardır. **19.** 80° 10°. **20.** $\left(\frac{61}{15}, \frac{83}{45}\right)$.

Modüler Ünite 7

7.1.

1. Hayır. **2.** Dikdörtgen, kare gibi eşit açıları olan dörtgendir.

7.2.

1. $A\ B\ C\ E \in p$, $M,N \notin p$.
2. Sonsuz çok eğri çizgi çizilebilir, fakat sadece bir doğru çizilir.
3. Sonsuz çok. **4. a)** doğru; **b)** doğru. **5. a)** Evet; **b)** Hayır. **6.** 3. **7.** $7cm$.
8. a) Evet; **b)** Evet; **c)** Hayır; **ç)** Evet. **9**. $2cm$, $0cm$, $4cm$, $0cm$, $7cm$.
10. Uzaklık, nokta ve eşitlik. **11.** K noktası S ve M arasındadır.
12. Onlar doğrudaştır ve şu sıraya göre sıralanmıştır: A,S, M, B.
13. B noktası A ve M arasındadır, ya da $B = A$ ya da $B = M$. **14.** Evet.
15. a) Olabilir; **b)** Olamaz. **16.** 3. **17. a)** 3; **b)** 4. **18.** AB doğru parçası
20. a) Teorem; **b)** Aksiom; **c)** Teorem; **ç)** Tanım.

7.3.

3. 8 konveks açı ve onlardan dördü doğru açıdır.
4. Her açının birbirine eşit olmak üzere iki komşu bütünler açısı vardır. **7.** Doğru açı.
8. a) Kırık çizginin sadece bir kenarı olacaktır, yani doğru parçası olacaktır;
b) Kırık çizginin üç kenarı olacaktır, yani üçgendir. **9. a)** 3; **b)** 4.

PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI

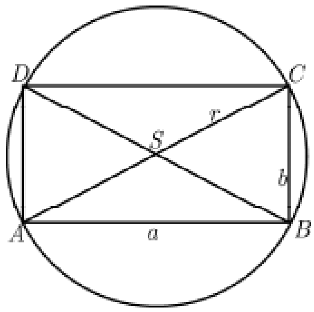
2. $5cm\ AB \leq 19cm$. **3. a)** Hayır; **b)** Evet; **c)** Evet; **ç)** Hayır; **d)** Evet, eğer $A \equiv B$. **4.** doğru değildir. **5. a)** Hayır; **b)** Evet.
6. İki nokta ile belirlidir: başlangıcı ve hrhangi diğer bir nokta.
7. Doğru, yarı doğru ya da iki ayrık yarı doğrusunun birleşimi.
8. a) İki ayrık yarı doğrunun birleşimi; b) iki nokta; c) doğru parçası.
9. a) Evet; **b)** Hayır; c) M noktası doğru parçasına ait olabilir ve ait olmayabilir.
10. $\frac{a+b}{2}$.
11. a) 4; **b)** 96; **c)** 2688 (28 günde), 2784 (29 günde), 2880 (30 günde), 2976 (31günde).
12. $\frac{\pi}{3}$. **13. a)** 1; **b)** 2; **c)** 4. **14.** $a \uparrow\uparrow c$, $d \uparrow\uparrow e$, $a \uparrow\downarrow b$, $b \uparrow\downarrow c$.
15. a) Yarı doğru; **b)** Yarı doğru. **16. a)** Boş küme, nokta ya da doğru parçası ; **b)** Doğru ya da ortak noktası olmayan iki yarı doğru.

Modüler Ünite 8

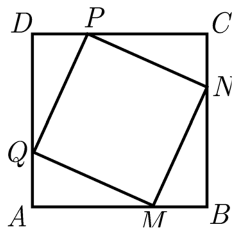
8,1

1. a) $a=\sqrt{P}=\sqrt{36}=6\text{cm}$ ve $d=\sqrt{2P}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}\text{cm}$.
2. a) $b=\frac{P}{a}=\frac{108}{12}=9dm$ ve $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=15dm$,
b). $a=\frac{L}{2}-b=\frac{246}{2}-80=43\text{cm}$ ve $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{80^2+43^2}=\sqrt{8249}\approx 90,8\text{cm}$.

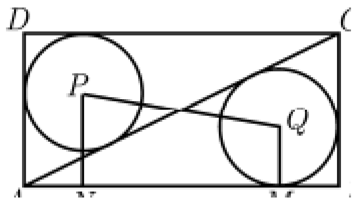
3. Dikdörtgenin köşegeni $d = 2r = 25$cm ve $b = 7$cm ise. O halde $a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\,\text{cm}$ ve alanı $P = ab = 24$ cm, ve alanı $P = ab = 24 \cdot 7 = 168$ cm^2 dir.



4. $ABCD$ karesinde $MNPQ$ karesi çizilmiş olsun. Ödevin koşuluna göre, $AM : MB = 2 : 3 = k$ olduğundan $AM = 2k$, $MB = 3k$, yani $AB = a = 5k$ ve $MN = a_1 = (3k)^2 + (2k)^2 = 13k^2$ elde edilir. Buna göre alanlarının oranı $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{13k^2} = \frac{25}{13}$ elde edilir.

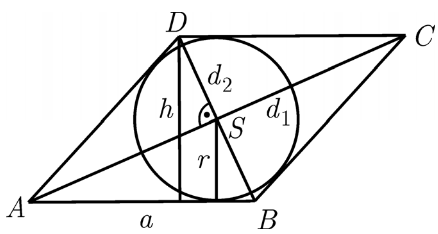


5. Pisagor teoremi gereğince $AC = 8^2 + 6^2 = 10cm$ elde edilir. $P = rs$ eşitliğinden, içten teğet çemberin yarıçapı $r = 2cm$ elde edilir. $MNPQ$ dörtgeni dik yamuktur ve burada P ve Q içten teğet çemberlerin merkezleri, N ve M ise dikdörtgenin AB kenarı üzerinde bu merkezlerin dikme ayaklarıdır. Buna göre $\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}cm$ elde edilir.



6. $b = \frac{L}{2} - a = \frac{124}{2} - 12 = 50dm$ ve $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$.

7. Eşkenar dörtgende köşegenler , aynı zamanda açıların açıortayları olduğuna göre, içten teğet çemberin merkezi köşegenlerin kesişim noktasında olacaktır. Buna göre $h = 2r = 4{,}8$cm olduğunu buluyoruz. $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ alan formülünden $4{,}8a = \frac{6d_1}{2}$ yazarak $d_1 = 1{,}6a$ elde edilir. ABS dik üçgeninde $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$ eşitliğinden $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ elde edilir. Dolayısıyla $(1{,}6a)^2 + 6^2 = 4a^2$ eşitliğinden $a = 5$cm bulunur. O halde alanı $P = ah = 4{,}8 \cdot 5 = 24$cm^2 dir.



8.2.

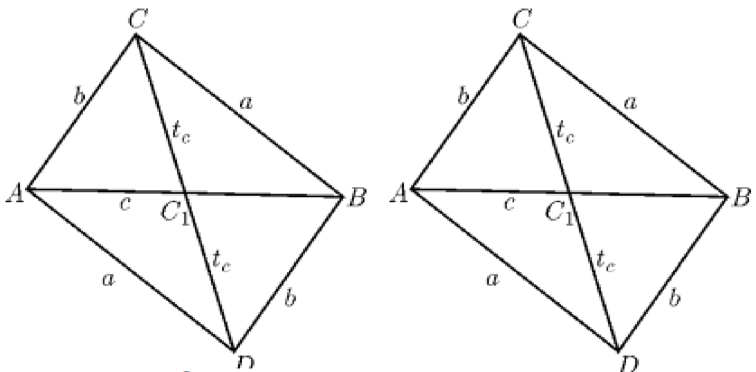
1. $P=\sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14}=\sqrt{7056}=84$, burada $s=\dfrac{a+b+c}{2}=24$, $h_a=\dfrac{2P}{a}=8$,
$h_b=\dfrac{2P}{b}=\dfrac{168}{17}$ ve $h_c=\dfrac{2P}{c}=16.8$, $r=\dfrac{P}{s}=\dfrac{84}{24}=\dfrac{7}{2}$, $R=\dfrac{abc}{4P}=\dfrac{85}{8}$ ve $L=2s=48$.

2. $P=\dfrac{ah_a}{2}=60\text{cm}^2$, $h_a=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\text{cm}$, $h_b=\dfrac{2P}{b}=\dfrac{120}{13}\approx 9{,}2\text{cm}$, $r=\dfrac{P}{s}=\dfrac{10}{3}\text{cm}$,
burada $s=\dfrac{a+2b}{2}=18\text{cm}$, $R=\dfrac{ab^2}{4\dfrac{bh_b}{2}}=\dfrac{ab}{2h_b}=\dfrac{130}{\dfrac{240}{13}}=\dfrac{169}{24}\text{cm}$ ve $L=2s=36$ cm elde edilir.

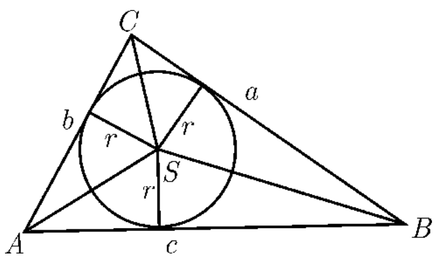
3. $a=29$cm, $b=27$cm ve $t_c=CC_1=26$cm olsun. $CD=2t_c$ olmak üzere D noktası C ve C_1 ile doğrudaş olsun. O halde $\Delta AC\,C_1\cong BC\,D_1$ ve $\Delta AC\,D_1\cong \Delta BC\,C_1$ (çünkü $AC_1=C\,B_1 = c$, $CC_1=C\,D_1=t_c$ ve $\sphericalangle AC\,C_1=\sphericalangle DC\,B_1$ dir), dolayısıyla $ADBC$ dörtgeni paralelkenardır. O halde aranılan alan:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{P_{ADBC}}{2}=\frac{2P_{\Delta ADC}}{2}=P_{\Delta ADC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-2t_c)}\ ,\quad s=\frac{a+b+2t_c}{2}=54\,\text{cm}$$

olduğuna göre $P_{\Delta ABC}=\sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}=270\,\text{cm}^2$ elde edilir.

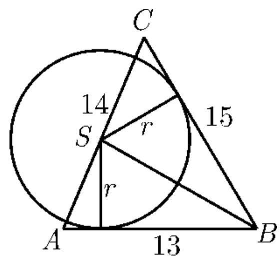


4. $P_{\Delta ASB}=36=\dfrac{cr}{2}$, $P_{\Delta ASC}=40=\dfrac{br}{2}$ и $P_{\Delta CSB}=68=\dfrac{ar}{2}$



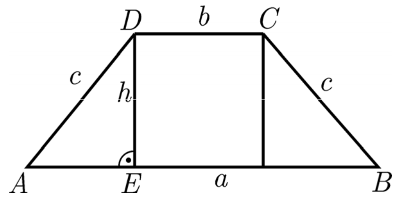
olduğuna göre $cr=72$, $br=80$ ve $ar=136$ elde edilir, oradan da $a:b:c=136:80:72=17:10:9$ orantısı elde edilir. Demek ki, $a=17k$, $b=10k$ ve $c=9k$ dir, burada $k>0$ orantı katsayısıdır. s üçgenin çevresinin yarısı olduğunu alırsak $s=\dfrac{a+b+c}{2}=18k$ elde edilir.

Üçgenin alanı 144cm^2 ve Heron formülünden $144=\sqrt{18k\cdot 9k\cdot 8k\cdot k}$, yani $144=36k^2$ elde edilir, oradan da $k=2$ olduğunu buluyoruz. Dolayısıyla $a=34$cm, $b=20$cm ve $c=18$cm elde edilir.



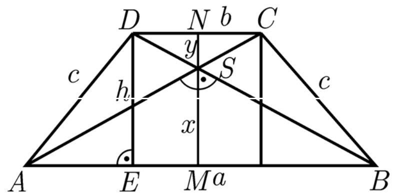
5. $a=15$cm, $b=14$cm ve $c=13$cm olsun. Üçgenin alanı $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=84\,\text{cm}^2$ dir. Çemberin merkezi S ve yarıçapı r olsun. O halde $P=P_{\Delta ABS}+P_{\Delta SBC}=\dfrac{cr}{2}+\dfrac{ar}{2}$, т.е. $84=14r$ ve $r=6$cm elde edilir.

8.3.



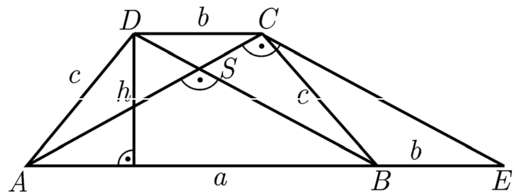
1. Yandaki şekle göre ΔAED ikizkenar dik üçgendir, o halde $AE = 3cm$, yani büyük kenarın uzunluğu $a = 2\cdot 3 + 12 = 18cm$, oradan da

$P = \frac{(18+12)\cdot 3}{2} = 45cm^2$ elde edilir.



2. 1. yöntem. Köşegenlerin kesişim noktasını S ile işaret edelim. O halde ΔABS yüksekliği $SM = x$ olan ikizkenar dik üçgendir. Euklit teoreminden $x^2 = AM \cdot MB$, yani $x = 10cm$. Benzer şekilde ΔCDS den $y = SN = 6cm$ elde edilir. Sonunda $h = x + y = 16cm$ olduğuna göre

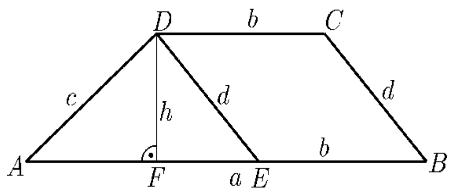
$P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$ elde edilir.



2. yöntem. C noktasından BD ile paralel doğru çizersek, bu doğru AB kenarının uzantısını E noktasında kesecektir. Bu durumda $BECD$ paralelkenarı elde edilir, ΔAEC ikizkenar dik üçgendir ve hipotenüsü $AE = 32cm$ olduğuna göre, Euklit teoreminden

$h^2 = \left(\frac{32}{2}\right)^2$, yani $h = 16cm$ dir. Dolayısıyla yamuğun alanı

$P = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$ olduğunu buluyoruz.



3. E noktası $EB = b$ olmak üzere AB kenarı üzerinde bir nokta olsun. O halde $EBCD$ paralelkenar olarak $DE = d$ dir. Dolayısıyla $AE = a - b = 9$cm dir. Şimdi yamuğun yüksekliğini hesaplayabiliriz (bu yükseklik AED üçgeninin yüksekliğidir).

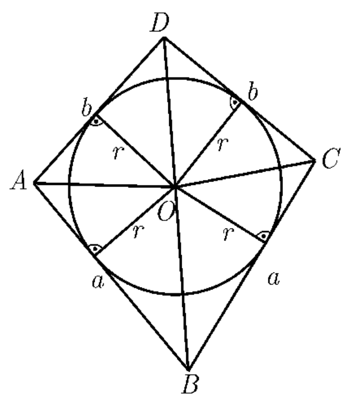
$s = \frac{9+17+10}{2} = 18$ olduğuna göre, $P_{\Delta AED} = 18(18-9)(18\ 17)(18\ 10) = 36cm^2$

elde edilir. Oradan $\frac{h(a-b)}{2} = 36$, yani $9h = 72$ ve $h = 8$cm

olduğunu buluyoruz. Dolayısıyla $P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{31\cdot 8}{2} = 124\text{cm}^2$ elde edilir.

Yamuğun alanı

$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{31\cdot 8}{2} = 124\text{cm}^2$ dir.

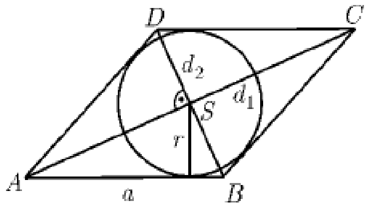


4. $a = 5$, $b = 4$, $r = 2$ ve O deltoide içten teğet çizilen çemberin merkezi olsun. Bu durumda aranılan alan

$P = P_{\Delta AOB} + P_{\Delta BOC} + P_{\Delta COD} + P_{\Delta DOA} =$

$= \frac{r}{2}(2a+2b) = r(a+b) = 18.$ elde edilir.

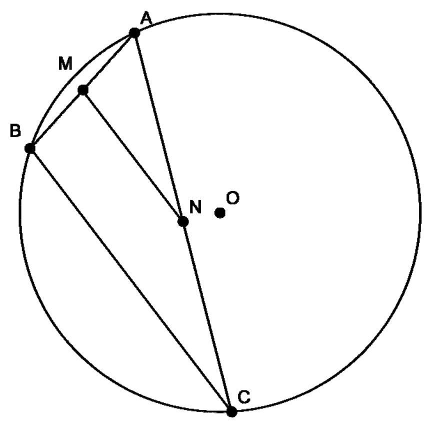
5. $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$ eşitliğinden $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ elde edilir. Eşkenar dörtgende r yarıçaplı içten teğet çember çizildiğine göre $h = 2r$ dir. O halde eşkenar dörtgenin alanı için $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot 2r$ eşitliği geçerlidir.



Oradan $d_1 \cdot d_2 = 4ar$ elde edilir. Ödevdeki koşula göre $6a = d_1 + d_2$ dir. Bu eşitliğin iki tarafının karesi alınarak, $d_1 \cdot d_2 = 4ar$ ile değiştirmekle $4a^2 - ar = 0$ denklemi ya da $a(4a - r) = 0$ elde edilir. Buna göre $a = 0$ olabilir, fakat a eşkenar dörtgenin kenarının uzunluğu olduğundan sıfır olamaz. O halde $a = \frac{r}{4}$ olmalıdır.

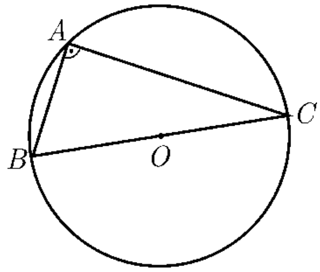
8.4.

1. Kirişleri $AB = 9$cm ve $AC = 17$cm ve onların orta noktalarını sırasıyla M ve N ile işaret edelim. MN doğru parçası ABC üçgeninin orta tabanıdır. O halde $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$, yani $BC = 10$cm dir. Heron formülünü uygulayarak $P_{\Delta ABC} = 36\text{cm}^2$, dolayısıyla



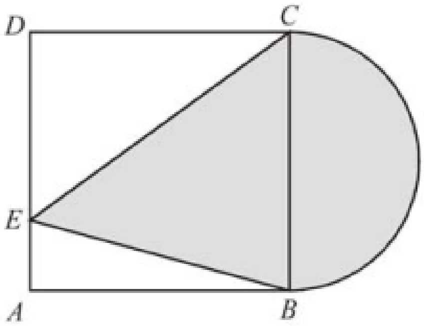
$R = \frac{abc}{4P} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot 36} = \frac{85}{8}\text{cm}$ elde edilir.

2. ABC dik üçgen olduğundan, çevrel çemberinin merkezi, BC hipotenüsünün orta noktasındadır. Pisagor teoremine göre $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10cm$ dir, o halde çemberin yarıçapı $r = 5cm$ dir. Buna göre aranılan alan $P = 25\pi cm^2$ dir.



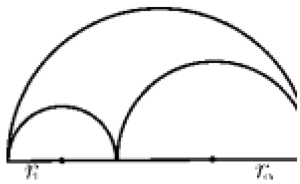
3. Taralı bölgenin alanı, yarıçapı $r = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2}cm$ olan yarım dairenin ve tabanı $a = 2\ \ 2$ ve yüksekliği $h = \overline{AB} = 2\sqrt{2}cm$ olan üçgenin alanlarının toplamıdır. Buna göre taralı bölgenin alanı

$$P = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 = (\pi + 4)cm^2 \text{ dir.}$$



4. Şekle göre $r_1 + r_2 = R$ dir. Bu eşitliğn karesini almakla $r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = R^2$ elde edilir. O halde kalan kısmın alanı, yarım dairenin alanından iki yarım dairenin alanlarının toplamını çıkararak elde edilir. Dolayısıyla

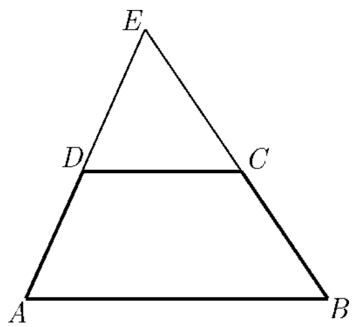
$$P = \frac{R^2\pi}{2} - \left(\frac{r_1^2\pi + r_2^2\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(R^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = r_1r_2\pi \quad \text{yani}$$



$P = 21\pi cm^2$ elde edilir.

5. $P = 4cm^2$

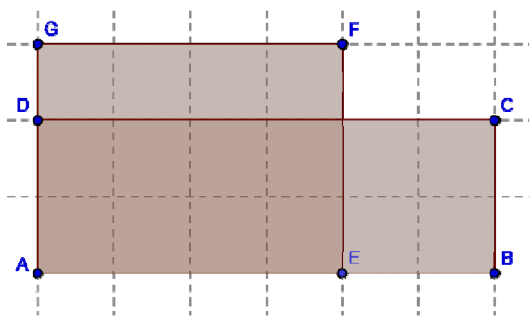
PEKİŞTİRME ALIŞTIRMALARI



1. $AD = c = 8$ ve $DE = x$ olsun, E yamuğun yan kenarlarının kesişim noktasıdır. $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ benzerliğinden

$$\frac{25}{15} = \frac{8+x}{8}$$

gerekir. Oradan $x = 12$ elde edilir. Alıştırmadaki koşuldan $\sphericalangle AEB = 90^\circ$ dir. Pisagor teoreminden DCE dik üçgeninde $CE = 9$. Pisagor teoreminden ABE üçgeninde $BE = 15$. Oradan $BC = 6$ elde edilir. Buna göre yamuğun çevresi $L = 54$ elde edilir. Yamuğun alanı $P = P_{ABE} - P_{DCE} = 150 - 54 = 96$ dır.



2. Eski dikdörtgeni $ABCD$ ile işaret edelim. Burada $AB = a$ ve $BC = b$ dir. Alıştırmadaki koşula göre $a = 3b$ dir. $AEFG$ ile yeni dikdörtgeni işaret edersek

$$\overline{AE} = \overline{AB} - 18 = 3b - 18$$
$$\overline{EF} = \overline{BC} + 8 = b + 8.$$

olur.

Boyama için boya miktarı aynı olduğuna göre :

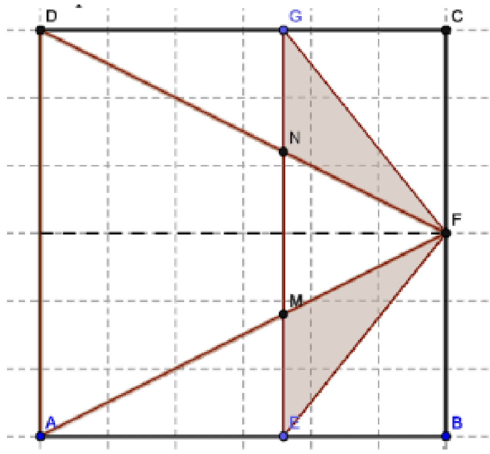
$P_{ABCD} = P_{AEFG}$, yani $3b^2 = (3b-18)(b+8)$, ya da $3b^2 = 3b^2 + 24b - 18b - 144$, oradan $b = 24cm$ elde edilir.

Buna göre $L_{AEFG} = 2\,(3\cdot 24 - 18 + 24 + 8) = 172cm$ elde edilir.

3. Alıştırmadaki koşula göre

$$P_{\Delta GEF} = \frac{36\cdot 12}{2} = 216\ cm^2$$ elde edilir.

GE kenarının AF ve DF kesişim noktalarını sırasıyla M ve N ile işaret edersek, aranılan alan $P = P_{\Delta GEF} - P_{\Delta NMF}$ dir. Buna göre, NMF üçgeninin alanını belirtmemiz kalıyor.



ABF ve AEM benzer üçgenlerdir ve onlara $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}}$ yani $\frac{36}{18} = \frac{36-12}{\overline{EM}}$ geçerlidir, oradan $EM = 12cm$ elde edilir. Benzer şekilde DFC ve DNG benzer üçgenlerdir, oradan $GN = 12cm$ bulunur. Demek ki $MN = 36 - 2\cdot 12 = 12cm$ dir.

Sonuç olarak $P_{\Delta NMF} = \frac{12\cdot 12}{2} = 72\ cm^2$ elde edilir, oradan $P = P_{\Delta GEF} - P_{\Delta NMF} = 216 - 72 = 144cm^2$ olduğunu buluyoruz.

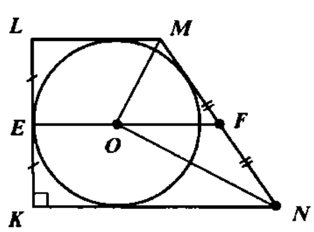
4. **1. yöntem.** Aranılan alan, kenarları $10cm$ ve $2cm$ olan bir dikdörtgen, katetleri $6cm$ ve $8cm$ olan bir dik üçgen ve kenarları $8cm$ ve $4cm$ oaln dikdörtgenin alanlarının toplamına eşittir. O halde, $P = 20 + 24 + 32 = 76cm^2$ elde edilir.

2. yöntem. $P = 10\cdot 10 - \frac{6\cdot 8}{2} = 76\ cm^2$.

5. BCE ikizkenar dik üçgendir, $CE = BE = 2m$. Bu durumda $\overline{AE} = 4-\sqrt{2}, \overline{DE} = 4+\sqrt{2}$ dir. Demek ki,

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2 + \left(4+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16 + 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{32+4} = 6m$$

dir.



6. O çemberin merkezi olsun. O halde MO ve NO doğru parçaları M ve N köşelerindeki açıların açıortaylarıdır, buna göre

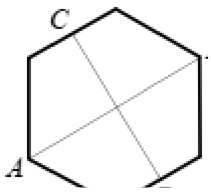
$$\measuredangle OMN + \measuredangle ONM = \frac{1}{2}\measuredangle KNM + \frac{1}{2}\measuredangle LMN = \frac{1}{2}180^0 = 90^0$$, oradan da

ΔOMN dik üçgen olduğunu elde ediyoruz. Dolayısıyla $MN = 10$ elde edilir. ΔOMN üçgeninin O noktasından çizilen yüksekliği h olsun. O halde

$P_{\Delta OMN} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = \frac{1}{2}10h$, yani h = 4,8. Buna göre LE =EK= 4,8 olduğuna göre LK = 9,6. Yamuk, teğetler dörtgeni olduğuna göre KL + MN = LM + KN dir, yani LM+ KN = 9,6+10 =19,6. Sonuç olarak EF =.... = 9,8 elde edilir.

7. Altıgenin kenarının uzunluğu a olsun. Alıştırmadaki koşula göre

$$60 = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad a^2 = \frac{40}{\sqrt{3}}, \text{ yani } a = \sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} \text{ elde edilir.}$$



Buna göre, $\overline{AB} = 2a = 2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$ dir. Kenarı a olan eşkenar üçgenin yüksekliği h olduğuna göre, CD doğru parçasının uzunluğu CD = 2h dir. Buna göre, $\overline{CD} = 2h = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$ elde edilir. Sonuç olarak, $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} = 2\cdot 40 = 80$ elde edilir.

8. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$.

9. 90. **10.** 15cm . **11.** 48cm^2. **12.** P = 84π. **13.** **….** :2 **14.** 18 3

15. $a = \frac{2}{3}r$. **16.** $1024cm^2$. **17.** $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{17k^2} = \frac{25}{17}$. **18.** $P = 48cm^2$.

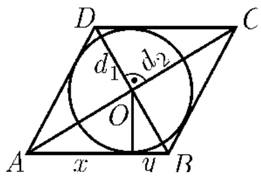
19. 1. durum. Çemberin merkezi ABC üçgeninin CD yüksekliğine aittir . AB = a , AC = b, AO = R ile işaret edelim. Bu durumda $\overline{AD} = \frac{a}{2}$ ve ΔADC ve ΔADO dik üçgenlerdir. Pisagor teoremini uygulayarak $\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ve $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{OD}^2$ elde edilir. $\overline{OD} = \overline{CD} - \overline{CO} = \overline{CD} - R$ olduğundan $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + R^2$, yani $b^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 0$ oradan da $R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$ elde edilir.

2. durum. Çemberin merkezi ABC üçgenindeki CD yüksekliğinin uzantısı üzerinde olsun. AB = a , AC = b , AO = R ile işaret edelim. Bu durumda $\overline{AD} = \frac{a}{2}$, ΔADC ve ΔADO dik üçgenlerdir. Pisagor teoremini uygulamakla $\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ve $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{OD}^2$ elde edilir. $\overline{OD} = \overline{CO} - \overline{CD} = R - \overline{CD}$ olduğuna göre,

$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + R^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, yani $b^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 0$, oradan da

$R = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}$ elde edilir. Sonuç olarak, çevrel çemberin yarıçapı, üçgenin hangi türden olduğuna bağlı olmadığını görüyoruz.

20. $a^2 = \left(\dfrac{30}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{40}{2}\right)^2$ yani, $a = 25cm$ olduğu açıktır.



$h = 2r$ ve $ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ eşitliklerinden $r = \dfrac{d_1 d_2}{4a} = 12cm$ elde edilir.

ΔABO dik üçgen olduğuna göre, Euklit teoremine göre, $r^2 = xy$ eşitliği geçerlidir. Burada x ve y, eşkenar dörtgende içten teğet çemberinin bir kenara değme noktasıyla ayırdığı parçalardır. Kenarın büyük kısmını $\begin{cases} x + y = 25 \\ xy = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 - x \\ x^2 - 25x + 144 = 0 \end{cases}$ sistemin çözümüyle elde edeceğiz.

Oradan $x_1 = 16cm$, $x_2 = 9cm$ ve karşılıklı olarak $y_1 = 9cm$, $y_2 = 16cm$ elde edilir. Demek ki, büyük kısım $16cm$ dir.