Biljana Krsteska Jasmina Markoska

MATEMATIKA

Për vitin I të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar

Drejtimi për mjekësi
Drejtimi për bujqësi-veterineri
Shërbime personale
Drejtimi për tekstil-lëkurëpunues
Drejtimi për pylltari-drupunues

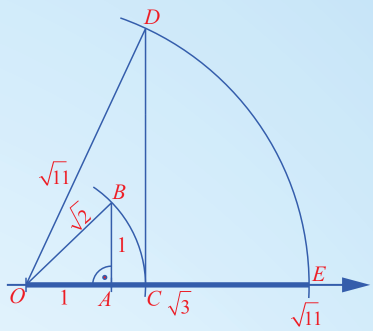
Shkup, 2022

Biljana Krsteska

Jasmina Markoska

MATEMATIKA

Për vitin I të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar



Drejtimi për Mjekësi

Drejtimi për Bujqësi – Veterineri

Drejtimi për Tekstil-Lëkurëpunues

Shërbime personale

Drejtimi për Pylltari- Drupunues

Biljana Krsteska **Jasmina Markoska**

MATEMATIKA

Për vitin I të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar

Drejtimi për Mjekësi
Drejtimi për Bujqësi – Veterineri
Drejtimi për Tekstil-Lëkurëpunues
Shërbime personale
Drejtimi për Pylltari- Drupunues

Titulli:
MATEMATIKA
për vitin e I të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar
(Drejtimi për shëndetësi, Drejtimi për bujqësi-veteriner, Shërbime personale, Drejtimi për tekstil -lëkurëpunues, Drejtimi për pylltari- drupunues)

Autorë:
Biljana Krsteska
Jasmina Markoska

Recensentë:
Dr. Marija Orovçanec Fakulteti matematiko-natyror, Shkup
Violeta Peshevska ShMKP„Kiro Burnaz", Kumanovë
Rade Krenkov Shkolla e mesme profesionale „Dimitar Vllahov", Strumicë

Titulli i botimit origjinal:
МАТЕМАТИКА
за I година на средното стручно четиригодишно образование
(Здравствена струка, Земјоделско-ветеринарна струка, Лични услуги, Текстилно-кожарска струка, Шумарско-дрвопреработувачка струка)

Botues:
Ministria për Arsim dhe Shkencë e Republikës së Maqedonisë së Veriut
Rr. "Shën Kirili dhe Metodi", nr. 54, 1000 Shkup

Përktheu nga gjuha maqedone:
Skender Ameti

Lektor:
Mirsad Rakipi

Redaktor profesional i botimit në gjuhën shqipe:
Ismail Ameti

Radhitja kompjuterike:
Arbëria Design (Gavrilo Angeloski)

Ilustrimet:
Autorët

Vendi dhe viti i botimit:
Shkup, 2022

Me vendimin për miratim të librit shkollor MATEMATIKA për vitin I të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar (Drejtimi për shëndetësi, Drejtimi për bujqësi-veteriner, Shërbime personale, Drejtimi për tekstil-lëkurëpunues, Drejtimi për pylltari dhe drupunues) nr. 26- 2024/1 të datës 9.11.2020 i miratuar nga Komisioni nacional për libra shkollor.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)

KRSTESKA, Biljana
Matematika : Електронски извор : për vitin I të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar : drejtimi për mjekësi, drejtimi për bujqësi-veterineri, drejtimi për tekstil-lëkurëpunues, shërbime personale, drejtimi për pylltari-drupunues / Biljana Krsteska, Jasmina Markoska ; [përktheu nga gjuha maqedone Skender Ameti]. - Shkup : Ministria për arsim dhe shkencë e Republikës së Maqedonisë së Veriut, 2022

Начин на пристапување (URL):
https://www.e-ucebnici.mon.gov.mk/pdf/Matematika_1_albanski.pdf. -
Превод на делото: Математика за I година на средното стручно четиригодишно образование : (здравствена струка, земјоделско-ветеринарна струка, лични услуги, текстилно-кожарска струка, шумарско-дрвопреработувачка струка). - Текст во ПДФ формат, содржи 172 стр., граф. прикази. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 16.08.2022

ISBN 978-608-273-065-3

1. Markoska, Jasmina [автор]

COBISS.MK-ID 57981189

PARATHËNIE

Libri shkollor MATEMATIKA për vitin e parë të arsimit të mesëm profesional katërvjeçar është shkruar sipas programit mësimor të lëndës së detyrueshme përkatëse. Është dedikuar për nxënësit nga Drejtimi për shëndetësi (mjekësi), Drejtimi për bujqësi-veteriner, Shërbime personale, Drejtimi për tekstil- lëkurëpunues dhe Drejtimi për pylltari- drupunues.

Autorët synojnë t'i përpunojnë përmbajtjet e parapara në përputhje me rekomandimet didaktike – metodike për realizim të programit.
Libri shkollor është dizajnuar në mënyrë modulare dhe përbëhet prej tetë tërësive tematike:

- Matematika logjike dhe bashkësitë
- Numrat real
- Shprehjet algjebrike racionale
- Proporcioni i madhësisë
- Barazimet lineare, jobarazimet dhe sistemi i jobarazimeve lineare
- Funksioni linear dhe sistemi i barazimeve lineare me dy të panjohura
- Figurat gjeometrike në rrafsh
- Syprina dhe perimetri i figurave në rrafsh

Në kuadër të secilës temë mësimore janë përpunuar përmbajtjet e parapara, të cilat, sipas rendit, janë ilustruar me shembuj të zgjidhur dhe vizatime. Në fund të secilës njësi mësimore janë dhënë detyra për punë të pavarur gjatë orës ose për detyrë shtëpie, që paraqet vazhdimësi të punës në orë, kurse në fund të çdo teme mësimore janë dhënë detyra për përsëritje dhe përforcim të materialit. Zgjidhjet dhe përgjigjet e detyrave, si dhe sipas përzgjedhjes së autorëve, në disa detyra jepen edhe udhëzime për zgjidhjen e tyre, janë dhënë në fund të librit.

Autorët paraprakisht do të jenë falënderues për çfarëdo kritikë mirëdashëse ose vërejtje për përmirësim të përmbajtjes, meqenëse besojnë se ky libër do të kontribuoj që nxënësit më tepër ta duan matematikën dhe të njihen me fshehtësitë e saja.

Mars, 2020 Autorët

PËRMBAJTJA

1. MATEMATIKA LOGJIKE DHE BASHKËSITË

1.1. Kuptimi për gjykim

Njerëzit çdo ditë komunikojnë me ndihmë të fjalive të cilat mund të jenë rrëfyese (deklarative), pyetëse, urdhërore, pasthirrma...Me interes të veçantë në matematikë janë fjalitë deklarative të cilat kanë kuptim dhe vlen njëra nga dy mundësitë gjegjësisht është e vërtetë (e saktë) ose jo e vërtetë (e pasaktë).

Shembull 1. Fjali deklarative janë:

a) Shkupi është kryeqyteti i atdheut tonë

b) 1 është numër tek

c) $4 < 2$

ç) $2^2 + 3^2 = 5^2$ dhe për këto dimë se janë të vërteta (siç janë a) dhe b)) ose jo të vërteta (siç janë c) dhe ç)). ♦

> **Definicion.** Fjalia deklarative për të cilën është e mundur të konstatohet vallë është e vërtetë ose jo e vërtetë quhet **gjykim**.

Çdo fjali deklarative nuk paraqet gjykim.

Shembulli 2. Fjalitë:

a) Matematika është lënda më e mirë

b) Të premten të gjithë janë të gëzuar

c) $5x - 2 > 3$

nuk janë gjykime, pasi që përmbajnë konstatime të cilat ndonjëherë janë të vërteta, kurse ndonjëherë jo të vërteta. ♦

Detyra 1. Përcakto cilat nga fjalitë e dhëna janë gjykime. Shpjego përgjigjen!

a) Dy kënde janë suplementar nëse dhe vetëm nëse shuma e tyre është 180°

b) Shtatori është muaji më i mirë i vitit

c) $x + 7 = 11$

ç) 16 është numër i thjeshtë

Zgjidhje. a) është gjykim i cili është i saktë, b) nuk është gjykim meqenëse për disa njerëz shtatori nuk është muaji më i mirë i vitit, c) nuk është gjykim meqenëse për $x = 4$, vlen $4 + 7 = 11$, kurse për $x = 5$, $5 + 7 \neq 11$, ç) është gjykim i cili nuk është i saktë meqenëse numri i thjeshtë ka saktësisht dy pjesëtues, kurse 16 ka 5 pjesëtues. ♦

Secilit gjykim mund t'i shoqërojmë vetëm njërën nga vlerat: **i vërtetë** (shenja: T, lexohet: „të") ose **jo i vërtetë** (shenja $\perp$, lexohet: „jo të"). Këto vlera i quajmë **vlera vërtetësie**, kurse për gjykime përkatëse themi se janë të vërteta ose të pa vërteta.

Gjykimet zakonisht i shënojmë me shkronja të vogla latine: *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, ..., kurse për vlerën e vërtetësisë të ndonjë gjykimi e përdorim shkronjën τ, lexohet: „tau".

Shembulli 3. Nëse p është gjykimi 1 është numër tek (shkruajmë p : 1 është numër tek), atëherë shënimi $\tau\ (p) = \mathrm{T}$ do të thotë se p është gjykim i vërtetë. ♦

Detyra 2. Konstato vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) p: 122-11=12

b) q: $2x + 5 = 3$, për $x = -1$

c) r : $2^4 = 4^2$

Zgjidhje. $\tau(p) = \perp$, $\tau(q) = \mathrm{T}$ dhe $\tau(r) = \mathrm{T}$.♦

Shembulli 4. Le të jenë dhënë gjykimet p : 2 është numër çift dhe q : 2 është pjesëtues i 10. Me ndihmën e tyre mund të formohen fjalitë:

a) 2 nuk është pjesëtues i 10

b) 2 është numër çift dhe 2 është pjesëtues i 10

c) 2 është numër çift ose 2 është pjesëtues i 10

ç) Nëse 2 është numër çift, atëherë 2 është pjesëtues i 10

d) 2 është numër çift nëse dhe vetëm nëse 2 është pjesëtues i 10

Kështu që gjatë formimit të fjalive janë përdorur fjalët: „jo“, „dhe“, „ose“, „nëse..., atëherë...“, „...nëse dhe vetëm nëse ...“. Themi se në këtë mënyrë nga gjykimet **elementare** (të thjeshta) p dhe q, kemi formuar gjykime të **përbëra**.

Procedura me të cilën nga gjykimet elementare fitojmë gjykime të përbëra quhet **operacion logjik**. ♦

Detyra

1. Cilat nga fjalitë e dhëna janë gjykime?

a) Ngjyrën e verdh e duan të gjithë

b) $9 = 2 + x$

c) $9 = 2 + x$, për $x = 3$

ç) $a + b = b + a$, për çdo numra natyror a dhe b

2. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $2 \mid 15$

b) 19 është numër i thjeshtë

c) 45 është shumëfishi më i vogël i përbashkët i 9 dhe 15

ç) $\frac{3}{5} > \frac{5}{3}$

3. Cakto me çka është e barabartë:

a) $\tau\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+2}{4+3}\right)$

b) $\tau(3 \mid 21)$

c) $\tau(-5 > -2)$

ç) $\tau(0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6)$

4. Cakto cili nga gjykimet e dhëna është i thjeshtë, dhe cili i përbërë?

a) Diagonalet në çdo romb janë reciprokisht normale dhe përgjysmohen

b) Këndet mbi bazën e trekëndëshit barakrahës janë të barabarta

c) Një numër është i pjesëtueshëm me 5 nëse mbaron me shifrën 0 ose 5

ç) Numri 14 pjesëtohet me 2, por nuk pjesëtohet me 4

1.2. Operacione me gjykime

Negacioni

Shpeshherë kemi nevojë të shënojmë gjykim (pohim) i cili është i kundërti i gjykimit (pohimit) tjetër. Në atë mënyrë formojmë gjykim të ri i cili në vete përmban negacion të gjykimit ose pohimit.

Shembulli 1. Le të jetë dhënë gjykimi p : 7 është numër çift. Gjykimi i kundërt shfaqet me negacionin, d.m.th. „Nuk është e vërtetë se 7 është numër çift" ose „7 nuk është numër çift" ose „7 është numër tek".♦

Në rastet e këtilla themi se kemi formuar **negacion** të gjykimit p dhe shkruajmë $\neg p$ (lexohet: „jo p ").

Definicioni. Negacion i gjykimit p quhet gjykimi $\neg p$, i cili është i vërtetë kur gjykimi p është jo i vërtetë dhe anasjelltë.

Me fjalë tjera, nëse $\tau(p)$ = T, atëherë $\tau(\neg p) = \perp$ dhe anasjelltë. Sipas kësaj mund të ndërtojmë **tabelën e vlerave të vërtetësisë** për negacionin:

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
T	$\perp$
$\perp$	T

ose

p	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

Shembulli 2. Le të jetë dhënë gjykimi p : 5 është numër i thjeshtë. Atëherë $\neg p$ është gjykimi „5 nuk është numër i thjeshtë", kurse gjykimi $\neg\neg p$ është gjykimi „Nuk është e vërtetë se 5 nuk është numër i thjeshtë".

Gjykimi i fundit ka domethënien të njëjtë sikurse gjykimi p, prandaj vlen $\neg\neg p = p$.♦

Detyra 1. Ndërto negacion të gjykimeve:

a) p :Katrori është drejtkëndësh

b) q : 2 =3

c) r : 4 është numër i përbërë

ç) s: 5 > 8

Zgjidhje. a) $\neg p$: Katrori nuk është drejtkëndësh, **b)** $\neg q$: $2 \neq 3$, **c)** $\neg r$: 4 nuk është numër i përbërë dhe **ç)** $\neg s$: 5 nuk është më i madh se 8 d.m.th. $5 \leq 8$.♦

Detyra 2. Kryej negacion të gjykimeve të dhëna, kurse pastaj përcakto vlerën e vërtetësisë së negacioneve të fituara:

a) $p : 0 \in \mathbb{N}$

b) q: $\frac{1}{2}$ është numër racional

c) $r : -2 < -1$

ç) $s : 3 \notin Q$

Zgjidhje. a) $\neg p$: $0 \notin \mathbb{N}$, $\tau(\neg p) = T$, **b)** $\neg q$: $\frac{1}{2}$ nuk është numër racional, $\tau(\neg q) = \perp$, **c)** $\neg r : -2 \geq -1, \tau(\neg r) = \perp$, **ç)** $\neg s : 3 \in Q$, $\tau(\neg s) = T$.♦

Konjuksioni

Le të jenë dhënë gjykimet p : 25 është numër i përbërë dhe q: 5 është pjesëtues i 25 .

Atëherë me ndihmë të lidhëzës *dhe* mund të formohet gjykimi: 25 është numër i përbërë dhe 5 është pjesëtues i 25 . Në këtë mënyrë fituam gjykim të përbërë i cili quhet **konjuksion** i gjykimeve p dhe q . Kështu që shënojmë $p \wedge q$ (lexohet „ p dhe q “).

Definicioni. Konjuksioni i gjykimeve p dhe q është gjykim i përbërë i cili formohet me ndihmën e lidhëzës „dhe“.

Konjuksioni është gjykim i vërtetë vetëm atëherë nëse të dy gjykimet janë të vërteta. Në rastet tjera është gjykim jo i vërtetë.

Tabela e vlerave të vërtetësisë për konjuksionin është:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Detyra 3. Janë dhënë gjykimet p : $11 | 451$, q : $3 + 1 = 5$ dhe r : $3 \in \mathbb{N}$. Formo gjykimet:

a) $p \wedge q$

b) $p \wedge r$

c) $q \wedge r$, dhe pastaj cakto vlerën e vërtetësisë së tyre.

Zgjidhje. a) $p \wedge q$: $11 | 451$ dhe $3+ 1= 5$, $\tau(p \wedge q) = \perp$, pasi që gjykimi q është jo i vërtetë, **b)** $p \wedge r$: $11 | 451$ dhe $3 \in \mathbb{N}$, $\tau(p \wedge r) = T$, pasi që të dyja gjykimet janë të vërteta, **c)** $q \wedge r$: $3 + 1 = 5$ dhe $3 \in \mathbb{N}$, $\tau(q \wedge r) = \perp$, pasi që të dyja gjykimet janë jo të vërteta. ♦

Disjunksioni

Le të jenë dhënë gjykimet p : 14 është i pjesëtueshëm me 7 dhe q :14 është i pjesëtueshëm me 2 . Atëherë me ndihmën e lidhëzës „ose“ mund të formohet gjykimi 14 është i pjesëtueshëm me 7 ose 14 është i pjesëtueshëm me 2 . Ky gjykim i ri paraqet gjykim të përbërë i cili quhet disjunksion i gjykimeve p dhe q dhe shënohet me $p \vee q$ (lexohet „ p ose q “).

Definicioni. Disjunksioni i gjykimeve p dhe q është gjykimi $p \vee q$ i cili fitohet nga gjykimet p dhe q me ndihmë të lidhëzës „ose“.

Disjunksioni është gjykim i vërtetë kur së paku njëri nga gjykimet është i vërtetë.

Tabela e vlerave të vërtetësisë për disjunksionin është:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Detyra 4. Janë dhënë gjykimet $p : 3 < 3$, $q : 3 = 3$ dhe $r : 3 > 3$. Cakto disjunksionet $p \vee q$, $q \vee r$ dhe $p \vee r$, dhe pastaj cakto vlerën e vërtetësisë së tyre.

Zgjidhje. $p \vee q : 3 < 3$ ose $3 = 3$ d.m.th. $3 \leq 3$, $\tau(p \vee q) =$ T, meqenëse gjykimi q është i vërtetë, $q \vee r : 3 = 3$ ose $3 > 3$ d.m.th. $3 \geq 3$, $\tau(q \vee r) =$ T, meqenëse gjykimi q është i vërtetë dhe $p \vee r : 3 < 3$ ose $3 > 3$, $\tau(p \vee r) = \perp$, meqenëse të dyja gjykimet janë jo të vërteta. ♦

Disjunksioni i mënjanuar

Shpeshherë në të folurit përdorim fjali në të cilat vjen në shprehje kuptimi i mënjanuar i lidhëzës *ose*. Atëherë fitohen fjali të përbëra te të cilat nga të dy gjykimet mund të jetë e vërtetë vetëm njëra.

Definicioni. Disjunksioni i mënjanuar $p \veebar q$ (lexohet: ose p ose q) është gjykim i përbërë i cili formohet nga gjykimet p dhe q.

Disjunksioni i mënjanuar është gjykim i vërtetë vetëm në rastin kur njëri nga gjykimet është i vërtetë, kurse tjetri jo i vërtetë.

Tabela e vlerave të vërtetësisë për disjunksionin të mënjanuar është:

p	q	$p \veebar q$
T	T	$\perp$
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Detyra 5. Janë dhënë gjykimet $p : 2 > 2$ dhe $q : 2 < 2$. Formo gjykimin $p \veebar q$ dhe cakto vlerën e vërtetësisë së saj.

Zgjidhje. $p \veebar q$:ose $2 > 2$ ose $2 < 2$ dhe $\tau(p \veebar q) = \perp$, pasi që asnjëri nga gjykimet nuk është i vërtetë. ♦

Implikacioni

Le të shqyrtojmë fjalinë kushtore: Nëse 46 është numër çift, atëherë 46 është i pjesëtueshëm me 2 . Vërejmë se ajo është e formuar prej dy gjykimeve të thjeshta p : 46 është numër çift, q : 46 është i pjesëtueshëm me 2 dhe fjalët „nëse..., atëherë...“.

Definicioni. Gjykimi i përbërë i cili fitohet nga gjykimet p dhe q , me ndihmën e fjalëve „nëse...,atëherë..." quhet implikacioni i gjykimeve p dhe q dhe shënohet me $p \Rightarrow q$ (lexohet: nëse p, atëherë q).

Implikacioni $p \Rightarrow q$ është gjykim jo i vërtetë, vetëm kur p është i vërtetë, kurse q jo i vërtetë. Në të gjitha rastet tjera, implikacioni është gjykim i vërtetë.

Tabela e vlerave të vërtetësisë për implikacionin është:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

Detyra 6. Janë dhënë gjykimet $p : 6 \mid 18$, $q : 6 \mid 21$ dhe $r : 6 \mid 36$. Formo implikacionet:

a) $p \Rightarrow q$

b) $q \Rightarrow r$

c) $r \Rightarrow p$, dhe pastaj cakto vlerën e vërtetësisë së tyre.

Zgjidhje. a) $p \Rightarrow q$: Nëse $6 \mid 18$, atëherë $6 \mid 21$, $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$, pasi që p është gjykim i vërtetë, kurse q gjykim jo i vërtetë, **b)** $q \Rightarrow r$:Nëse $6 \mid 21$, atëherë $6 \mid 36$, $\tau(q \Rightarrow r) = \text{T}$, pasi që q është gjykim jo i vërtetë, kurse r gjykim i vërtetë, **c)** $r \Rightarrow p$:Nëse $6 \mid 36$, atëherë $6 \mid 18$, $\tau(r \Rightarrow p) = \text{T}$, pasi që të dyja gjykimet janë të vërteta. ♦

Te implikacioni $p \Rightarrow q$, gjykimi p quhet **supozimi** (**hipoteza** ose **kushti**), kurse gjykimi q quhet **konkluzë** (**pasoja**). Të potencojmë se gjykimin $p \Rightarrow q$ mund ta lexojmë edhe në njërën nga këto mënyra:

a) nga p rrjedhë q

b) p implikon q

c) p është kusht i mjaftueshëm për q

ç) q është kusht i nevojshëm për p .

<u>Ekuivalenca</u>

Ta shqyrtojmë gjykimin: $4 \mid 20$ nëse dhe vetëm nëse $20 : 4 = 5$. Shihet se ky është një gjykim i përbërë i formuar nga gjykimet $p : 4 \mid 20$, $q : 20 : 4 = 5$ dhe fjalëve nëse dhe vetëm nëse.

Definicioni. Gjykimi i përbërë $p \Leftrightarrow q$ (lexohet: p nëse dhe vetëm nëse q) quhet ekuivalencë e gjykimeve p dhe q.

Ekuivalenca është gjykim i vërtetë vetëm kur të dyja gjykimet janë me vlerë vërtetësie të njëjtë.

Tabela e vlerave të vërtetësisë për ekuivalencën është:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Detyra 7. Cilat nga këto ekuivalenca janë të vërteta:

a) $p \Leftrightarrow q$: -5 është numër natyror nëse dhe vetëm nëse -5 është numër i plotë

b) $r \Leftrightarrow s$: $2 < 3$ nëse dhe vetëm nëse $-2 > -3$

Zgjidhje. a) është gjykim jo i vërtetë pasi që $\tau(p) = \perp$ dhe $\tau(q) = \text{T}$, **b)** është gjykim i vërtetë pasi që të dyja gjykimet janë të vërteta. ♦

<u>Vetit e operacioneve logjike</u>

1. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ ligji komutativ për konjuksionin
2. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ ligji komutativ për disjunksionin
3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ ligji asociativ për konjuksionin
4. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ ligji asociativ për disjunksionin
5. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r)\ (\vee\, q \wedge r)$ dhe $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q)\ (\vee\, p \wedge r)$ ligji i djathtë dhe i majtë distributiv për konjuksionin në lidhje me disjunksionin
6. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ dhe $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ligji i djathtë dhe i majtë distributiv për disjunksionin në lidhje me konjuksionin
7. $\tau(p \vee \neg p) = \text{T}$ ligji për përjashtimin e të tretit
8. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ ligji për zëvendësim të implikacionit
9. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ligji për zëvendësim të ekuivalencës
10. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ Ligji i De Morganit për negacion të konjuksionit
11. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ Ligji i De Morganit për negacion të disjunksionit

Detyra

1. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} \wedge \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$

b) $\neg\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}\right)$

c) $2^3 + 2^2 = 2^5 \vee 2+3 = 5$

ç) $3 < 5 \,\underline{\vee}\, -3 > -5$

d) $28 = 7 \cdot 4 \Rightarrow 4 \mid 28$

dh) $(56 - 24) + 32 = 56 - (24 + 32) \Leftrightarrow 2 = 3$

2. Njehso:

a) $\tau(4 - 2 = 6 \wedge 6 + 2 = 4)$

b) $\tau(\neg\neg(5 > 3))$

c) $\tau(3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 3 + 4 > 5)$

ç) $\tau(\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ)$, ku α, β dhe γ janë kënde të trekëndëshit.

3. Janë dhënë gjykimet p : Çdo katror ka diagonale të barabarta, q: Diagonalet e rombit janë reciprokisht normal dhe r : Diagonalet e çdo trapezi janë të barabarta. Formo gjykimet:

a) $p \Leftrightarrow r$

b) $q \vee r$

c) $r \Rightarrow p$,

dhe pastaj cakto vlerën e vërtetësisë së tyre.

4. Janë dhënë $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \top$ dhe $\tau(r) = \bot$. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $r \Rightarrow p$

b) $q \vee p$

c) $q \Leftrightarrow r$

5. Cakto vlerën e vërtetësisë së $\tau(p)$ nëse:

a) $\tau(\neg p) = \top$

b) $\tau(p \wedge q) = \bot$ dhe $\tau(q) = \top$

c) $\tau(p \vee q) = \bot$ dhe $\tau(q) = \top$

ç) $\tau(p \Rightarrow q) = \bot$ dhe $\tau(q) = \bot$

d) $\tau(p \Leftrightarrow q) = \bot$ dhe $\tau(q) = \top$

dh) $\tau(p \veebar q) = \bot$ dhe $\tau(q) = \top$

1.3. Formulat gjykimore

Gjykimi i përbërë ($p \Rightarrow q$) ($\vee \neg p \Leftrightarrow r$) përmban varg të fundmë të gjykimeve ($p, q, r, s, ...$), njërën nga operacionet logjike ($\neg, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow$ dhe $\Leftrightarrow$) dhe numër të caktuar të kllapave. Gjykimet e tilla quhen **formula gjykimore**. Në vendin e gjykimeve mund të gjenden edhe gjykime të përbëra, prandaj ato i quajmë **ndryshore gjykimore**, kurse vlerat e vërtetësisë $\top$ dhe $\bot$ i quajmë **konstante gjykimore**.

Definicioni. 1) Ndryshoret gjykimore $p, q, r, s, ...$ dhe konstantet gjykimore $\top$ dhe $\bot$ quhen formula gjykimore elementare.

2) Nëse A dhe B janë formula gjykimore, atëherë edhe $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ janë po ashtu formula gjykimore.

3) Të gjitha formulat gjykimore fitohen me zbatim të fundmë të 1) dhe 2).

Shembulli 1. Formula gjykimore janë $\neg p \Leftrightarrow q$, $p \Rightarrow (\neg q)$, por $p \vee, \wedge \neg p$ nuk janë formula gjykimore. ♦

Gjatë të shkruarit e formulave gjykimore respektohen disa rregulla:

1) Kllapat e jashtme nuk është e domosdoshme të shkruhen

Shembulli 2. Formula $((p \wedge q) \vee r)$ mund të shkruhet si $(p \wedge q) \vee r$. ♦

2) E thjeshtësojmë shënimin e formulës sipas prioritetit të kryerjes së operacioneve logjike. Fillimisht kryhet $\neg$, kurse pastaj $\wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow$ dhe $\Leftrightarrow$.

Shembulli 3. Në formulën $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow (\neg p \vee r))$ mund t'i lëmë kllapat dhe të shënojmë $p \Leftrightarrow q \Rightarrow \neg p \vee r$, meqenëse sipas prioritetit fillimisht caktohet vlera e vërtetësisë së $\neg p$, pastaj të $\neg p \vee r$, pastaj implikacioni dhe në fund ekuivalenca. ♦

Kur në një formulë gjykimore zëvendësohen vlerat e vërtetësisë së ndryshoreve gjykimore, fitohen vlerat e vërtetësisë të formulës gjykimore. Kështu që nëse zëvendësohen të gjitha vlerat e mundshme të ndryshoreve, do të fitohet tabelë e vlerave të vërtetësisë të asaj formule. Numri i të gjitha mundësive të ndryshoreve varet nga numri i ndryshoreve. Nëse në formulë gjykimore ka n ndryshore, atëherë numri i të gjitha mundësive të është i barabartë me 2^n. Zakonisht për të shënuar ndonjë formulë gjykimore përdorim shkronja të mëdha latine, F, G, H, ...

Shembulli 4. Ndërto tabelë të vlerave të vërtetësisë për formulën gjykimore
$F : \neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$.♦

Meqenëse kjo formulë gjykimore ka dy ndryshore, numri i të gjitha mundësive është i barabartë me 4 . Në tabelë duhet të krijohet kolonë për secilin operacion logjik sipas prioritetit të kryerjes së tyre. Në këtë mënyrë fitohet tabela:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
T	T	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	T

<u>Lloje të formulave gjykimore</u>

Formula gjykimore e cila është e vërtetë për të gjitha rastet (mundësitë) e ndryshoreve gjykimore quhet **tautologji**. Formula gjykimore e cila është jo e vërtetë për të gjitha mundësitë e ndryshoreve gjykimore quhet **kontradikcion**. Formula gjykimore e cila për disa vlera të ndryshoreve gjykimore është e vërtetë, kurse për tjerat jo e vërtetë quhet **neutrale**.

Detyra 1. Cilit lloj i takon formula gjykimore:

a) $F\, p : \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$

b) $G : (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Zgjidhje. a)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \wedge \neg(q \Rightarrow \neg p)$	$p \wedge \neg(q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow q$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	$\perp$	T

Kjo formulë gjykimore paraqet llojin tautologji.

b)

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	G
T	T	⊥	T	T	T	T	T
T	⊥	T	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	T	T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T	⊥

Kjo formulë gjykimore paraqet llojin neutral. ♦

Detyra

1. Përcakto llojin e formulës gjykimore

a) $F: \neg p \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$

b) $G\, p : \vee \neg q \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$

2. Vërteto se janë tautologji formulat:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

b) $p \Rightarrow \neg q \vee p$

3. Vërteto se janë kontradikcione formulat:

a) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

b) $p \vee \neg p \Rightarrow q \wedge \neg q$

4. Shqyrto vallë janë tautologji formulat:

a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q)\ (\vee\, p \wedge r)$

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg \wedge \neg p \quad q$

5. Shqyrto vallë janë neutrale formulat:

a) $p \Rightarrow \neg p \wedge q$

b) $\neg(p \wedge \neg q) \Rightarrow p$

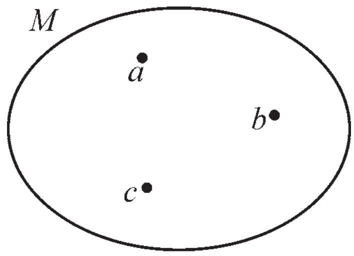
1.4 Kuptimi (koncepti) për bashkësi

Koncepti **bashkësi** është koncept themelor në matematikë. Atë e paramendojmë vetëm përmes shembujve. Themi bashkësi formojnë gjithë nxënësit e një klase, të gjitha librat e një biblioteke shkollore, të gjitha pikat e një drejtëze. Pra çdo bashkësi përbëhet prej objekteve të ndryshme të caktuara të cilat kanë ndonjë **veti të përbashkët karakteristike**. Ato objekte quhen **elemente** të bashkësisë.

Bashkësitë zakonisht shënohen me shkronja të mëdha latine

A, B, C, ...I, J,..., kurse elementet e bashkësive me shkronja të vogla latine *a, b, c, ...i, j,...* .

Shembulli 1. Nëse ndonjë bashkësi përbëhet vetëm prej elementeve *a b*, dhe *c*, atëherë shkruajmë $M = \{a, b, c\}$ ose grafikisht (Vizatimi 1) me diagram të Venit. ♦



Vizatimi 1

Shënimi $a \in M$ tregon se elementi a **i takon** bashkësisë M, kurse shënimi $4 \notin \{1,2,3\}$ tregon se 4 **nuk i takon** bashkësisë $\{1,2,3\}$.

Një bashkësi themi se është e dhënë, nëse janë të njohura të gjitha elementet e saja (themi se është dhënë në **mënyrë tabelore**) ose kur është dhënë vetia karakteristike e elementeve të tyre (themi se është dhënë në **mënyrë përshkruese**).

Shembulli 2. Bashkësia $A = \{2,4,6,8\}$ është dhënë në mënyrë tabelore, kurse bashkësia $B = \{b \mid b = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ është dhënë në mënyrën përshkruese. ♦

Detyra 1. Shkruaj në mënyrën tabelore bashkësinë

$$M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 7\}.$$

Zgjidhje. $M = \{3,4,5,6,7\}$. ♦

Për dy bashkësi M dhe N themi se janë të **barabarta** $M = N$, nëse dhe vetëm nëse ato përbëhen nga elemente të njëjta.

Shembulli 3. Vlen $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{b, c, c, a\}$ pasi që nuk është me rëndësi renditja e elementeve në një bashkësi. Bashkësia e fundit nuk përdoret pasi që një nga kërkesat për konceptin bashkësi ishte të kemi elemente të ndryshme me vetinë karakteristike. ♦

Veti të bashkësive të barabarta:

-vetia refleksive $A = A$

-vetia simetrike $A = B \Rightarrow B = A$

-vetia transitive $A = B \land B = C \Rightarrow A = C$

Detyra 2. Vallë janë të barabarta bashkësitë:

a) $\{1, \{2, 3\}\}$ dhe $\{1, 2, 3\}$

b) $\{a, b, a, c, c\}$ dhe $\{a, a, b, b, b, c\}$?

Zgjidhje. **a)** Jo, pasi që elementet e bashkësisë së parë janë 1 dhe $\{2,3\}$, kurse elemente të bashkësisë së dytë janë 1, 2 dhe 3, **b)** po, pasi që kanë elemente të njëjta. ♦

Nënbashkësi

T'i shqyrtojmë bashkësitë $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vërejmë se çdo element nga bashkësia A është element edhe i bashkësisë B edhe i bashkësisë C, dhe çdo element i bashkësisë B është po ashtu element i bashkësisë C. Domethënë bashkësia A përmbahet në bashkësinë B dhe C, kurse bashkësia B përmbahet në bashkësinë C dhe shkruajmë $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ dhe $B \subseteq C$.

Definicioni. Një bashkësi A është **nënbashkësi** nga bashkësia B nëse dhe vetëm nëse çdo element nga A është element edhe i B d.m.th.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Nëse për dy bashkësi vlen $M \subseteq N$ dhe $N \subseteq M$, atëherë themi se $M = N$.

Definicioni. Bashkësia A është **nënbashkësi e vërtetë** e B, nëse çdo element nga A është edhe element i B dhe ekziston së paku një element në B që nuk është element i A d.m.th. $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Shembulli 4. Janë dhënë bashkësitë $M = \{a, b, c\}$, $N = \{a, b, c, d\}$. Atëherë $M \subset N$. ♦

Të shqyrtojmë bashkësinë e të gjithë njerëzve që janë më të gjatë se tre metra dhe bashkësinë e të gjithë numrat natyror më të vegjël se zero. Këto janë shembuj bashkësish që s'kanë elemente dhe janë të barabarta mes tyre, andaj ekziston një bashkësi me atë veçori. Bashkësia që s'përmban elemente e quajmë **bashkësi e zbrazët** dhe e shënojmë me $\varnothing$.

Bashkësia e zbrazët është nënbashkësi e secilës bashkësi dhe nënbashkësi e vërtetë për secilën bashkësi jo të zbrazët.

Shpeshherë duhet të shqyrtohen të gjitha nënbashkësitë e një bashkësie të dhënë. Bashkësia e cila i përmban të gjitha nënbashkësitë e një bashkësie të dhënë M quhet **bashkësi partitive** e M dhe shënohet me $\mathcal{P}(M)$ d.m.th.

$$\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}.$$

Shembulli 5. Bashkësia partitive e $A = \{1,2\}$ është bashkësia

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, A\}. ♦$$

Detyra.

1. Është dhënë bashkësia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18\}$. Shkruaj bashkësitë $B = \{b \mid b \in A \wedge 3 \mid b\}$, $C = \{c \mid c \in A \wedge 2 \mid c\}$. Vallë $B = C$?

2. Cilat nga gjykimet e dhëna janë të vërteta?

a) $3 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 3\}$

b) $\{\{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b, c\})$

c) $22 \in A$, ku A është bashkësia e të gjitha numrave çift të dhjetëshes së dytë.

3. Është dhënë $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 5 < a \leq 55\}$. Cakto bashkësinë B e cila i përmban gjithë numrat të pjesëtueshëm me 5 dhe kanë shumë të shifrave numër çift.

4. Cakto bashkësinë e të gjithë numrave natyror më të vegjël se 30 të cilët mund të shënohen si shumë e dy katrorëve të plotë.

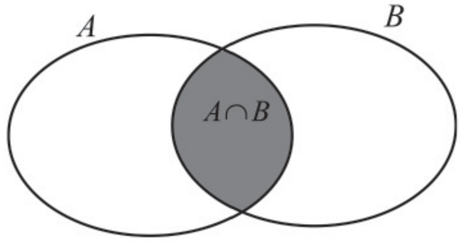
5. Çfarë dallimi ekziston ndërmjet shënimit $\varnothing$ dhe $\{\varnothing\}$?

1.5. Operacione me bashkësi

Do të shqyrtojmë disa operacione me bashkësi.

Definicioni. Prerje e dy bashkësive A dhe B është bashkësia $A \cap B$ (Vizatimi 1) e cila i përmban të gjitha elementet e përbashkëta të bashkësive A dhe B d.m.th.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



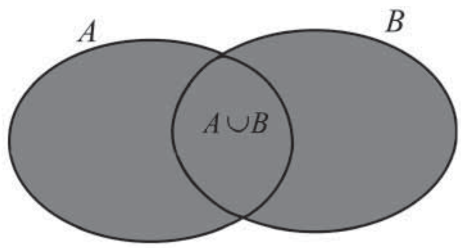
Vizatimi 1

Shembulli 1. Janë dhënë bashkësitë $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dhe $B = \{4, 8, 12\}$. Atëherë $A \cap B = \{4, 8\}$. ♦

Shembulli 2. Le të jenë dhënë bashkësitë $M = \{a, b, c\}$ dhe $N = \{1, 2, 3\}$. Atëherë $M \cap N = \varnothing$. Në këtë rast themi se bashkësitë M dhe N janë **disjunkte**. ♦

Definicioni. Union i dy bashkësive A dhe B është bashkësia $A \cup B$ (Vizatimi 2) e cila i përmban të gjitha elementet të cilat i takojnë së paku njërës nga bashkësitë e dhëna d.m.th.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



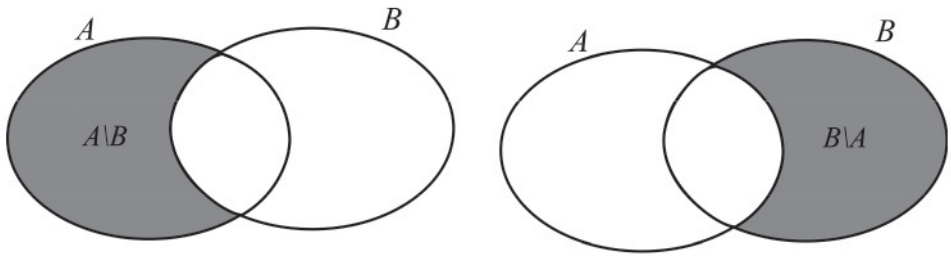
Vizatimi 2

Shembulli 3. Është dhënë $A = \{1, 3, 5, 7\}$ dhe $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Atëherë

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}. ♦$$

Definicioni. Ndryshimi i një bashkësie A me bashkësinë B është bashkësia $A \setminus B$ (Vizatimi 3) e cila i përmban të gjitha elementet që i takojnë bashkësisë A, por nuk i takojnë bashkësisë B d.m.th.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

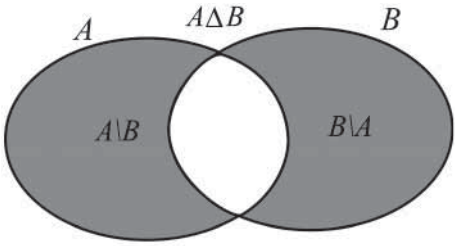


Vizatimi 3

Shembulli 4. Janë dhënë bashkësitë $A=\{1, 2, 3, 5, 8\}$ dhe $B=\{2, 4, 6, 8\}$. Atëherë $A\setminus B=\{1,3,5\}$. ♦

Definicioni. Ndryshimi simetrik i dy bashkësive A dhe B është bashkësia $A \Delta B$ (Vizatimi 4) e cila përbëhet nga elementet që i takojnë ose bashkësisë A ose bashkësisë B d.m.th.

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\} = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}.$$

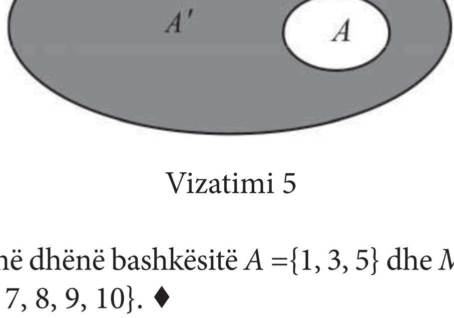


Vizatimi 4

Shembulli 5. Janë dhënë bashkësitë $A=\{2, 3, 5, 7, 9\}$ dhe $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Atëherë $A \Delta B=\{2,1\}$. ♦

Le të jetë bashkësia A nënbashkësi e vërtetë e bashkësisë M . atëherë bashkësia $M \setminus A$ përbëhet prej të gjitha elementeve që i takojnë bashkësisë M, kurse nuk i takojnë bashkësisë A. Kjo bashkësi e përplotëson bashkësinë A në lidhje me bashkësinë M, prandaj quhet **komplement** i A dhe shënohet me A_M^C ose A'_Md.m.th. $A'_M=\{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$.

Bashkësia M në raport me të cilën caktojmë komplementin zakonisht merret fikse dhe quhet **bashkësi universale** U, andaj mund të shfrytëzohet shënimi $A' = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$ (Vizatimi 5).



Vizatimi 5

Shembulli 6. Le të jenë dhënë bashkësitë $A=\{1, 3, 5\}$ dhe $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Atëherë $A'_M=\{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ♦

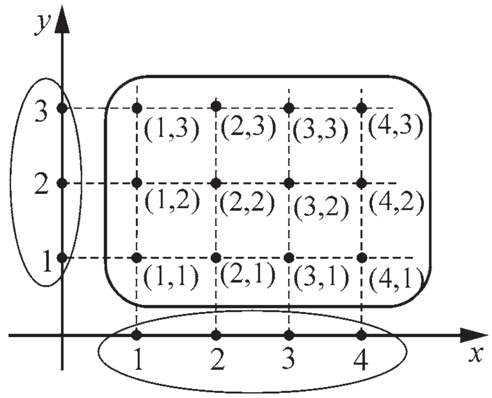
Definicioni. Prodhimi (direkt) i Dekartit i bashkësive A dhe B është bashkësia $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Nëse njëra nga bashkësitë A dhe B është e zbrazët, atëherë edhe $A \times B$ është bashkësi e zbrazët. Vërejmë se nëse $A \neq B$, atëherë $A \times B \neq B \times A$. Bashkësia $A \times A = A^2$ quhet **Katrorë i Dekartit** i bashkësisë A d.m.th.

$$A^2 = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A\}.$$

Shembulli 7. Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $B = \{1, 2, 3\}$. Atëherë

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots,, (4, 3)\},$$ (Vizatimi 6). ♦



Vizatimi 6

<u>Veti të operacioneve me bashkësi</u>

1. $A \cap B = B \cap A$ ligji komutativ për prerjen

2. $A \cup B = B \cup A$ ligji komutativ për unionin

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ligji asociativ për prerjen

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ligji asociativ për unionin

5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ dhe $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i unionin në raport me prerjen

6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ dhe $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i prerjes në raport me unionin

7. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ ligji komutativ për ndryshimin simetrik

8. $A\ B\Delta\ = (A\cup B)\ (\backslash\ A\cap B)$

9. $A \,\Delta\, A = \varnothing$

10. $A \cap A'_M = \varnothing$ dhe $A \cup A'_M = M$

11. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ dhe $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i prodhimit të Dekartit në raport me prerjen

12. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ dhe $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i prodhimit të Dekartit në raport me unionin

13. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ dhe $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i prodhimit të Dekartit në raport me ndryshimin

Detyra

1. Janë dhënë bashkësitë $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 5, 6, 7\}$ dhe $C=\{3, 4, 5, 7, 8\}$. Cakto bashkësitë:

a) $A \cap B$, $B \cap C$ dhe $A \cap C$ **b)** $A \cup B$, $B \cup C$ dhe $C \cup A$

c) $A \setminus B$, $B \setminus C$ dhe $C \setminus A$ **ç)** $A \Delta B$, $B \Delta C$ dhe $C \Delta A$

2. Le të jetë $A \subset B$. Cakto bashkësitë:

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $A \setminus B$

ç) $B \setminus A$ **d)** $A \Delta B$ **dh)** A'_B

3. Le të jetë $A=\{x \mid x \in \mathbb{N} \land x < 20\}$, $B=\{x \mid x \in \mathbb{N} \land 3 \mid x \land x < 20\}$. Caktoni bashkësitë:

a) $A \setminus B$ **b)** $A \Delta B$

4. Le të jetë dhënë bashkësia A . Cakto bashkësitë:

a) $(A \times A) \cap A$ **b)** $A \times (A \cap A)$ **c)** $A \Delta A'$

5. Le të jetë $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ dhe $C = \{1, 2, 3\}$. Cakto bashkësitë:

a) $A \setminus C$ **b)** $B \Delta C$ **c)** $B \cup C$ **ç)** $A \times C$

1.6. Funksionet gjykimore

Në matematikë shpeshherë përdoren fjali të cilat përmbajnë ndryshore. Për shembull, le të jetë x numër çift i dhjetëshes së dytë.

Fjalitë që përmbajnë ndryshore x prej një bashkësie D dhe gjatë së cilës paraqesin gjykime për çdo vlerë të $x \in D$ i quajmë **funksione gjykimore** të bashkësisë D. Zakonisht i shënojmë me $P(x)$,kurse bashkësinë D e quajmë **fushë të përkufizimit**.

Shembulli 1. Le të jetë $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dhe $P(x): 2 \mid x$. Atëherë $P(x)$ është funksion gjykimor i D dhe $P(2)$ është gjykim i vërtetë, kurse $P(3)$ është gjykim jo i vërtetë. ♦

Le të jenë $P_1(x)$ dhe $P_2(x)$ funksione gjykimore në D, Atëherë të tilla janë edhe të gjitha funksionet gjykimore të formuara me ndihmë të operacionet logjike $\neg$, $\land$, $\lor$, $\underline{\lor}$, $\Rightarrow$ dhe $\Leftrightarrow$.

Bashkësia e të gjitha $x \in D$ për të cilat $P(x)$ paraqet gjykim të vërtetë quhet **bashkësi e zgjidhjeve** $M_{P(x)}$ të funksionit gjykimor.

Shembulli 2. Bashkësitë e zgjidhjeve të funksioneve gjykimore $P_1(x): x < 20$ dhe $P_2(x): 5 \mid x$, për $D = \mathbb{N}$ janë bashkësitë $M_{P_1(x)} = \{1, 2, ..., 19\}$ dhe $M_{P_2(x)} = \{5, 10, 15, ...\}$.

Pra $M_{P_1(x) \land P_2(x)} = \{5, 10, 15\}$ është bashkësia e zgjidhjeve të funksionit $P_1(x) \land P_2(x)$. ♦

Bashkësi e zgjidhjeve të $P_1(x) \land P_2(x)$ është prerja e bashkësive të zgjidhjeve përkatëse, kurse e $P_1(x) \lor P_2(x)$ është unioni i bashkësive të zgjidhjeve përkatëse të funksioneve gjykimore $P_1(x)$ dhe $P_2(x)$.

Detyra 1. janë dhënë funksionet gjykimore $P_1(x): 4 \mid x$ dhe $P_2(x): x<16$ të $D=\{1,2,3,...,20\}$. Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të funksioneve gjykimore: $\neg P_1(x)$, $P_1(x) \veebar P_2(x)$, $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$.

Zgjidhje. $M_{\neg P_1(x)} = D \setminus M_{P_1(x)} = \{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19\}$, pasi që i kërkojmë të gjitha ato vlera të $x \in D$ për të cilat $P_1(x)$ nuk është gjykim i vërtetë, $M_{P_1(x) \veebar P_2(x)} = M_{P_1(x)} \Delta M_{P_2(x)} = \{1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,16,20\}$, pasi që i kërkojmë të gjitha ato vlera të $x \in D$ për të cilat ose $P_1(x)$ është gjykim i vërtetë ose $P_2(x)$ është gjykim i vërtetë, $M_{P_1(x) \Rightarrow P_2(x)} = D \setminus \{16,20\} = M_{\neg P_1(x) \vee P_2(x)} = M_{\neg P_1(x)} \cup M_{P_2(x)} = \{1,2,...,15\}$, pasi që implikacioni $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ është gjykim i vërtetë vetëm kur edhe $P_1(x)$ është jo i vërtetë ose $P_2(x)$ është i vërtetë dhe

$$M_{P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)} = M_{(\neg P_1(x) \vee P_2(x)) \wedge (\neg P_2(x) \vee P_1(x))} =$$
$$= \left(M_{\neg P_1(x)} \cup M_{P_2(x)}\right) \cap \left(M_{\neg P_2(x)} \cup M_{P_1(x)}\right) = \{4,8,12,17,18,19\}$$

pasi që $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$ është gjykim i vërtetë kur të dyja gjykimet kanë vlerë vërtetësie të njëjtë. ♦

Për caktimin e bashkësisë së zgjidhjeve të funksioneve gjykimore $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ mund të shfrytëzohet edhe tautologjia $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, kurse për $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$, tautologjia $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$.

Detyra.

1. Le të jetë $P_1(x): 2 \mid x$ dhe $P_2(x): 3 \mid x$ dhe $D = \{1, 2, ..., 10\}$. Cakto bashkësitë e zgjidhjeve të funksioneve gjykimore:

a) $P_1(x) \wedge P_2(x)$

b) $P_1(x) \vee P_2(x)$

c) $\neg P_1(x)$

2. Le të jetë $P_1(x): (x + 1)(x - 1) = 0$, $P_2(x): x(x + 3) = 0$ dhe $D = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \le a \le 4\}$. Cakto bashkësitë e zgjidhjeve të funksioneve gjykimore :

a) $P_1(x) \veebar P_2(x)$

b) $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$

c) $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Cilat nga fjalitë e dhëna paraqesin gjykim?

a) Mendoj se 2 + 3 = 5

b) $x + 3 = 2 + x,\ x \in \mathbb{R}$

c) $x\ (x + 1) = 2 + x$

ç) Numri është i pjesëtueshëm me 2 nëse mbaron me 2 .

2. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $9 \mid 6156$

b) 31 është numër i thjesht

c) 9 është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i 900 dhe 153

ç) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$

3. Cakto me çka është e barabartë:

a) $\tau\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}\right)$

b) $\tau(13 \mid 153)$

c) $\tau((-5)^2 > (-2)^2)$

ç) $\tau(0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03)$

4. Prej cilave gjykime të thjeshta është i ndërtuar gjykimi i përbërë?

a) Numri 12 është i pjesëtueshëm me 3 dhe me 4

b) $\frac{2}{3}$ dhe 0, (3) janë numra racional

c) 3 është numër i përbërë ose numër tek

5. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

b) $\neg\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{11}{15}\right)$

c) $2^3 < 2^2 \vee 2 + 3 = 5$

ç) $2 < 5 \veebar -3 > -4$

d) $22 = 7 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow 4 \mid 22$

6. Le të jetë $\tau\ (p) = \perp$, $\tau(q) = \mathrm{T}$ dhe $\tau\ (r) = \perp$. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $r \Leftrightarrow p$

b) $q \veebar p$

c) $q \wedge r$

7. Cakto vlerën e $\tau(p)$ nëse:

a) $\tau\ (p \wedge q) = \mathrm{T}$ dhe $\tau\ (q) = \mathrm{T}$

b) $\tau\ (p \Rightarrow q) = \perp$ dhe $\tau\ (q) = \perp$

c) $\tau\ (p \Leftrightarrow q) = \mathrm{T}$ dhe $\tau\ (q) = \mathrm{T}$

8. Cakto llojin e formulës gjykimore

a) $F : p \wedge q \Rightarrow p$

b) $G : p \wedge (\neg p \wedge q)$

9. Vërteto se janë tautologji formulat:

a) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

b) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$

10. Vërteto se është kontradikcion formula gjykimore

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p .$$

11. Le të jetë $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

Shkruaj bashkësitë $B = \{b \mid b \in A \wedge 6 \mid b\}$, $C = \{c \mid c \in A \wedge 4 \mid c\}$. Vallë $B = C$?

12. Cilat nga gjykimet e dhëna janë gjykime të vërteta?

a) $9 \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 3\}$ **b)** $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{a,b,c\})$

c) $22 \in A$, ku A është bashkësi e të gjitha numrave çift të dhjetëshes së tretë.

13. Le të jetë $M = \{a \mid a \in \mathbb{N} \wedge 5 < a \leq 45\}$. Cakto bashkësinë B e cila i përmban numrat nga M të pjesëtueshëm me 5 dhe shuma e shifrave të tyre është numër çift.

14. Cakto bashkësinë e të gjithë numrave natyror më të vegjël se 10 të cilët mund të shkruhen si shumë prej tre katrorëve të plotë.

15. Janë dhënë bashkësitë

$$A = \{1,2,3,4,5\},\ B = \{3,4,5,7,8\} \text{ dhe } C = \{1,2,3,4,5,9\}.$$

Cakto bashkësitë:

a) $A \cap B$ **b)** $B \cup C$ **c)** $A \setminus B$ **ç)** $C \Delta A$

16. Le të jetë $A \cup B = A$. Cakto bashkësitë:

a) $A \cap B$ **b)** $B \setminus A$ **c)** $A \Delta B$

17. Le të jetë $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 10 \leq x < 20\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 \mid x \wedge x \leq 20\}$. Cakto bashkësitë:

a) $A \setminus B$ **b)** $A \Delta B$

18. Le të jetë dhënë bashkësia A. Cakto bashkësitë:

a) $(A \cap A) \Delta A'$ **b)** $A \times (A \cup A)$ **c)** $(A \cap A') \times A'$

19. Le të jetë $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x(x-2) = 0\}$ dhe $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x(x+1) = 0\}$. Cakto bashkësinë $A \times B$.

20. Le të jetë $P_1(x) : (x + 3)(x - 1) = 0$, $P_2(x)$ $(: x + 2)(x + 1) = 0$ dhe $D = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \wedge -4 \leq a \leq 4\}$. Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të funksioneve gjykimore:

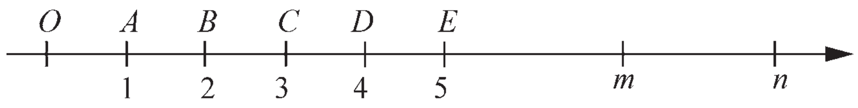
a) $P_1(x) \veebar P_2(x)$ **b)** $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ c) $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$.

2. NUMRAT REAL

2.1. Numrat natyror

Bashkësia e **numrave natyror** shënohet me $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$. Gjithë numrat natyror mund të shënohen me ndihmën e shifrave 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Bashkësia $\mathbb{N}\cup\{0\}$ e shënojmë me $\mathbb{N}_0$ dhe quhet **bashkësi e zgjeruar e numrave natyror** d.m.th. $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$.

Numrat natyror mund t'i paraqesim në mënyrë grafike ashtu që fillimisht përzgjedhim segment njësi $\overline{OA}=1$ (Vizatimi 1). Me bartje të *OA* djathtë prej A i fitojmë pikat *B*, *C*, *D*, *E*, ... etj.



Vizatimi 1

Në këtë mënyrë mund t'i paraqesim numrat natyror në drejtëz e cila quhet bosht numerik. Kështu që nëse numri *m* është „majtë" nga numri *n*, themi se $m<n$ ose $n>m$.

Detyra 1. Me ndihmë të vizatimit 1 përcakto vlerën e vërtetësisë së gjykimit:

a) $p:2<3$

b) $q:m>5$

c) $r:3\le 4$

ç) $s:5\ge 5$

Zgjidhje. a) $\tau\ (p)=$ T, meqenëse numri 2 është në të „majtë" prej 3, **b)** $\tau\ (q)=$ T, meqenëse *m* është në të „djathtë" prej 5, **c)** $\tau\ (r)$ = T, meqenëse ky paraqet gjykim të përbërë (disjunksion) të formuar nga gjykimet 3 < 4 dhe 3 = 4 dhe i pari është i vërtetë, **ç)** $\tau\ (s)=$ T **.** ♦

Definicion. Nëse numri *m* është më i vogël se *n*, atëherë *m* quhet **paraardhës** i *n*, kurse *n* quhet **pasardhës** i *m*.

Çdo numër natyror ka pasardhës, por jo çdo numër natyror ka paraardhës. Për shembull, numri 1 s'ka paraardhës. Çdo numër natyror ka fundmë shumë paraardhës, kurse pafundmë shumë pasardhës.

Numrat të cilët për një dallohen nga numri i dhënë quhen **pasardhës i drejtpërdrejtë** dhe **paraardhës i drejtpërdrejtë**. Për shembull, prej numrit 5 për një dallohen numrat 4 dhe 6, andaj themi se 4 është paraardhës i drejtpërdrejt i numrit 5, kurse 6 është pasardhësi i drejtpërdrejt i tij. Pra për numrin natyror $n>1$, pasardhësi i drejtpërdrejt është $n+1$, kurse paraardhësi i drejtpërdrejtë është e $n-1$.

Operacione me numra natyror

Le të jenë a dhe b numra natyror. Numri natyror $a + b$ quhet **shuma** e numrave natyror a dhe b. Numrat a dhe b quhen **mbledhës**, kurse operacioni quhet **mbledhje**.

Le të jenë a dhe b numra natyror. Numri natyror $a \cdot b$ quhet **prodhim** i numrave natyror a dhe b. Numrat a dhe b quhen **shumëzues**, kurse operacioni quhet **shumëzim**.

Të theksojmë se $a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a\ her\ddot{e}}$ tregon se kemi mbledhur a mbledhës nga të cilët secili i barabartë me b.

Le të jenë a dhe b numra natyror. Numri natyror $a - b$ quhet **ndryshim** i numrave natyror a dhe b. Numri a quhet **i zbritshmi**, numri b quhet **zbritësi**, kurse operacioni quhet **zbritje**. Andaj vlen $b + (a - b) = a$.

Le të jenë a dhe b numra natyror. Numri natyror $a : b$ quhet **herës** i numrave natyror a dhe b . Numri a quhet **i pjesëtueshmi**, numri b quhet **pjesëtuesi**, kurse operacioni quhet **pjesëtim**. Andaj vlen $b \cdot (a : b) = a$.

Operacionet mbledhje dhe shumëzim të numrave natyror janë **operacione të mbyllura** në bashkësinë e numrave natyror meqenëse shuma (prodhimi) i çfarëdo numrave natyror është përsëri numër natyror. Operacionet zbritje dhe pjesëtim të numrave natyror **nuk janë operacione të mbyllura** meqenëse jo gjithmonë ndryshimi (herësi) i dy numrave natyror është numër natyror. Për shembull, numrat 2 dhe 4 janë numra natyror, por nuk janë numra natyror 2–4 dhe 2 : 4.

Veti të operacioneve me numra natyror

Për operacionet me numra natyror vlejnë këto veti (ligje):

1. $a + b = b + a$ ligji komutativ për mbledhje

2. $a \cdot b = b \cdot a$ ligji komutativ për shumëzim

3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ ligji asociativ për mbledhje

4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ligji asociativ për shumëzim

5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dhe $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë për shumëzim në lidhje me mbledhjen

6. Nëse $a - b \in \mathbb{N}$ dhe $b - c \in \mathbb{N}$, atëherë $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ dhe $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë për shumëzimin në lidhje me zbritjen

7. Nëse $a + b, a - b, a : c, b : c \in \mathbb{N}$, atëherë $(a + b) : c = a : c + b : c$ dhe $(a - b) : c = a : c - b : c$ ligji distributiv i djathtë për pjesëtimin në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen

Detyra 2. Njehso shumën e numrave natyror në mënyrën më të thjeshtë:

a) 147 + 33 + 17 + 503

b) 1 + 2 + 3 + ... + 19

c) 23 + 46 + 57 + 72 + 44 + 58

Zgjidhje. a) $147 + 33 + 17 + 503 = (147 + 33) + (17 + 503) = 180 + 520 = 700$, **b)** $1 + 2 + 3 + ... + 19 = (1 + 19) + (2+18) + ... + (9 + 11) + 10 = 9 \cdot 20 + 10 = 190$, **c)** $23 + 46 + 57 + 72 + 44 + 58 = (23 + 57) + (46 + 44) + (72 + 58) = 80 + 90 + 130 = 300$. ♦

Detyra 3. Shkruaj në mënyrë tabelore bashkësinë:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 26\}$
b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 8\}$, kurse pastaj cakto bashkësinë $C = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \wedge a - b = 7\}$.

Zgjidhje. a) $A = \{4, 5, ..., 25\}$, **b)** $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$,
$C = \{(10, 3), (11, 4), (12, 5), (13, 6), (14, 7)\}$. ♦

Numri natyror b është **pjesëtues** i numrit natyror a, nëse dhe vetëm nëse ekziston numër natyror c i tillë që $a = b \cdot c$. Përndryshe shpeshherë themi që a është **shumëfishë** i b ose a është i **pjesëtueshëm** me b. Simbolikisht shënojmë $b \mid a$.

Shembulli 1. Numri 4 është pjesëtues i 28 meqenëse $28 = 4 \cdot 7$ dhe shkruajmë $4 \mid 28$. Numri 4 nuk është pjesëtues i 30, prandaj shkruajmë $4 \nmid 30$. ♦

Meqenëse pjesëtimi është operacion jo i mbyllur në $\mathbb{N}$, sikur në rastin me 4 dhe 30, sjellim të ashtuquajturën **mbetje nga pjesëtimi**.

Për të gjithë numrat natyror m dhe n ekzistojnë numra p dhe q ashtu që $p, q \in \mathbb{N}_0$ dhe vlen $m = np + q$, ku $0 \le q < n$.

Kështu që m është i pjesëtueshmi, n është pjesëtuesi, p është herësi dhe q është mbetja gjatë pjesëtimit.

Çdo numër natyror gjatë pjesëtimit me 2 mund të jep mbetjen 0 ose 1. Numrat të cilët japin mbetjen 0 gjatë pjesëtimit me 2 i quajmë numra **çift**, kurse numrat që japin mbetjen 1 gjatë pjesëtimit me 2 i quajmë numra **tek**.

Pikërisht për shkak këtyre vetive përdorim shënimin $2n$ për numër çift dhe shënimin $2n - 1$ për numër tek.

Shembulli 2. Lehtë vërehet se çdo numër natyror gjatë pjesëtimit me 5 mund të jep njërën nga mbetjet $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Prandaj çdo numër natyror mund të shënohet në njërën nga format $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ dhe $5n + 4$, për $n \in \mathbb{N}_0$. ♦

Një numër është i **thjeshtë** nëse ka saktësisht dy pjesëtues, kurse një numër është i **përbërë** nëse ka më tepër se dy pjesëtues.

Shembulli 3. Numri 11 është numër i thjeshtë, meqenëse pjesëtuesit e tij janë vetëm numrat 1 dhe 11 d.m.th saktësisht dy pjesëtues, kurse numri 10 është numër i përbërë pasi që pjesëtuesit e tij janë më tepër se dy, gjegjësisht 1, 2, 5 dhe 10 d.m.th. katër pjesëtues. Numri 1 nuk është as i thjeshtë dhe as i përbërë, pasi që ka vetëm një pjesëtues. ♦

Veti karakteristike për pjesëtimin

1. Nëse $c \mid a$ dhe $c \mid b$, atëherë $c \mid (a + b)$

2. Nëse $c \mid a$, $c \mid b$ dhe $a - b \in \mathbb{N}$, atëherë $c \mid (a - b)$

3. Nëse $c \mid a$ ose $c \mid b$, atëherë $c \mid (a \cdot b)$

4. Çdo numër i përbërë mund të shkruhet (zbërthehet) si prodhim prej numrave të thjeshtë

Shembulli 4. Numri 36 i zbërthyer në shumëzues është $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, kurse numri $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. ♦

Të gjithë pjesëtuesit e numrit natyror të dhënë n e formojnë bashkësinë e pjesëtuesve D_n të atij numri.

Shembulli 5. $P_{14} =\{1, 2, 7, 14\}$, kurse $P_{121} =\{1, 11, 121\}$. ♦

Nëse m dhe n janë numra natyror, atëherë $P_m \cap P_n$ është bashkësia e pjesëtuesve të përbashkët të m dhe n . Elementi më i madh në atë bashkësi quhet **pjesëtuesi më i madh i përbashkët** dhe shënohet me $PMP(m, n)$. Është e qartë se elementi më i vogël i asaj bashkësie është numri 1.

Nëse për numrat m dhe n vlen $P_m \cap P_n =\{1\}$ d.m.th. $PMP(m, n) = 1$, atëherë themi se m dhe n janë **numra reciprokisht të thjeshtë**.

Detyra 4. Cakto $PMP(12, 20)$.

Zgjidhje. $P_{12} =\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ dhe $P_{20} =\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, prandaj $P_{12} \cap P_{20} = \{1, 2, 4\}$ dhe më i madhi në këtë bashkësi është numri 4 d.m.th. $PMP(12, 20) = 4$.

Të gjithë shumëfishat e numrit të dhënë natyror n e formojnë bashkësinë e shumëfishave S_n të atij numri. ♦

Shembulli 6. $S_4 = \{4, 8, 12, 16, ..., 4k, 4(k +1),...\}$ janë shumëfishat e numrit 4 .

Nëse m dhe n janë numra natyror, atëherë $S_m \cap S_n$ është bashkësi e shumëfishave të përbashkët të m dhe n. Elementi më i vogël në atë bashkësi quhet **shumëfishi më i vogël i përbashkët** she shënohet me $SHVP\ (m, n)$. Është e qartë se element më të madh në këtë bashkësi nuk ekziston.

Detyra 5. Cakto $SHVP\ (20, 25)$.

Zgjidhje. $S_{20} = \{20, 40, 60, 80, 100,...\}$, $S_{25} = \{25, 50, 75, 100, 125,...\}$, prandaj $S_{20} \cap S_{25} = \{100, 200, 300, 400,...\}$. Elementi më i vogël në këtë bashkësi është numri 100 pra. $SHVP\ (20, 25) = 100$. ♦

Detyra 6. Në një shitore çdo të dytën ditë kryejnë furnizimin me qumësht, çdo të tretën ditë me fruta kurse çdo të pestën ditë me lëngje. Nëse sot e furnizojmë njëkohësisht me të tri artikujt ushqimor, pas sa ditësh do të jetë e mundur të ndodh përsëri të furnizohet njëkohësisht me të tre artikujt në të njëjtën ditë.

Zgjidhje. Numrin (ditën) që e kërkojmë duhet t'i përmbaj numrat 2, 3 dhe 5 d.m.th.

$SHVP\,(2, 3, 5) = 30$, që d.m.th. pas 30 ditë përsëri do të kryhet furnizimi i njëkohshëm me të tre artikujt në të njëjtën kohë (ditë). ♦

Indicet për pjesëtueshmëri

1.Një numër pjesëtohet me 2 nëse dhe vetëm nëse mbaron me zero ose shifër çift

2.Një numër pjesëtohet me 3 nëse dhe vetëm nëse shuma e shifrave të tij pjesëtohet me 3

3.Një numër pjesëtohet me 4 nëse dhe vetëm nëse mbaresa dyshifrore e atij numri pjesëtohet me 4 ose mbaron me 00

4.Një numër pjesëtohet me 5 nëse dhe vetëm nëse mbaron me 0 ose 5

5.Një numër pjesëtohet me 9 nëse dhe vetëm nëse shuma e shifrave të tij pjesëtohet me 9

6.Një numër pjesëtohet me 10 nëse dhe vetëm nëse mbaron me shifër 0

Detyra 7. Cila shifër duhet të qëndroj në vend të * në numrin:

a) 23 * 469, ashtu që të pjesëtohet me 3

b) 113 *, ashtu që të pjesëtohet me 4?

Zgjidhje. a) Sipas indicit për pjesëtueshmëri, numri i dhënë është i pjesëtueshëm me 3 nëse shuma e shifrave të tij 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + * = 24 + * është numër i pjesëtueshëm me 3, pra nëse dhe vetëm nëse në vend të * qëndron njëra prej shifrave 0, 3, 6 ose 9,

b) Numra dyshifror që kanë shifër të dhjetëshes 3 dhe janë shumëfisha të 4 janë numrat 32 dhe 36, prandaj në vend të * duhet të qëndroj njëra nga shifrat 2 ose 6 . ♦

Detyra

1. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) 5 është paraardhës i 12

b) 2 është pasardhës i drejtpërdrejtë i 3

c) 3 është pjesëtues i 21

2. Kryej operacionet e mëposhtme në mënyrën më të lehtë:

a) 234 + 457 + 146 + 473

b) 13 + 47 + 28 + 62 + 91 + 89

c) 1 + 2+...+50

ç) 2 · 8 · 5 · 125·

3. Cakto cilët nga numrat e dhënë është i thjeshtë, kurse cili i përbërë:

a) 30273

b) 1111

c) 34543

4. Cakto *PMP* (248, 126), kurse *SHVP* (453, 780)

5. Në lulishten „Buqeta“ ka trëndafila në tre ngjyra. Ata shesin buqeta njëngjyrëshe të tilla që prej ngjyrës së parë të gjitha buqetat përmbajnë nga 3 trëndafila, prej ngjyrës së dytë të gjitha buqetat përmbajnë nga 5 trëndafila dhe prej ngjyrës së tretë të gjitha buqetat përmbajnë nga 7 trëndafila. Dihet se janë shitur numër i njëjtë i trëndafilave prej secilës ngjyrë. Cakto atë numër nëse është më i madh se 150 por më i vogël se 250.

2.2. Numrat e plotë

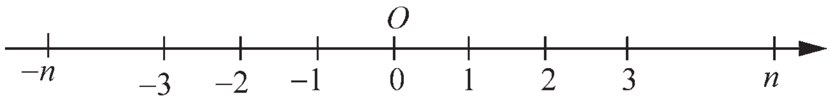
Operacioni zbritje te numrat natyror nuk është operacion i mbyllur në $\mathbb{N}$ pasi që, për shembull, ndryshimi 5 – 7 nuk paraqet numër natyror, por mund të shfrytëzohet që të përshkruhet ndonjë dukuri natyrore si për shembull, temperatura prej $5°\ C$ u zvogëlua për $7°\ C$. Prandaj përveç zgjerimit të numrave natyror me numrin 0 në bashkësinë $\mathbb{N}_0$, sillen edhe numra të cilët në boshtin numerik gjenden në largësi të barabartë prej numrave natyror në raport me numrin 0, por janë në anën tjetër të saj.

Ata numra i shënojmë me $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ dhe i quajmë **numra të plotë negativ**. Numrat natyror i quajmë numra të plotë pozitiv d.m.th. $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$.

Definicioni. Bashkësia e **numrave të plotë** përbëhet prej numrave të plotë pozitiv, numrave të plotë negativ dhe numrit 0 d.m.th. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

Numri zero nuk është as pozitiv as negativ.

Përndryshe, në formën gjeometrike bashkësinë e numrave të plotë e paraqesim përmes boshtin numerik ashtu që numrat e plotë negativ i vendosim si pasqyra simetrike të numrave natyror në lidhje (në raport) me pikën O (Vizatimi 1).



Vizatimi 1

Pasqyra simetrie e numrit të plotë n është numri $-n$ dhe e quajmë **numër të kundërt** të numrit n .

Shembulli 1. Numri i kundërt i 2 është −2, i kundërti i numrit 1 është −1, i kundërti i numrit −5 është 5 etj. ♦

Në mënyrë gjeometrike, nëse numrat e plotë simetrik i shqyrtojmë në boshtin numerik, shohim qartë se numrat a dhe $-a$ janë njësoj larg prej numrit 0. Largësia e cilitdo numër të plotë a prej 0 quhet **vlerë absolute** e numrit a dhe shënohet me $|a|$. Kështu që

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Shembulli 2. $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$. ♦

<u>Rregullat për mbledhje dhe shumëzim të numrave të plotë</u>

a) Nëse $a, b \in \mathbb{Z}^+$, atëherë $a + b \in \mathbb{Z}^+$ dhe $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$

b) Nëse $a, b \in \mathbb{Z}^-$, atëherë $a + b \in \mathbb{Z}^-$ dhe $a \cdot b \in \mathbb{Z}^+$

c) Nëse $a \in \mathbb{Z}^+$ dhe $b \in \mathbb{Z}^-$, atëherë $a + b \in \mathbb{Z}^+$ nëse $|a| > |b|$, a $a + b \in \mathbb{Z}^-$ nëse $|a| < |b|$ dhe $a \cdot b \in \mathbb{Z}^-$.

Operacioni zbritje e numrave të plotë definohet përmes mbledhjes respektivisht nëse $a, b \in \mathbb{Z}$, atëherë $a - b = a + (-b)$. Kjo domethënë se për zbritje mund të shfrytëzohen të njëjtat rregulla që përdoren për mbledhje të numrave të plotë.

Veti të operacioneve me numra të plotë

Për operacionet me numra të plotë vlejnë këto veti (ligje):
1. $a + b = b + a$ ligji komutativ për mbledhje
2. $a \cdot b = b \cdot a$ ligji komutativ për shumëzim
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ ligji asociativ për mbledhje
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ligji asociativ për shumëzim
5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dhe $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i shumëzimit në raport me mbledhjen
6. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ligji distributiv i djathtë dhe i majtë i shumëzimit në raport me zbritjen.
7. Nëse $a : c$, $b : c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, atëherë $(a + b) : c = a : c + b : c$ dhe $(a - b) : c = a : c - b : c$ ligji distributiv i djathtë i pjesëtimit në raport me mbledhjen dhe zbritjen.
8. Shuma e dy numrave të plotë të kundërt është 0 d.m.th. $a + (-a) = 0$.

Detyra 1. Njehso vlerën e shprehjes:
a) $|10| + |-10|$
b) $|13 - 8| + |-3| - |-5|$
Zgjidhje. a) $|10| + |-10| = 10 + 10 = 20$, **b)** $|13 - 8| + |-3| - |-5| = 5 + 3 - 5 = 3$.♦

Gjatë krahasimit të numrave të plotë vlen e njëjta rregull sikur te numrat natyror, d.m.th. numri i plotë a është më i vogël se numri i plotë b nëse dhe vetëm nëse në boshtin numerik numri a gjendet majtas nga numri b dhe shënojmë $a < b$.

Numrat e plotë mund të renditen sipas madhësisë në këtë mënyrë:

$$\ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

Detyra 2. Cakto vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:
a) $-3 > 0$
b) $-7 > -5$
c) $-11 < -3$
Zgjidhje. a) jo e vërtetë meqenëse 0 nuk është majtas nga -3, **b)** jo e vërtetë meqenëse -7 nuk është djathtas nga -5, **c)** e vërtetë meqenëse -11 është majtas nga -3. ♦

Prandaj vlejnë këto veti të renditjes së numrave të plotë:
1. Nëse $a < b \wedge b < c$, atëherë $a < c$
2. Nëse $a < b$, atëherë $a + c < b + c$
3. Nëse $a < b$ dhe nëse $c > 0$, atëherë $ac < bc$, dhe nëse $c < 0$, atëherë $ac > bc$.

Detyra 3. Cakto vlerën e shprehjes $(-3 + 5) \cdot (-2) + |-8 - 11 + 3|$
Zgjidhje. $(-3 + 5) \cdot (-2) + |-8 - 11 + 3| = -4 + 16 = 12$. ♦

Nëse $a\ b, \in \mathbb{Z}$, atëherë $a : b$ është numër i plotë nëse dhe vetëm nëse $b \mid a$.
Prandaj operacionet mbledhje, shumëzim dhe zbritje të numrave të plotë janë operacione të mbyllura kurse pjesëtimi jo i mbyllur (i pjesshëm) në $\mathbb{Z}$.

Detyra

1.Cakto vlerën absolute të numrave:

a) -7

b) 0

c) 33

2.Njehso vlerën e shprehjes:

a) $|3 - 14| + |-2 \cdot (-3) + 1|$

b) $|7 + 11| + | -2 \cdot (-5) + 10|$

3. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $| -4 \cdot (7 - 15) : (8 - 10) + 13 \cdot 3 - 4|$

b) $| -6 \cdot (9 - 15) : (5 - 8) + 11 \cdot 4 - 5|$

4.Përcakto cilët nga numrat e dhënë është më i madh:
$A = (-2 \cdot (-2 \cdot (-2 + 3) \cdot (-2)) \cdot (-3))$ ose $B = (-3 \cdot (-3 \cdot (-3 + 5) \cdot (-2)) \cdot (-2))$.

5. Shënoji numrat -2, 3, -5 dhe 11, paraardhësit e drejtpërdrejt të tyre, pasardhësit e drejtpërdrejt të tyre dhe numrat e kundërt të tyre, dhe pastaj njehso shumën e të gjithë numrave të fituar.

2.3. Numrat racional

Ekzistojnë situata të përditshme të cilat s'mund të shprehen me ndihmën e numrave të plotë. Për shembull, nëse një tortë duhet t'ia ndajmë barabartë pesë personave, paraqitet nevoja për ekzistim të numrit me të cilin do të shprehet pjesa e tortës që do të merr një person etj.

Prandaj do të llogarisim se çdo shënim $\frac{a}{b}$, ku, $a, b \in \mathbb{Z}$ dhe $b \neq 0$ quhet **thyesë**.

Kështu që dy thyesa $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{d}$ janë të barabarta nëse dhe vetëm nëse $a \cdot d = b \cdot c$.

Numri a quhet **numërues**, b **emërues** dhe „-“ quhet **vijë thyesore**.

Nga fakti se çdo thyesë si herës i numëruesit dhe emëruesit është numër i ri dhe çdo dy thyesa të barabarta japin numër të njëjtë, themi se bashkësia e fituar në këtë mënyrë është $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$ dhe quhet **bashkësia e numrave racional**.

Meqenëse $\mathbb{Q}^- = \left\{ \frac{-a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$ dhe $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$,
themi se $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$.

Çdo numër i plotë a mund të shënohet si thyesë $\frac{a}{1}$.

Barazitë $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ dhe $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$, për $a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge c \neq 0$ quhen **zgjerim** dhe **thjeshtim** i thyesës.

Operacionet me numra racional

1. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$ mbledhje dhe zbritje e numrave racional

2. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ shumëzim të numrave racional

3. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ pjesëtim të numrave racional, ku $\frac{d}{c}$ është vlera reciproke e $\frac{c}{d}$

Pjesëtimi i thyesave mund të paraqitet edhe si $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ e cila quhet **thyesë e dyfishtë.**

Detyra 1. Njehso vlerën e:

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

b) $1\frac{1}{5}-2\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{13}$

ç) $\frac{2}{7}:\frac{23}{14}$

Zgjidhje. a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5+6}{15}=\frac{11}{15}$,

b) $1\frac{1}{5}-2\frac{3}{4}=1+\frac{1}{5}-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-1+\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=-1+\frac{4-15}{20}=-1-\frac{11}{20}=-\left(1+\frac{11}{20}\right)=-1\frac{11}{20}$,

c) $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{13}=\frac{33}{52}$, **ç)** $\frac{2}{7}:\frac{23}{14}=\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{23}=\frac{4}{23}$. ♦

Numrat dhjetor (decimal)

Numri i formës a,bcd ..., ku $a\in\mathbb{Z}$ dhe $b, c, d, ...\in\mathbb{Z}$ quhet **numër dhjetor**. Kështu që çdo numër dhjetor përbëhet prej dy pjesëve të ndara me presje. Pjesa para presjes quhet **pjesa e plotë**, kurse pjesa pas presjes quhet **pjesa dhjetore**.

Pjesa dhjetore e një numri dhjetor mund të jetë e fundme ose e pafundme.

Shembulli 1. Numri 3,2 është numër dhjetor i fundmë, kurse 1,3333...3... është numër dhjetor i pafundmë. ♦

Numrat dhjetor të pafundmë që kanë një shifër ose një varg të fundmë shifrash që përsëriten sipas të njëjtës renditje pas presjes dhjetore quhen **numra dhjetor periodik**.

Shembulli 2. Numri 2, 6666...6... është numër dhjetor periodik dhe shënohet me 2, (6), −3, (159) = −3,159159...159.... Ngjashëm, numra dhjetor periodik janë edhe: 5,92 (356) dhe 4,1 (23). ♦

Detyra 1. Njehso:

a) 2,35 + 3,9

b) 17,2 – 11,36

c) 2,7 · 3,47

ç) 12,1 : 0,11

Zgjidhje. a)
$$\begin{array}{r} 2,35 \\ +3,9 \\ \hline 6,25 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 17,2 \\ -11,36 \\ \hline 5,84 \end{array}$$

c) Meqenëse
$$\begin{array}{l} \underline{27\cdot 347} \\ \quad 189 \\ \;\; 108 \\ +81 \\ \hline \;\; 9369 \end{array}$$

prodhimi i kërkuar është 9,369

ç) 12,1 : 0,11 = (12,1 · 100) : (0,11 · 100) = 1210 : 11 = 110. ♦

Çdo thyesë mund të shënohet si numër dhjetor, duke pjesëtuar numëruesin me emëruesin.

Shembulli 3. Gjatë pjesëtimit të numëruesit me emëruesin mund të fitohen numra dhjetor të fundmë $\frac{1}{2}=0,5$, $\frac{100}{8}=12,5$ ose numra dhjetor të pafundmë $\frac{1}{3}=0,(3)$. ♦

Çdo numër dhjetor i fundmë ose numër dhjetor periodik mund të shënohet si thyesë.

Shembulli 4. Numri 4,7 shënohet si thyesë në këtë mënyrë:
$4,7=\frac{4,7}{1}=\frac{4,7\cdot 10}{1\cdot 10}=\frac{47}{10}$. ♦

Shembulli 5. Numri 3,(6) shënohet si thyesë në këtë mënyrë:

$$x = 3,(6) \;/\cdot 10$$
$$10x = 36,(6)$$

Me zbritje fitohet $10x - x = 36,(6) - 3,(6)$ d.m.th. $9x = 33$. Pra $x=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$. ♦

Shembulli 6. Numri 5,32 (4) shënohet si thyesë në këtë mënyrë:

$$x = 5,32(4) / \cdot 100$$

$$100x = 532,(4) / \cdot 10$$

$$1000x = 5324,(4)$$

Me zbritje të dy barazimeve të fundit fitojmë $900x = 4792$. Pra $x = \frac{4792}{900} = \frac{1198}{225}$. ♦

Detyra

1. Shkruani si numra dhjetor thyesat: $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{25}$ dhe $\frac{13}{16}$.

2. Krahaso numrat:
a) 5, (83)dhe 5,8 (3)

b) 4, (371) dhe 4, (37)

3. Njehso:
a) (2,5 · 0,4 – 8,52) : 0,01

b) (12,5 · 0,8 – 1,45) : 0,001

4. Shkruani si thyesa numrat:
a) 4,1(3)

b) 2,36(21)

5. Kryej operacionet e dhëna $\dfrac{\left(-0,39 + \frac{72}{100}\right) : 0,66}{\left(\frac{5}{16} \cdot 1,2 + \frac{11}{40}\right) : 1\frac{3}{10}}$.

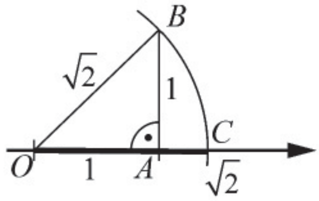
2.4. Numrat real

Mësuam se çdo numër i fundmë dhe numër i pafundmë periodik mund të paraqitet si thyesë, d.m.th. ai është numër racional.

Në detyrat në të cilat duhet të njehsohet gjatësia e hipotenuzës në trekëndëshin barakrahës kënddrejtë me katete $a = 1cm$ ose të caktohet gjatësia e diagonales së drejtkëndëshit me brinjë $a = 1$ dhe $b = 2$ ballafaqohemi me numra që s'janë racional. Gjegjësisht, në rastin e parë sipas teoremës së Pitagorës fitohet gjatësia e hipotenuzës $c = \sqrt{2a^2}$ d.m.th. $c = \sqrt{2}$, kurse në rastin e dytë gjatësia e diagonales $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Në këtë konstatim lehtë do të bindemi nëse nisemi nga supozimi se, për shembull, numri $c = \sqrt{2}$ është racional. Atëherë ai mund të paraqitet si thyesë e pathjeshtueshme d.m.th. $c = \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dhe $PMP(m, n) = 1$. Atëherë me fuqizim fitohet se $m^2 = 2n^2$ prej ku përfundojmë se m^2 është i pjesëtueshëm me 2 d.m.th. m është i pjesëtueshëm me 2, andaj shprehjen $m = 2k$ e zëvendësojmë në $m^2 = 2n^2$ dhe fitojmë se $4k^2 = 2n^2$ d.m.th. $n^2 = 2k^2$, dhe përfundojmë se edhe n është i pjesëtueshëm me 2 që është në kundërshtim me supozimin se $PMP(m, n) = 1$.

Pra ekzistojnë numra që s'janë racional dhe të cilët mund të paraqiten në boshtin numerik, për shembull, le ΔOAB të jetë dhënë trekëndëshi barakrahës kënddrejtë me gjatësi të katetës $\overline{OA} = \overline{AB} = 1$. Atëherë $\overline{OB} = \sqrt{2}$ dhe kjo gjatësi mund të bartet në boshtin numerik (Vizatimi 1).



Vizatimi 1

Pra ekzistojnë numra dhjetor të pafundmë dhe jo periodik të cilat mund t'i paraqesim në bosht numerik. Ata numra quhen **numra irracional**, kurse bashkësia e të gjitha numrave irracional shënohet me $\mathbb{I}$.

Definicioni. Bashkësia e gjithë numrave racional dhe irracional përbëjnë bashkësinë e **numrave real** d.m.th. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Shembulli 1. Numra irracional janë: 1,323323332...., π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ... ♦

Çdo numër real mund të paraqitet në boshtin numerik dhe vlen: nëse numri a është „majtas" prej numrit b, atëherë $a < b$.

Shembulli 2. Nga konstruktimi i mëparshëm i numrit $\sqrt{2}$ është e qartë se $1 < \sqrt{2}$ meqenëse gjatësia e hipotenuzës është më e madhe se gjatësia e katetës në secilin trekëndësh kënddrejtë. ♦

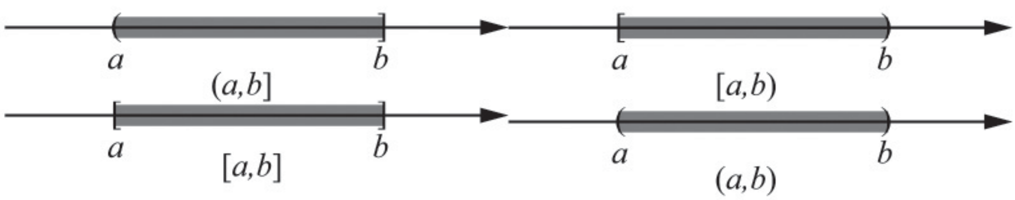
Definicioni: Le të jetë a, $b \in \mathbb{R}$ dhe $a < b$, atëherë

$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$ quhet interval i hapur,

$[a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \le x < b\}$ quhet interval gjysmë i hapur nga djathtë,

$(a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x \le b\}$ quhet interval gjysmë i hapur nga majtë,

$[a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \le x \le b\}$ quhet interval i mbyllur.



Definicioni: Le të jetë $a \in \mathbb{R}$, atëherë

$[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \ge a\}$, $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \le a\}$,

$(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$ dhe $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$ quhen intervale të pakufizuara (gjysmëdrejtëza).

Detyra 1. Cilët nga gjykimet e dhëna janë të vërteta?

a) $2 \in (2, 5)$

b) $3 \in (-7, 3]$

c) $\sqrt{2} \in [1,3]$

Zgjidhje. a) gjykim jo i vërtetë, meqenëse $(2, 5) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 5\}$ dhe $2 \nless 2$, **b)** gjykim i vërtet ë meqenëse $3 \leq 3$, **c)** gjykim i vërtetë meqenëse $\sqrt{2} > 1$. ♦

Definicioni. Vlera absolute e numrit real a është:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Shembulli 3. Bashkësia $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 2\}$ është intervali i hapur $(-2, 2)$. ♦

Definicioni. Le të jetë $a \in \mathbb{R}$ dhe $n \in \mathbb{N}$. Atëherë an = $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ herë}}$ quhet **fuqi** e numrit real a .

Shembulli 4. Numri $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^2 \cdot 2^3$. ♦

Definicioni . Le të jetë $a \in \mathbb{R}$. Atëherë $\sqrt{a^2} = |a|$

Shembulli 4. Vlera e shprehjes $\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{25} = |3| + |4| - |5| = 2$. ♦

<u>**Veti të rrënjës katrore**</u>

1. Nëse $a, b \geq 0$, atëherë $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2. Nëse $a \geq 0$, $b > 0$, atëherë $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$

3. Nëse $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atëherë

4. Nëse $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ dhe $a \geq 0$, atëherë $\sqrt{a^m} = \sqrt{a^{2k+1}} = \sqrt{\left(a^k\right)^2 a} = \left|a^k\right|\sqrt{a}$

5. Nëse $b \geq 0$, atëherë $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{b} = (a \pm c)\sqrt{b}$

Shembulli 5. Numri $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = |2|\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, pra themi se $\sqrt{8}$ është shënuar në o **formë normale**

Detyra 2. Njehso:

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{18} + \sqrt{8}$

Zgjidhje. a) $\sqrt{32} + \sqrt{50} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 2} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$,

b) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{18} + \sqrt{8} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

Detyra

1. Paraqiti në boshtin numerik numrat $-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ dhe 2.

2 . Cakto prerjen dhe unionin e intervaleve $(-3, 6]$ dhe $[-5, 2)$.

3. Krahaso numrat:

a) 3,4567 dhe 3,4576

b) –3,1223 dhe –3,1224

4. Njehso:

a) $\sqrt{112}+\sqrt{63}$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{12}+\sqrt{125}$

5. Çfarë shenja kanë a dhe b nëse:

a) $ab < 0$

b) $ab > 0$ dhe $a + b > 0$

c) $ab > 0$ dhe $a + b < 0$

ç) $a : b > 0$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Numrat e dhënë zbërtheni në shumëzues të thjeshtë:

a) 720 **b)** 3600 **c)** 837

2. Njehso:

a) *SHVP* (108, 39) **b)** *PMP* (270, 96)

3. Njehso:

a) 365 + 48 + 135 + 252 + 200 **b)** $15 : 3 + 25 \cdot 11 \cdot 4 - 50 \cdot 5$

4. Muhamedi çdo të tretën ditë shkon në notim, çdo të katërtën ditë shkon në kurs të gjuhës kineze dhe çdo të katërmbëdhjetën ditë nget biçikletën. Nëse sot Muhamedi i ka të gjitha tre aktivitetet, përcakto pas sa dite përsëri do t'i ketë të tre aktivitetet në të njëjtën ditë.

5. Isa, Petriti dhe Goca kanë hapat të gjatë 60cm, 65cm dhe 70cm . Ata nisen njëkohësisht, prej të njëjtit vend dhe në të njëjtin drejtim. Përcakto në çfarë distance është pika e parë tek e cila secili nga ata do të bëj numër të plotë të hapave.

6. Cakto të gjithë shumëfishat treshifror të numrit 7 më të mëdhenj se 100 por më të vegjël se 200 (ndërmjet numrave 100 dhe 200) të cilët janë të pjesëtueshëm me 5.

7. Njehso!

a) $(1 - 2) \cdot 20 : ((-3) \cdot 4 + 10)$ **b)** $(4 - 10 + 3 + (-5) + 10) : (-2)$

8. Njehso!

a) $12 \cdot (4 \cdot 16 - 84 : 6) - 2 \cdot (180 : 4 + 3 \cdot 17 \cdot 5)$

b) $4 \cdot (4 \cdot 16 - 135 : 9) - 5 \cdot (524 : 4 + 3 \cdot 12 \cdot 4)$

c) $2 \cdot (4 \cdot 13 - 117 : 9) - 3 \cdot (256 : 4 + 4 \cdot 15 \cdot 5)$

ç) $5 \cdot (4 \cdot 11 - 176 : 8) - 3 \cdot (339 : 3 + 3 \cdot 11 \cdot 5)$

9. Njehso

a) $|-3 \cdot (11-15) : (8-10) + 11 \cdot 5 - 7|$

b) $|6 \cdot (8-11) : (2-8) - 11 \cdot 3 - 5|$

c) $|-4\cdot(4-9):(23-25)+12\cdot 4-7|$

ç) $|-9\cdot(8-13):(6-9)+14\cdot 2-5|$

10. Njehso:

a) $\dfrac{3\frac{1}{5}\cdot 7\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}-2\frac{7}{30}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{3}}{12}+\dfrac{5}{\frac{3}{6}}-\dfrac{2+\frac{1}{3}}{3-\frac{2}{5}}$

11. Njehso:

a) 3,72 +0,02 − 2,35 **b)**(6,25 : 0,5) · 0,01

12. Njehso:

a) $24:8\cdot 2-(-3)\cdot 2+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}$

b) 0,5 +1,(5) − 2, 3(7)

13. Paraqiti si thyesa të pathjeshtueshme numrat:

a) 7, 3(8) **b)** 2,(47)

14. Në boshtin numerik paraqiti intervalet:

a) [1, 5] **b)** [−2, 3) **c)** (−3, 2]

15. Në boshtin numerik paraqiti numrat:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{11}$ **c)** $2\sqrt{3}$

16. Cakto:

a) (−2,4] ∩ [0,5) **b)** (−2,4] ∪ [0,5)

17. Janë dhënë bashkësitë $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},-4,7<x\leq 3,2\}$, $B=\{x \mid x\in\mathbb{R},-3,8\leq x<5,3\}$ dhe $C=\{x \mid x\in\mathbb{R},-2,4\leq x\leq 6,9\}$. Cakto bashkësinë $A \cap (B \cup C)$.

18. Njehso:

a) $\sqrt{45}+\sqrt{75}$ **b)** $\sqrt{288}-\sqrt{8}+\sqrt{18}$

19. Le të jetë $a = -3,7$ dhe $b = -11,5$. Njehso vlerën e:

a) $|a + b|$ **b)** $|a - b|$ **c)** $|a| \cdot |b|$

20. Nëse $\dfrac{-12}{b-a}<0$, atëherë a vlen $a > b$?

3. SHPREHJET ALGJEBRIKE RACIONALE

3.1. Fuqi me tregues numër natyror

Shqyrtimi i shumës së mbledhësve të barabartë ka sjellë deri te operacioni shumëzim. Ngjashëm, prodhimi i shumëzuesve të barabartë na sjell deri te një operacion i ri – fuqizimi.

Definicioni. Prodhimi i n shumëzuesve të barabartë, prej të cilëve secili prej tyre është i barabartë me ndonjë numër real a, quhet **fuqia e *n*–të e numrit *a*** dhe shënohet me a^n, respektivisht

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ herë}}$$

Numri a quhet **bazë e fuqisë**, kurse numri n quhet **tregues i fuqisë**

Meqenëse prodhimi duhet të ketë së paku dy shumëzues, sipas definicionit të lartpërmendur, treguesi i fuqisë n nuk duhet të jetë më i vogël se 2. Mirëpo, me marrëveshje merret që $a^1 = a$.

Fuqia e cilitdo numri njehsohet ashtu që ai shënohet në trajtë të prodhimit, dhe pastaj kryhet shumëzimi.

Shembulli 1. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

b) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$. ♦

Prej definicionit për shumëzim të numrave, drejtpërdrejtë vijon se:

• Fuqia e cilitdo numri pozitiv me tregues numër çift është po ashtu numër pozitiv, respektivisht

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0.$$

• Fuqia e numrit negativ me tregues numër çift është numër pozitiv, kurse fuqia e numrit negativ me tregues numër tek është numër negativ, respektivisht

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^n > 0, & \text{nëse } n \text{ është numër çift} \\ a^n < 0, & \text{nëse } n \text{ është numër tek} \end{cases}$$

Operacionet me fuqi i kryejmë në pajtim me rregullat vijuese:

1. Rregulla për shumëzim të fuqive me baza të barabarta

Prodhimi i dy fuqive me baza të barabarta është fuqia me bazë të njëjtë (baza përshkruhet) dhe me tregues të barabartë me shumën e treguesve të shumëzuesve, respektivisht

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (1)$$

Vërtetë, kemi se $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ herë}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ herë}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ herë}} = a^{n+m}$.

Shembulli 2. a) $a^3 \cdot a^4 = a^7$; **b)** $a^n \cdot a^2 = a^{n+2}$. ♦

2. Rregulla për pjesëtim të fuqive me baza të barabarta

Herësi i dy fuqive me baza të barabarta është fuqia me bazë të njëjtë dhe me tregues të barabartë me ndryshimin e treguesve të pjesëtueshmit dhe pjesëtuesit, respektivisht

$a^n : a^m = a^{n-m}$, gjatë kushtit $m > n$. (2)

Vërtetë, kemi se prodhimi i pjesëtuesit dhe herësit $a^m \cdot a^{n-m} = a^{m+(n-m)} = a^n$, është i barabartë me të pjesëtueshmin prej ku rrjedh vërtetësia e barazisë (2).

Shembulli 3. a) $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$, meqenëse $a^3 \cdot a^2 = a^5$.

b) $a^{n+5} : a^{n-1} = a^{(n+5)-(n-1)} = a^4$. ♦

3. Rregulla për fuqizim të prodhimit

Prodhimi i dy numrave fuqizohet ashtu që çdo shumëzues fuqizohet me treguesin e fuqisë, dhe fuqitë e fituara shumëzohen, respektivisht

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. (3)

Vërtetë, në bazë të definicionit për fuqi dhe ligjit komutativ dhe asociativ të shumëzimit, kemi se

$$(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdots(a\cdot b)}_{n \text{ herë}} = \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n \text{ herë}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdots b)}_{n \text{ herë}} = a^n\cdot b^n.$$

Shembulli 4. $(-2\,a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5 = -32a^5$. ♦

Rregulla për fuqizim të prodhimit të dy numrave mund të zgjerohet për rastin kur kemi më tepër se dy shumëzues, respektivisht

$(a\cdot b\cdot c\cdots z)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n\cdots z^n$.

Shembulli 5. $(x \cdot y \cdot z)^3 = x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$. ♦

Barazia (3) nganjëherë është e dobishme të lexohet dhe zbatohet nga e djathta në të majtë, gjegjësisht

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

që domethënë se fuqitë me tregues të barabartë shumëzohen, ashtu që prodhimi nga bazat e tyre fuqizohet me treguesin e përbashkët.

Shembulli 6. $24^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24\cdot\frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64$. ♦

4. Rregulla për fuqizim të herësit

Herësi i dy numrave fuqizohet ashtu që veçmas fuqizohet numëruesi dhe veçmas emëruesi me treguesin e fuqisë, dhe pastaj i pjesëtueshmi i fuqizuar pjesëtohet me pjesëtuesin e fuqizuar, respektivisht

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, gjatë kushtit $b \neq 0$. (4)

Vërtetë, në bazë të definicionit për fuqi dhe rregullës për shumëzim të thyesave, kemi

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ herë}} = \frac{a\cdot a\cdots a}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n \text{ herë}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Shembulli 7. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$. ♦

Barazia (4) nganjëherë është e dobishme të lexohet dhe praktikohet nga djathtas në të majtë, respektivisht

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, gjatë kushtit $b \neq 0$.

Që domethënë se fuqitë me tregues të barabartë pjesëtohen, ashtu që herësi i bazave të tyre fuqizohet me treguesin e përbashkët.

Shembulli 8. $\frac{18^5}{9^5} = \left(\frac{18}{9}\right)^5 = 2^5 = 32$. ♦

5. Rregulla për fuqizim të fuqisë

Fuqia fuqizohet ashtu që baza e fuqisë fuqizohet me prodhimin e të dy treguesve, respektivisht

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. (5)

Vërtetë, në bazë të barazisë (1), kemi

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ herë}} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ herë}}} = a^{m \cdot n}.$$

Shembulli 9. $(a^3)^5 = a^{3 \cdot 5} = a^{15}$. ♦

Detyra

1. Njehso

a) $(-5)^2 + (-2)^3$ **b)** $3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)^3$ **c)** $-(-1)^2 + 1$.

2. Kryej operacionet e dhëna:

a) $(-2) \cdot (-3)^2 + (-5)^2 - (-14)^3 : 7$ **b)** $-(-4)^2 \cdot (-0,3)^3 + 8 \cdot (-3)$

3. Njehso vlerat e shprehjeve:

a) $\frac{-1,75 : (-0,35) + 8,8 : (-0,11)}{(-2,45 + 3,2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}$ **b)** $\left\{\left[4 - 3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right] : \frac{4}{25}\right\} \cdot 5^3 \cdot 2^3$

4. Kryej operacionet e dhëna me fuqi:

a) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$ **b)** $a^n \cdot a^5$ **c)** $x^{n-1} \cdot x$

ç) $a^7 : a^4$ **d)** $b^{n+2} : b^3$ **dh)** $a^8 : (a^2 \cdot a^5)$.

5. Njehso

a) $(a^2)^3$ **b)** $(a^n)^2$ **c)** $(2a \cdot b^2)^3$

ç) $(-3a^2 \cdot b^2 \cdot c^3)^2$ **d)** $25^3 \cdot 4^3$ **dh)** $-(-a^3)^2$

e) $(a^{2n})^3 : (a^3)^{2n}$ **f)** $\left(-\frac{5x^2}{b}\right)^3$ **g)** $\left(\frac{a^3b}{2c^3}\right)^4$

3.2. Fuqia me tregues zero dhe numër të plotë negativ

Me definicionin e fuqisë me tregues numër natyror, shprehjet a^0 dhe a^{-n}, ku n është numër natyror, ngelën të pa shqyrtuar. Për këto fuqi sjellim definicion të radhës.

Definicioni. (i) Për çdo numër real $a \neq 0$ fuqia a^0 është e barabartë me një, respektivisht

$$a^0 = 1$$

(ii) Për çdo numër real $a \neq 0$ dhe për çdo numër natyror n, fuqia a^{-n} është vlera reciproke e fuqisë a^n, respektivisht

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Shembulli 1. a) $7^0 = 1$; **b)** $\pi^0 = 1$; **c)** $\left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1$;

ç) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; **d)** $0{,}01^{-2} = \frac{1}{0{,}01^2} = \frac{1}{0{,}0001} = 10000$. ♦

Detyra 1. Njehso vlerën e shprehjes: $2^{-2} - 2^{-3} + 4^{-1} - (-1)^{-5} + 3^0$.
Zgjidhje. Kemi

$$2^{-2} - 2^{-3} + 4^{-1} - (-1)^{-5} + 3^0 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{(-1)^5} + 1 =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{19}{8}. ♦$$

Në këtë mënyrë vlera e fuqisë a^{-n} është e definuar për çdo numër të plotë $a \neq 0$. Të theksojmë se në definicionet e përmendur më lartë fuqitë a^0 dhe a^{-n}, ku n

Është numër natyror, s'janë të definuar dhe për to themi se s'kanë kuptim.

Me definicionet e mësuara për fuqizim me tregues numër zero dhe tregues numër të plotë negativ, rregullat për operacionet me to janë të njëjta sikurse për fuqizimin me tregues numër natyror, gjegjësisht kemi

Për çdo $a, b \in$ ○$\backslash\{0\}$ dhe për çdo numra të plotë $n, m \in$ vlen:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; **2.** $a^n : a^m = a^{n-m}$; **3.** $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; **5.** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Ta vërtetojmë pohimin $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

- Për $n \in \mathbb{N}$ pohimi është vërtetuar më parë.
- Për $n = 0$ kemi $(a \cdot b)^0 = 1$ dhe $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$, prej ku rrjedh se $(a \cdot b)^0 = a^0 \cdot b^0$.
- Për $n = -p$, $p \in \mathbb{N}$, kemi

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-p} = \frac{1}{(a \cdot b)^p} = \frac{1}{a^p \cdot b^p} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{b^p} = a^{-p} \cdot b^{-p} = a^n \cdot b^n.$$

Pohimet tjera vërtetohen ngjashëm me analogji.

Shembulli 2. a) $x^{-3}\cdot x^{-4}:x^{-6}=x^{-3+(-4)}:x^{-6}=x^{-7}:x^{-6}=x^{-7-(-6)}=x^{-1}$;

b) $(x^{-5})^{-2}=x^{(-5)\cdot(-2)}=x^{10}$; **c)** $\dfrac{(x^5)^{-3}\cdot x^7}{x^{-8}}=\dfrac{x^{-15}\cdot x^7}{x^{-8}}=\dfrac{x^{-8}}{x^{-8}}=1$. ♦

Detyra 2. Kryej operacionet e dhëna:

a) $\dfrac{a^3\cdot a^{-4}\cdot(-2a^{-2})}{a^{-5}}$; **b)** $\left(\dfrac{b^3\cdot b^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-1}$

Zgjidhje. Kemi se

a) $\dfrac{a^3\cdot a^{-4}\cdot(-2a^{-2})}{a^{-5}}=\dfrac{a^{-1}\cdot(-2a^{-2})}{a^{-5}}=-2\cdot\dfrac{a^{-3}}{a^{-5}}=-2a^{-3-(-5)}=-2a^2$;

b) $\left(\dfrac{b^3\cdot b^{-5}}{b^{-4}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{b^{-2}}{b^{-4}}\right)^{-1}=(b^{-2-(-4)})^{-1}=(b^2)^{-1}=\dfrac{1}{b^2}$. ♦

Nëse baza e fuqisë me tregues numër të plotë negativ është thyesë, atëherë, në pajtim me definicionin, fitojmë:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}$$

Prej nga përfundojmë se thyesa fuqizohet me numër të plotë negativ në atë mënyrë që vlera reciproke e saj fuqizohet me numrin e kundërt të treguesit të dhënë.

Shembulli 3. a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{4^2}{3^2}=\dfrac{16}{9}$; **b)** $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3=-\dfrac{3^3}{2^3}=-\dfrac{27}{8}$;

c) $(-2)^{-5}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\dfrac{1}{(-2)^5}\cdot\left(-\dfrac{2}{1}\right)^2=\dfrac{1}{(-2)^5}\cdot(-2)^2=(-2)^{-3}=\dfrac{1}{(-2)^3}=-\dfrac{1}{8}$. ♦

Detyra 3. Kryej operacionet e dhëna:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{12}\right)^{0}$; **b)** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

Zgjidhje. Kemi se

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{12}\right)^{0}=3^1+3^2+2^1-7^1-1=6$;

b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=4^2+2^3=24$.

Detyra 4. Shprehjet e dhëna shënoi pa tregues negativ:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-4}}{c^{-5}}$; **b)** $x^{-3} \cdot y^2$; **c)** $\frac{5x^{-1} \cdot y^{-2} \cdot z^3}{a^{-4} \cdot b^{-1}}$; **ç)** $\frac{(2a^3+3)^0}{b^{-3}}$; **d)** $\frac{1}{a^{-5}b^2}$.

Zgjidhje. Kemi se

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-4}}{c^{-5}} = \frac{a^2 \cdot \frac{1}{b^4}}{\frac{1}{c^5}} = \frac{\frac{a^2}{b^4}}{\frac{1}{c^5}} = \frac{a^2 \cdot c^5}{b^4}$; **b)** $x^{-3} \cdot y^2 = \frac{1}{x^3} \cdot y^2 = \frac{y^2}{x^3}$;

c) $\frac{5x^{-1} \cdot y^{-2} \cdot z^3}{a^{-4} \cdot b^{-1}} = \frac{5 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot z^3}{\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{b^1}} = \frac{\frac{5z^3}{x \cdot y^2}}{\frac{1}{a^4 \cdot b}} = \frac{5z^3 \cdot a^4 \cdot b}{x \cdot y^2}$;

d) $\frac{(2a^3+3)^0}{b^{-3}} = \frac{1}{b^{-3}} = b^3$; **ç)** $\frac{1}{a^{-5}b^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^5} \cdot b^2} = \frac{a^5}{b^2}$. ♦

Detyra

1. Çfarë është më e madhe:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ ose $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ **b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^0$ ose $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$?

2. Njehso vlerën e shprehjeve:

a) $8^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10}$ **b)** $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} : (-32)^{-1}$.

3. Njehso vlerën e shprehjeve:

a) 2^{-4} **b)** -2^4 **c)** $(-2)^4$

ç) $-0{,}5^{-2}$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^0$ **dh)**) $(5 - 3 \cdot 0{,}37)^{-2}$.

4. Shkruaj shprehjet pa tregues negativ:

a) $\frac{3a^{-2} \cdot c^{-3}}{4x^{-1}}$ **b)** $\frac{2^{-2}a^2}{3^{-1}x^2y^{-4}}$ **c)** $\frac{5a^{-3}c^2}{4a^2c^{-1}x^{-3}}$.

5. Shkruaj shprehjet vijuese pa emërues:

a) $\frac{x}{ay^2}$ **b)** $\frac{3x}{cy^{-3}}$ **c)** $\frac{2ax^2}{(a-b)^{-3}}$.

6. Kryej operacionet e dhëna:

a) $\frac{4}{5}a^{-2}c^{-3}x \cdot 10a^{-4}x^{-3}$ **b)** $0{,}5a^{-2} : (0{,}02a^3b^{-1})$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}x^{-1}y^{-3}\right)^{-2}$.

7. Thjeshto shprehjet:

a) $3x^{-4} : x^{-7} + 0{,}25^{-1}x^{-3} - x^8 : x^5$ **b)** $\left(\frac{2}{5}x^{-3} \cdot (y^2)^{-4}\right)^{-3}$

c) $(x^{-1} - y^{-1})^{-1}, x \neq 0, y \neq 0$ **ç)** $(x^{-2} + y^{-2})^{-2}, x \neq 0, y \neq 0$.

3.3. Shprehjet algjebrike racionale

Shprehjet racionale të plota dhe thyesore

> **Definicioni. Shprehje algjebrike racionale** është vargu i përbërë prej numrit të fundmë të konstantave dhe ndryshoreve, të lidhura me shenjat e operacioneve mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim me tregues numër të plotë, me domethënie të caktuar matematikore.

Shembulli 1. $a+b$, $\frac{m^2+5}{m-n}$, $\frac{1}{p+3}$ janë shprehje racionale algjebrike. ♦

Shprehja algjebrike mund të përbëhet edhe vetëm prej konstanteve, madje edhe vetëm prej një konstante ose ndryshore. Për shembull, a, 1, 7,2 llogariten si shprehje algjebrike. Shprehjet algjebrike që përmbajnë vetëm konstante quhen **shprehje numerike**. Numri që fitohet, pasi që në shprehjen algjebrike do të zëvendësohen vlerat përkatëse të ndryshoreve dhe kryhen operacionet e dhëna në të, quhet **vlera numerike** e shprehjes.

Shembulli 2. Vlera numerike e shprehjes $3x-1$ për $x=1$ është $3\cdot 1-1=2$, për $x=2$ është $3\cdot 2-1=5$, etj. ♦

Të përmendim, se ndryshoret në disa shprehje racionale mund të pranojnë çfarëdo vlere, derisa te tjerat, mund të pranojnë vetëm vlera të caktuara. Vlerat të cilat mund t'i marrin (pranojnë) ndryshoret në shprehjen racionale të dhënë quhen **vlera të lejuara të ndryshores**.

Shprehjet algjebrike racionale në të cilat nuk paraqitet operacioni pjesëtim me ndryshore ose pjesëtim me shprehje që përmban ndonjë ndryshore, quhen **shprehje algjebrike të plota racionale**.

Shembulli 3. $2a^2b-1$, $5x^2-3xy$, $\frac{4x}{3}$, $\frac{a^2-2b}{4}$ janë shprehje algjebrike të plota racionale. Të theksojmë se shprehja e tretë dhe katërtë përmbajnë pjesëtim me konstanta. Meqenëse pjesëtimi mund të llogaritet për shumëzim me vlerë reciproke, shprehja e tretë dhe e katërtë mund të shkruhen edhe si $\frac{4}{3}x$ dhe $\frac{1}{4}(a^2-2b)$, prej nga përfundojmë se me të vërtetë bëhet fjalë për shprehje algjebrike të plota racionale. ♦

Shprehjet algjebrike racionale që përmbajnë pjesëtim me ndryshore ose pjesëtim me shprehje që përmban ndryshore, quhen **shprehje racionale thyesore.**

Shembulli 4. Shprehjet $\frac{2a-1}{b}$, $\frac{x}{y-2}$, $\frac{5a}{2b}+4c$ janë shprehje racionale thyesore, meqenëse përmbajnë pjesëtim me ndryshore ose pjesëtim me shprehje që përmban ndryshore. ♦

Monome

Definicioni. Shprehja algjebrike e plotë racionale që përmban vetëm operacionet shumëzim dhe fuqizim me tregues numër natyror, quhet **monom**.

Shembulli 4. Shprehjet $5x,\ -2a^2b, -0,5m,\ \frac{3}{4}ab^2$, janë monome. ♦

Meqenëse operacioni fuqizim është rast special i operacionet shumëzim, mund të thuhet se monomi është shprehje e plotë racionale i cili përmban vetëm operacionin shumëzim.

Sipas definicionit për monom, çdo shprehje që përbëhet vetëm prej një konstante ose ndryshore është monom, pasi që monomi s'është e domosdoshme ta përmbaj operacionin shumëzim.

Shembulli 5. a) Shprehjet x, -2, $-m$, 0,5 janë monome.

b) Shprehja $\frac{4ab^2}{5}$ është monom, edhe përskaj faktit që përmban pjesëtim me numrin 5. Kjo shprehje mund të shkruhet edhe në trajtën

$\frac{4ab^2}{5} = \frac{4}{5}ab^2 = 0,8ab^2$.♦

Nëse monomi përmban disa shumëzues – konstante, me zbatimin e ligjit komutativ dhe asociativ të shumëzimit, prodhimi i tyre mund të vendoset para prodhimit të ndryshoreve.

Shembulli 6. Monomin $\frac{-2ab^2 \cdot 3x^2y}{5}$ e shkruajmë në trajtën $-\frac{6}{5}ab^2 \cdot 3x^2y$.. ♦

Konstanta që qëndron para ndryshoreve quhet **koeficienti i monomit**, kurse prodhimi i ndryshoreve quhet **vlera kryesore e monomit**.

Shembulli 7. Te monomet $a^2b,\ -3x,\ \frac{4}{5}ab^2c$ dhe $-0,5\ m$ koeficient janë 1, -3, $\frac{4}{5}$ dhe $-0,5$, kurse vlera kryesore janë a^2b, x, ab^2c dhe m. ♦

Monomet që kanë vlera kryesore të barabarta, kurse dallohen vetëm sipas koeficienteve të tyre quhen **monom të ngjashëm**.

Dy monom të ngjashëm koeficientet e të cilëve janë numra të kundërt quhen edhe **monom të kundërt**.

Shembulli 8. a) Monomet $-2a^2b,\ 5a^2b,\ \frac{3}{4}a^2b$ dhe $-a^2b$, janë monom të ngjashëm.

b) Monomet $7a^2b$ dhe $-7a^2b$ janë monom të kundërt. ♦

Shuma e treguesve të argumenteve (ndryshoreve) që paraqiten në monom të dhënë quhet **fuqi e monomit.**

Shembulli 9. Fuqia e monomit $7x^2y$ është 3, kurse fuqia e monomit $3xy^3$ është 4. ♦

Polinomet

Definicioni. Shuma algjebrike e përbërë prej numrit të fundmë të monomeve, quhet **polinom.**

Shembulli 10. Shprehjet $3a - 2ax + a^2b^2 - bx$ dhe $4ax - 3by + x^2y^2$ janë polinome. ♦

Monomet prej të cilëve është përbërë polinomi quhen **anëtarë të polinomit**. Polinomi që përmban saktë dy anëtarë quhet edhe **binom**, kurse polinomi që përmban saktë tre anëtarë quhet **trinom**, etj.

Shembulli 11. a) Shprehjet $a + 2b$ dhe $x^2 + 5y$ janë binom.

b) Shprehjet $3a^2 + 2a + 1$ dhe $x^2 - 2xy + 3y$ janë trinom. ♦

Edhe një monom mund të llogaritet si polinom me vetëm një anëtarë. Përndryshe çdo polinom mund të përmbaj një ose më tepër ndryshore.

Shembulli 12. Polinomi $5a^2 - 2a^3 + 3a^4 - a + 4$ përmban vetëm një ndryshore në fuqi të ndryshme. Me zbatim të vetisë komutative, anëtarët e tij mund të radhiten sipas fuqive rënëse të ndryshores

$3a^4 - 2a^3 + 5a^2 - a + 4$,

Ose sipas fuqive rritëse të ndryshores

$4 - a + 5a^2 - 2a^3 + 3a^4$. ♦

Konstantet që figurojnë në polinomin quhen **koeficiente të polinomit**. Fuqia e anëtarit me tregues më të lartë quhet **fuqi e polinomit.**

Shembulli 13. Te polinomi $3x^3 - 4x^2 + 5$, numrat 3, −4 dhe 5 janë koeficiente, kurse fuqia e polinomit është 3. ♦

Shprehje racionale identike

Shprehjet racionale që kanë bashkësi të njëjtë të vlerave të lejuara dhe kanë vlera numerike të barabarta për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshoreve quhen **shprehje racionale identike**.

Shembulli 14. Shprehjet $3(a - 4) + 7$ dhe $3a - 5$ kanë vlera numerike të barabarta për çfarëdo vlera të a. Prandaj ato janë shprehje racionale identike.

Shprehjet $\frac{a^2-4}{a+2}$ dhe $a + 2$ s'janë identike, pasi që bashkësitë e tyre të vlerave të lejuara të ndryshoreve nuk janë të barabarta.

Por, shprehjet $\frac{a^2-4}{a+2}$ dhe $a - 2$, për $a \neq 2$, janë identike, meqenëse për çdo $a \neq 2$, kanë vlera numerike të njëjta. ♦

Dy shprehje identike të lidhur me shenjën barabartë (=), japin barazi e cila quhet **identitet**. Me fjalë tjera identiteti është barazi e cila vlen për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores që hyn në të.

Shembulli 15. Identitete më të thjeshta janë barazitë me të cilat i shprehim ligjet elementare të mbledhjes dhe shumëzimit:

$$a+b=b+a; \qquad (a+b)+c=a+(b+c);$$

$$ab=ba; \qquad (ab)c=a(bc); \qquad (a+b)c=ac+bc. \ ♦$$

Zëvendësimi i një shprehje racionale me shprehje tjetër identike me të, quhet **transformim identik**. Kështu, për shembull, renditja (radhitja) e polinomit, sipas fuqive të një prej ndryshoreve paraqet transformim identik të polinomit.

Shembulli 16. Le të jetë dhënë polinomi
$5a^2 + 2a + 4a^3 + a - 3a^2 - 4a + 9$.

Ky ka shtatë anëtarë, por në mesin e tyre gjenden edhe anëtarë të ngjashëm. Me zbatimin e ligjit komutativ dhe asociativ të mbledhjes, i zhvendosim dhe grupojmë monomet e ngjashëm, gjatë së cilës fitojmë $4a^3 + (5a^2 - 3a^2) + (2a + a - 4a) + 9$. Shprehjet e grupuara në kllapat mund të thjeshtohen me zbatim të ligjit distributiv $4a^3 + (5-3)a^2 + (2 + 1 - 4)a + 9$, ashtu që përfundimisht fitojmë polinomin

$4a^3 + 2a^2 - a + 9$

i cili është identike me polinomin e dhënë. ♦

Zëvendësimi i shumës algjebrike prej disa anëtarëve të ngjashëm në polinomin e dhënë me një anëtarë identik me ato, quhet **reduktim i anëtarëve të ngjashëm të polinomit**.

Shembulli 17. Shohim se

$$3a^2 + 2ab - b^2 - 5a^2 + 4b^2 = (3a^2 - 5a^2) + 2ab + (-b^2 + 4b^2) =$$
$$= (3-5)a^2 + 2ab + (-1+4)b^2 =$$
$$= -2a^2 + 2ab + 3b^2. \ ♦$$

Detyra

1. Cilat vlera të ndryshoreve s'janë të lejuar në shprehjet e dhëna:

a) $\frac{a+5}{a-3}$ **b)** $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$ **c)** $\frac{2ab}{a-b}$.

2. Cilët janë koeficientet e monomeve:

a) $-4a^2b$ **b)** $2{,}5a$ **c)** $-cx^2$ **ç)** $-\frac{x}{3}$ **d)** $\frac{2xy^2}{5}$?

3. Cilët nga monomet e dhëna janë të ngjashëm:

$-3ab,\ \frac{1}{2}a^2x,\ ab,\ -a^2x,\ 6a^2x,\ -7ax^2,\ ax^2$?

4. Shkruaj të kundërtit e monomeve të dhënë:

$$-6ab,\ a^2b^2,\ -2ax,\ \frac{x}{3},\ -x^2y,\ 0{,}5a.$$

5. Cakto fuqinë e polinomeve $x^3y - x^2y^2 + 2xy - 3xy^2$.

6. Vallë shprehjet e dhëna janë identitete:
a) $a + b = a - (-b)$ **b)** $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ **c)** $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$.

7. Redukto anëtarët e polinomit:
a) $3ab - 4a^2b^2 - 7ab^2 + 2ab^2 - ab + 4^2b^2$ **b)** $1{,}5a - 2b + 0{,}5b - 0{,}3a - ab$.

3.4. Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale të plota

Mbledhja e polinomeve

Shembulli 1. T'i mbledhim monomet:

$7a^2$, $-5a$, $-3ab$, $2a$ dhe $-ab$.

Shuma e kërkuar e monomeve të dhëna është shuma algjebrike:

$$7a^2+(-5a)+(-3ab)+2a+(-ab)$$

në të cilën, nëse i lëshojmë shenjat për mbledhje dhe kllapat do të fitojmë

$$7a^2-5a-3ab+2a-ab.$$

Polinomi i fituar ka anëtarë të ngjashëm, dhe pas reduktimit të tyre fitojmë polinomin:

$$7a^2-3a-4ab.$$ ♦

1. (Rregulla për mbledhje të monomeve) Për të mbledhur disa monom, mjafton që ata të shkruhen në formë të shumës algjebrike, njëri pas tjetrit me të njëjtat shenja që kanë. Pastaj sipas nevojës në polinomin e fituar kryhen reduktimet eventuale të monomeve të ngjashme.

Shembulli 2. T'i mbledhim polinomet:

$5ab^2-3a+2b$ dhe $2a-3a^2b+4ab-7$.

E shkruajmë shumën e kërkuar

$$(5a^2b-3a+2b)+(2a-3a^2b+4ab-7).$$

Në polinome mund të shikojmë si në shuma algjebrike prej numrave, prandaj gjatë mbledhjes së tyre mund të zbatohet rregulla e të shtuarit të shumës algjebrike. Sipas kësaj rregulle, polinomit të parë njëpasnjëshëm i shtojmë anëtarët e polinomit të dytë

$$(5a^2b-3a+2b)+(2a-3a^2b+4ab-7)=5a^2b-3a+2b+2a-3a^2b+4ab-7.$$

Vërejmë se shuma e kërkuar është përsëri polinom, në të cilin janë përfshirë të gjithë anëtarët e polinomeve të dhëna me shenjat e tyre përkatëse. Polinomi i fituar ka monom të ngjashëm. Pas reduktimit të tyre, fitojmë:

$$5a^2b-3a+2b+2a-3a^2b+4ab-7=2a^2b-a+2b+4ab-7.$$ ♦

2. (**Rregulla për mbledhje të polinomeve)** Dy polinom mblidhen ashtu që polinomit të parë i bashkëngjiten anëtarët e polinomit të dytë me të njëjtat shenja që kanë. Pastaj sipas nevojës, në polinomin e ri të posa formuar kryhen reduktimet eventuale të monomeve të ngjashme.

Zbritje e polinomeve

Shembulli 3. Ta zbresim monomin $4a^2$ nga monomi $5ab$. Ndryshimi i kërkuar ka këtë trajtë

$$5ab-(+4a^2)=5ab+(-4a^2).$$

Pastaj, në pajtueshmëri me rregullat për mbledhje, fitojmë

$$5ab+(-4a^2)=5ab-4a^2.$$ ♦

3. (**Rregulla për zbritje të monomit nga monomi)** Që të zbresim monom nga monomi, mjafton që pran të zbritshmit t'i përshkruhet monomi i kundërt i zbritësit.

Shembulli 4. Do të kemi

$$3ax - (-2by) = 3ax + 2by. \blacklozenge$$

Shembulli 5. Të caktojmë ndryshimin

$$(6ax - 5a + 2x) - (+3x^2 - 4ax + 2a - 7).$$

Zbritja e polinomeve kryhet ngjashëm sikur zbritja e monomeve, gjegjësisht polinomit (të zbritshmit) ia bashkëngjitim çdo anëtarë të polinomit (zbritësit) me shenjë të kundërt. Pra, do të kemi

$$(6ax - 5a + 2x) - (+3x^2 - 4ax + 2a - 7) = 6ax - 5a + 2x - 3x^2 + 4ax - 2a + 7 =$$
$$= 10ax - 7a - 3x^2 + 2x + 7. \blacklozenge$$

4. (Rregulla për zbritje të polinomit nga polinomi) Polinomet zbriten ashtu që polinomit (të zbritshmit) ia bashkëngjitim të gjithë anëtarët e polinomit (zbritësit) me shenja të kundërta. Pastaj sipas nevojës kryhen reduktimet eventuale të monomeve të ngjashme.

<u>Lirimi nga kllapat dhe mbyllje të kllapave</u>

Gjatë mbledhjes dhe zbritjes së monomeve dhe polinomeve, në fillimi ato i vendosim në kllapa, kurse pastaj lirohemi prej kllapave. Në bazë të rregullave për mbledhje dhe zbritje të polinomeve, mund të nxirren këto rregulla për lirim prej kllapave.

5. (Rregulla për lirim prej kllapave) Nëse para kllapës qëndron shenja plus (+), kllapa mund të fshihet, kurse shenjat para anëtarëve që gjenden në kllapë ngelin të pandryshuara. Mirëpo nëse para kllapës qëndron shenja minus (–), shenja dhe kllapa mund të fshihen, por të gjithë anëtarët që gjenden në kllapë duhet të përshkruhen me shenja të kundërta.

Shembulli 6. Kemi se

$$3a - (2b - 5c) + (-5a + 4b - c) - (-7a + b - 8) =$$
$$= 3a - 2b + 5c - 5a + 4b - c + 7a - b + 8 =$$
$$= 5a + b + 4c + 8. \blacklozenge$$

Nganjëherë është e nevojshme polinom i dhënë ose pjesë e saj të mbyllet në kllapë, kurse para saj të qëndroj shenja plus (+) ose minus (–). Këtë e kryejmë në pajtim me rregullën në vijim.

6. (Rregulla për mbyllje të kllapave) Nëse para kllapës në të cilën mbyllim polinom të dhënë e vendosim shenjën plus (+), atëherë të gjithë anëtarët e polinomit të mbyllur ngelin me shenjat e njëjta.

Shembulli 7. Kemi se

$3a - b + 5c = +(3a - b + 5c)$. ♦

7. (Rregulla për mbyllje të kllapave) Nëse para kllapës në të cilën mbyllim polinom të dhënë e vendosim shenjën minus (–), atëherë të gjithë anëtarët e polinomit të mbyllur ndryshojnë shenjat e tyre me shenja të kundërta.

Shembulli 8. Kemi se

$3a - b + 5c = -(-3a + b - 5c)$.♦

Detyra

1. Mbledhë monomet:

a) $7x^4$, $-5x^2$, $-4x^3$, $6x^2$ dhe $12x^4$ **b)** $-2xy$, $7xy$, $5xy$ dhe $-3xy$.

2. Kryej mbledhjen e polinomeve:

a) $(5x^2 - ax + a^2) + (3x^2 + 2ax - a^2) + (4ax - 3x^2 + 8)$

b) $(2a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 - ab^3) + (a^4 - a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 - b^4)$.

3. Kryeni zbritjen e monomeve:

a) $-5a - (+3a)$ **b)** $3x - (-2x)$ **c)** $2ab - (+2ab)$ **ç)** $3ax - (-ax^2)$.

4. Kryeni zbritjen e polinomeve:

a) $(6a^2x - 2ax^2 + 5) - (4a^2x + ax^2 - 3)$

b) $(x^3y - 2xy^2 + 3xy - 2) - (-4x^3y + xy - 3xy^2 + 5x^2y + 1)$.

5. Lirohu nga kllapat dhe thjeshto shprehjen:

a) $(2x^2 + 3y^2) - \{(x^2 - 2xy - y^2) + [(3x^2 + 2xy - (-5xy + 2y^2)]\}$

b) $3x^2y - \{xyz - (3xyz - x^2z) + [2x^2y - (5x\,y^2 - 4xyz - x\,z^2)]\}$.

3.5. Shumëzimi i shprehjeve racionale të plota

<u>Shumëzim i monomeve</u>

Shembulli 1. Të njehsojmë prodhimin e monomeve $-5ab^2c$ dhe $3a^3bx$.

Meqenëse edhe vet monomet paraqesin prodhime, me zbatim të ligjit komutativ dhe asociativ të shumëzimit, prodhimi i tyre mund të shkruhet në trajtën

$$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = (-5 \cdot 3) \cdot (a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot c \cdot x.$$

Pasi të kryejmë shumëzimin në secilën kllapë, fitojmë

$$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = -15a^4b^3cx. \ \blacklozenge$$

Ngjashëm veprojmë edhe kur duhet të shumëzojmë më tepër se dy monom.

Shembulli 2. Të njehsojmë prodhimin e monomeve $4a^2b$, $0{,}5ac^3$ dhe $-3b^3c^2$.

Do të kemi

$$4a^2b \cdot 0{,}5ac^3 \cdot (-3b^3c^2) = [4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)] \cdot (a^2a) \cdot (b \cdot b^3) \cdot (c^3 \cdot c^2) = -6a^3b^4c^5 \ . \ \blacklozenge$$

1. (Rregulla për shumëzim të monomeve) Monomet shumëzohen ashtu që fillimisht shumëzohen koeficientet e tyre kurse pastaj edhe të gjitha fuqitë e vlerave kryesore që kanë baza të barabarta. Fuqitë që hasen vetëm në një monom barten në prodhimin me treguesit që kanë.

2. (Rregulla për fuqizim të monomit) Monomi fuqizohet ashtu që fuqizohet çdo shumëzues i tij me treguesin e fuqisë, dhe pastaj fuqitë e fituara shumëzohen.

Shembulli 3. Do të kemi $(3a^2xy^3)^4 = 81a^8x^4y^{12}$. $\blacklozenge$

Shumëzim i polinomit me monom

Shembulli 4. Të njehsojmë prodhimin e polinomit $2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2$ me monomin $4a^2b$.

Sipas ligjit distributiv të shumëzimit, prodhimi mund të shkruhet në trajtën

$$(2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2)\cdot(4a^2b) = 2a^3 \cdot 4a^2b - 3ab^2 \cdot 4a^2b + 5bc^2 \cdot 4a^2b.$$

Pasi që të kryhet shumëzimi i monomeve, fitohet

$$(2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2)\cdot(4a^2b) = 8a^5b - 12a^3b^3 + 20a^2b^2c^2. \ \blacklozenge$$

3. (Rregulla për shumëzim të polinomit me monom) Polinomi shumëzohet me monom ashtu që çdo anëtarë i polinomit shumëzohet me monomin dhe prodhimet e fituara mblidhen.

Shembulli 5. Kemi se

$$(-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1)\cdot(-3a^2xy) = 15a^3x^3y - 12a^2x^2y^4 + 6a^2xy^2 - 3a^2xy. \blacklozenge$$

Shumëzimi i polinomeve

Shembulli 6. Të njehsojmë prodhimin e polinomeve $2x^2 - 5xy + y^2$ dhe $4x + 3y$.

Nëse polinomin e parë e shënojmë me M, gjegjësisht $M = 2x^2 - 5xy + y^2$, atëherë prodhimi i mësipërm do të merr trajtën $M \cdot (4x + 3y)$.

Sipas rregullës për shumëzim të polinomit me monom, fitojmë

$$M\cdot(4x+3y) = M\cdot 4x + M\cdot 3y.$$

Nëse tani rikthejmë zëvendësimin për M fitojmë

$$(2x^2 - 5xy + y^2)\cdot(4x+3y) = (2x^2 - 5xy + y^2)\cdot 4x + (2x^2 - 5xy + y^2)\cdot 3y.$$

Vërejmë se, polinomi i parë duhet të shumëzohet veçmas me çdo anëtarë të polinomit të dytë. Kështu fitojmë

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5xy + y^2)\cdot(4x+3y) &= 8x^3 - 20x^2y + 4xy^2 + 6x^2y - 15xy^2 + 3y^3 = \\ &= 8x^3 - 14x^2y - 11xy^2 + 3y^3. \blacklozenge\end{aligned}$$

4. (Rregulla për shumëzim të polinomit me polinom) Dy polinom shumëzohen ashtu që çdo anëtarë i njërit polinom shumëzohet me çdo anëtarë të polinomit tjetër, dhe pastaj prodhimet e fituara mblidhen. Në fund, nëse paraqiten monom të ngjashëm, reduktohen.

Shembulli 7. Kemi se

$$\begin{aligned}&(2a^3 - a^2b + 3ab^2 - 5b^3)\cdot(a^2 - 3ab + 2b^2) = \\ &= 2a^5 - a^4b + 3a^3b^2 - 5a^2b^3 - 6a^4b + 3a^3b^2 - 9a^2b^3 + \\ &+ 15ab^4 + 4a^3b^2 - 2a^2b^3 + 6ab^4 - 10b^5 = \\ &= 2a^5 - 7a^4b + 10a^3b^2 - 16a^2b^3 + 21a^4b - 10b^5. \ \blacklozenge\end{aligned}$$

Formula për shumëzim të shkurtuar

Në vazhdim do të njihemi me pesë identitete të njohura si formula për shumëzim të shkurtuar. Të theksojmë se A dhe B na paraqesin jo vetëm numra, porse edhe çfarëdo dy shprehje.

1. Katrori i shumës së dy shprehjeve

Katrori i shumës së dy shprehjeve është i barabartë me katrorin e shprehjes së parë plus dyfishin e prodhimit të shprehjes së parë dhe të dytë plus katrorit të shprehjes së dytë, respektivisht

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

Me të vërtetë, kemi se

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Shembulli 8. Kemi se

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2. \ \blacklozenge$$

$$76^2 = (70+6)^2 = 70^2 + 2\cdot 70\cdot 6 + 6^2 = 4900 + 840 + 36 = 5776.$$

2. Katrori i ndryshimit të dy shprehjeve

Katrori i shumës së dy shprehjeve është i barabartë me katrorin e shprehjes së parë minus dyfishin e prodhimit të shprehjes së parë dhe të dytë plus katrorit të shprehjes së dytë, respektivisht

$$\boxed{(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$$

Me të vërtetë, kemi se

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Shembulli 9. Kemi se

$$(3a^2b - 2ab)^2 = (3a^2b)^2 - 2\cdot 3a^2b\cdot 2ab + (2ab)^2 = 9a^4b^2 - 12a^3b^2 + 4a^2b^2.$$

$$38^2 = (40-2)^2 = 40^2 - 2\cdot 40\cdot 2 + 2^2 = 1600 - 160 + 4 = 1444. \ \blacklozenge$$

3. Prodhimi i shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve

Prodhimi i shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve është i barabartë me ndryshimin e katrorëve të shprehjes së parë dhe të dytë, respektivisht

$$\boxed{(A+B)(A-B) = A^2 - B^2}$$

Me të vërtetë, kemi se

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB + B^2 = A^2 - B^2.$$

Shembulli 10. Kemi se

$$(4x+3y)(4x-3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2. \ \blacklozenge$$

Formulën e këtillë mund ta përdorim për njehsim të shpejtë të prodhimit të dy numrave të cilët mund të shprehen si prodhim i shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve.

Shembulli 11. Kemi se

$$58 \cdot 62 = (60-2)(60+2) = 60^2 - 2^2 = 3596. \ \blacklozenge$$

Nëse formulën e mësipërme e shkruajmë në rend të kundërt (anasjelltë), do të kemi

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

Që domethënë se ndryshimi i katrorëve të dy shprehjeve është i barabartë me prodhimin e shumës së atyre shprehjeve dhe ndryshimit të shprehjes së parë me shprehjen e dytë.

Këtë formulë mund ta përdorim për njehsim të shpejtë të ndryshimeve të katrorëve të dy numrave.

Shembulli 12. Kemi se

$$237^2 - 236^2 = (237+236)(237-236) = 437 \cdot 1 = 437. \ \blacklozenge$$

4. Zbërthimi i shumës së dy kubeve në shumëzues Të njehsojmë prodhimin $(A+B)(A^2 - AB + B^2)$. Kemi se

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + A^2B - A^2B - AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + B^3.$$

Kështu erdhëm tek formula

$$\boxed{(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3}$$

Shembulli 13. Kemi se

$$(3+x)(9-3x+x^2)=3^3+x^3=27+x^3.\ \blacklozenge$$

Nëse formulën e mësipërme e shkruajmë në rend të kundërt (anasjelltë), do të kemi formulën

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

e cila quhet formula për shumë të kubeve.

Shembulli 14. Kemi se

$$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)(4x^2-6x+9).\ \blacklozenge$$

5. Zbërthimi i ndryshimit të dy kubeve në shumëzues

Të njehsojmë prodhimin $(A-B)(A^2+AB+B^2)$. Kemi se

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+A^2B-A^2B+AB^2-AB^2-B^3=A^3-B^3.$$

Kështu erdhëm tek formula

$$\boxed{(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3}$$

Shembulli 15. Kemi se

$$(m-2)(m^2+2m+4)=m^3-8.\ \blacklozenge$$

Nëse formulën e mësipërme e shkruajmë në rend të kundërt (anasjelltë), do të kemi formulën

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

e cila quhet formula për ndryshim të kubeve.

Shembulli 16. Kemi se

$$8-x^3=2^3-x^3=(2-x)(4+2x+x^2).\ \blacklozenge$$

Detyra

1. Shumëzoni monomet:

a) $-5a^2b^3$ dhe $-2a^3b$ **b)** x^3y dhe $-3a^2x^5y^3$ **c)** $-\frac{3}{4}x^2y^3z$ dhe $-\frac{4}{7}xy^2$.

2. Kryeni shumëzimin:

a) $(8x^3-4x^2y-5xy^2+3y^2)\cdot(-2x^2y)$ **b)** $(3ab^2c-7a^2bc^2-a^2bc)\cdot(-3abc)$.

3. Shumëzoni polinomet:

a) $x^2-xy+2y+3x$ dhe $x-4y+5$

b) $3a^4-6a^3b+5a^2b^2-7ab^3-9b^4$ dhe $a^2-3ab+b^2$.

4. Njehso katrorët dhe kubet e shprehjeve:

a) $(x-5)^2$ **b)** $(3c+2)^2$ **c)** $(1-3x)^2$ **ç)** $(3x-y+5)^2$

d) $(x+y-z)^2$ **dh)** $(-8y^2-7z)^2$ **e)** $(2a+b)^3$ **ë)** $(x-3y)^3$.

5. Kryeni operacionet e dhëna dhe pastaj thjeshto shprehjen:

a) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+6x+9)$

b) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$

3.6. Pjesëtimi i shprehjeve racionale të plota

Pjesëtimi i monomit me monom

Shembulli 1. Të njehsojmë pjesëtimin $12a^3b^2c:(-3ab^2),\ a\neq 0,\ b\neq 0$.

Meqenëse pjesëtuesi $(-3ab^2)$ është prodhim, sipas rregullës për pjesëtim të prodhimit, pjesëtimi i mësipërm kryhet kur i pjesëtueshmi do të pjesëtohet me shumëzuesin e parë -3, pastaj rezultati i fituar do të pjesëtohet me shumëzuesin e dytë a, dhe në fund rezultati i fituar do të pjesëtohet me shumëzuesin e tretë b^2.

Megjithatë, edhe i pjesëtueshmi paraqet prodhim. Prandaj, në pajtim me rregullën për pjesëtim të prodhimit me numër, për të pjesëtuar të pjesëtueshmin $12a^3b^2c$ me numrin -3, mjafton të pjesëtohet një shumëzues i tij me -3, për shembull, koeficienti 12. Në mënyrë analogjike, për ta pjesëtuar rezultatin e fituar me numrin a, mjafton që të pjesëtohet vetëm shumëzuesi a^2 me a, etj. Kështu, do të kemi

$$12a^3b^2c:(-3ab^2)=\frac{12}{-3}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^2}{b^2}\cdot c=-4a^2c.\ \blacklozenge$$

1. (Rregulla për pjesëtim të monomit me monom) Monomi pjesëtohet me monom ashtu që koeficienti i të pjesëtueshmit pjesëtohet me koeficientin e pjesëtuesit kurse fuqitë e vlerës kryesore të pjesëtueshmit pjesëtohen me fuqitë përkatëse të vlerës kryesore të pjesëtuesit (fuqi me baza të barabarta), dhe pastaj herësit e fituar shumëzohen.

Gjatë pjesëtimit të monomit me monom herësi i fituar nuk është gjithmonë monom (shprehje racionale e plotë).

Shembulli 2. Të pjesëtojmë monomin $6a^5$ me $5a^2b$.

Dimë se cilido monom i shumëzuar me monomin $5a^2b$ patjetër ta përmbaj shprehjen b, kurse në të pjesëtueshmin tonë kjo shprehje nuk figuron. Prandaj në këso raste herësi i fituar paraqet shprehje racionale thyesore dhe e shkruajmë në trajtë të thyesës

$$\frac{6a^5}{5a^2b}.\ \blacklozenge$$

Sipas kësaj, nëse monomi – pjesëtues ka ndonjë ndryshore ose fuqi që nuk përmbahet te i pjesëtueshmi, ose përmbahet te pjesëtuesi me tregues më të madh se ai përkatës te i pjesëtueshmi, atëherë herësi është shprehje racionale thyesore.

Pjesëtimi i polinomit me monom

Shembulli 3. Të pjesëtojmë polinomin $6a^5b^3-5a^4b+7{,}6a^3b^2c^2$ me $2a^3b$.

Me zbatimin e rregullës për pjesëtim të shprehjes algjebrike me numër, fitojmë

$$(6a^5b^3-5a^4b+7{,}6a^3b^2c^2):2a^3b=6a^5b^3:2a^3b-5a^4b:2a^3b+7{,}6a^3b^2c^2:2a^3b=$$
$$=3a^2b^2-2{,}5a+3{,}8bc^2.\ \blacklozenge$$

2. (Rregulla për pjesëtim të polinomit me monom) Polinomi pjesëtohet me monom ashtu që çdo anëtarë i polinomit pjesëtohet me monomin e dhënë, kurse herësit e fituar mblidhen.

Shembulli 4. $(-12x^4+9x^3y-6x^2y^2):(-3x^2)=4x^2-3xy+2y^2.\ \blacklozenge$

Pjesëtimi i polinomit me polinom

Që të pjesëtohet një polinom me tjetër polinom, duhet të caktojmë polinom të tretë i cili i shumëzuar me polinomin e dytë (pjesëtuesin) na jep të parin. Herësi gjatë pjesëtimit të polinomit me polinom vetëm në raste të rralla mund të shprehet në formë polinomi ose monomi.

Shembulli 5. Kemi se

$$(a^2-4) : (a + 2) = a - 2$$

meqenëse $(a + 2) \cdot (a - 2) = (a^2 - 4)$.♦

Në raste të përgjithshme, herësi i dy polinomeve mund të shkruhet në formë të shprehjes racionale thyesore.

Shembulli 6. Kemi se

$$(a^2+b^2):(a+b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

meqenëse nuk ekziston polinom i cili i shumëzuar me $a + b$ jep $a^2 + b^2$. ♦

Gjatë pjesëtimit të polinomit me polinom shfrytëzojmë mënyrë të ngjashme me atë të pjesëtimit të numrave natyror.

Le të jenë A dhe B dy polinom të dhënë, ashtu që $B \neq 0$. Gjatë pjesëtimit të polinomit A me polinomin B fitohet:

a) herësi Q dhe mbetja $R = 0$, dhe shkruajmë

$$\frac{A}{B}=Q, \text{ respektivisht } A=B\cdot Q.$$

Në rastin kur mbetja $R = 0$, themi se polinomi A është i pjesëtueshëm me polinomin B ose themi polinomi B përmbahet në polinomin A.

b) herësi Q dhe mbetja R, dhe shkruajmë

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}, \text{respektivisht } A=B\cdot Q+R.$$

Mënyrën e pjesëtimit do ta ilustrojmë me shembullin vijues.

Shembulli 7. Kemi se

$$\begin{array}{l}
(x-3+2x^2):(3+2x)= \\
(2x^2+x-3):(2x+3)=x-1 \\
\underline{\pm 2x^2 \pm 3x} \\
\quad\quad -2x-3 \\
\quad\quad \underline{\mp 2x \mp 3} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Anëtari i parë i pjesëtuesit $2x^2$ pjesëtohet me anëtarin e parë të pjesëtuesit $2x$, dhe fitohet anëtari i parë i herësit x. Pastaj, anëtari i parë i herësit shumëzohet me pjesëtuesin dhe prodhimi i fituar zbritet nga i pjesëtueshmi. Mbetja e parë e fituar do të jetë $-2x-3$.

Tani, anëtari i parë i mbetjes së parë pjesëtohet me anëtarin e parë të pjesëtuesit, dhe kështu fitojmë anëtarin e dytë të herësit, gjegjësisht numrin -1. Anëtari i dytë i herësit shumëzohet me pjesëtuesin, dhe prodhimi i fituar zbritet prej mbetjes së parë $-2x-3$. Kështu fitohet mbetja e dytë zero, me çka përfundon pjesëtimi dhe fitojmë

$$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) = x - 1, \text{ respektivisht } (x - 3 + 2x^2) = (3 + 2x)(x - 1).♦$$

Detyra 1. Kryej pjesëtimin e polinomit $x^2 - 1 + x + 2x^3$ me polinomin $1+ x + x^2$.
Zgjidhje. Kemi se

$$\begin{array}{l}
(x^2 - 1 + x + 2x^3) : (1 + x + x^2) = \\
(2x^3 + x^2 + x - 1) : (x^2 + x + 1) = 2x - 1 \\
\underline{\pm 2x^3 \pm 2x^2 \pm 2x} \\
\qquad - x^2 - x - 1 \\
\qquad \underline{\mp x^2 \mp x \mp 1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Pas kryerjes së operacionit fitojmë $(x^2 - 1 + x + 2x^3) : (1 + x + x^2) = 2x - 1$, respektivisht $x^2 - 1 + x + 2x^3 = (1+ x + x^2)(2x - 1)$. ♦

Shembulli 8. Të pjesëtojmë polinomin $x^4 - x^2 + 2$ me polinomin $x^2 - x + 1$.
Kemi se

$$\begin{array}{l}
(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 \\
\underline{\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2} \\
\qquad x^3 - 2x^2 + 2 \\
\qquad \underline{\pm x^3 \mp x^2 \pm x} \\
\qquad\quad - x^2 - x + 2 \\
\qquad\quad \underline{\mp x^2 \pm x \mp 1} \\
\qquad\qquad - 2x + 3
\end{array}$$

Anëtari i parë i mbetjes $-2x + 3$, nuk është i pjesëtueshëm me anëtarin e parë të pjesëtuesit, me çka e përfundojmë pjesëtimin dhe shkruajmë

$$(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 + \frac{-2x + 3}{x^2 - x + 1}. \ ♦$$

Nëse kemi polinome me më tepër ndryshore, atëherë edhe të pjesëtueshmin edhe pjesëtuesin e radhitim sipas fuqive të njërës nga ndryshoret, duke filluar nga fuqitë me tregues më të lartë deri te ata me tregues më të vogël të ndryshores së njëjtë.

Shembulli 9. Të pjesëtojmë polinomin $17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4$ me polinomin $x^2 + 2y^2 - 3xy$. Do të kemi

$$\begin{array}{l}
(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2 \\
(3x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4) : (x^2 - 3xy + 2y^2) = 3x^2 + 11y^2 \\
\underline{\pm 3x^4 \mp 9x^3y \pm 6x^2y^2} \\
\qquad 11x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4 \\
\qquad \underline{\pm 11x^2y^2 \mp 33xy^3 \pm 22y^4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

pas kryerjes së pjesëtimit fitojmë

$$(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$$

respektivisht $17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4 = (x^2 + 2y^2 - 3xy)(3x^2 + 11y^2)$. ♦

Detyra

1. Kryej pjesëtimin e monomeve:

a) $12\,x : (-3)$ **b)** $(-6a^3b^2c) : (-2a^2bc)$ **c)** $3x^2y^2z : (-5x^2yz)$.

2. Kryej pjesëtimin:

a) $(12a - 15b) : 3$ **b)** $(4x^2y - 12x^4y^3) : (-4x^2y)$

c) $(6a^2x^4 - 9a^3x^5 + 15a^4x^3) : ax^3$ **ç)** $(-15a^3x^5 + 10a^4x^4 - 25a^5x^3) : (-5a^3x^3)$.

3. Kryej operacionet e dhëna te shprehjet:

a) $(a^2 - 2ab) \cdot 3a + (6ab^3 - 12a^4b^2) : 3ab$

b) $(15a^2x^3 - 6a^3x^2) : (-3a^2x^2) - 2x^2(3 + 4a^2x)$

c) $(x + 3y)(x - 3y) - \frac{1}{4}(2x + y)(2x - y) : \frac{y}{2}$

4. Kryej pjesëtimin e polinomeve:

a) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$

b) $(6a^3b - 11a^2b^2 + b^4) : (3a - b)$

ç) $(3x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 2x + 1)$.

5. Provo vallë polinomi $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$ është i pjesëtueshëm me binomin

a) $x - 2$ **b)** $x - 1$ **c)** $x + 2$ **ç)** $x + 3$.

3.7. Zbërthimi i polinomit në shumëzues

Të zbërthehet polinomi në shumëzues domethënë që në mënyrë identike të transformohet në formë prodhimi të dy ose më tepër shprehjeve racionale.

Shembulli 1. Polinomi $ax + bx - cx$ me zbatimin e ligjit distributiv të shumëzimit mund të paraqitet në lloj prodhimi të dy shprehjeve racionale, gjegjësisht në trajtën $x(a + b - c)$. ♦

Për zbërthim të polinomeve nuk ekziston ndonjë rregull e përgjithësuar me të cilën kryhen transformimet e duhura. Prandaj, në vazhdim do të fokusohemi në disa mënyra të zbërthimit që më shpesh zbatohen.

<u>**Zbërthim me nxjerrje të shumëzuesit të përbashkët para kllapës**</u>

Zbërthimi i polinomit në shumëzues duke nxjerr shumëzues të përbashkët para kllapës bazohet në ligjin distributiv të shumëzimit. Kështu, nga identiteti $(a + b - c)\,m = am + bm - cm$, me ndërrim të anëve të saja, fitojmë

$$am + bm - cm = (a + b - c)m.$$

1. (Rregulla për zbërthim me nxjerrje të shumëzuesit të përbashkët para kllapës) Nëse të gjithë anëtarët e polinomit të dhënë kanë një shumëzues të përbashkët, ai mund të nxirret para kllapës. Atëherë në kllapë ngel polinomi i cili fitohet kur polinomi i dhënë do të pjesëtohet me shumëzuesin e përbashkët të nxjerrë para kllapës.

Shembulli 1. Të zbërthejmë në shumëzues polinomin

$$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3.$$

Vërejmë se numri 5 është pjesëtues i përbashkët i koeficienteve të të gjithë anëtarëve të polinomit. Përveç numrit 5, të gjithë anëtarët e polinomit përmbajnë edhe dy shumëzues tjerë a dhe b në fuqi të ndryshme. Ato mund të nxirren po ashtu para kllapës por me fuqinë më të vogël, a në fuqi të dytë dhe b në fuqi të parë. Ndryshorja x s'është shumëzues i përbashkët pasi që nuk përmbahet te anëtari i tretë.

Andaj, shumëzues i përbashkët i të gjithë anëtarëve përbërës të polinomit është monomi $5a\ b^2$. Kështu monomi i tillë nxirret përpara kllapës, kurse brenda kllapës e shkruajmë herësin të fituar nga pjesëtimi i polinomit të dhënë me shumëzuesin e përbashkët $5a\ b^2$, respektivisht

$$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3 = 5a^2b(2ax^2 - abx - 3b^2). \ \blacklozenge$$

Para kllapës mund të nxirret edhe vetëm shumëzuesi -1.

Shembulli 2. Kemi se $b-a=-(-b+a)=-(a-b),\ 1-x=-(x-1)$. ♦

Shumëzuesi i përbashkët që nxirret para kllapës mund të jetë jo vetëm monom, porse edhe polinom.

Shembulli 3. Kemi se $2a(x-3)+b(x-3)-5c(x-3)=(x-3)(2a+b-5c)$. ♦

Zbërthim me grupim të anëtarëve

Zbërthimi i polinomit në shumëzues me grupim të anëtarëve bazohet në rregullën për shumëzim të polinomit me polinom. Kështu, dimë se

$$(a-b)(c+d)=(a-b)c+(a-b)d=ac-bc+ad-bd.$$

Nëse polinomi $ac-bd+ad-bd$ duhet të zbërthehet në shumëzues, atëherë transformimin do ta kryejmë në renditje të anasjelltë

$$ac-bc+ad-bd=(a-b)c+(a-b)d=(a-b)(c+d).$$

Kështu grupojmë anëtarin e parë me të dytin dhe prej tyre nxjerrim c para kllapës, pastaj të tretin me të katërtin dhe prej tyre nxjerrim d para kllapës. Kështu fitojmë shprehjen $c(a-b)+d(a-b)$, tek i cili qartë vërehet se shumëzues i përbashkët është $a-b$. Me nxjerrje të këtij shumëzuesi para kllapës, fitojmë zbërthimin $(a-b)(c+d)$. Mënyra e tillë e zbërthimit të polinomit në shumëzues quhet **zbërthim me grupim**.

Shembulli 4. Të zbërthejmë në shumëzues polinomin

$$3ax+2b-bx-6a.$$

Polinomi i dhënë mund të zbërthehet në shumëzues nëse grupojmë anëtarin e parë me të katërtin dhe të dytin me të tretin. Kështu që kemi

$$3ax+2b-bx-6a=(3ax-6a)+(2b-bx)=$$
$$=3a(x-2)-b(x-2)=(x-2)(3a-b). \ \blacklozenge$$

2. (Rregulla për zbërthim me grupim) Anëtarit e polinomit të dhënë grupohen ashtu që secili grup ka shumëzues të përbashkët. Pas nxjerrjes së shumëzuesit të përbashkët me shenjën përkatëse prej secilit grup para kllapës, në kllapa duhet të fitohet një polinom i njëjtë. Pastaj, ai polinom nxirret para kllapës si shumëzues i ri i përbashkët.

Shembulli 5. Kemi se

$$2xy-2y-x+1=2y(x-1)-(x-1)=(x-1)(2y-1). \ \blacklozenge$$

Zbërthimi i polinomit me zbatim të formulave për shumëzim të shkurtuar

Disa polinom mund të zbërthehen në shumëzues me zbatim të formulave për shumëzim të shkurtuar. Kuptohet, formulat për shumëzim të shkurtuar i shkruajmë në rend të anasjelltë, respektivisht

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$
$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$
$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Shembulli 6. Të zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë polinomin $4a^2 - 25b^2$. Vërejmë që $4a^2 = (2a)^2 = A^2$ dhe $25b^2 = (5b)^2 = B^2$, respektivisht polinomi i dhënë është i formës $A^2 - B^2$. Me zbatimin e formulës së parë të lartpërmendura fitojmë

$$4a^2 - 25b^2 = (2a)^2 - (5b)^2 = (2a - 5b)(2a + 5b).\blacklozenge$$

Shembulli 7. Të zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë polinomin $8y^3 + 1$. Vërejmë që $8y^3 = (2y)^3 = A^3$ dhe $1 = 1^3 = B^3$, respektivisht polinomi i dhënë është i formës $A^3 + B^3$. Me zbatimin e formulës së tretë të lartpërmendura fitojmë

$$8y^3 + 1 = (2y)^3 + 1^3 = (2y + 1)((2y)^2 - 2y + 1) = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1). \blacklozenge$$

Detyra 1. Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomet:
a) $(3x + 2)^2 - 16y^2$ **b)** $y^3 - 8$ **c)** $a^3b^3 + 125$.

Zgjidhje. Kemi se
a) $(3x + 2)^2 - 16y^2 = ((3x + 2) - 4y)((3x + 2) + 4y) = (3x - 4y + 2)(3x + 4y + 2)$
b) $27y^3 - 8 = ((3y) - 1)((3y)^2 + 3y + 1) = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$
c) $a^3b^3 + 125 = ((ab) + 5)((ab)^2 - ab + 5) = (ab + 5)(a^2b^2 - ab + 5).$ ♦

Zbërthim me zbatim të njëpasnjëshëm të disa mënyrave

Në disa raste, që të kryhet tërësisht zbërthimi i polinomit, është e nevojshme të zbatohen njëpasnjëshëm disa nga tre mënyrat e mësipërme. Kjo zakonisht zhvillohet ashtu që:

• Shikojmë vallë të gjithë anëtarët e polinomit kanë shumëzues të përbashkët të cilët nxirren para kllapës, dhe pastaj

• Shikojmë vallë mundet polinomi që fitohet në kllapën të zbërthehet me grupim ose zbatim të ndonjë nga formulat për shumëzim të shkurtuar.

Detyra 2. Zbërthe në shumëzues të thjeshtë polinomet:
a) $24x^3y^2 - 3y^2$ **b)** $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3$.

Zgjidhje. Kemi se
a) $24x^3y^2 - 3y^2 = 3y^2(8x^3 - 1) = 3y^2(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
b) $3x^2y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3 = 3x^2(y^2 - 5y + xy - 5x) =$
$$= 3x^2(y(y - 5) + x(y - 5)) = 3x^2(y - 5)(y + x)$$

Detyra
Zbërthe polinomet në shumëzues të thjeshtë.

1. a) $3x + 6y$ **b)** $2ab - 2ac$ **c)** $7x^5 + 21x^3$.
2. a) $27ab^3 - 9b^4$ **b)** $a^2y - ay^3$ **c)** $9ax - 6ay + 12az$
3. a) $2a(b - 3)+5c(b - 3)$ **b)** $a(x + 1) -b(x + 1)$ **c)** $5(x + y) - 2(x + y)^2$.
4. a) $a^2b^2 - 4$ **b)** $100x^2 - 1$ **c)** $\frac{1}{9}a^2 - c^2$.
5. a) $a^3 - 8$ **b)** $27x^3 + 1$ **c)** $8m^3 - n^3$.
6. a) $4a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ **b)** $x^2 - 3x - y^2 + 3y$ **c)** $xa^3 - xb^3 - ya^3 + yb^3$.

3.8. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët dhe shumëfishi më i më vogël i përbashkët i shprehjeve racionale të plota

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i shprehjeve racionale të plota

Pjesëtues i përbashkët i dy ose më tepër shprehjeve racionale të plota është shprehje racionale e plotë me të cilin janë të plotpjesëtueshëm (pa mbetje) të gjitha shprehjet racionale të dhëna.

Shembulli 1.
a) Për monomet $12a^3x^2$ dhe $18a^2x^4y^2$ pjesëtuesit e përbashkët janë 1, $2a$, $6x^2$, $3a^2x$, $6a^2x^2$ etj.
b) Për polinomet $ab(a - b)$ dhe $b(a - b)^2$ pjesëtuesit e përbashkët janë 1, b, $a - b$, $b(a - b)$. ♦

Definicioni 1. Pjesëtues i përbashkët i disa shprehjeve racionale $A_1, A_2, ..., A_n$ i cili përmban më së shumti pjesëtues të përbashkët me mundësisht tregues më madh quhet **Pjesëtuesi më i madh i përbashkët** i atyre shprehjeve dhe shënohet me

$$\text{PMP}(A_1, A_2, ..., A_n).$$

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i disa monomeve me koeficiente të plota gjendet ashtu që

- gjendet PMP për të gjitha koeficientet, dhe pastaj
- i bashkëngjiten njëpasnjëshëm të gjithë shumëzuesit e përbashkët, gjatë së cilës secili prej tyre merret me treguesin më të vogël me të cilin paraqitet në monom.

Shembulli 2. $\text{PMP}(14a^2b^2x, 35ab^3x^2, 42a^2b^3xy^2) = 7ab^2x$. ♦

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i disa polinomeve me koeficient të plotë gjendet ashtu që

- Polinomet zbërthehen në shumëzues të thjeshtë, dhe pastaj
- Gjendet prodhimi prej të gjithë shumëzuesve të thjeshtë të përbashkët që kanë tregues më të vogël.

Shembulli 3. Për pjesëtuesin më të madh të përbashkët të polinomeve nga shembulli 1 kemi $\text{PMP}(ab(a - b), b(a - b)^2) = b(a - b)$. ♦

Detyra 1. Cakto $\text{PMP}(3x^2 + 6x + 3,9x^2 - 9,6x + 6)$.

Zgjidhje. Meqenëse kemi

$$3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=\underline{3(x+1)^2},$$

$$9x^2-9=9(x^2-1)=\underline{9(x-1)(x+1)},\ \text{dhe}$$

$$6x+6=\underline{6(x+1)},$$

fitojmë PMP($3x^2+6x+3, 9x^2-9, 6x+6$) = $3(x+1)$.♦

Mund të ndodh shprehjet e dhëna të mos kenë asnjë pjesëtues (shumëzues) të përbashkët. Atëherë pjesëtuesi më i madh i përbashkët i tyre është numri 1. Shprehjet e këtilla quhen **shprehje reciprokisht të thjeshta**.

Shembulli 4. Shprehjet $x-y$ dhe $3x^2+y$ janë reciprokisht të thjeshta, respektivisht PMP($x-y$, $3x^2+y$) =1.

<u>**Shumëfishi më i vogël i përbashkët i shprehjeve racionale të plota**</u>

Shumëfishi i përbashkët i dy ose më tepër shprehjeve racionale të plota është shprehje racionale e plotë e cila plotpjesëtohet me secilën nga shprehjet e dhëna.

Shembulli 5. Për monomet $4a^3b$ dhe $6a^2x^4$ shumëfish i përbashkët është cilido nga shprehjet $12a^3bx^4$, $24a^5b^3x^6$, $60a^3bx^5(a-b)$ etj. ♦

Definicioni 2. Shumëfish i përbashkët i disa shprehjeve racionale të plota A_1, A_2, ..., A_n i cili përmban më së paku shumëzues të përbashkët me mundësisht tregues më të vegjël quhet **shumëfishi më i vogël i përbashkët** i atyre shprehjeve dhe shënohet me

$$\text{SHVP}(A_1, A_2, ..., A_n).$$

Shembulli 6. SHVP($4a^3b$, $6a^2x^4$) = $12a^3bx^4$. ♦

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i disa monomeve me koeficiente të plota gjendet ashtu që

• gjendet SHVP për të gjitha koeficientet dhe pastaj

• pran tij shënohen të gjithë shumëzuesit e përbashkët dhe jo të përbashkët, gjatë së cilës secili prej tyre merret me treguesin më të madh me të cilin paraqitet në monomin.

Shembulli 7. SHVP($4a^3b$, $6a^2x$, $9a^3bx^2$) = $36a^3bx^2$. ♦

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i disa polinomeve me koeficiente të plota caktohet ashtu që

• polinomet zbërthehen në shumëzues të thjeshtë, dhe pastaj

• caktohet prodhimi prej të gjithë shumëzuesve të thjeshtë të ndryshëm që përmbahen te polinomet e dhëna, gjatë së cilës secili shumëzues merret me treguesin më të lartë.

Detyra 2. Cakto SHVP($4x^3-4x^2y$, $15x^3y^2-15xy^4$, $6x^2y+12xy^2+6y^3$).

Zgjidhje. Polinomet i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë

$$4x^3-4x^2y=\underline{4x^2(x-y)},$$

$$15x^3y^2-15xy^4=15xy^2(x^2-y^2)=\underline{15xy^2(x-y)(x+y)},$$

$$6x^2y+12xy^2+6y^3=6y(x^2+2xy+y^2)=\underline{6y(x+y)^2}.$$

Kështu fitojmë se

SHVP $(4x^3-4x^2y, 15x^3y^2-15xy^4, 6x^2y+12xy^2+6y^3)=60x^2y^2(x-y)(x+y)^2$. ♦

Detyra

1. Cakto PMP të numrave:

a) 42 dhe 18 **b)** 105 dhe 45 **c)** 30 dhe 75 **ç)** 12, 32, 40 dhe 56.

2. Cakto pjesëtuesin më të madh të shprehjeve:

a) $3ab$ dhe $12ab^2$ **b)** $15x^3y^2$ dhe $24x^2y^3$ **c)** $5a(a+b)^2$ dhe $8a^2b(a+b)^3$

ç) x^2-y^2 dhe x^3+y^3 **d)** $x^2y^2-y^4$, $x^4-x^2y^2$ dhe x^3y-xy^3.

3. Cakto SHVP të numrave:

a) 12, 50, 45 dhe 18 **b)** 84, 56 dhe 21 **c)** 125, 100 dhe 450 **ç)** 96, 64 dhe 180.

4. Cakto shumëfishin më të vogël të përbashkët të shprehjeve:

a) $6a^2b^3$, $15ab^2$ dhe $24a^3bc^2$ **b)** $a(x+2)$ dhe $b(x+2)$

c) x dhe x^2+xy^2 **ç)** a^2-9b^2 dhe a^3+3a^2b

d) x^2-x, $1-x^2$, $1+x^3$ dhe x^2-x+1

dh) x^2-4y^2, $3x^2-12xy+12y^2$ dhe $5y(x-2y)^3$.

3.9. Thyesat algjebrike

Kuptimi për thyesë algjebrike

Dimë se shprehjet racionale thyesore përmbajnë pjesëtim me ndryshore ose pjesëtim me shprehje që përmban ndryshore.

Shembulli 1. Shprehje racionale thyesore janë:

$$\frac{3}{x-4},\quad \frac{a^2+2}{3ab^2},\quad 2ax+\frac{a^2}{x},\quad \frac{x+\frac{2}{x}}{3x^2-5},\quad \frac{2ab-4a^2}{ab^2-5c}\ \text{etj.}\ ♦$$

Definicioni. Shprehja racionale thyesore e cila paraqet thyesë, numëruesi dhe emëruesi i të cilit janë shprehje racionale të plota quhet **thyesë algjebrike**.

Thyesat algjebrike, njësoj si të zakontat kanë kuptim vetëm kur emëruesi është i ndryshëm prej zeros. Prandaj, **vlera të lejuara** të argumenteve (ndryshoreve) në një thyesë algjebrike janë vetëm ato vlera për të cilat emëruesi i saj ka kuptim gjegjësisht është i ndryshëm prej zeros.

Shembulli 2. Thyesa, $\frac{a+3}{a-4}$ për $a=4$ nuk ka kuptim,kurse për të gjitha vlerat tjera të a ajo ka kuptim. Sipas kësaj, vlera të lejuara të argumentit a janë gjitha vlerat për të cilat $a \neq 4$. Për $a=-3$ numëruesi do të jetë i barabartë me zero kurse emëruesi i ndryshueshëm prej zeros. Prandaj, për $a=-3$ vlera numerike e thyesës së dhënë është e barabartë me zero. ♦

Shembulli 3. Thyesa $\frac{x^2+1}{x-y}$ ka kuptim për të gjitha vlerat jo të barabarta të x dhe y, respektivisht për $x \neq y$. Meqenëse numëruesi i thyesës $x^2 + 1$ s'mund të jetë e barabartë me zero për asnjë vlerë të x kjo thyesë nuk mund të ketë vlerë numerike të barabartë me zero. ♦

Zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesës algjebrike

Çdo thyesë algjebrike mund të paramendojmë edhe si herës të dy shprehjeve racionale të plota. Tanimë pamë se herësi i dy numrave racional nuk ndryshon nëse numëruesi dhe emëruesi shumëzohen (ose pjesëtohen) me një numër të njëjtë (përveç zeros), respektivisht

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m} \qquad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}, \qquad b\neq 0 \quad m\neq 0.$$

Madje, nëse është dhënë thyesa algjebrike $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$, ku A dhe B janë shprehje racionale të plota dhe nëse M është cilido numër ose shprehje racionale e plotë, nën supozimin se $B \neq 0$, atëherë do të vlejnë identitetet:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M} \text{ dhe } \frac{A}{B}=\frac{A:M}{B:M}, \text{ gjatë } B\neq 0 \text{ dhe } M\neq 0.$$

Me fjalë tjera, nëse numëruesi dhe emëruesi i thyesës algjebrike shumëzohen ose pjesëtohen me një numër ose shprehje të njëjtë të ndryshëm prej zeros, do të fitohet thyesë e re, identike e barabartë me të dhënën.

Në rastin kur numëruesin dhe emëruesin e thyesës algjebrike i shumëzojmë me numër të njëjtë ose shprehje racionale të plotë të njëjtë $M \neq 0$, themi se thyesa algjebrike është zgjeruar me $M \neq 0$, kurse mënyra e tillë quhet **zgjerim i thyesës algjebrike**.

Shembulli4. Thyesa algjebrike $\frac{a}{a+2}$, $a \neq -2$, e zgjeruar me shprehjen algjebrike $a - 2$, $a \neq 2$, merr trajtën

$$\frac{a(a-2),}{(a+2)(a-2)}=\frac{a^2-2,}{a^2-4}, \quad a\neq \pm 2. \ ♦$$

Në rastin kur numëruesi dhe emëruesi i thyesës algjebrike do të pjesëtohen me prodhimin e shumëzuesve të përbashkët të tyre, themi se thyesa algjebrike është thjeshtuar me prodhimin e shumëzuesve të përbashkët të tyre, kurse mënyra e tillë quhet **thjeshtim i thyesës algjebrike**.

Shembulli 5. Te thyesa algjebrike $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$ numëruesi dhe emëruesi janë monomet të cilët kanë shumëzues të përbashkët: 6, a^2 dhe b^2. Thyesa mund të thjeshtohet, nëse numëruesi dhe emëruesi pjesëtohet njëpasnjëshëm me ato shumëzues të përbashkët ose përnjëherë me prodhimin e tyre $6a^2b^2$, i cili faktikisht është pjesëtuesi më i madh i përbashkët. Kështu fitojmë:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}=\frac{12a^2b^3c:6a^2b^2}{18a^4b^2:6a^2b^2}=\frac{2bc}{3a^2},$$

gjatë së cilës, supozojmë se $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$.♦

Nëse numëruesi dhe emëruesi i një thyese janë polinome, atëherë këto fillimisht i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë, kurse pastaj thjeshtojmë, nëse në numërues dhe emërues figurojnë shumëzues të përbashkët.

Detyra 1. Thjeshto thyesat

a) $\dfrac{6a^2b}{3a^2-3ab}$, $a \neq 0$ dhe $a \neq b$ **b)** $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}$, $x \neq 3$ dhe $x \neq 0$.

Zgjidhje. a) $\dfrac{6a^2b}{3a^2-3ab} = \dfrac{6a^2b}{3a(a-b)} = \dfrac{2ab}{a-b}$, $a \neq 0$ dhe $a \neq b$.

b) $\dfrac{x^2-6x+9}{2x^2-6x} = \dfrac{(x-3)^2}{2x(x-3)} = \dfrac{x-3}{2x}$, $x \neq 3$ dhe $x \neq 0$. ♦

__Sjellja e thyesave algjebrike në emërues të barabartë__

Me mënyrën e zgjerimit të thyesave, dy ose më tepër thyesave algjebrike me emërues të ndryshëm mund të transformohen në thyesa me emërues të njëjtë. Ky transformim quhet **sjellje në emërues të barabartë.** Për emërues të përbashkët të disa thyesave algjebrike, zakonisht merret shprehje racionale e cila i përmban të gjitha emëruesit e thyesave të dhëna pa mbetje. Një shprehje e tillë është prodhimi i të gjithë emëruesve. Tjetër shprehje mund të jetë edhe shumëfishi më i vogël i përbashkët i emëruesve të thyesave të dhëna.

Sjellja në emërues të përbashkët (barabartë) i cili është i barabartë me shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve të thyesave të dhëna, kryhet në këtë mënyrë:

• Gjejmë shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve të thyesave të dhëna algjebrike;

• Gjejmë zgjerimet përkatëse të emëruesve të secilës thyesë. Ato janë shprehje që fitohen, kur shumëfishi më i vogël i përbashkët do të pjesëtohet me emëruesin përkatës të thyesave të dhëna;

• Pastaj shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin e secilës thyesë me zgjerimin përkatës.

Shembulli 6. T'i sjellim në emërues më të vogël të përbashkët thyesat:

$$\frac{a}{2x^2y}, \frac{b}{3y} \text{ dhe } \frac{c}{4xy}.$$

Emëruesi më i vogël i përbashkët është

$$\text{SHVP } (2x^2y, 3y, 4xy) = 12x^2y.$$

Sipas kësaj, kemi

$$\frac{a}{2x^2y} = \frac{a \cdot 6}{2x^2y \cdot 6} = \frac{6a}{12x^2y},$$

$$\frac{b}{3y} = \frac{b \cdot 4x^2}{3y \cdot 4x^2} = \frac{4bx^2}{12x^2y};$$

$$\frac{c}{4xy} = \frac{c \cdot 3x}{4xy \cdot 3x} = \frac{3cx}{12x^2y}. \ ♦$$

Detyra

1. Për cilat vlera të x, thyesat:

a) $\frac{x+2}{x}$ **b)** $\frac{x-3}{x-1}$ **c)** $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$

nuk kanë kuptim, kurse për cilat vlera ngelin të barabartë me zero ?

2. Thjeshto thyesat:

a) $\frac{6ax}{8a^2}$ **b)** $\frac{3x^{n+2}}{x^n y}$ **c)** $\frac{x^2-y^2}{ax+ay}$

ç) $\frac{3a+1}{9a^2-1}$ **d)** $\frac{3a+6}{a^3+8}$ **dh)** $\frac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$

3. Thjeshto thyesat dhe njehso vlerën e tyre:

a) $\frac{a-1}{2a-2a^2}$, për $a = 3$ **b)** $\frac{x^2-4}{x+2}$, për $x = 3{,}5$ **c)** $\frac{x-1}{1-x}$, për $x = a$.

4. Silli thyesat në emërues të përbashkët:

a) $\frac{1}{a}$ dhe $\frac{2}{a+1}$ **b)** $\frac{2}{3a^2b^3}$, $\frac{5a}{6b^3c^2}$ dhe $\frac{1}{5abc}$

c) $\frac{a}{x+y}$ dhe $\frac{b}{(x+y)^2}$ **ç)** $\frac{2x}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ dhe $\frac{xy}{x^2-y^2}$

d) $\frac{5}{2x-1}$ dhe $\frac{x}{4x^2-2x}$ **dh)** $\frac{2a}{a^3-ax^2}$, $\frac{3x}{x+a}$ dhe $\frac{5a}{x^2+2ax+a^2}$

3.10. Operacione me thyesa algjebrike

Mbledhja dhe zbritja e thyesave algjebrike

Rregullat për mbledhje dhe zbritje të thyesave algjebrike janë të njëjta sikur ato me thyesat e zakonshme.

1. (Rregulla për mbledhje) Thyesat algjebrike me emërues të barabartë mblidhen ashtu që mblidhen numëruesit e tyre kurse shuma e fituar pjesëtohet me emëruesin e përbashkët të tyre, respektivisht,

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\ C\neq 0.$$

Shembulli 1. a) $\frac{3a}{2a^2x}+\frac{5ab}{2a^2x}+\frac{a-2b}{2a^2x}=\frac{4a+5ab-2b}{2a^2x},\ ax\neq 0$

b) $\frac{2a}{x-1}+\frac{3a-1}{x-1}+\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a+3a-1+2-ab}{x-1}=\frac{5a+1-ab}{x-1},\ x\neq 1.$ ♦

2. (Rregulla për zbritje) Thyesat algjebrike me emërues të barabartë zbriten ashtu që nga numëruesi i të pjesëtueshmit zbritet numëruesi i pjesëtuesit kurse ndryshimi i fituar pjesëtohet me emëruesin e përbashkët të tyre, respektivisht,

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C},\ C\neq 0.$$

Shembulli 2. a) $\frac{a}{c}-\frac{a+3}{c}=\frac{a-(a+3)}{c}=\frac{a-a-3}{c}=-\frac{3}{c},\ c\neq 0$

b) $\frac{2a}{x-1}-\frac{3a-1}{x-1}-\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a-3a+1-2+ab}{x-1}=\frac{-a-1+ab}{x-1},\ x\neq 1.$ ♦

Nëse thyesat algjebrike kanë emërues jo të barabartë, atëherë ato fillimisht sillen në emërues të barabartë, dhe pastaj mblidhen apo zbriten sikur thyesat algjebrike me emërues të barabartë.

Shembulli 3. a) $\frac{5b}{2a^2}+\frac{3}{4ab}+\frac{2b}{a}=\frac{5b\cdot 2b+3\cdot a+2b\cdot 4ab}{4a^2b}=\frac{10b^2+3a+8ab^2}{4a^2b}$

b) $\frac{2}{c-x}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=-\frac{2}{x-c}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=\frac{-2x+3x-(x-c)}{x(x-c)}=\frac{c}{x(x-c)}$

c) $a+\frac{ax}{a-x}=\frac{a}{1}+\frac{ax}{a-x}=\frac{a(a-x)+ax}{a-x}=\frac{a^2}{a-x}$

ç) $\frac{b^2}{2a+b}+2a-b=\frac{b^2}{2a+b}+\frac{2a-b}{1}=\frac{b^2+(2a-b)(2a+b)}{2a+b}=\frac{4a^2}{2a+b}.$ ♦

<u>Shumëzimi dhe pjesëtimi i thyesave algjebrike</u>

Për shumëzimin dhe pjesëtimin e thyesave algjebrike vlejnë të njëjtat rregulla sikur ato për thyesat e zakonshme.

3. (Rregulla për shumëzim) Thyesat algjebrike shumëzohen ashtu që veçmas shumëzohen numëruesit e tyre dhe veçmas shumëzohen emëruesit e tyre dhe pastaj prodhimi i parë merret për numërues kurse i dyti për emërues të prodhimit, respektivisht

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\ B\neq 0,\ \ D\neq 0.$$

Shembulli 4. a) $\frac{5a^2x}{3by^3}\cdot\left(-\frac{9b^2y}{10ax^2}\right)=-\frac{5a^2x\cdot 9b^2y}{3by^3\cdot 10ax^2}=-\frac{3ab}{xy^2},\ \ abxy\neq 0$

b) $\frac{x-1}{2y}\cdot\frac{4y^2}{(1-x)^2}=\frac{4y^2(x-1)}{2y(x-1)^2}=\frac{2y}{x-1},\ \ x\neq 1,\ \ y\neq 0.$♦

Gjatë shumëzimit të thyesave algjebrike duhet të shikohet vallë mund të kryhet ndonjë thjeshtim eventual. Prandaj, numëruesit dhe emëruesit, (nëse janë polinome) i zbërthejmë në shumëzues, kurse thjeshtimin e kryejmë para se të shumëzojmë numëruesit dhe emëruesit, siç theksuam më lartë.

Rregulla për fuqizim të thyesave algjebrike është e njëjtë sikur rregulla e fuqizimit të thyesave të zakonshme.

4. (Rregulla për fuqizim) Thyesa algjebrike fuqizohet ashtu që edhe numëruesi edhe emëruesi i saj fuqizohen me të njëjtin tregues të fuqisë, kurse pastaj fuqia e parë pjesëtohet me të dytin, respektivisht

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\ B\neq 0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Shembulli 5. $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3=\frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3}=\frac{8a^6x^3}{27b^3}.$ ♦

5. (Rregulla për pjesëtim) Thyesat algjebrike pjesëtohen ashtu që thyesa – i pjesëtueshmi, shumëzohet me vlerën reciproke të thyesës – pjesëtues.

Shembulli 6. a) $-\frac{28a}{5b^3}:\frac{14a^2}{15b^4}=-\frac{28a}{5b^3}\cdot\frac{15b^4}{14a^2}=-\frac{28a\cdot 15b^4}{5b^3\cdot 14a^2}=-\frac{6b}{a},\ a\neq 0,\ b\neq 0$

b) $\frac{x}{x^2-16}:\frac{x^3+4x^2}{x-4}=\frac{x}{x^2-16}\cdot\frac{x-4}{x^3+4x^2}=\frac{x}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x-4}{x^2(x+4)}=$

$=\frac{x(x-4)}{x^2(x-4)(x+4)^2}=\frac{1}{x(x+4)^2},\ x\neq\pm 4,\ x\neq 0$

c) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2}:(a-b+1)=\frac{(a+1)^2-b^2}{3x^2}:\frac{a-b+1}{1}=$

$=\frac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2}\cdot\frac{1}{a-b+1}=\frac{a+b+1}{3x^2},\ \ a-b+1\neq 0,\ x\neq 0.$ ♦

Definicioni 1. Thyesa, te i cili numëruesi ose emëruesi ose të dyja janë thyesa algjebrike, quhet **thyesë algjebrike e dyfishtë**.

Shembulli 7. Thyesat

$$\frac{\frac{2a}{a+1}}{x-5},\quad \frac{x+1}{\frac{a+1}{x-1}},\quad \frac{\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\frac{a^2-4}{x^2+x}}\ \text{dhe}\ \frac{\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}},$$

janë shembuj të thyesave algjebrike të dyfishta. ♦

Numëruesi dhe emëruesi i thyesës algjebrike të dyfishtë mund të jetë ndonjë shumë algjebrike nga thyesat ose çfarëdo shprehje racionale.

Te thyesa e dyfishtë $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$, shprehjet A dhe D quhen anëtarë **të jashtëm**, kurse B dhe C anëtarë **të brendshëm** të thyesës.

Secila thyesë algjebrike e dyfishtë mundet në mënyrë më të thjeshtë të transformohet në mënyrë identike në thyesë algjebrike të zakonshme, kur numëruesi i tij pjesëtohet me emëruesin.

Shembulli 8. Kemi se

a) $\frac{\frac{2a}{a+1}}{x-5}=\frac{2a}{a+1}:(x-5)=\frac{2a}{a+1}\cdot\frac{1}{(x-5)}=\frac{2a}{(a+1)(x-5)},\quad a\neq -1,\ x\neq -5.$

b) $\frac{\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\frac{a^2-4}{x^2+x}}=\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}:\frac{a^2-4}{x^2+x}=\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+x}{a^2-4}=$

$=\frac{(a-2)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{(a-2)(a+2)}=\frac{x(a-2)}{(x-1)(a+2)},\ x\neq\pm 1,\ a\neq\pm 2$ и $x\neq 0.$♦

Për thyesat algjebrike të dyfishta vlen rregulla e njëjtë sikur për thyesat e zakonshmet.

6. (Rregulla për transformim të thyesës algjebrike të dyfishtë) Thyesa algjebrike e dyfishtë transformohet në të zakonshme ashtu që prodhimi i anëtarëve të jashtëm merret si numërues, kurse prodhimi i anëtarëve të brendshëm merret për emërues të thyesës algjebrike të zakonshme.

Shembulli 9. Kemi se

$$\frac{\frac{x}{x^2-9}}{\frac{x^3+3x^2}{x-3}}=\frac{x(x-3)}{(x^3+3x^2)(x^2-9)}=\frac{x(x-3)}{x^2(x+3)(x-3)(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{x(x+3)^2},\ x\neq\pm3,\ x\neq0.\ \blacklozenge$$

Detyra

Kryeni operacionet e dhëna me thyesat:

1. a) $\frac{a+2}{b}+\frac{2a-5}{b}$ **b)** $\frac{2a+1}{a}+\frac{3x-1}{a}-\frac{x-2}{a}$

2. a) $\frac{3}{x+1}-\frac{5}{2x+1}$ **b)** $\frac{1}{x^2-4x+4}+\frac{5}{x^2-4}$

3. a) $\frac{2}{x^4-1}+\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{x+1}$ **b)** $\frac{5}{2a+4}-\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{a-2}$

4. a) $\frac{3a+1}{2a+6}-\frac{a-1}{a+3}$ **b)** $\frac{1}{x-3}-\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{2}{x^2+6x+9}$

5. a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{2a}{a-b}$ **b)** $\frac{x-2}{6x+2y-2z}\cdot\frac{3x+y-z}{2x-x^2}$

6. a) $\frac{x-1}{2y}:\frac{(1-x)^2}{4y^2}$ **b)** $\frac{x^2-xy}{a^2+a}:\frac{2x-2y}{3a+3}$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Kryeni operacionet e shënuara:

a) $(-0,81):[-5-(6-10):2]-3,5\cdot(-8)$ **b)** $(-6)^2-(-2)^4+(-3)^3-5^2$

2. Njehso vlerat e shprehjeve:

a) $\dfrac{1+0,5\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{4+1,8\cdot10}}$ **b)** $\dfrac{\left(0,3-\frac{3}{20}\right)\cdot1,5}{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}-\frac{3}{4}.$

3. Kryeni operacionet e dhëna me fuqitë:

a) $x \cdot x^5 \cdot x^2$ **b)** $(a \cdot b)^4 \cdot a^3$ **c)** $\left(\frac{a}{2c}\right)^3$

4. Cilët nga shprehjet e dhëna janë racionale të plota, kurse cilat racionale thyesore:

a) $0{,}34ax^3 - 6bxc^2$ **b)** $1 : x$ **c)** $\frac{y-1}{y+1} + x^2$ **ç)** $\frac{1}{2}$?

5. Vallë formulat në vijim janë identitete:

a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc$

b) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

6. Kryej mbledhjen e polinomeve $3x^2 - x + 1$, $2x^2 + 5x - 3$ dhe $4x - 5$.

7. Kryej zbritjen e monomeve:

a) $4xy - (+3x)$ **b)** $2{,}5x - (-0{,}5x)$

8. Janë dhënë polinomet:
$A = x^2 - xy + 2y - 5$, $B = 2x^2 + 3xy - y^2$ dhe $C = -3x^2 + xy + 4x + 1$.
Njehso shprehjen $C - (A - B)$.

9. Kryej operacionet e shënuara dhe pastaj thjeshto shprehjet:

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x - y)(x + y)$

b) $(c + 1)^2 + 3(c - 1)^2 - 5(c + 1)(c - 1)$.

10. Njehso në mënyrën më të shpejtë:

a) 401^2 **b)** 703^2 **c)** 1002^2.

11. Thjeshto shprehjen $2(a - 1)^2 - (a + 5)(a^2 - 5a + 25) + (a + 1)^3$.

12. Kryej pjesëtimin e polinomeve $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

13. Zbërthe polinomet në shumëzues:

a) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$ **b)** $12ax - 6bx + 2ay - by$

14. Zbërthe polinomet në shumëzues:

a) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$ **b)** $x^3 + y^3 + (x + y)^2 + x^2 - y^2$

15. Zbërthe polinomet në shumëzues:

a) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ **b)** $x^3 - 3x^2 + x + ax^2 - 3ax + a$

16. Cakto PMP të shprehjeve:

a) 60, 900 dhe 75 **b)** $2ab$, $3bc$ dhe $4ac$.

17. Cakto SHVP të shprehjeve:

a) 75, 60 dhe 125 **b)** $3x^3ab$, $5xa^4$ dhe $10x^2b^3$.

18. Thjeshto thyesat:

a) $\dfrac{xy-x^2}{xy^2-x^2y}$ **b)** $\dfrac{x^2-1}{1-2x+x^2}$.

19. Silli në emërues të barabartë thyesat $\dfrac{2a^2}{b}$, $\dfrac{5b^2}{c}$, dhe $\dfrac{7c^2}{a}$.

20. Kryej operacionet e shënuara:

a) $\dfrac{1}{x-c}-\dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1-2c}{x^2-c^2}$ **b)** $\dfrac{(x+1)^2}{x}-\dfrac{(x-1)^2}{x}$.

21. Thjeshto shprehjen $\left(\dfrac{a^2+1}{2a}-1\right):\left(\dfrac{a^2+1}{2a}+1\right)$.

22. Njehso vlerën e shprehjes $\dfrac{(a+b)^3-a^3-b^3}{a+b}$, nëse $ab=5$.

4. PROPORCIONI I MADHËSIVE

4.1. Kuptim për proporcionin dhe vetit themelore

Raportet dhe proporcionet

Le të jenë dhënë dy madhësi të së njëjtës gjini, numrat matës a dhe b të së cilëve janë shprehur me njësi të njëjtë matëse. Kur i krahasojmë këto madhësi shpesh pyetemi:

a) Sa herë njëra madhësi është më e madhe se tjetra, ose

b) Çfarë pjese të njëra madhësi paraqet tjetra madhësi?

Për t'u përgjigjur pyetjeve të parashtruara, duhet numri matës i njërës madhësi të pjesëtohet me numrin matës të madhësisë tjetër, respektivisht të formojmë herësin

$a : b$, (ose $\frac{a}{b}$), $b \neq 0$.

Definicioni. Herësi $a : b$, (ose $\frac{a}{b}$) i numrave matës të dy madhësive të llojit të njëjtë quhet **raport** i atyre madhësive.

Numrat a dhe b quhen **anëtarë të raportit**, gjegjësisht a quhet **anëtari i parë**, kurse b **anëtari i dytë** i raportit. Vlera e herësit quhet **vlera e raportit.**

Raportet $a : b$ dhe $b : a$, të cilët dallohen vetëm sipas vendeve të anëtarëve të tyre, quhen **raporte reciprokisht të kundërta**.

Shembulli 1. Raportet 5 : 8 dhe 8 : 5 janë raporte reciprokisht të kundërt. ♦

Definicioni. Dy raporte me vlera të barabarta të lidhura me shenjën për barazi përbëjnë **proporcion**.

Në këtë aspekt, nëse është dhënë proporcioni $a : b = c : d$, atëherë themi se a ndaj b qëndron si c ndaj d, ose raporti a ndaj b është i barabartë me raportin c ndaj d.

Shembulli 2. Barazitë në vijim janë proporcione:

a) 12 : 3 = 20 : 5, meqenëse 12 : 3 = 4 dhe 20 : 5 = 4;

b) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$, meqenëse $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$ dhe $\frac{5}{6} : 10 = \frac{1}{12}$;

c) 1,2 : 0,4 = 4,5 : 1,5, meqenëse 1,2 : 0,4 = 3 dhe 4,5 : 1,5 = 3.♦

Çdo proporcion përbëhet prej katër anëtarëve, duke nisur prej të majtës në të djathtë ato quhen i pari, i dyti, i treti dhe i katërti anëtarë i proporcionit. I pari dhe i katërti quhen **anëtarë të jashtëm** të proporcionit, kurse i dyti dhe i treti quhen **anëtarë të brendshëm** të proporcionit.

Shembulli 3. Te proporcioni 3 : 15 = 5 : 25 numrat 3 dhe 25 janë anëtarë të jashtëm, kurse numrat 15 dhe 5 janë anëtarë të brendshëm. ♦

<u>Vetit e proporcioneve</u>

Në vazhdim do të tregojmë disa veti të proporcioneve.

1. (Vetia themelore e proporcioneve) Prodhimi i anëtarëve të jashtëm është i barabartë me prodhimin e anëtarëve të brendshëm të proporcionit.

Shembulli 4. Te proporcioni 7 : 21 = 2 : 6 vlen $7 \cdot 6 = 42 = 21 \cdot 2$. ♦

2. Nëse prodhimi i dy numrave të ndryshëm prej zeros është i barabartë me prodhimin e dy numrave tjerë, atëherë prej këtyre katër numrave mund të formohet proporcion.

Shembulli 5. Prej numrave 2, 3, 6 dhe 9 mund të formojmë proporcion, pasi që $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. Proporcioni do të jetë 2 : 3 = 6 : 9. ♦

3. Një proporcion ngel i vërtetë, nëse një anëtarë i jashtëm dhe një i brendshëm ose të gjithë anëtarët shumëzohen ose pjesëtohen me numër të njëjtë të ndryshëm prej zeros.

Vetia e fundit shfrytëzohet për thjeshtim të proporcioneve dhe atë: kur disa nga anëtarët e proporcionit janë thyesa apo numra dhjetor, ose kur një i jashtëm dhe një i brendshëm ose të gjithë anëtarët e proporcionit kanë shumëzues të përbashkët.

Zgjidhje të një proporcioni nënkuptojmë njehsimin e anëtarit të panjohur në proporcionin e dhënë kur dihen tre të tjerët.

Detyra 1. Cakto anëtarin e panjohur te proporcioni $8 : 5 = x : 7{,}5$.

Zgjidhje. Ma zbatimin e vetisë themelore të proporcionit kemi

$$5 \cdot x = 8 \cdot 7{,}5$$

respektivisht $5x = 60$, prej nga rrjedh se $x = 12$. ♦

> **Definicioni.** Barazia e tre ose më tepër raporteve të barabarta quhet **proporcion i vazhduar**, respektivisht
>
> $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Proporcionet e vazhduara shpesh shënohen edhe në mënyrën më të shkurtë:

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_2 : b_1 : \ldots : b_n$$

4. Shuma e të gjithë anëtarëve të parë të raporteve të një proporcioni të vazhduar ndaj shumës së anëtarëve të dytë të raporteve të proporcionit të vazhduar qëndron njëjtë sikur cilido anëtarë i parë ndaj anëtarit të dytë të raportit përkatës, gjegjësisht, për proporcionin e vazhduar $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$ vlen

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

Shembulli. Nga proporcioni i vazhduar 10:6:4 =15:9:6 fitojmë disa proporcione mes të cilave

(10 + 6 + 4) : (15 + 9 + 6) = 10 : 15, respektivisht 20 : 30 = 10 : 15

(10 − 6 + 4) : (15 − 9 + 6) = 6 : 9, respektivisht 8 : 12 = 6 : 9

(10 + 6 − 4) : (15 + 9 − 6) = 4 : 6, respektivisht 12 : 18 = 4 : 6 ♦

Detyra 2. Njehso x dhe y nga proporcioni i vazhduar $x : 4 = 6 : y = 3 : 2$.

Zgjidhje. Nga proporcioni i vazhduar do të ndërtojmë dy proporcione, secila me nga një të panjohur

$$x : 4 = 3 : 2 \text{ dhe } 6 : y = 3 : 2,$$

dhe pas njehsimit fitojmë $x = 6$ dhe $y = 4$.♦

Detyra 3. Krijo proporcion të vazhduar nga proporcionet

$$a : b = 4 : 3,\ b : c = 3 : 8 \text{ dhe } c : d = 4 : 5.$$

Zgjidhje. Prej $c : d = 4 : 5$ gjejmë se $c : d = 8 : 10$, prandaj proporcioni i vazhduar do të jetë $a : b : c : d = 4 : 3 : 8 : 10$. ♦

Detyra 4. Numrin 450 ndaje në pjesë ashtu që ato të qëndrojnë sikur 2 : 3 : 5 : 8.

Zgjidhje. Pjesët do t'i shprehim me $2k$, $3k$, $5k$ dhe $8k$, ku k është koeficienti proporcional. Nga $2k + 3k + 5k + 8k = 450$, fitojmë $k = 25$, respektivisht pjesët e kërkuara janë $2 \cdot 25 = 50$, $3 \cdot 25 = 75$, $5 \cdot 25 = 125$ dhe $8 \cdot 25 = 200$. ♦

Detyra

1. Shqyrto saktësinë e proporcioneve:

a) $3 : 5 = 12 : 20$ **b)** $4 : 5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ **c)** $x^2 : y^2 = xy : \frac{y^3}{x}$

2. Njehso të panjohurën x te proporcionet:

a) $3 : 8x = 9 : 5$ **b)** $12 : (x + 1) = 3 : 4$ **c)** $3 : 4 = (7 - x) : (7 + x)$

3. Njehso anëtarët e panjohur te proporcioni

$$2 : 3 = x : 6 = 8 : y = z : 18$$

4. Ndërto proporcion të vazhduar nga proporcionet e dhëna:

$$a : b = 2 : 3,\ b : c = 6 : 5 \text{ dhe } c : d = 15 : 11$$

5. Numrin 600 ndaje në pjesë ashtu që ato të qëndrojnë sikur 1:3:6.

4.2. Proporcioni i drejtë dhe i zhdrejtë

Proporcioni i drejtë

Një nga varshmëritë më të shpeshta që haset mes dy madhësive të ndryshueshme është e ashtuquajtura varshmëria e drejtë proporcionale e madhësive.

> **Definicioni.** Themi se dy madhësi të ndryshueshme A dhe B gjenden në **varshmëri të drejtë proporcionale** nëse raporti i cilado dy vlerave të lejuara të çfarëdoshme të njërës madhësi është e barabartë me raportin e vlerave përkatëse të madhësisë tjetër.

Shembulli 1. Nëse 1 kilogram mollë kushton 30 denarë, sa kushtojnë 2, 3, 4, 5, ... kilogram mollë. Ja pasqyra e dhënë me tabelë:

Sasia e mollëve në kilogram	1	2	3	4	5	6	7	...
Vlera në denarë	30	60	90	120	150	180	210	...

Nga tabela përfundojmë se 1 : 2 = 30 : 60, 2 : 3 = 60 : 90, 3 : 4 = 90 : 120 etj.

Pra, kur njëra madhësi (sasia) do të zmadhohet për 2, 3, 4, 5, ... herë, atëherë madhësia tjetër (vlera e mallit) do të zmadhohet njësoj aq herë dhe e kundërta. ♦

Madhësitë mes të cilave ekziston varshmëri e drejtë proporcionale quhen **madhësi të drejta proporcionale**.

Shembulli 2. Madhësi të drejta proporcionale janë: gjatësia e vijës rrethore dhe rrezja e saj; perimetri i katrorit dhe brinja e tij; pesha dhe vëllimi i një trupi gjatë temperaturës konstante; numri i punëtorëve dhe puna e kryer nga ata etj. ♦

Le të jenë X dhe Y dy madhësi të drejta proporcionale. Nëse $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ janë disa vlera të çfarëdoshme të lejuarat të madhësisë X, a $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ janë vlerat përkatëse të madhësisë Y, atëherë herësi i vlerave përkatëse është numër konstant, gjegjësisht kemi

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

Numri k quhet **koeficienti i proporcionit** i madhësive të drejta proporcionale X dhe Y.

Proporcioni i zhdrejtë

Definicioni. Themi që dy madhësi të ndryshueshme A dhe B gjenden në **varshmëri të zhdrejtë proporcione** nëse raporti i cilado dy vlerave të çfarëdoshme të lejuar të njërës madhësi është i barabartë me raportin e kundërt të vlerave përkatëse të madhësisë tjetër.

Shembulli 3. Largesa mes dy qyteteve është 120km. Kjo rrugë mund të kalohet për kohë të ndryshme në varësi prej shpejtësisë së lëvizjes. Që të analizojmë varshmërinë mes shpejtësisë dhe kohëzgjatjes së nevojshme për kalimin e kësaj rruge, do të krijojmë tabelën:

Shpejtësia në kilometra në orë	5	10	15	20	30	60	120	...
Koha në orë	24	12	8	6	4	2	1	...
Rruga në kilometra	120	120	120	120	120	120	120	...

Nga analiza përfundojmë se 5 : 10 = 12 : 24, 5 : 15 = 8 : 24, 5 : 30 = 4 : 24 etj., respektivisht $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 20 \cdot 6 = 30 \cdot 4 = \ldots = 120 \cdot 1 = 120$. Pra, kur njëra madhësi (shpejtësia) do të zmadhohet për 2, 3, 4, 5, ... herë, atëherë madhësia tjetër (koha) do të zvogëlohet po ashtu aq herë dhe e kundërta. ♦

Madhësitë mes të cilave ekziston varshmëri e zhdrejtë proporcionale quhen **madhësi të zhdrejta proporcionale**.

Shembulli 4. Madhësi të zhdrejta proporcionale janë: shtypja dhe vëllimi i sasisë së caktuar të gazit gjatë temperaturës konstante; gjatësia dhe gjerësia e drejtkëndëshit gjatë syprinës konstante; numri i punëtorëve dhe koha për të cilën ata e kryejnë punën e caktuar etj. ♦

Le të jenë X dhe Y dy madhësi të zhdrejta proporcionale. Nëse $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ janë disa vlera të lejuara të madhësisë X, a $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ janë vlerat përkatëse të madhësisë Y, atëherë prodhimi i vlerave përkatëse është numër konstant, respektivisht kemi

$$y_1x_1 = y_2x_2 = ...\ y_nx_n = k.$$

Numri k quhet **koeficienti i proporcionit** të madhësive të zhdrejta proporcionale X dhe Y.

Detyra

1. Në çfarë varshmërie gjenden madhësitë e dhëna:

a) pesha dhe vëllimi i trupave që janë prej materies së njëjtë

b) shpejtësia e lëvizjes dhe koha për të cilën vetura kalon rrugë të njëjtë

c) perimetri dhe brinja e trekëndëshave barabrinjës

ç) numri i punëtorëve dhe koha për të cilën ata kryejnë punë të caktuar?

2. Në çfarë varshmërie gjenden perimetri dhe brinja e një gjashtëkëndëshi të rregullt? Cili është koeficienti i proporcionit?

3. Vallë syprina e katrorit është në proporcion të drejtë me gjatësinë e brinjës së tij?

4. Çfarë është varshmëria mes brinjëve përkatëse të trekëndëshave të ngjashëm?

5. Çfarë është varshmëria mes shpejtësisë me të cilën një gyp mbush basenin (e matur me litra në minutë) dhe kohës së mbushjes së basenit (e matur në minuta)? Cili është koeficienti i proporcionit?

4.3. Rregulla e thjeshtë dhe e përbërë e treshit

Rregulla e thjeshtë e treshit

Vetitë e proporcioneve dhe madhësive proporcionale gjejnë zbatim të madh në të zgjidhurit e detyrave gjatë përditshmërisë tonë. Në detyrat e këtilla është dhëna vlera e njërës madhësi A dhe vlera përkatëse e madhësisë tjetër B, me të cilën madhësia A është proporcione e drejtë ose proporcionale e zhdrejtë me madhësinë B, dhe kërkohet të caktohet ajo vlerë e njërës madhësi që është përkatëse me vlerën e njohur të madhësisë tjetër. Detyrat e llojit të tillë quhen detyra me **rregullën e thjeshtë të treshit.**

Detyra 1. Një kooperativë bujqësore nga 4*ha* grumbulloi 68 ton rrush. Kooperativa ka gjithsej 15*ha* vreshtari. Sa tonë rrush ka grumbulluar?

Zgjidhje. Te detyra paraqiten dy madhësi: sipërfaqja e vreshtarisë dhe sasia e grumbulluar e rrushit. Meqenëse sasia e rrushit është proporcionale e drejtë me sipërfaqen e mbjellë, raporti i sipërfaqeve të mbjella do të jetë i barabartë me raportin e sasive përkatëse të grumbulluara me rrush. Nëse sasia e kërkuar shënohet me x, mund të formojmë proporcionin:

$$4 : 15 = 68 : x$$

prej nga rrjedh

$$x = \frac{68 \cdot 15}{4} = 255 \text{ ton rrush.}$$

Mënyra e mësipërme mund të shkruhet përmes skemës në këtë mënyrë:

$\uparrow$ prej 4 *ha* $\quad$ $\uparrow$ $68t$ rrush
prej 15 *ha* $\quad$ xt rrush

dhe do të kemi $x : 68 = 15 : 4,\ x = 68\dfrac{15}{4} = 255$ ton, prej ku kuptojmë se nga

15*ha* sipërfaqe vreshtari, kooperativa ka grumbulluar 255 ton rrush. ♦

Të potencojmë se njëra shigjetë gjithnjë fillon nga x dhe me kahun nga lartë, kurse tjetra shigjetë me kahun lartë nëse madhësitë janë proporcionale të drejta, ose me kahun poshtë nëse janë madhësi proporcionale të zhdrejta.

Detyra 2. Prej një sasie pambuku mund të thuren 92*m* pëlhurë me gjerësi 140*cm*. Sa metra pëlhurë mund të thuren prej sasisë së njëjtë të pambukut nëse pëlhura është me gjerësi 80*cm*?

Zgjidhje. Të dy madhësitë: gjatësia dhe gjerësia e pëlhurës që mund të thuren nga sasia e njëjtë e pambukut, janë të zhdrejta proporcionale mes tyre. Prandaj raporti i cilado dy vlerave të njërës madhësi do të jetë i barabartë me raportin e kundërt të vlerave përkatëse të madhësisë tjetër, respektivisht

$$x : 92 = 140 : 80$$

prej nga vijon se

$$x = \frac{92 \cdot 140}{80} = 161 \text{ metra.}$$

me anë të skemës do të kishim këtë pamje:

$\uparrow$ 92 *m* pëlhurë nëse është $\quad$ $\downarrow$ 40 *cm* e gjerë
x m pëlhurë nëse është $\quad$ 80 *cm* e gjerë

pra vijon se $x : 92 = 140 : 80,\ x = 92\dfrac{140}{80} = 161$ metra, prej nga kuptojmë se nga sasia

e njëjtë e pambukut do të thuren 161*m* pëlhurë me gjerësi 80*cm*. ♦

Rregulla e përbërë e treshes

Në praktikë shpeshherë hasim në detyra me tre ose më tepër madhësi proporcionale. Faktikisht, nëse janë dhënë vlera të tre ose më tepër madhësive, atëherë vlera e panjohur përkatëse caktohet me **rregullën e përbërë të treshit**.

Detyra 3. Për ndërtim të tunelit të gjatë 1600 m, me gjerësi 4m dhe lartësi 6m janë shpenzuar 640000 euro. Sa euro janë të nevojshme për ndërtim të tunelit me gjatësi 1000m, me gjerësi 6m dhe lartësi 8m, gjatë kushteve të njëjta të ndërtimit?

Zgjidhje. Të gjitha madhësitë: gjatësia, gjerësia, lartësia dhe shpenzimi për ndërtim të tunelit, janë madhësi të drejta proporcionale ndërmjet veti, prandaj të gjitha shigjetat në skemë do të kenë kahun e njëjtë. Raporti i cilado dy vlerave nga njëra madhësi është i barabartë me vlerat përkatëse të madhësive tjera, respektivisht,

$$\begin{aligned} x:640000 &= 1000:1600 \\ &= 6:4 \\ &= 8:6 \end{aligned}$$

nga vijon se

$$x:640000=(1000\cdot 6\cdot 8):(1600\cdot 4\cdot 6)$$

$$x=\frac{640000\cdot(1000\cdot 6\cdot 8)}{1600\cdot 4\cdot 6}$$

$$x=800000$$

x = 800000 euro

përndryshe, paraqitja me skemë do ishte si më poshtë:

$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$	
	1600m gjatësi		4m gjerësi		6m lartësi		640000 euro
	1000m gjatësi		6m gjerësi		8m lartësi		x euro

dhe përfundojmë se për ndërtimin e tunelit të gjatë 1000m, me gjerësi 6m dhe lartësi 8m, pran kushteve të njëjta të ndërtimit, janë të nevojshme 800000 euro. ♦

Detyra 4. Grupi prej 20 punëtorë kishin punuar 5 ditë nga 8 orë dhe kishin grumbulluar 20000 kilogram pjeshka. Sa ditë janë të nevojshme për grupin prej 30 punëtorëve të cilët do të punojnë nga 5 orë në ditë, dhe të grumbullojnë 60000 kilogram pjeshka?

Zgjidhje. Shigjeta e parë e vendosur gjithnjë fillon nga x dhe me kahun nga lartë, kurse pastaj shqyrtojmë se nëse 20 punëtor kanë kryer punën për 5 ditë, atëherë 30 punëtorë do ta kryejnë punën për më pak ditë (madhësi të zhdrejta proporcionale). Më tutje, nëse punojnë nga 8 orë, punën do ta mbarojnë për 5 ditë, nëse punojnë nga 5 orë punën do ta mbarojnë për më tepër ditë (madhësi të zhdrejta proporcionale). Dhe në fund, nëse 20000 kilogram pjeshka janë grumbulluar për 5 ditë, atëherë 60000 kilogram pjeshka do të grumbullohen për më tepër ditë (madhësi të drejta proporcionale).

$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$	
	20 punëtorë		5 ditë		8 orë		20000 kilogram
	30 punëtorë		x ditë		5 orë		60000 kilogram

Sipas kahut të shigjetave kemi këto proporcione

$$\begin{aligned} x:5 &= 20:30 \\ &= 8:5 \\ &= 60000:20000 \end{aligned}$$

prej nga vijon se

$$x=\frac{5\cdot 20\cdot 8\cdot 60000}{30\cdot 5\cdot 20000}=16 \text{ ditë}$$

Pra, janë të nevojshme 16 ditë, për grupin prej 30 punëtorë të cilët do të punojnë nga 5 orë në ditë, dhe të grumbullojnë 60000 kilogram pjeshka. ♦

Detyra

1. Gjatë ditës së punës 4 punëtorë hapën kanal të gjatë 12 metra. Sa punëtorë janë të nevojshëm për të hapur kanal të gjatë 18 metra gjatë ditës së punës?

2. Prej 20 kilogram panxhar sheqeri fitohen 1,5 kilogram sheqer. Sa kilogram sheqer do të fitohen prej 768 kilogram panxhar sheqeri?

3. Gjashtë gypa të njëjtë mbushin përplot një basen për 4,5 orë. Për sa orë do ta mbushnin këtë basen 5 gypa të tillë?

4. Gjashtë punëtor mund të kryejnë një punë të caktuar për 10 ditë, nëse punojnë nga 8 orë në ditë. Për sa ditë 10 punëtorë do ta kryejnë të njëjtën punë nëse punojnë nga 12 orë në ditë?

5. Gjashtë makina me fuqi $1200kW$ mund të kryejnë një punë të caktuar për 8 ditë. Me çfarë fuqie duhet të disponojnë 4 makina që të munden ta kryejnë të njëjtën punë për 6 ditë?

4.4. Llogaritja e përqindjes

<u>Llogaritja e përqindjes prej 100</u>

Në praktikë është e zakonshme suksese apo mossuksese të ndryshme, rritja ose zbritja e çmimeve të mallrave ose prodhimtarisë të shprehen me lloje speciale të raporteve.

Definicioni. Raporti i formës a : 100 quhet **përqindje**, dhe shënohet me a %.

Meqenëse përqindja është para së gjithash raport, të gjitha vetit e raportit barten edhe te përqindja.

Shembulli 1. Në gara shkollore nga matematika Arta saktë është përgjigjur në 17 pyetje prej gjithsej 25 pyetjeve të parashtruara. Në garën e njëjtë, Merita është përgjigjur saktë në 13 pyetje prej gjithsej 20 pyetjeve të parashtruara. Shtrohet pyetja cila nga to ishte më e suksesshme ?

Arta është përgjigjur saktë në 17 pyetje prej gjithsej 25 pyetjeve. Rezultatin mund ta shprehim përmes raportit 17 : 25. Ngjashëm, rezultatin e Meritës mundemi ta shprehim me raportin 13 : 20. Tani, përgjigjja e pyetjes së parashtruar do të jetë konstatimi vallë raporti 17 : 25 është më i madh apo më i vogël se raporti 13 : 17? Të formojmë proporcionet në vijim:

Arta: 17 : 25 = x : 100, prej ku rrjedh se x = 68.

Merita: 13 : 20 = y : 100, prej ku rrjedh se y = 65.

Pra, rezultati i Artës, gjegjësisht raporti 17 : 25 është ekuivalent me raportin 68 : 100, kurse rezultati i Meritës, gjegjësisht raporti 13 : 20 është ekuivalent me raportin 65 : 100. Mund të përfundojmë se Arta ka treguar rezultat më të mirë pasi që është përgjigjur saktë në 68% të pyetjeve të parashtruara në krahasim me Meritën e cila saktë është përgjigjur në 65% të pyetjeve të parashtruara. ♦

Siç vërejtëm nga shembulli, te llogaritja e përqindjes dallojmë:

- konstantën 100,
- vlera kryesore (S),
- përqindja (p), dhe
- sasia e përqindjes (P),

të cilat formojnë proporcionin $P : S = p : 100$. Nëse dihen dy nga vlerat e proporcionit, atëherë lehtë njehsohet e treta me njërën nga formulat:

$$P = \frac{S \cdot p}{100}, \quad S = \frac{100 \cdot P}{p}, \quad p = \frac{100 \cdot P}{S}.$$

Njehsimi i njërës nga këto madhësi quhet **llogaritje e përqindjes prej njëqind**.

Detyra 1. Rina kishte një shumë prej 500 denarë. Për sa denarë do të zmadhohet kjo shumë, nëse ajo në lotari ka fituar 12% nga shuma e përgjithshme që kishte?

Zgjidhje. Është dhënë vlera kryesore $S = 500$ dhe përqindja $p = 12$, kurse kërkohet sasia e përqindjes P. Sipas formulës

$$P = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{500 \cdot 12}{100} = 60,$$

respektivisht, shuma e Rinës është rritur për 60 denarë.

Detyra 2. Çmimi i një palë këpucëve është rritur për 12%. Tani kushtojnë 840 denarë. Sa ishte çmimi i këpucëve para rritjes?

Zgjidhje. Është dhënë sasia e përqindjes $P = 840$ dhe përqindja $p = 12$, kurse kërkohet vlera kryesore S. Sipas formulës kemi

$$S = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 840}{12} = 7000,$$

pra çmimi i këpucëve para rritjes ka qenë 7000 denarë. ♦

Detyra 3. Kompania bleu 30 ton fruta në ambalazh prej 3 ton. Sa është përqindja e ambalazhit?

Zgjidhje. Vlera kryesore është $S = 30$, sasia e përqindjes $P = 3$, kurse kërkohet përqindja p. Sipas formulës kemi

$$p = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10,$$

respektivisht $p = 10\%$. ♦

<u>Llogaritja e përqindjes nën njëqind dhe llogaritja e përqindjes mbi njëqind</u>

Në praktikë shpesh ballafaqohemi me detyra në të cilat vlera kryesore është zmadhuar ose zvogëluar për sasinë e përqindjes $S \pm P$, kurse duhet të llogaritet vlera kryesore. Në këtë rast, nëse është dhënë $S + P$ themi se kemi **llogaritje të përqindjes mbi njëqind**, dhe nëse është dhënë $S - P$ themi se kemi **llogaritje të përqindjes nën njëqind.**

Për gjetjen e S dhe P do të nisemi nga proporcioni $S : P = 100 : p$, prej nga fitojmë se

$(S \pm P) : P = (100 \pm p) : p$, respektivisht

$(S \pm P) : (100 \pm p) = P : p = S : 100$,

dhe fitojmë formulat

$$S = \frac{(S \pm P) \cdot 100}{100 \pm p} \quad \text{dhe} \quad P = \frac{(S \pm P) \cdot p}{100 \pm p}$$

Detyra 4. në një punëtori janë përpunuar 1800 punëdore me çka është tejkaluar norma për 20%.

a) sa është norma e punëdoreve?

b) Për sa punëdore është tejkaluar norma?

Zgjidhje. Është dhënë shuma $S + P$ =1800 dhe përqindja p = 20, kurse kërkohet të njehsohet vlera kryesore S dhe sasia e përqindjes P. Sipas formulës së lartpërmendur kemi

a) $S = \frac{(S+P) \cdot 100}{100 + p} = \frac{1800 \cdot 100}{100 + 20} = 1500$, dhe

b) $P = (S + P) - S = 1800 - 1500 = 300$

Pra, norma është 1500 punëdore, dhe është tejkaluar për 300 punëdore. ♦

Detyra 5. Në periudhën e lirimeve verore, çmimi i një këmishe është zvogëluar për 12% dhe tani kushton 1276 denarë.

a) Sa ishte çmimi i këmishës para zbritjes?

b) Sa denarë do të jetë në humbje shitësi?

Zgjidhje. Është dhënë ndryshimi $S - P$ =1276 dhe përqindja p =12, kurse kërkohet të njehsohen vlera kryesore S dhe sasia e përqindjes P. Sipas formulës së mësipërme, kemi

a) $S = \frac{(S-P) \cdot 100}{100 - p} = \frac{1276 \cdot 100}{100 - 12} = 1450$, dhe

b) $P = S - (S - P) = 1450 - 1276 = 174$

Pra, çmimi i këmishës para zbritjes ka qenë 1450 denarë, kurse humbja do të jetë 174 denarë. ♦

Detyra

1. Njehso:

a) 15% prej 750 kilometrave **b)** 12% prej 6000 denarëve

2. Çmimi i një konserve me bizele është zvogëluar nga 40 denarë në 34 denarë. Sa është përqindja a e zvogëlimit të çmimit?

3. Në një paralele 7 nxënës janë të shkëlqyeshëm, që paraqet 20% të numrit të përgjithshëm të nxënësve. Sa është numri i përgjithshëm i nxënësve në paralele?

4. Gjatë pranimit të një malli prej 23 ton është konstatuar 0,5% dëmtim gjatë transportit. Sa kilogram nga malli është dëmtuar?

5. Çmimi i ndonjë malli është zvogëluar për 15%, kurse pastaj çmimi i ri i fituar është rritur për 5%, dhe ky mall tani kushton 1606 denarë. Njehso çmimin e mallit para zvogëlimit?

4.5. Llogaritjet e ndarjes

Lloj tjera të detyrave të cilat zgjidhen me vetit e proporcioneve janë detyrat nga **llogaritjet e ndarjes**. Këto janë detyra në të cilat madhësia e dhënë ose bashkësi duhet të ndahet në pjesë, proporcionale të drejta ose proporcionale të zhdrejta, të numrave paraprakisht të dhënë. Pra, ndarja mund të kryhet me **proporcion të drejtë** ose **proporcion të zhdrejtë**.

Në vazhdim do të zgjidhim detyrë në të cilën do të kemi ndarje sipas proporcionit të drejtë.

Detyra 1. Ndaje numrin 370 në tri pjesë, të cilat do të jenë në proporcion të drejtë me numrat 2, 3 dhe 5.

Zgjidhje. Numri 370 duhet të ndahet në tri pjesë (mbledhës) ashtu që pjesa e parë të qëndroj ndaj të dytës sikur 2 : 3, pjesa e dytë ndaj të tretës qëndron sikur 3 : 5, kurse pjesa e parë ndaj të tretës sikur 2 : 5. Nëse tri pjesët e kërkuara i shënojmë përkatësisht me x, y dhe z, atëherë fitojmë

$$x : y = 2 : 3, \ y : z = 3 : 5 \text{ dhe } x : z = 2 : 5.$$

Nga këto proporcione fitojmë proporcionin e vazhduar

$$x : y : z = 2 : 3 : 5, \text{ respektivisht } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}.$$

në pajtim me vetinë e proporcionit të vazhdueshëm, do të kemi

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{370}{10}$$

dhe gjejmë se

$$\frac{x}{2} = \frac{370}{10}, \quad \frac{y}{3} = \frac{370}{10} \text{ dhe } \frac{z}{5} = \frac{370}{10},$$

prej nga drejtpërdrejtë konstatojmë se $x = 74$, $y = 111$ dhe $z = 185$. ♦

Detyra vijuese i dedikohet ndarjes sipas proporcionit të zhdrejtë.

Detyra 2. Andi, Jeta dhe Ademi janë të moshave përkatëse 5, 8 dhe 12 vjeç. Ata e ndanë shumën prej 122500 denarëve në proporcion të zhdrejtë me moshën e tyre përkatëse. Nga sa denarë ka marrë secili prej tyre?

Zgjidhje. Shuma prej 122500 denarëve duhet të ndahet në tre pjesë x, y dhe z ashtu që

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}, \text{ respektivisht } x : y : z = 2\ 4 : 15 : 10.$$

pra, në pajtim me vetinë e proporcionit të vazhduar kemi

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{24+15+10} = \frac{122500}{49} = 2500,$$

dhe gjejmë se

$$\frac{x}{24} = 2500, \quad \frac{y}{15} = 2500 \text{ dhe } \frac{z}{10} = 2500,$$

ku drejtpërdrejtë konstatojmë se $x = 60000$, $y = 37500$ dhe $z = 25000$. ♦

Detyra

1. Ndani numrin 1860 në tre pjesë, që janë

a) në proporcion të drejtë me numrat 2, 3 dhe 5

b) në proporcion të zhdrejtë me numrat 2, 3 dhe 5.

2. Ndani numrin 1080 në tre pjesë, të cilët qëndrojnë sikur $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$.

3. Shuma perej 27200 denarëve t'i ndahet tre personave në proporcion të drejtë me moshën përkatëse të tyre, gjegjësisht 20 vjeçar, 32 vjeçar dhe 40 vjeçar. Nga sa denarë do t'i takojnë secilit person?

4. Shuma prej 1092000 denarë duhet t'iu ndahet tre kompanive, ashtu që secila kompani vijuese të merr 20% më tepër se tjetra (paraprakja). Nga sa denarë do të merr cecila kompani?

5. Shuma prej 135500 denarë t'i ndahet tre personave, ashtu që secili prej tyre të merr 10% më pak se tjetri (parapraku). Nga sa denarë do të merr secili person?

4.6. Llogaritja e kamatës

Marrja hua është një transaksion i domosdoshëm me të cilën shpeshherë ballafaqohemi gjatë jetës. Huamarrësi mund t'i shfrytëzoj parat për të realizuar fitim të cilën huadhënësi nuk është në gjendje ta arrij, mirëpo huadhënësi merr pjesën e tij për parat e huazuara, e ashtuquajtur **kamatë**. Bankat paguajnë kamatë personave fizik dhe kompanive të cilët parat e tyre i kanë deponuar në llogari bankare, dhe anasjelltë ata paguajnë kamata bankave kur nga bankat huazojnë shumë të caktuar të parave.

Lartësia e shumës së huazuar të parave, gjegjësisht shumës të cilës i paguajmë kamatë quhet **kapitali.**

Perioda apo intervali kohor për të cilën duhet të kthehet shuma e huazuar quhet **kohëzgjatje e huas.** Rëndomë perioda e tillë merret në njësi ditësh, muaj apo vite.

Lartësia e kamatës që realizohet për njësi kohe është proporcionale me kapitalin, gjegjësisht paraqet ndonjë përqindje të kapitalit, dhe quhet **normë e kamatës (interesit)**. Sipas kësaj, norma e kamatës është normë përqindjeje në lidhje me periodë të caktuar kohore. Prandaj, lartësia e kamatës nuk varet vetëm prej kapitalit, porse dhe nga kohëzgjatja e huas.

Le të shënojmë kamatën me K, kapitalin me G, kohëzgjatjen e huas me t dhe normën e kamatës (interesit) me s.

Shembulli 1. Maliku i huazoi Saliut 120 denarë. Kështu që arritën marrëveshje që Saliu ta kthej huan për 6 muaj, dhe si kompensim t'i paguaj Malikut në fund të çdo muaji sasinë prej 15% të kapitalit.

Në detyrën e dhënë kapitali G = 120 denarë, kohëzgjatja e huas t = 6 muaj dhe norma mujore e interesit s = 15%. Saliu duhet çdo muaj t'i paguaj Malikut 15% prej 120 denarëve, respektivisht nga 18 denarë. Prandaj, për 6 muaj, Maliku do të merr kamatën prej $18 \cdot 6 = 108$ denarë. ♦

Pra, për kamatën K që realizohet nga kapitali G për kohëzgjatjen e huas t, me normë interesi s kemi

$$K = s \cdot G \cdot t\ .$$

Të theksojmë se gjatë llogaritjes së kamatës, kohëzgjatja e huas duhet të shprehet me të njëjtën njësi në raport me të cilën është përcaktuar norma e interesit.

Detyra 1. Në një bankë lartësia e normës vjetore të interesit është 12%. Sa do të jetë sasia e kamatës që duhet të paguhet për deponim kursimi prej 5000 denarë në kohëzgjatje prej 3 vite?

Zgjidhje. Sipas kushtit në detyrën, kapitali është G = 5000 denarë, norma vjetore e interesit është s =12%, kurse kohëzgjatja e huas është t = 3 vjet.

Atëherë për kamatën e realizuar nga deponimi i kursimit kemi

$$K = s \cdot G \cdot t = 0{,}12 \cdot 5000 \cdot 3 = 1800 \text{ denarë. } \blacklozenge$$

Detyra

1. Një kompani ka deponuar 3000 euro me normë vjetore interesi prej 12%.

a) Sa kamatë merr kompania në fund të vitit të parë?

b) Sa kamatë merr kompania në fund të vitit të dytë?

c) Sa kamatë merr kompania pas vitit të tretë?

2. Merva dhe Troja kishin nga 10000 denarë. Merva i deponoi parat e saja me normë vjetore të interesit prej 11% për 3 vjet, kurse Troja parat e saja i deponoi me normë vjetore të interesit prej 8% për 4 vjet.

a) Sa kamatë do të merr Merva?

b) Sa kamatë do të merr Troja?

c) Cila nga ato do të merr kamatë më të lartë pas skadimit të kohës?

3. Visari deponoi në bankë 3000 denarë dhe për 3 vjet fitoi kamatë prej 675 denarë. Cakto normën vjetore të interesit.

4. Diarti vendosi të investoj një sasi të caktuar të hollash që të fitoj në fund të çdo viti nga 5000 denar. Sa para duhet të investoj, nëse norma vjetore e interesit është 13%?

5. Sara nga investimi i saj arriti të përfitoj 7000 denarë për 3 vjet. Sa të holla kishte investuar Sara, nëse norma vjetore e interesit ka qenë 14,25%?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Thjeshto raportet:

a) 18 : 72 **b)** $6\frac{2}{3} : 16\frac{2}{3}$ **c)** $5\frac{1}{3} : 8\frac{1}{2}$ **ç)** $16a : 48ab$

2. Parcelat A dhe B janë të formës drejtkëndëshe. Nëse dimensionet e parcelës A janë 80m dhe 60,m kurse të parcelës B janë 90m dhe 50 m, gjeni raportin e syprinave të tyre.

3. Njehso të panjohurën x te proporcionet:
a) $(15 - x) : x = 3 : 2$ **b)** $8 : (5 + x) = 3 : x$ **c)** $a : b = (a + x) : x$

4. Numrin 160 ndaje në katër pjesë të cilat do të qëndrojnë sikur 2 : 5 : 7 : 6.

5. Çmimi i kushtimit të 80 biletave të autobusit është 640 denarë. Sa denarë kushtojnë 60 bileta të tilla?

6. Një punëtorë pylli për 9 ditë ka prerë 486 metra kub dru. Sa metra kub do të pres për 16 ditë?

7. Nëntë punëtor kanë kryer një punë për 30 ditë. Sa punëtorë duhet të angazhohen që puna e njëjtë të kryhet për vetëm 10 ditë?

8. Këmbësori A duke lëvizur me shpejtësi prej 3 kilometra në orë, rrugën nga një qytet në tjetër e kalon për 4 orë. Për cilën kohë këmbësori B do ta kaloj të njëjtën rrugë nëse lëviz me shpejtësi prej 8 kilometra në orë?

9. Në një kompani 8 punëtorë për 13 ditë përfituan 6240 denarë. Sa denarë do të përfitonin 15 punëtorë për 6 ditë nëse do të punonin nën kushtet e njëjta?

10. Në një minierë 10 minatorë për 8 orë gropuan 40 ton qymyr. Sa ton qymyr do të gropojnë 8 minatorë për 6 orë nëse punojnë nën kushtet e njëjta?

11. Rrugën me gjatësi $6km$, gjerësi $3m$ dhe me lartësi të zhavorrit $60cm$, mund ta ndërtojnë 80 punëtorë për 45 ditë nëse punojnë 6 orë në ditë. Për sa ditë, 120 punëtorë do të ndërtojnë rrugën me gjatësi $10km$, gjerësi $6m$, dhe lartësi të zhavorrit $80cm$, nëse punojnë 8 orë në ditë?

12. Dea planifikon të shes 24 kroasane. Nëse ajo ka shitur 13 kroasane, sa është përqindja e kroasaneve të pa shitura?

13. Në një shitore në çdo të mërkure ka zbritje prej 15% të artikujve ushqimor. Sa para do të kursej Merita, nëse ajo bleu artikull të mërkurën i cili gjatë ditëve tjera kushton 102 denarë?

14. Nataliteti vjetor i një shteti është 0,3%. Njehso numrin e banorëve të shtetit, nëse dihet se shteti para 3 viteve numëronte 40 milion banorë?

15. Gjatë kohës së zbritjes sezonale prej 15%, Nita shfrytëzoi rastin dhe bleu këpucë me çmim prej 520 denarë. Sa ishte çmimi i këpucëve para zbritjes sezonale?

16. Në 5 shitore duhet të shpërndahen 2480 litra qumësht. Sa litra do t'i takoj secilës shitore nëse e para ka 600 shpenzues, e dyta 800 shpenzues, e treta 440 shpenzues kurse e katërta dhe e pesta nga 600 shpenzues?

17. Cila shumë duhet t'iu ndahet 3 personave në këtë mënyrë: personi i parë të merr $\frac{1}{4}$ e shumës, personi i dytë të merr $\frac{2}{5}$ e shumës, kurse i treti të merr 126000 denarë?

18. Sandra deponoi 25000 denarë në kohëzgjatje prej 2 vjet e 6 muaj dhe gjatë së cilës kishte përfituar kamatën prej 11562,5 denarë. Cakto lartësinë e normës vjetore të interesit?

19. Çfarë kamate ka fituar personi për deponimin prej 7000 denarë me normë vjetore të interesit 12,25% për kohëzgjatje 3 vjetore?

20. Jetoni investoi 10500 denarë për 3 vjet e 3 muaj me normë vjetore të interesit 13,2%.

a) Sa do të jetë kamata që përfiton?

b) Sa para kishte gjithsej pas skadimit të kohëzgjatjes së investimit?

5. BARAZIMET LINEARE, JOBARAZIMET DHE SISTEMI I JOBARAZIMEVE LINEARE ME NJË TË PANJOHUR

5.1. Barazimi linear me një të panjohur

<u>Lloje të barazimeve</u>

Dy shprehje racionale të lidhura me shenjën „=“ (barabartë), formojnë **barazi.** Te çdo barazi dallojmë dy anë, anën e majtë dhe të djathtë.

Nëse të dy shprehjet në barazi janë shprehje numerike, atëherë barazia quhet **barazi numerike**. Barazitë numerike janë gjykime të shënuara me simbole matematikore, prandaj ato mund të jenë gjykime të vërteta ose të pavërteta.

Barazia në të cilën së paku njëra anë e saj ka një ose më tepër të panjohura (ndryshore) quhet **barazim**. Ndryshoret në barazim quhen **të panjohura**, dhe zakonisht shënohen me x, y,... Bashkësia e vlerave të lejuara të ndryshoreve quhet **bashkësi e definicionit** të barazimit dhe shënohet me D.

Shembulli 1. a) Barazia $3 + 2 = 10 - 5$ është barazi numerike, gjykim i vërtetë.

b) Barazia $5x + 3 = 2$ është barazim me $D = \mathbb{R}$. ♦

Çdo barazim kalon në barazi numerike me zëvendësim të ndryshoreve me vlera nga bashkësia e definicionit.

Shembulli 2. Barazimi $7 + 3x = 2$ për $x = 2$ kalon në barazi numerike $7 + 3 \cdot 2 = 2$. Megjithatë, ku gjykim është jo i vërtetë. ♦

Barazimi i cili me zëvendësim të ndryshoreve për të gjithë vlerat e bashkësisë së definicionit kalon në barazi numerike të vërtetë quhet **identitet**.

Barazimi i cili me zëvendësim të ndryshoreve për të gjithë vlerat e bashkësisë së definicionit kalon në barazi numerike të pa vërtetë quhet **barazim i pamundshëm**.

Shembulli 3. Barazimi $6 + 3x = 3(2 + x)$ është identitet, kurse barazimi $7 + 3x = 2 + 3x$ është barazim i pamundshëm. ♦

<u>Barazimet ekuivalente</u>

Dy barazime quhen **ekuivalente** nëse kanë bashkësi definicioni të njëjtë dhe bashkësi të zgjidhjeve të njëjtë.

Shembulli 4. Barazimet $2 + x = 5$ dhe $x - 3 = 0$ janë ekuivalente pasi që kanë bashkësi definicioni $\mathbb{R}$ dhe bashkësi të zgjidhjeve $R = \{3\}$. ♦

Që të zgjidhin barazim të dhënë, të njëjtën e zëvendësojmë me një tjetër më të thjeshtë por ekuivalente me të. Pastaj, këtë barazim ekuivalent e zëvendësojmë me një barazim të tretë edhe më të thjeshtë por gjithnjë ekuivalente dhe kështu me radhë, derisa të vijmë në barazim zgjidhjet e së cilës tanimë janë të dukshme. Ky zëvendësim i barazimit të dhënë me barazim tjetër më të thjeshtë dhe ekuivalente quhet transformim i barazimit dhe bazohet në dy vetitë vijuese të barazimeve ekuivalente.

1. Barazimi

$$f(x) = gx(x) \tag{1}$$

është ekuivalent me

$$f(x) + \phi(x) = g(x) + \phi(x),$$

ku $\phi(x)$është shprehje e definuar për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores x në barazimin (1).

Me fjalë tjera, nëse në të dy anët e barazimit shtojmë një shprehje të njëjtë e cila është e definuar për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores, do të fitojmë barazim ekuivalent me të dhënin. Si pasoj e vetisë së mësipërme kemi se:

• Nëse të dy anët e barazimit kanë anëtarë të barabartë me shenja të njëjta, ata mund të eliminohen (thjeshtësohen).

• Çdo anëtarë i barazimit mund të bartet prej njërës anë në tjetrën, mirëpo duhet t'i ndryshoj shenja gjegjësisht shkruhet anëtari i kundërt.

Shembulli 5. a) Nga barazimi $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$ me thjeshtësim të anëtarëve të barabartë, fitojmë barazimin $7x + 2 = 9$ që është ekuivalent me barazimin fillestar.

b) Nëse te barazimi $5x - 4 = 2x + 5$ dëshirojmë që në anën e majtë t'i grupojmë anëtarët që përmbajnë ndryshoren, atëherë anëtarit $2x$ i cili gjendet në anën e djathtë pas bartjes në të majtë duhet t'i ndryshoj shenja nga pozitive në negative. Ngjashëm, anëtari -4 pas bartjes në anën e djathtë do të merr shenjën e kundërt (+4). Kështu fitojmë barazimin $5x - 2x = 5 + 4$ që është ekuivalent me të dhënin. ♦

2. Barazimi

$$f(x) = g(x) \tag{2}$$

është ekuivalent me barazimin

$$f(x) \cdot \phi(x) = g(x) \cdot \phi(x),$$

ku $\phi(x)$ është shprehje e cila është e definuar dhe i ndryshëm prej zeros për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores x në barazimin (2).

Me fjalë tjera, nëse të dy anët e barazimit i shumëzojmë me një shprehje të njëjtë, i cili është i definuar dhe i ndryshëm prej zeros për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores, do të fitojmë barazim ekuivalent me të dhënin. Si pasoj e vetisë së mësipërme kemi se:

• Shenjat e të gjithë anëtarëve të barazimit ndërrohen në të kundërta, nëse të dy anët e barazimi shumëzohen me -1.

• Nëse të dy anët e barazimit kanë shumëzues të përbashkët, i cili nuk e përmban ndryshoren dhe është i ndryshëm prej zeros, atëherë me të mund të pjesëtohen të dy anët e barazimit. Në këtë rast themi se kemi bërë thjeshtësim të barazimit.

Shembulli 6. a) Nëse të dy anët e barazimit $-3x + 7 = 3$ i shumëzojmë me -1 fitojmë barazimin $3x - 7 = -3$ që është ekuivalent me barazimin nismëtarë.

b) Barazimi $2x - 4 = 6$ është ekuivalent me barazimin $x - 2 = 3$. Të dy anët e barazimit janë pjesëtuar me 2, respektivisht të shumëzuar me $\frac{1}{2}$. ♦

Të theksojmë se me zbatimin e vetisë së mësipërme, barazimet me koeficiente thyesore mund të transformohen në barazim me koeficiente të plota, nëse të gjithë anëtarët e barazimit shumëzohen me ndonjë shumëfish të përbashkët të emëruesve. Ky transformim quhet <u>lirim i barazimit nga emëruesit</u>.

Shembulli 7. Barazimi

$$\frac{x-1}{2}-5=\frac{x+2}{3}$$

mund të transformohet në barazim pa emërues, nëse çdo anëtarë i tij shumëzohet me ndonjë shumëfish të përbashkët të emëruesve, për shembull, $2\cdot 3 = 6$. Kështu, barazimi i dhënë do të jetë ekuivalent me barazim $6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 5=6\cdot\frac{x+2}{3}$, respektivisht me barazimin

$$3(x-1)-30=2(x+2).\ \blacklozenge$$

Nëse barazimi përmban ndryshoren në emërues, atëherë pas lirimit nga emëruesit mund të firohet barazim i cili i përmban të gjitha zgjidhjet e barazimit të dhënë, por mund të ndodh që barazimi i transformuar tani të përmbaj edhe zgjidhje të reja, për të cilat SHVP i emëruesve anulohet. Nëse ka zgjidhje të tilla, ato duhet të përjashtohen nga bashkësia e zgjidhjeve.

Shembulli 8. Barazimi

$$\frac{x^2-4x}{x-2}=-\frac{4}{x-2}-4$$

do të lirohet nga emëruesit, nëse çdo anëtarë i tij shumëzohet me shprehjen $x-2$, për të cilin supozojmë se është i ndryshëm prej zeros. Pra, nën kushtin $x-2\neq 0$ e fitojmë barazimin $x^2-4x=-4-4x+8$, që është ekuivalent me barazimin $x^2-4=0$, respektivisht $(x-2)(x+2)=0$, zgjidhjet e së cilës janë $x=2$ dhe $x=-2$. Zgjidhja

$x=-2$ është njëra nga zgjidhjet, mirëpo zgjidhja $x=2$ nuk është zgjidhje e barazimit të dhënë meqenëse për këtë vlerë fitojmë $x-2=0$. Prandaj barazimi i dhënë ka vetëm një zgjidhje, gjegjësisht $x=-2$. ♦

Detyra

1. Vallë barazimet e mëposhtme janë ekuivalente:

a) $x^2+3x=12+x^2$ dhe $3x=12$ **b)** $3=\frac{15}{x}$ dhe $3x=15$ **c)** $x+\frac{1}{x}=5+\frac{1}{x}$ dhe $x=5$?

2. Për cilën vlerë të x vlera numerike e shprehjes $5x-2$ është e barabartë me:

a) 8 **b)** 7 **c)** 0 **ç)** 6?

3. Për cilën vlerë të x shprehjet $3x-2$ dhe $4x+1$ kanë vlera të barabarta numerike?

4. Cilat nga barazimet e dhëna janë identitete:

a) $5x-2x=3x$ **b)** $3x-2=x+1$ **c)** $(y+5)^2=y^2+10y+25$?

5.2. Zgjidhja e barazimeve lineare dhe barazimeve që sillen në barazime lineare me një të panjohur

<u>**Forma e përgjithshme e barazimit linear me një të panjohur**</u>

Me të gjitha transformimet e mësipërme, çdo barazim linear me një të panjohur mund të sillet (transformohet) në barazim linear të formës

$$ax+b=0, \tag{1}$$

ku a dhe b janë numra ose shprehje në të cilat nuk paraqitet ndryshorja x. Barazimi (1) quhet **forma e përgjithshme e barazimit linear me një të panjohur**, ku a quhet **koeficient** pran të panjohur, kurse b quhet **anëtari i lirë**. Të analizojmë bashkësinë e zgjidhjeve të këtij barazimi.

1. Nëse në barazimin $ax + b = 0$, koeficienti $a \neq 0$, atëherë barazimi është ekuivalent me $x = -\frac{b}{a}$, i cili **ka zgjidhje të vetme** $x_0 = -\frac{b}{a}$.

2. Nëse në barazimin $ax + b = 0$, koeficienti $a = 0$, kurse anëtari i lirë $b \neq 0$, atëherë ai është ekuivalent me $0 \cdot x = -b$, i cili është i pamundshëm pasi që nuk ekziston numër real i cili i shumëzuar me zero të jep numër të ndryshëm prej zeros. Prandaj në këtë rast barazimi s'ka zgjidhje, gjegjësisht është i **pamundshëm.**

3. Nëse në barazimin $ax + b = 0$, koeficienti $a = 0$, dhe anëtari i lirë $b = 0$, atëherë ai është ekuivalent me $0 \cdot x = 0$, i cili ka pafund shumë zgjidhje, pasi që çdo numër real i shumëzuar me zero është i barabartë me zero. Prandaj në këtë rast themi se barazimi paraqet **identitet**.

Detyra 1. Zgjidhe barazimin

$$\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2.$$

Zgjidhje. Që të lirohemi nga emëruesit, të dy anët e barazimit i shumëzojmë me shumëfishin më të vogël të përbashkët të emëruesve, gjegjësisht me 12, dhe fitojmë barazimin

$$12 \cdot \frac{5x-2}{3} - 12 \cdot \frac{x-8}{4} = 12 \cdot \frac{x+14}{2} - 12 \cdot 2$$

e cila pas thjeshtimit merr formën

$$4(5x-2) - 3(x-8) = 6(x+14) - 12 \cdot 2.$$

Pas lirimit nga kllapat fitojmë barazimin

$$20x - 8 - 3x + 24 = 6x + 84 - 24.$$

Nëse i grupojmë në të majtë anëtarët që përmbajnë ndryshoren, kurse në të djathtë anëtarët e lirë, do të fitojmë barazimin

$$20x - 3x - 6x = +84 - 24 + 8 - 24, \text{ respektivisht } 11x = 44.$$

Pas pjesëtimit të barazimit të fituar me koeficientin pran ndryshores, fitojmë barazimin ekuivalent $x = 4$, prej nga drejtpërdrejt përfundojmë se zgjidhje e barazimit është $x_0 = 4$. ♦

Detyra 2. Zgjidhe barazimin

$$\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1.$$

Zgjidhje. Që të lirohemi nga emëruesit, të dy anët e barazimit i shumëzojmë me prodhimin $x(x-2)$. Nën supozimin se $x(x-2) \neq 0$, respektivisht $x \neq 0$ dhe $x \neq 2$, barazimi do të transformohet në barazimin ekuivalent

$$\frac{15x(x-2)}{x} - \frac{(7-x) \cdot x \cdot (x-2)}{x-2} = x(x-2)$$

i cili pas thjeshtimit merr formën

$$15(x-2) - x(7-x) = x(x-2).$$

pas lirimit nga kllapat, fitojmë barazimin

$$15x - 30 - 7x + x^2 = x^2 - 2x.$$

Pastaj, me grupim në anë të ndryshme të anëtarëve me ndryshore dhe ata pa ndryshore, fitojmë barazimin $10x = 30$, zgjidhje e së cilës është $x_0 = 3$.

Meqenëse $3 \neq 0$ dhe $3 \neq 2$, përfundojmë se $x_0 = 3$ është zgjidhje e barazimit. ♦

Detyra 3. zgjidhe barazimin

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}.$$

Zgjidhje.

Që të lirohemi nga emëruesit, të dy anët i shumëzojmë me shprehjen $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Nën supozimin se $x^2 - 4 \neq 0$, respektivisht $x \neq -2$ dhe $x \neq 2$, barazimi transformohet në formën

$$(x-2) - (x+2) = 2x$$

zgjidhje e së cilës është $x_0 = -2$. Meqenëse $x_0 = -2$ nuk paraqet zgjidhje të barazimit të dhënë, përfundojmë se bashkësia e zgjidhjeve të barazimit të dhënë është bashkësi e zbrazët, gjegjësisht barazimi është i pamundshëm. ♦

Detyra 4. Zgjidhe barazimin

$$\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}.$$

Zgjidhje. Që të lirohemi nga emëruesit, të dy anët e barazimit i shumëzojmë me shprehjen $x-5$. Nën supozimin se $x-5 \neq 0$ fitojmë barazimin

$$(2x-7) = x - 5 - (2-x)$$

i cili është ekuivalent me barazimin $0 \cdot x = 0$. Barazimi i fundit paraqet identitet, por zgjidhje të barazimit janë vetë ata numra real x për të cilat $x-5 \neq 0$. Prandaj, bashkësi e zgjidhjeve të barazimit të dhënë është $R = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. ♦

Barazime me vlerë absolute që sillen në barazime lineare me një të panjohur

Me konceptin *vlerë absolute* të numrit real x, që shënohet me simbolin $|\,x\,|$, nënkuptojmë numrin:

$$|\,a\,| = \begin{cases} a, & \text{nëse } a > 0 \\ 0, & \text{nëse } a = 0 \\ -a, & \text{nëse } a < 0 \end{cases}.$$

Barazimet tek të cilat e panjohura x paraqitet brenda simbolit të vlerës absolute quhen **barazime me vlerë absolute**. Me interes të veçantë për ne, janë barazimet me vlerë absolute të cilat mund të sillen në barazime lineare me një të panjohur. Mënyra e zgjidhjes së tyre fillon me lirim nga simboli për vlerë absolute në pajtim me definicionin për vlerë absolute të numrit real. Në vazhdim, me ndihmë të transformimeve ekuivalente, barazimi sillet (transformohet) në barazim të formës së përgjithshme, mënyrën e zgjidhjen të së cilës tanimë e dimë.

Detyra 5. Zgjidhe barazimin

$$|x-5| = 2$$

Zgjidhje. Sipas definicionit për vlerë absolute të numrit real kemi

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, & x \in [5, \infty) \\ 5-x, & x \in (-\infty, 5) \end{cases}.$$

Kemi dy raste të mundshme:

I. Nëse $x \in (-\propto, 5)$, atëherë barazimi i dhënë merr formën $5 - x = 2$. Zgjidhje e barazimit është $x = 3$.

II. Nëse $x \in [5, \propto)$, atëherë barazimi i dhënë merr formën $x - 5 = 2$. Zgjidhje e barazimit është $x = 7$.

Përfundimisht, zgjidhje të barazimit të dhënë janë $x = 3$ dhe $x = 7$. ♦

Detyra 6. Zgjidhe barazimin

$$|x| - |x + 2| = 0$$

Zgjidhje. Kemi se

$$|x| = \begin{cases} x, & x \in [0, \propto) \\ -x, & x \in (-\propto, 0) \end{cases} \quad \text{и} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \in [-2, \propto) \\ -x-2, & x \in (-\propto, -2) \end{cases}.$$

Kemi tre raste të mundshme:

I. Nëse $x \in (-\propto, -2)$, atëherë barazimi i dhënë merr formën $-x + x + 2 = 0$, respektivisht $2 = 0$, që është e pamundshme. Prandaj, barazimi s'ka zgjidhje në intervalin e shqyrtuar.

II. Nëse $x \in [-2, 0,)$ atëherë barazimi i dhënë merr formën $-x - x - 2 = 0$, respektivisht $x = -1$. Zgjidhje e barazimit është $x = -1$.

III. Nëse $x \in [0, \propto)$, atëherë barazimi i dhënë merr formën $x - x - 2 = 0$, respektivisht $-2 = 0$, që është e pamundshme. Prandaj, barazimi s'ka zgjidhje në intervalin e shqyrtuar.

Përfundimisht, zgjidhje e barazimit të dhënë është $x = -1$. ♦

Detyra

1. Zgjidh barazimet:

a) $(x - 1)(x - 2) - (x - 3)(x - 4) = 6$ **b)** $3x^2 - (3x + 2)(x - 1) = 8$

2. Zgjidh barazimet:

a) $x - \frac{2}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{9-2x}{3}$ **b)** $\frac{y+17}{5} + 2 = \frac{3y-7}{4}$

3. Zgjidh barazimet:

a) $1 + \frac{2x - \frac{10-7x}{3}}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x - \frac{1+x}{3}}{3}$ **b)** $x + \frac{1 + \frac{3x}{2}}{4} + \frac{2 + \frac{x}{4}}{3} = 2$

4. Zgjidh barazimet:

a) $\frac{2}{2x-3} + \frac{2x-3}{x} = 2$ **b)** $\frac{y+1}{y-3} - \frac{y-1}{y+3} = \frac{8y}{y^2-9}$

5. a) $2x + |x| = 3$ **b)** $|2x + 1| + |x + 3| = x + 6$

5.3. Përpilimi dhe zgjidhja e barazimit linear me një të panjohur

Të zgjidhurit e shumë problemeve nga shkencat natyrore dhe shoqërore, si dhe probleme nga përditshmëria jonë, kryesisht trajtohen në përpilimin dhe zgjidhjen e barazimeve lineare me një të panjohur. Prandaj, pjesa më serioze e zgjidhjes së problemit është përkthimi tekstual në formën algjebrike adekuate. Faktikisht, nuk ka rregulla të caktuara rigoroze për zgjidhje të këtyre detyrave, megjithatë, mundemi të japim disa udhëzime të përgjithshme gjegjësisht hapat e arritjes deri në rezultatin e kërkuar.

Hapi 1. Me kujdes e shqyrtojmë detyrën e parashtruar dhe i ndajmë pyetjet të cilat kërkojnë përgjigjen.

Hapi 2. I numërojmë të gjitha madhësitë e panjohura që përmenden në detyrë, si dhe numrin matës të secilës prej tyre, dhe i shënojmë me shenjat përkatëse x, y, ...etj.

Hapi 3. I shfrytëzojmë të gjitha informatat e dhëna në detyrë me qëllim që të përcaktojmë lidhjen algjebrike ndërmjet madhësive të përmendura në hapin 2.

Hapi 4. Në bazë të kushteve të parapara në detyrë e përpilojmë barazimin.

Hapi 5. E zgjidhim barazimin e përpiluar.

Hapi 6. Kryejmë provën e rezultatit të fituar, si në aspektin e barazimit të përpiluar ashtu edhe në aspekt të kushteve dhe kuptimit të detyrës së parashtruar.

Të potencojmë se prova është e domosdoshme, pasi që mundet të ndodh që edhe pse barazimi është mirë i përpiluar dhe i zgjidhur, rezultati nuk korrespondon me kushtet e parapara të detyrës, gjegjësisht rezultati të mos ketë kuptim.

Detyra 1. Shuma e dy numrave natyror është 94. Numri më i madh është për 5 më i vogël se dyfishi i numrit të vogël. Cilët janë ata dy numra?

Zgjidhje.

Hapi 1. Pyetja: Cilët janë ata dy numra?

Hapi 2. Madhësi të panjohura: Le të shënojmë me x numrin më të vogël. Atëherë i madhi do të jetë numri $94 - x$, meqenëse shuma e tyre është 94.

Hapi 3. Informata të dhëna: Më i madhi prej numrave është për 5 më i vogël se dyfishi i të voglit.

Hapi 4. Përpilojmë barazimin: $94 - x = 2x - 5$.

Hapi 5. Zgjidhim barazimin e përpiluar: Barazimi $94 - x = 2x - 5$ është ekuivalent me barazimin $94 + 5 = 2x + x$, i cili më tutje është ekuivalent me barazimin $99 = 3x$, zgjidhje e së cilës është $x_0 = 33$. Pra, numri më i vogël është 33, kurse i madhi është $94 - 33 = 61$.

Hapi 6. Prova e rezultatit: $33 + 61 = 94$ dhe $94 - 33 = 2 \cdot 33 - 5$. ♦

Detyra 2. Jeta është 7 vite më e vjetër se vëllai i saj. Pas 5 viteve shuma e viteve të tyre do të jetë 63. Nga sa vjet ka secili prej tyre?

Zgjidhje.

Hapi 1. Pyetja: Nga sa vjet ka motra dhe vëllai?

Hapi 2. Madhësi të panjohura: Le të shënojmë me x numrin e viteve të Jetës. Atëherë vëllai i saj do të ketë $x - 7$ vjet.

Hapi 3. Informatat që kemi: Kushtet e dhëna në detyrë i shfaqim në tabelë:

Madhësitë	Jeta	Vëllai i Jetës
Numri i viteve	x	$x - 7$
Numri i viteve të tyre pas 5 viteve	$x + 5$	$(x - 7) + 5$

Numri i viteve të Jetës pas 5 viteve i mbledhur me numrin e viteve të vëllait pas 5 viteve është 63.

Hapi 4. Përpilojmë barazimin: $(x + 5) + [(x - 7) + 5] = 63$.

Hapi 5. Zgjidhim barazimin: Barazimi $(x + 5) + [(x - 7) + 5] = 63$ është ekuivalent me barazimin $2x + 3 = 63$, zgjidhje e të cilit është $x_0 = 30$. Pra, Jeta për momentin është 30 vjeçare, kurse vëllai $30 - 7 = 23$ vjeçar.

Hapi 6. Prova e rezultatit: $(30 + 5) + (23 + 5) = 63$. ♦

Detyra 3. Petriti kishte 6500 denarë në bankënota prej 50, 100 dhe 500 denarë. Ai kishte numër të barabartë të bankënotave prej secilit lloj të përmendur. Nga sa bankënota prej secilit lloj kishte Petriti?

Zgjidhje. Le të ketë Petriti nga x bankënota prej çdo lloji. Kushtet e dhëna në detyrë do t'i shfaqim në tabelë:

Madhësitë	Bankënota prej 50 denarë	Bankënota prej 100 denarë	Bankënota prej 500 denarë
Numri i bankënotave	x	x	x
Vlera në denarë	50	100	500
Vlera e përgjithshme në denarë	$50x$	$100x$	$500x$

Meqenëse shuma e përgjithshme e parave është 6500 denarë, mund ta përpilojmë barazimin

$$50x + 100x + 500x = 6500$$

zgjidhje e së cilës është $x_0 = 10$. Pra, Petriti kishte nga 10 bankënota prej secilit lloj.

Prova: $50 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 500 \cdot 10 = 6500$. ♦

Detyra 4. Në një shitore artikujsh ushqimor, çmimet janë zbritur për 40%. Nëse çmimi i një produkti është 180 denarë, të njehsohet çmimi i tij para zbritjes.

Zgjidhje. Le të jetë çmimi i produktit para zbritjes x denarë. Nëse çmimi është zvogëluar për 40%, atëherë çmimi i produktit është zvogëluar për $0{,}4x$ denarë. Meqenëse çmimi i produktit tani është 180 denarë, përpilojmë barazimin

$$x - 0{,}4x = 180$$

zgjidhje e së cilës është $x_0 = 300$. Pra, çmimi i produktit para zbritjes ka qenë 300 denarë.

Prova: $300 - 0{,}4 \cdot 300 = 180$. ♦

Detyra 5. Për rrethim të një kopshti në formë drejtkëndëshi janë të nevojshme 130 metra tel. Gjatësia e kopshtit është për 5 metra më e madhe se gjerësia. Njehso dimensionet e kopshtit.

Zgjidhje. Të shënojmë gjerësinë me x metra. Atëherë gjatësia është $x + 5$ metra. Meqenëse janë të nevojshme 130 metra tel, atëherë përpilojmë barazimin

$$2x + 2(x + 5) = 130$$

zgjidhje e së cilës është $x_0 = 30$. Pra, kopshti ka gjerësinë 30 metra dhe gjatësinë 35 metra.

Prova: $2 \cdot 30 + 2(30 + 5) = 130$. ♦

Detyra 6. Dy traktorist së bashku lëvrojnë një arë për 6 ditë. Traktoristi i parë vetë mund të lëvroj arën për 10 ditë. Për sa ditë do të lëvronte këtë arë traktoristi i dytë?

Zgjidhje. I pari vetë e lëvron arën për 10 ditë, që domethënë për një ditë lëvron $\frac{1}{10}$ e arës. I dyti e lëvron arën për x ditë, që domethënë për një ditë lëvron $\frac{1}{x}$ e arës. Të dy traktoristët së bashku e lëvrojnë për 6 ditë, domethënë për një ditë do të lëvrojnë $\frac{1}{6}$ e arës.

Meqenëse pjesa e arës që lëvruan të dy traktoristët për një ditë, pavarësisht nga ajo a lëvrojnë së bashku apo të veçuar, ngel e njëjtë, prandaj përpilojmë barazimin

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$$

e cila për $x \neq 0$ është ekuivalente me barazimin $3x + 30 = 5x$ zgjidhje e së cilës është $x_0 = 15$.

Pra, traktoristi i dytë vet e lëvron arën për 15 ditë.

Prova: $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ ♦

Detyra

1. Një e katërta e një numri është për 3 më e madhe se një e gjashta e numrit të njëjtë. Cili është ai numër?

2. Nëna e Gentit është 3 herë më e vjetër se Genti. Pas 4 viteve ajo do të jetë 2 herë më e vjetër se ai. Nga sa vjet ka nëna dhe biri?

3. Çmimi i kostumit të Zanës është zmadhuar për 38% në krahasim me vitin e kaluar. Nëse këtë vit kostumi kushton 2700 denarë, sa ka kushtuar vitin e kaluar?

4. Perimetri i trekëndëshit barakrahës është $36cm$, kurse baza e tij është për $3cm$ më e vogël se krahu. Caktoni gjatësitë e brinjëve të tij?

5. Një pishinë mbushet përplot përmes një gypi për 4 orë. Kur pishina është e mbushur përplot, zbrazet krejt përmes një gypi tjetër për 7 orë. Për sa kohë do të mbushej pishina nëse hapen njëkohësisht të dy gypat?

5.4. Jobarazimet lineare me një të panjohur

Llojet e jobarazimeve

Dy shprehje racionale të lidhura me shenjë për jobarazi formojnë jobarazi. Nëse të dy shprehjet në jobarazi janë shprehje numerike, atëherë jobarazia quhet **jobarazi numerike.**

Jobarazia tek e cila së paku njëra nga dy shprehjet ka një apo më tepër ndryshore quhet **jobarazim**. Ndryshoret te jobarazimi quhen **të panjohura**, dhe rëndomë i shënojmë me x, y, ... Bashkësia e vlerave të lejuara të ndryshoreve quhet **bashkësia e definicionit** të jobarazimit dhe shënohet me D.

Shembulli 1. a) Jobarazia $15 - 2 \cdot 6 > 1$ është jobarazi numerike, dhe paraqet gjykim të vërtetë.

b) Jobarazia $5x + 3 < 2$ është jobarazim me $D =$ ○ . ♦

Çdo jobarazim kalon në jobarazi numerike duke zëvendësuar ndryshoret me vlera nga bashkësia e definicionit.

Shembulli 2. a) Jobarazimi $6 + 4x > 3$ për $x = 3$ kalon në jobarazi numerike $6 + 4 \cdot 3 > 2$ dhe paraqet një gjykim të vërtetë.

b) Jobarazimi $6 + 8x < -2$, për $x = 0$ kalon në jobarazi numerike $6 < -2$ dhe paraqet një gjykim jo të vërtetë. ♦

Jobarazimi i cili me zëvendësim të ndryshoreve për cilat do vlera nga bashkësia e definicionit, kalon në barazi numerike të vërtetë quhet **jobarazim identik**.

Jobarazimi i cili me zëvendësim të ndryshoreve për cilat do vlera nga bashkësia e definicionit, kalon në barazi numerike jo të vërtetë quhet **jobarazim i pamundshëm**.

Shembulli 3. Jobarazimi $x^2 \geq 0$ është identitet, kurse jobarazimi $x^2 < 0$ është jobarazim i pamundshëm. ♦

Jobarazimet ekuivalente

Në vazhdim do të përqendrohemi në jobarazime të llojit $f(x) > g(x)$, mirëpo të gjitha konkludimet e nxjerra do të vlejnë edhe për rastin kur $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ ose $f(x) \leq g(x)$.

Dy jobarazime quhen **ekuivalente** nëse kanë bashkësi definicioni të njëjtë dhe bashkësi të zgjidhjeve të njëjtë.

Shembulli 4. Jobarazimet $x > 2$ dhe $x - 2 > 0$ janë ekuivalente meqenëse kanë bashkësi të definicionit ○ dhe bashkësi të zgjidhjeve $R = (2, +\infty)$. ♦

Që të zgjidhin jobarazim të dhënë, të njëjtën e zëvendësojmë me ndonjë tjetër më të thjeshtë por ekuivalente me të dhënën. Pastaj, jobarazimin e fituar e zëvendësojmë me tjetër edhe më të thjeshtë ekuivalente me të dhe kështu me radhë derisa të vijmë në jobarazim zgjidhjet e së cilës tanimë janë të dukshme. Zëvendësimi i jobarazimit të dhënë me jobarazim tjetër më të thjesht dhe ekuivalent, quhet transformim i jobarazimit dhe bazohet kryesisht në këto dy vetitë e jobarazimeve ekuivalente:

1. Jobarazimi

$$f(x) > g(x) \tag{1}$$

është ekuivalente me jobarazimin

$$f(x) + \phi(x) > g(x) + \phi(x),$$

ku $\phi(x)$ është shprehje e definuar për gjitha vlerat e lejuara të ndryshores x në jobarazimin (1).

Me fjalë tjera, nëse në të dy anët e jobarazimit shtojmë një shprehje të njëjtë, i cili është i definuar për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores, do të fitojmë jobarazim ekuivalent me të dhënin. Si pasoj e vetisë së mësipërme do të kemi:

- Nëse të dy anët e jobarazimit ka anëtarë të barabartë me shenja të njëjta, ato mund të anashkalohen (eliminohen).
- Çdo anëtarë i jobarazimit mund të bartet nga njëra anë e jobarazimit në anën tjetër të jobarazimit por me shenjë të kundërt.

Shembulli 5. a) Jobarazimi $5x - 2x + 3 > 8 - 2x$ me eliminim të anëtarëve të barabartë kalon në jobarazim $5x + 3 > 8$ që është ekuivalent me më.

b) Nëse te jobarazimi $4x - 5 > 3x - 2$ duam në anën e majtë t'i grupojmë anëtarët që përmbajnë ndryshoren, atëherë anëtari $3x$ pas bartjes në anën e majtë ndryshon shenjën prej plus në minus. Kurse anëtari -5 pas bartjes në anën e djathtë të jobarazimit, ndryshon shenjën nga minus në plus. Dhe fitojmë jobarazimin e ri ekuivalent me të dhënën $4x - 3x > -2 + 5$. ♦

2. Jobarazimi

$$f(x) > g(x) \tag{2}$$

është ekuivalent me jobarazimin

$$f(x) \cdot \phi(x) > g(x) \cdot \phi(x),$$

ku $\phi(x)$ është ndonjë shprehje e definuar dhe fiton vetëm vlera pozitive për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores x në jobarazimn (2).

Me fjalë tjera, Nëse të dy anët e jobarazimit i shumëzojmë me një shprehje të njëjtë, i e cila është e definuar dhe fiton vetëm vlera pozitive për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshores, do të fitojmë jobarazim ekuivalente me të dhënën.

Si pasoj e vetisë së mësipërme rrjedh se, nëse të dy anët e jobarazimit kanë shumëzues të përbashkët pozitiv, i cili nuk e përmban ndryshoren, atëherë me të mund të pjesëtohen të dy anët e jobarazimit. Në këtë rast themi se kemi thjeshtuar jobarazimin.

Shembulli 6. a) Nëse të dy anët e jobarazimit $3(x - 2) < 15$ i pjesëtojmë me 3 (ose i shumëzojmë me $\frac{1}{3}$ fitojmë jobarazimin $x - 2 < 5$, që është ekuivalent me jobarazimin e dhënë në fillim. ♦

Të potencojmë se me zbatimin e vetisë së mësipërme, jobarazimi me koeficiente thyesor lehtë mund të transformohet në jobarazim me koeficiente të plotë, nëse të gjithë anëtarët shumëzohen me shumëfish pozitiv të përbashkët të emëruesve. Transformimi i këtillë quhet lirim i jobarazimit nga emëruesit.

Shembulli 7. Jobarazimi

$$\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5$$

do të lirohet nga emëruesit, nëse çdo anëtarë i tij shumëzohet me ndonjë shumëfish të përbashkët pozitiv të emëruesve, për shembull me $2 \cdot 3 = 6$. Kështu fitojmë jobarazimin $4x - 14 < 3x + 3 - 30$, ekuivalent me të dhënën. ♦

3. Jobarazimi

$$f(x) > g(x) \tag{2}$$

është ekuivalent me jobarazimin

$$f(x) \cdot \phi(x) < g(x) \cdot \phi(x),$$

ku $\phi(x)$ është shprehje e definuar dhe fiton vetëm vlera negative për gjitha vlerat e lejuara të ndryshores x në jobarazimin (2).

Me fjalë tjera, nëse të dy anët e jobarazimit i shumëzojmë me një shprehje të njëjtë, të definuar dhe fiton vetëm vlera negative për gjitha vlerat e lejuara të ndryshores dhe nëse e ndryshojmë kahun (< me >, > me <, ≤ cme ≥, ≥ me ≤) do të fitojmë jobarazim ekuivalent me të dhënën.

Si pasoj e vetisë së mësipërme rrjedh se nëse të dy anët e jobarazimit i shumëzojmë me -1, kahu i jobarazimit ndryshohet me kahun e kundërt.

Shembulli 7. Nëse të dy anët e jobarazimit $-x > 7$ i shumëzojmë me -1, ajo merr formën $x < -7$. ♦

Nga dy vetitë e fundit rrjedh konkludimi se nëse të dy anët e jobarazimit të dhënë shumëzohen me shprehje të caktuar atëherë duhet të shqyrtohen rastet kur ajo shprehje është pozitive, kur është negative dhe kur është e barabartë me zero.

Detyra

1. Vallë jobarazimet e dhëna janë ekuivalente:

a) $3x^2 + 3x > 12 + 3x^2$ dhe $3x > 12$ **b)** $x + \frac{1}{x} \leq 5 + \frac{1}{x}$ dhe $x \leq 5$?

2. Cilat nga jobarazimet janë identitete:

a) $5x^2 - 2x^2 \geq x^2$ **b)** $3x - 2 < 3x + 1$ **c)** $(y + 5)^2 \geq y2 + 10y + 5$?

5.5. Zgjidhja e jobarazimeve lineare dhe jobarazimeve që sillen në jobarazime lineare me një të panjohur

Përmes gjitha transformimeve të lartpërmendura, çdo jobarazim linear me një të panjohur sillet (transformohet) në jobarazim linear me një të panjohur të trajtës

$$ax + b > 0 \text{ (ose } ax + b \geq 0, \text{)} \qquad (1)$$

ku a dhe b janë numra ose shprehje në të cilat nuk paraqitet ndryshorja x. Jobarazimi (1) quhet **forma e përgjithshme e jobarazimit linear me një të panjohur**, ku a quhet **koeficienti** pran ndryshores, kurse b quhet **anëtari i lirë**. Të analizojmë bashkësinë e zgjidhjeve të saja.

1. Nëse koeficienti $a > 0$, atëherë ajo është ekuivalente me jobarazimin

$x > -\frac{b}{a}$ (ose $x \geq -\frac{b}{a}$), me bashkësi të zgjidhjeve në intervalin $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ (ose $\left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$).

2. Nëse koeficienti $a < 0$, atëherë ajo është ekuivalente me jobarazimin

$x < -\frac{b}{a}$ (ose $x \leq -\frac{b}{a}$), me bashkësi të zgjidhjeve në intervalin $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ (ose $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$).

3. Nëse koeficienti $a = 0$, atëherë ajo është ekuivalente me jobarazimin

$0 \cdot x + b > 0$ (ose $0 \cdot x + b \geq 0$), respektivisht $b > 0$ (ose $b \geq 0$). Nëse b është numër pozitiv (ose numër pozitiv ose zero) atëherë jobarazimi është jobarazi identike, ndërsa nëse b është numër negativ ose zero (ose numër negativ) jobarazimi është i pamundshëm.

Detyra 1. Zgjidh jobarazimin

$$\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2.$$

Zgjidhje. Që të lirohemi prej emëruesve, shumëzojmë të dy anët me SHVP të emëruesve, gjegjësisht me numrin 6, dhe fitojmë jobarazimin

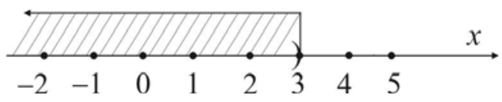
$$2(x-3)-6>3(x-1)-12.$$

Pastaj lirohemi nga kllapat dhe grupojmë anëtarët me ndryshore në njërën anë dhe anëtarët pa ndryshore në anën tjetër. Në këtë mënyrë fitojmë jobarazimin ekuivalent

$2x-3x>-3-12+6+6$, respektivisht $-x>-3$.

Me shumëzim të jobarazimit me -1 fitojmë $x<3$. Pra, bashkësi e zgjidhjeve të jobarazimit janë të gjithë numrat real që shtrihen në intervalin $(-\infty, 3)$.

Përndryshe, bashkësia e zgjidhjeve mundet të paraqitet edhe në mënyrë grafike përmes boshtit numerik, ashtu që pjesën e boshtit numerik në të cilën shtrihen pikat që paraqesin zgjidhjet e jobarazimit e nënvizojmë (hijesohet) sikur në vizatimin më poshtë (vizatimi 1). ♦



Vizatimi 1

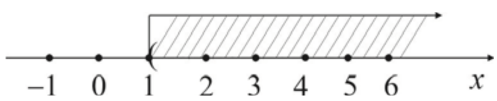
Detyra 2. Zgjidhe jobarazimin

$$(x-2)^2-3x<x(x-3).$$

Zgjidhje. Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin

$$x^2-4x+4-3x<x^2-3x$$

respektivisht me jobarazimin $-4x<-4$. Nëse të dy anët e jobarazimit i pjesëtojmë me 4– fitojmë jobarazimin $x>1$. Pra, bashkësinë e zgjidhjeve të këtij jobarazimi e përbëjnë të gjithë numrat real më të mëdhenj se 1 (vizatimi 2). ♦



Vizatimi 2

Detyra

1. Paraqite në mënyrën grafike bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimeve:

a) $x>3$ **b)** $x<-4$ **c)** $x+7>0$ **ç)** $6x<24$.

2. Zgjidhe jobarazimin

a) $3x-4>2-x$ **b)** $5-2y<y+8$ **c)** $x-(2-x)<3x+7$.

3. Zgjidhe jobarazimin

a) $(x-3)^2<x(x+1)$ **b)** $\frac{x-5}{2}-3>\frac{3x-2}{6}$ **c)** $\frac{y}{2}-\frac{1-y}{4}>5-\frac{2+y}{3}$.

4. Zgjidhe jobarazimin

a) $2x-1<\frac{8-x}{2}$ **b)** $\frac{4x-3}{2}>\frac{2-x}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}(2z-1)-\frac{2}{5}z\leq 4$

5. Parapagimit për telefoninë fikse është 350 denarë. Sa thirrje prej nga 20 denarë mund të bëhen ashtu që lartësia e faturës telefonike të mos e tejkaloj vlerën prej 1000 denarë?

5.6. Sisteme dhe tërësi e jobarazime lineare me një të panjohur

Sistemi i jobarazimeve lineare me një të panjohur

Për bashkësinë prej dy ose më tepër jobarazime lineare me një të panjohur themi se formojnë **sistem të jobarazimeve lineare me një të panjohur**, nëse duhet të caktohen të gjitha vlerat e ndryshores për të cilat fitohet gjykim i vërtetë tek të gjitha jobarazimet në sistem.

Zgjidhje e sistemit të jobarazimeve lineare me një të panjohur është çdo numër real x për të cilën të gjitha jobarazimet e sistemit kalojnë në barazi numerike të vërteta.

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të jobarazimeve lineare me një të panjohur përbëhet prej të gjitha numrave real të cilat janë zgjidhje e sistemit, gjegjësisht paraqet prerje të bashkësive të zgjidhjeve të çdo jobarazimi të sistemit.

Dy sisteme të jobarazimeve lineare me një të panjohur janë **ekuivalente** nëse kanë bashkësi zgjidhjeje të njëjta. Nëse ndonjëra nga jobarazimet e sistemit zëvendësohet me jobarazim ekuivalent me të, atëherë sistemi i fituar është ekuivalent me të dhënën. Prandaj, që të zgjidhet një sistem i jobarazimeve lineare me një të panjohur, mjafton të zgjidhet secila nga jobarazimet veç e veç, kurse pastaj të përcaktohet prerja e bashkësive të zgjidhjeve të tyre. Në rastin kur prerja është bashkësi e zbrazët, themi se sistemi s'ka zgjidhje gjegjësisht është **kundërthënës**.

Detyra 1. Zgjidhe sistemin e jobarazimeve:

$$\begin{cases} 3x-5>7-x \\ -x+8>0 \end{cases}.$$

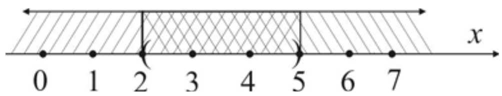
Zgjidhje. Sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} x>3 \\ x<8 \end{cases}$. Sipas kësaj, Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit përbëhet prej gjitha numrave real që gjenden ndërmjet 3 dhe 8. ♦

Përcaktimi i bashkësisë së zgjidhjeve dukshëm lehtësohet, nëse zgjidhjet e secilit jobarazim i paraqesim në mënyrën grafike në të njëjtin bosht numerik. Kjo realizohet ashtu që i hijesojmë të gjitha pjesët e boshtit numerik në të cilat shtrihen pikat për të cilat secili jobarazim veçmas i sistemit kalon në gjykim të saktë. Në këtë rast, pjesa dyfish e hijesuar e boshtit numerik, nëse ka të atillë, paraqet bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit.

Detyra 2. Zgjidh sistemin e jobarazimeve:

$$\begin{cases} x>2 \\ x<5 \end{cases}.$$

Zgjidhje. Nëse në mënyrë grafike i paraqesim bashkësitë e zgjidhjeve të secilit jobarazim, do të përfundojmë se bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit, të paraqitur në mënyrë grafike në bosht numerik në Vizatimin 3, e përbëjnë të gjithë numrat real të intervalit (2,5). ♦



Vizatimi 3

Nganjëherë, zgjidhja e disa jobarazimeve me një të panjohur shtrohet (shndërrohet) në zgjidhje të sistemit të jobarazimeve lineare me një të panjohur. Në vazhdim do të japim disa shembuj të tillë.

Detyra 3. Zgjidhe jobarazimin:

$(x + 5)(x - 2) < 0.$

Zgjidhje. Ana e majtë e jobarazimit të dhënë është prodhim i dy binomeve. Ky prodhim do të jetë negativ, nëse dhe vetëm nëse shumëzuesit kanë shenja të ndryshme. Pra, zgjidhja e jobarazimit kthehet në zgjidhjen e një sistemi përkatës të jobarazimeve

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-2<0 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x+5<0 \\ x-2>0 \end{cases}.$$

Sistemi i parë është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} x>-5 \\ x<2 \end{cases}$, dhe zgjidhjet e tij janë

Gjithë numrat real nga intervali (5, −2).

Sistemi i dytë është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} x<-5 \\ x>2 \end{cases}$, i cili është kundërthënës,

Meqenëse nuk ekziston numër real i cili njëkohësisht është më i vogël se −5 dhe më i madh se 2.

Pra, bashkësi e zgjidhjeve të jobarazimit të dhënë janë të gjithë numrat real nga intervali (5, −2).♦

Detyra 4. Zgjidhe jobarazimin:

$$\frac{5x}{2x+1} > 2.$$

Zgjidhje. Jobarazimi i dhënë është ekuivalent me jobarazimin $\frac{5x}{2x+1} - 2 > 0$,

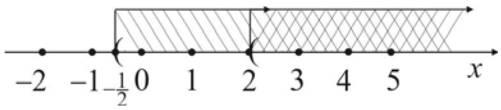
respektivisht jobarazimi $\frac{x-2}{2x+1} > 0$.

Ana e majtë e jobarazimit të fundit është shprehje racionale thyesore, kurse ana e djathtë është e barabartë me zero. Për të qenë thyesa pozitive, është e nevojshme që numëruesi dhe emëruesi të kenë shenja të njëjta.

Prandaj, ndryshorja x duhet t'i plotësoj kushtet

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x+1>0 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x-2<0 \\ 2x+1<0 \end{cases}.$$

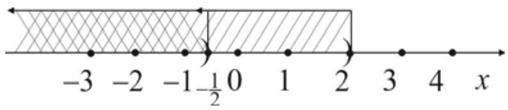
Sistemi i parë është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} x>2 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$, dhe zgjidhje të saja janë të gjithë numrat real më të mëdhenj se 2, meqenëse bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit të parë përmbahet në bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimit të dytë (Vizatimi 4).



Vizatimi 4

Sistemi i dytë është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} x < 2 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, dhe zgjidhje të saja janë

të gjithë numrat real më të vegjël se $-\dfrac{1}{2}$, meqenëse bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit të dytë përmbahet në bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimit të parë (Vizatimi 5).



Vizatimi 5

Prandaj, bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimit të dhënë e përbëjnë të gjithë $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$, gjithë numrat real që shtrihen jashtë intervalit respektivisht të gjithë numra real nga bashkësia $\mathbb{R} \setminus \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$. ♦

Tërësi e jobarazimeve lineare me një të panjohur

Bashkësinë prej dy ose më tepër jobarazimeve lineare me një ndryshore të njëjtë e quajmë **tërësi e jobarazime lineare me një të panjohur**, nëse duhet të caktohen të gjitha vlerat e ndryshores të cilat janë zgjidhje e së paku njërës nga jobarazimet e sistemit.

Zgjidhje e tërësisë së jobarazimeve lineare me një të panjohur është çdo numër real *x* për të cilën së paku njëra nga jobarazimet e sistemit kalon në barazi numerike të vërtetë.

Bashkësia e zgjidhjeve të tërësisë së jobarazimeve lineare me një të panjohur përbëhet prej të gjitha numrave real që janë zgjidhje të tërësisë, gjegjësisht paraqet unionin e bashkësive të zgjidhjeve të secilit jobarazim pjesëmarrës.

Detyra 5. Zgjidhe tërësinë e jobarazive:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+3>9-4x \\ 6x+7<4x-3 \end{array}\right.$$

Zgjidhje. Tërësia e dhënë është ekuivalente me tërësinë $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-5 \end{array}\right.$. Bashkësia e zgjidhjeve të tërësisë përbëhet prej gjitha numrave real $x > 1$ dhe të gjithë numrave real $x < -5$, që në fakt paraqet unionin $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$. ♦

Detyra
Zgjidhni sistemet e jobarazimeve lineare:

1. $\begin{cases} x-1<0 \\ -5x+2>0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -x-5<0 \\ 3x-8>0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x-1>x-5 \\ x+3<3x-2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{2}<x+1 \\ 2x<2(x+1) \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2x-3>x+1 \\ x<2(x-1) \\ \frac{x-1}{2}<3x-5 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}+\frac{x}{2}>\frac{3x}{2}-4 \\ x-\frac{x-2}{3}>3-\frac{x+1}{2} \end{cases}$

Zgjidhni jobarazimet e dhëna:

7. $(x-5)(x+1)>0$ **8.** $\frac{4-x}{2x+3}>0$ **9.** $\frac{x-3}{x+1}>2$

Zgjidhe tërësinë e jobarazimeve:

10. $\left[\begin{array}{l} x-3>9-3x \\ 5x+7<10x-3 \end{array}\right.$ **11.** $\left[\begin{array}{l} 4-x<8-2x \\ 9x+14>4x-6 \end{array}\right.$ **12.** $\left[\begin{array}{l} \frac{2x+3}{2}>\frac{9-4x}{3} \\ \frac{x+7}{4}<\frac{x-3}{3} \end{array}\right.$

13. Arkëtari bankar ka të drejtën për pushim 2 javor gjatë vitit të parë të punësimit dhe nga tre javë pas çdo viti të ardhshëm. Pas sa vitesh punë, numri i javëve të kaluar në pushim do të jetë më i madh se 30?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

Zgjidh barazimet:

1. a) $7(x-3)=4(x+5)-47$ **b)** $16-9(3-u)+4u=15$

2. a) $t(t-3)+4=t^2-2(t+4)$ **b)** $(w-1)(w-2)=(w+3)(w-4)-3(w-1)$

3. a) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)$ **b)** $\frac{x}{3}+\frac{5}{6}=3\left(x+\frac{1}{9}\right)$

4. a) $\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x(x-2)}=\frac{4}{x(x-2)}$ **b)** $\frac{5}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$

5. a) $\frac{4y-3}{y+2}=\frac{7y-2}{y-5}-3$ **b)** $\frac{7}{x-1}=\frac{9}{x-2}-\frac{2}{x-3}$

6. a) $|x+5|-|2x-3|=2$ **b)** $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

7. Numrin 38 zbërtheje në dy mbledhës, ashtu që gjysma e mbledhësit më të vogël është për 4 më e madhe se një e katërta e mbledhësit të madh. Cakto ata mbledhës?

8. Merita është 3 vjet më e vjetër se vëllai i saj. Pas katër viteve shuma e viteve të tyre do të jetë 33. Sa vjeç ka secili nga ata?

9. Nëse brinja e një katrori zmadhohet për $5cm$, syprina e tij do të zmadhohet për $345cm^2$. Njehso brinjën e katrorit?

10. Tre gypa, secila prej tyre, vetë mund ta mbush një basen për 10, 12 dhe 15 orë. Për sa orë e mbushin basenit të tre gypat së bashku?

Zgjidh jobarazimet:

11. a) $\frac{4x-3}{6} \le \frac{x+1}{2}$ **b)** $\frac{7x-8}{3} \ge \frac{1-x}{4}$

12. a) $\frac{1-x}{2} + \frac{3-x}{4} < 2$ **b)** $\frac{x+3}{3} - \frac{3x+1}{2} > 0$

13. Maliku kishte 700 denarë. Cakto numrin maksimal të trileçeve që mund t'i blej në ëmbëltore, nëse një trileçe kushton 55 denarë.

Zgjidh sistemet e jobarazimeve:

14. $\begin{cases} 4-x>0 \\ 2x+5>0 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x+4<0 \\ -2x+1>0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 8-2x<3x-5 \\ 2x+5>0 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} 3(x-2)-5>3+x \\ 2(x-1)-3<2 \\ 4x>3(x-1) \end{cases}$

Zgjidh tërësinë e jobarazimeve:

18. $\left[\begin{array}{l} 9x-27>15+4x \\ 12x+1<14x-13 \end{array}\right.$ **19.** $\left[\begin{array}{l} \frac{5x-1}{4} > \frac{3-2x}{6} \\ \frac{x+5}{3} > \frac{6x+2}{4} \end{array}\right.$

Zgjidh jobarazimet:

20. $(2x-1)(x+3)<0$ **21.** $\frac{2x}{x+1} > \frac{3}{4}$ **22.** $\frac{x^2+2x-5}{x-2} < x$

6. FUNKSIONI LINEAR DHE SISTEMI I BARAZIMEVE LINEARE ME DY TË PANJOHUR

6.1. Funksioni linear

Funksioni i formës $f(x) = ax + b$, ku a b, $\in \mathbb{R}$ quhet **funksion linear**.

Numrat real a dhe b quhen **parametra** (a quhet koeficienti pran argumentit x, kurse b quhet anëtarë i lirë), kurse x quhet **ndryshore e pavarur (argument)**.

Fusha e definicionit D_f e funksionit linear është $\mathbb{R}$. **Bashkësia e vlerave** V_f të funksionit linear është $\mathbb{R}$, nëse $a \neq 0$. Mirëpo, nëse $a = 0$, atëherë fitohet $f(x) = b$ e cila quhet **funksion konstant**. Për funksionin konstant $V_f = \{b\}$.

Shembulli 1. Funksioni $f(x) = x + 1$ është linear me parametra $a = 1$ dhe $b = 1$, fushë të definicionit $D_f = \mathbb{R}$ dhe bashkësi të vlerave $V_f = \mathbb{R}$. ♦

Vlera e ndryshores për të cilën funksioni fiton vlerën zero quhet **zero e funksionit**.

Për funksionin linear $f(x) = ax + b$, ku $a \neq 0$, zero e funksionit është vlera e ndryshores $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Detyra 1. Cakto zeron e funksionit:

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = 5x$

c) $f(x) = 3x + 7$

Zgjidhje. a) $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2$, meqenëse $a = 2$ dhe $b = -4$, b) $x_0 = 0$, c) $x_0 = -\dfrac{7}{3}$. ♦

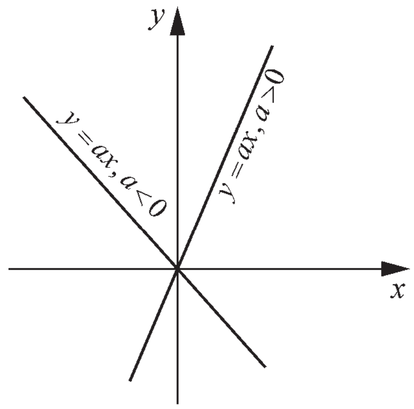
Detyra 2. Cakto vlerën e parametrit a te funksioni $f(x) = ax + 7$, nëse $x_0 = \dfrac{-2}{3}$ është zero e funksionit.

Zgjidhje. Nga $-\dfrac{7}{a} = -\dfrac{2}{3}$ kemi se $a = \dfrac{21}{2}$. ♦

Shpeshherë themi funksioni $y = ax + b$, ndonëse mendojmë në funksionin $f(x) = ax + b$ e përcaktuar me rregullën $y = ax + b$.

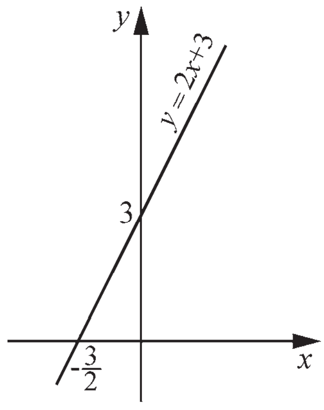
Grafiku i funksionit linear është bashkësia $G_f = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$.
Shikuar nga aspekti gjeometrik, kjo bashkësi (grafiku) paraqet drejtëz e cila e pret boshtin x në pikën $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, kurse e pret boshtin y në pikën $(0,b)$.

Nëse $b = 0$, atëherë grafiku i funksionit $f(x) = ax$ është drejtëz që kalon nëpër origjinën e koordinatave dhe për $a > 0$ kalon nëpër kuadrantin e parë dhe të tretë, kurse për $a < 0$ nëpër kuadrantin e dytë dhe të katërt (vizatimi 1).



Vizatimi 1

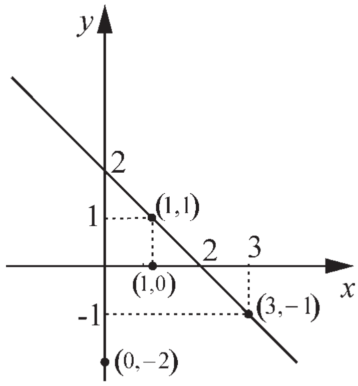
Shembulli 2. Grafiku i funksionit linear $f(x) = 2x + 3$ është bashkësia $G_f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$. Në kontekstin gjeometrik kjo bashkësi pikash paraqet drejtëz të cilën mundemi ta skicojmë në rrafshin koordinativ nëse zgjedhim dy pika nga bashkësia $G_f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3\}$, për shembull $(0, 3)$ dhe $(-1, 1)$ (Vizatimi 2). ♦



Vizatimi 2

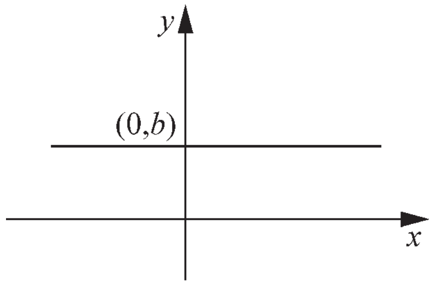
Detyra 3. Vallë pikat $(1, 0)$, $(3, -1)$, $(0, -2)$ dhe $(1, 1)$ i takojnë bashkësisë $G_f = \{(x, y) \mid y = -x + 2\}$?

Zgjidhje. Që të provojmë vallë pikat e dhëna i takojnë grafikut të funksionit $f(x) = -x + 2$ duhet t'i zëvendësojmë koordinatat përkatëse të pikave dhe të shohim a fitojmë barazi të vërteta. Lehtë konstatohet se për pikat $(3, -1)$ dhe $(1, 1)$ fitojmë barazi të vërteta, gjegjësisht i takojnë, kurse pikat $(1, 0)$ dhe $(0, -2)$ nuk i takojnë bashkësisë (Vizatimi 3). ♦



Vizatimi 3

Nëse $a = 0$, atëherë $f(x) = b$, andaj grafiku i funksionit $G_f = \{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ është drejtëz paralele me boshtin x dhe e pret boshtin y në pikën $(0, b)$ (Vizatimi 4).



Vizatimi 4

Detyra

1. Përcakto parametrat a dhe b të funksionit:

a) $f(x) = 6x - 1$ **b)** $f(x) = 1 - 2x$

c) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$ **ç)** $f(x) = \frac{3x-5}{7}$

2. Cakto zeron e funksionit:

a) $f(x) = x - 3$ **b)** $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$

c) $f(x) = \frac{4-x}{9}$ **ç)** $f(x) = \frac{2}{7} - \frac{x+1}{3}$

3. Cakto vlerën e parametrit a të funksionit:

a) $f(x) = (a + 1)x + 3$, nëse $x_0 = -1$ është zero e funksionit

b) $f(x) = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$ nëse grafiku i tij kalon nëpër pikën $M(1,1)$

c) $f(x) = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$, nëse grafiku i tij e pret boshtin y në pikën $N(0,3)$

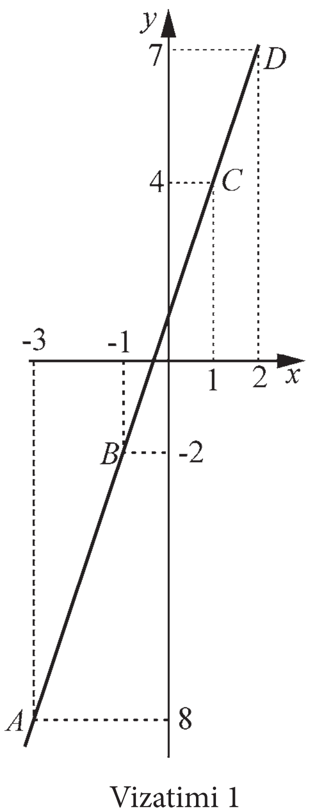
4. Është dhënë funksioni $f\left(x\right)=\dfrac{3x+1}{6}$. Provo cila nga pikat e dhëna

$A\left(1,1\right)$, $B\left(1,0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2},-3\right)$ dhe $D\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ i takojnë funksionit.

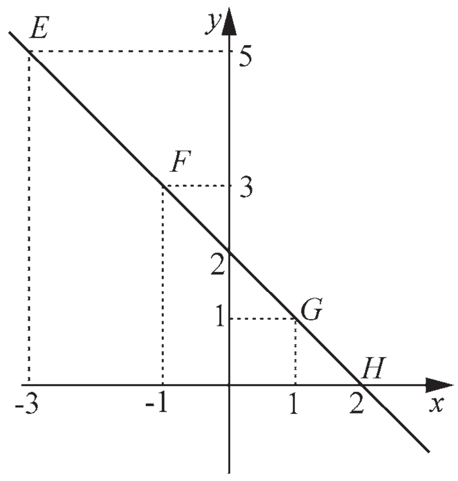
5. Përcakto funksionin $f(x) = ax + b$, nëse për parametrat e tij vlen:
a) $a = 3b$ dhe kalon nëpër pikën $A(1, 1)$
b) $5 - a = 2b$ dhe kalon nëpër origjinën e koordinatave

6.2. Vetit e funksionit linear

Të shqyrtojmë grafikun e funksionit $f(x) = 3x + 1$ (Vizatimi 1). Në sistemin koordinativ janë paraqitur disa pika të cilat i takojnë grafikut të atij funksioni. Nëse i krahasojmë vlerat e koordinatave të pikave $A(-3, -8)$, $B(-1, -2)$, $C(1, 4)$ dhe $D(2, 7)$ vërejmë se kur vlera e koordinatës së parë rritet, vlera përkatëse e koordinatës së dytë po ashtu rritet, d.m.th. nga $-3<-1\Rightarrow-8<-2$, $-1<1\Rightarrow-2<4$ etj. Pra, nëse $x_1 < x_2$, atëherë $f(x_1) < f(x_2)$. Në këtë rast themi se funksioni është **monotonë rritës**.



Vizatimi 1



Vizatimi 2

Kur të bëjmë krahasim të ngjashëm për pikat $E(-3, 5)$, $F(-1, 3)$, $G(1, 1)$ dhe $H(2, 0)$ për funksionin $f(x) = -x + 2$ (Vizatimi 2) vijmë në konkludim se kur vlera e koordinatës së parë zmadhohet, vlera përkatëse e koordinatës së dytë zvogëlohet, d.m.th. prej $-3<-1\Rightarrow 5>3$, $-1<1\Rightarrow 3>1$ etj. Pra nëse $x_1 < x_2$, atëherë $f(x_1) > f(x_2)$. Për këtë rast themi se funksioni është **monotonë zvogëlues**.

Në rast të përgjithshëm vlen:
1. Nëse $a > 0$, atëherë funksioni monotonë rritet
2. Nëse $a < 0$, atëherë funksioni monotonë zvogëlohet

Për funksionin konstant $f(x) = b$ do të themi se s'është as monotonë rritës as monotonë rënës.

Shembulli 1. Funksioni $f(x) = 4x - 11$ monotonë rritet meqenëse $a = 4 > 0$, kurse te funksioni $f(x) = 3 - x$, $a = -1 < 0$, monotonë rënës. ♦

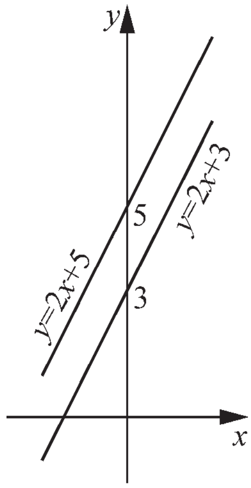
Detyra 1. Cakto vlerën e parametrit m te funksioni:
a) $f(x) = (m - 1)x + 3$, nëse paraqet funksion monotonë rritës.
b) $f(x) = (2m + 1)x + 1$, nëse parqet funksion monotonë rënës.

Zgjidhje. a) $m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$ d.m.th. $m \in (1, \infty)$,

b) $2m+1<0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$ т.е. $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

T'i shqyrtojmë grafikë e funksioneve $f(x) = 2x + 3$ dhe $g(x) = 2x + 5$ (Vizatimi 3). Vërejmë se bëhet fjalë për dy drejtëza paralele. ♦

Në përgjithësim, $f(x) = a_1x + b_1$ dhe $g(x) = a_2x + b_2$ janë paralele nëse dhe vetëm nëse $a_1 = a_2$. Këtë barazi e quajmë edhe **kusht për paralelizëm** të grafikëve të dy funksioneve lineare.



Vizatimi 3

Atëherë, nëse për funksionet $f(x) = a_1x + b_1$ dhe $g(x) = a_2x + b_2$ vlen $a_1 \neq a_2$ rrjedh se grafikët e tyre kanë pikë të përbashkët.

Detyra 2. Për cilën vlerë të a grafikët e tyre janë drejtëza paralele, nëse:
a) $f(x) = 1 - x$ dhe $g(x) = ax + 5$
b) $f(x) = 7x + 1$ dhe $g(x) = (a + 1)x - 7$

Zgjidhje. a) Sipas kushtit duhet $a = -1$,
b) $a + 1 = 7 \Rightarrow a = 6$.♦

Të shqyrtojmë dy funksione lineare $f(x) = x\, a_1 + b_1$ dhe $g(x) = a_2x + b_2$. Çka duhet të vlej për koeficientet e këtyre dy grafikëve ashtu që të dy grafikët të kalojnë nëpër pikën e njëjtë $(0,b)$ d.m.th. të priten në boshtin e ordinatës y?

Me zëvendësim të koordinatave të pikës në funksionet, fitojmë $a_1 \cdot 0 + b_1 = b$ dhe $a_2 \cdot 0 + b_2 = b$ d.m.th. $b_1 = b_2 = b$. Këtë barazi e quajmë edhe **kusht për prerje** të grafikëve të dy funksioneve lineare në boshtin e ordinatës.

Shembulli 2. Drejtëzat $y = 3x + 1$ dhe $y = -2x + 1$ priten në pikën $(0,1)$.♦

Detyra

1.Cilat nga funksionet e dhëna $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+2$, $h(x)=\frac{4}{5}-\frac{7}{8}x$ janë monotonë rritës dhe cilat monotonë rënës?

2.Cakto vlerën e parametrit k te funksioni:
a) $f(x) = (2k + 3)x + 3$, nëse monotonë rritet
b) $f(x) = (-5k + 1)x + 1$, nëse monotonë zvogëlohet.

3.Për cilën vlerë të a drejtëzat e dhëna janë paralele, nëse:
a) $y = 1 - (2a - 3)x$ dhe $y = ax + 5$
b) $y = (a - 7)x + 1$ dhe $y = (a + 1)x - 7$

4.Cakto vallë drejtëzat e dhëna priten në boshtin e ordinatës.
a) $y = 3x + 2$ dhe $y = 2 - 5x$
b) $y=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}x$ dhe $y=\frac{9}{12}-x$
c) $y = -3 - 4x$ dhe $y = -5 - 6x$

5.Për cilën vlerë të parametrit s drejtëzat priten në boshtin e ordinatës, nëse
a) $y=3\frac{1}{4}x+\left(2\frac{1}{7}-2s\right)$ dhe $y=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{7}-s\right)$

b) $y=3x-(7-8s)$ dhe $y=\frac{1}{4}x-(4-9s)$

6.3. Barazimi linear me dy të panjohura

Definicioni. Le të jenë $a, b, c \in \mathbb{R}$. Barazimi $ax + by = c$ quhet barazim linear me dy të panjohura x dhe y .

Kjo quhet **forma e përgjithshme** e barazimit linear me dy të panjohura. Numrat a dhe b quhen **koeficiente pran ndryshoreve**, kurse c quhet **anëtarë i lirë**.

Shembulli 1. Barazime lineare me dy të panjohura janë $5x - 6y = 9$, $3x = 4y$, $y = 1 - x$ etj. ♦

Zgjidhje e barazimit linear me dy të panjohura është çdo çift i renditur i numrave real për të cilën barazimi kalon në barazi numerike të vërtetë (saktë).

Shembulli 2. Zgjidhje të barazimit $2x + 3y = 4$ janë $\left(0,\frac{4}{3}\right),\left(1,\frac{2}{3}\right)$, etj. ♦

Nëse $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, atëherë barazimi me dy të panjohura ka pafund shumë zgjidhje. Faktikisht, për çdo $x \in \mathbb{R}$ çifti i renditur $\left(x, \frac{c-ax}{b}\right)$ është zgjidhje e barazimit $ax + by = c$. Meqenëse $y = \frac{c-ax}{b} = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ rrjedh se bashkësia e zgjidhjeve të barazimit linear me dy të panjohura është drejtëz, ku $-\frac{a}{b}$ quhet koeficient i drejtimit (koeficient këndor).

Nëse njëri prej koeficienteve pran ndryshoreve është i barabartë me zero, për shembull $b = 0$, fitohet $ax = c$ d.m.th. $x = \frac{c}{a}$ dhe bashkësia e zgjidhjeve është

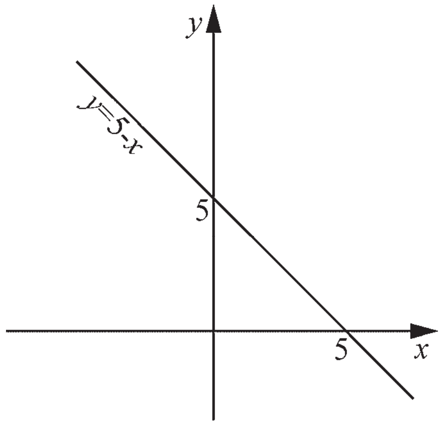
$\left\{\left(\frac{c}{a}, y\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$. Në këtë rast bashkësia e zgjidhjeve të barazimit është drejtëz paralele

me boshtin y. Në mënyrë analoge fitohet drejtëz paralele me boshtin x nëse $a = 0$. Nëse, madje, edhe të dy koeficientet janë të barabartë me zero d.m.th. $a = b = 0$, atëherë për $c = 0$ barazimi është i saktë për çfarëdo numra real x dhe y, dhe nëse $c \neq 0$ barazimi s'ka zgjidhje.

Shembulli 3. Barazimi $x + y = 5$ ka pafund zgjidhje dhe bashkësia e zgjidhjeve është

$$\{(x, 5 - x) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

d.m.th. drejtëza $y = 5 - x$ (Vizatimi 1). ♦



Vizatimi 1

Dy barazime quhen ekuivalente nëse i kanë bashkësitë e zgjidhjeve të barabarta.

Me transformimet vijuese (që quhen transformime ekuivalente) fitohen barazime ekuivalente

1. Njëra anë e barazimit zëvendësohet me shprehje identike të njëjtë
2. Në të dy anët e barazimit shtojmë shprehje të njëjtë
3. Të anët e barazimit shumëzohen ose pjesëtohen me numër të njëjtë të ndryshëm prej zeros.

Shembulli 4. Barazimi $3x + 7y = 2$ është ekuivalent me secilën nga barazimet $3x+7y=2-x+x$, $x+\frac{7}{3}y=\frac{2}{3}$, $3x+7y-7y=2-7y$, $2-3x=7y$. ♦

Detyra 1. Barazimin $\frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x$ sille në formën e përgjithshme me transformime ekuivalente.

Zgjidhje.

$$\frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x \Big/ \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x-2(y-3)-20=30-10x/+10x \Leftrightarrow 15x-2y+6-20=30/+14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x-2y=44. \blacklozenge$$

Detyra

1. Për cilën vlerë të b grafiku i $2x + by = 5$ kalon nëpër pikën $A(-1,3)$?

2. Cakto vlerën e c në barazimin $2x - 7y = c$ ashtu që grafiku i tij të kaloj nëpër pikën $B(1, -1)$.

3. Përmes transformimeve ekuivalente, barazimin sille në formën e përgjithshme $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3$

4. Shkruaj bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{5}-1=0$

5. Në bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit $3(x - y) + 2 = x - 5y + 1$ cakto zgjidhjen për të cilën $x = 2y$.

6.4. Sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura. Metodat e zgjidhjes

Definicioni. Bashkësia prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura (të njëjta) quhet sistem i barazimeve lineare me dy të panjohura.

Shembulli 1. $\begin{cases}3x+2y=1\\ x-4y=-2\end{cases}$ është sistem prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura. ♦

Nëse çdonjëra nga barazimet e sistemit zëvendësohet me një tjetër barazim ekuivalent më të, atëherë fitohet përsëri sistem ekuivalent me të dhënën. Prandaj, çdo sistem i dy barazimeve lineare me dy të panjohura mund të sillet (transformohet) në formën e përgjithshme

$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ ku a_1, a_2, b_1 dhe b_2 janë koeficiente pran ndryshoreve, kurse c_1 dhe c_2 janë anëtarët e lirë.

Detyra 1. Sille në formën e përgjithshme sistemin $\begin{cases}2(x+1)-3=5(y+2)\\ \frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1\end{cases}$.

Zgjidhje. Barazimi i parë është ekuivalent me barazimin $2x - 5y = 11$, kurse i dyti me $5x - 3y = 21$, prandaj sistemi është ekuivalent me $\begin{cases}2x-5y=11\\ 5x-3y=21\end{cases}$. ♦

Që të zgjidhet një sistem barazimesh domethënë të caktohet ajo vlerë e ndryshoreve x dhe y për të cilën të dy barazimet kalojnë në barazi numerike të saktë.

Shembulli 2. Çifti (1, −2) është zgjidhje e sistemit $\begin{cases}x+3y=-5\\ 2x-y=4\end{cases}$, mirëpo nuk është zgjidhje e sistemit $\begin{cases}x+3y=-5\\ 2x+y=4\end{cases}$, meqenëse $2 \cdot 1 - 2 \neq 4$.♦

Kështu që jo çdo sistem ka zgjidhje. Faktikisht sistemi $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ shihet qartë se s'ka zgjidhje, meqenëse shuma e dy numrave nuk mundet njëkohësisht të pranoj dy vlera të ndryshme, derisa sistemi $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ ka pafund shumë zgjidhje $\{(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, meqenëse ekzistojnë pafund shumë numra real shuma e të cilëve është e barabartë me 1.

Metodat për zgjidhjen e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura

Nëse me ndihmën e transformimeve elementare një sistem sillet në formën $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$, atëherë çifti i renditur (p, q) është zgjidhje e sistemit.

Shembulli 3. Sistemi $\begin{cases} 2(x+y)-3=2y+1 \\ 3x-y+1=-2x+5(x+1) \end{cases}$ është ekuivalent me $\begin{cases} 2x=4 \\ -y=4 \end{cases}$ d.m.th. $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ prej nga e qartë se (2,–4) është zgjidhje e sistemit. ♦

Ideja respektivisht synimi kryesore i të gjitha metodave të zgjidhjes është që sistemi të sillet në formën $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$. Do të shqyrtojmë disa nga metodat që më shpesh përdoren për zgjidhje.

1. Metoda grafike

Themi se një sistem është zgjidhur në mënyrë grafike nëse çdonjëri nga barazimet e sistemit është paraqitur si drejtëz, kurse nga pozita reciproke e tyre (grafikëve) do të varet edhe zgjidhja e vet sistemit.

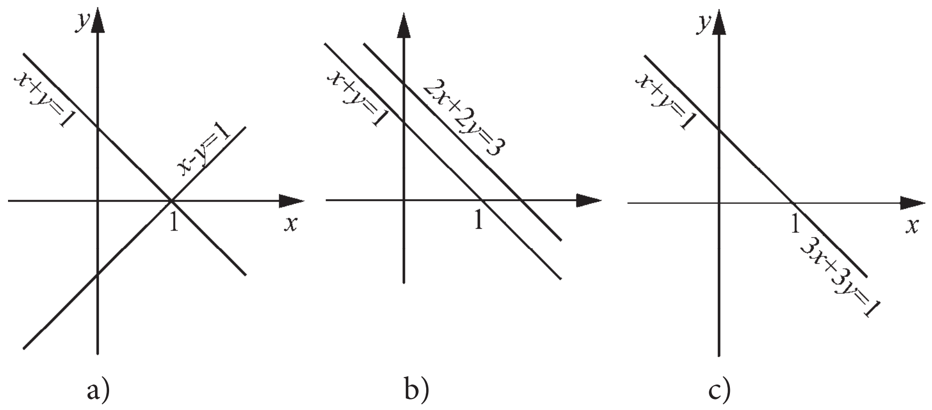
Nëse të dy drejtëzat priten, atëherë pikë-prerja e tyre paraqet zgjidhjen e sistemit (sistemi është i përcaktuar).

Nëse të dy drejtëzat janë paralele, atëherë sistemi nuk ka zgjidhje (sistemi është kundërthënës).

Nëse të dy drejtëzat puthiten, atëherë sistemi ka pafund shumë zgjidhje (sistemi është i papërcaktuar).

Detyra 2. Me metodën grafike zgjidhe sistemin:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$



Prej vizatime qartë shihet zgjidhja e çdo sistemi. ♦

Të analizojmë cilat kushte duhet të plotësohen që të caktojmë vallë sistemi është i përcaktuar, i papërcaktuar ose kundërthënës.

Nëse në sistemin $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ vlen $b_1 = 0$ (ose $b_2 = 0$), atëherë zgjidhja e sistemit është në pikë-prerjen e drejtëzave $x=\frac{c_1}{a_1}$ dhe $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$.

Nëse, $a_1 = 0$ (ose $a_2 = 0$) zgjidhja është në pikë-prerjen e drejtëzave $y=\frac{c_1}{b_1}$ dhe $y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2}$.

Përfundimisht nëse $a_1 = 0 \wedge b_2 = 0$ (ose $a_2 = 0 \wedge b_1 = 0$) zgjidhja është në pikë-prerjen e drejtëzave $y=\frac{c_1}{b_1}$ dhe $x=\frac{c_2}{a_2}$.

Nëse $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ është forma e përgjithshme e sistemit, atëherë secila nga barazimet në sistemin mund të shënohet si $\begin{cases} y=-\frac{a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \\ y=-\frac{a_2}{b_2}x+\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$, kur $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

Nëse $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$, d.m.th. koeficientet përkatëse pran ndryshoreve nuk janë proporcionale, drejtëzat nuk kanë koeficient drejtimi të njëjtë, që domethënë se ato priten. Sistemi ka zgjidhjen e vetme, d.m.th.. është i përcaktuar.

Nëse $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ mund të ndodh $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ ose $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$. Në rastin e parë drejtëzat puthiten, prandaj zgjidhje është secila pikë e drejtëzës (sistemi është i papërcaktuar), kurse në rastin e dytë drejtëzat janë paralele, prandaj sistemi nuk ka zgjidhje (sistem kundërthënës). Pra nëse koeficientet përkatëse dhe anëtarët e lirë janë proporcionale themi se sistemi është ii papërcaktuar (ka pafund shumë zgjidhje).

Detyra 3. Për cilën vlerë të parametrit m sistemi është:

a) $\begin{cases} 2x+my=1 \\ -4x+2y=5 \end{cases}$ kundërthënës

b) $\begin{cases} mx-y=3 \\ 2x-my=2 \end{cases}$ i përcaktuar

c) $\begin{cases} x+3y=5 \\ x+my=m+2 \end{cases}$ i papërcaktuar

Zgjidhje. a) Nga kushtet $b_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ dhe $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$ fitohet $m \neq 0$,

$\frac{2}{m}=-\frac{4}{2}$ dhe $\frac{1}{m}\neq\frac{5}{2}$ d.m.th. $m \neq 0$, $m = -1$ dhe $m\neq\frac{2}{5}$, nëse, $m = 0$ do të fitohet

sistemi $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$. Vlera e kërkuar e m është $m = -1$.

b) Nga $b_2 \neq 0$ dhe $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ fitohet $m \neq 0$ dhe $m\neq\frac{2}{m}$ d.m.th. $m^2 \neq 2 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}$.

Dhe, nëse, $m = 0$ fitohet sistemi $\begin{cases} y=-3 \\ x=1 \end{cases}$.

c) Nga kushtet $b_2 \neq 0$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ dhe $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ dhe nëse $m \neq 0$, $\frac{1}{3}=\frac{1}{m}$ dhe

$\frac{5}{3}=\frac{m+2}{m}$ d.m.th. $m \neq 0$ dhe $m = 3$, dhe, nëse, $m = 0$ kemi $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$. Vlera e kërkuar e m

është $m = 3$. ♦

2. Metoda e zëvendësimit të ndryshores

Nëse në një sistem njëra nga ndryshoret nga njëri barazim shprehet përmes tjetrës, kurse pastaj shprehja e tillë zëvendësohet në barazimin tjetër, do të fitohet sistem që është ekuivalent me të dhënën.

Nëse në sistemin $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ ku $b_1 \neq 0$ $y=\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}$ shprehjen e zëvendësojmë

në barazimin e dytë do të fitojmë $a_2x+b_2\left(\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1}\right)=c_2$. Fitohet sistemi

$\begin{cases} y=\frac{-a_1}{b_1}x+\frac{c_1}{b_1} \\ x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_2b_1-a_1b_2} \end{cases}$ i cili është ekuivalent me të dhënin, ku $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$.

Detyra 4. Zgjidhe sistemin $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-3y=1 \end{cases}$ me metodën e zëvendësimit.

Zgjidhje. Prej barazimit të parë $y = 3 - 2x$, dhe me zëvendësim të kësaj shprehjeje në barazimin e dytë do të fitojmë $x - 3(3 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 7x = 10$ d.m.th. $x = \frac{10}{7}$. ♦

3. Metoda e koeficienteve të kundërt

Nëse së paku njëra nga barazimet shumëzohet me ndonjë numër real të ndryshëm prej zeros dhe ajo i shtohet barazimit tjetër, atëherë fitohet barazim i ri i cili me njërën nga barazimet e sistemit fillestar jep sistem ekuivalent me të dhënën. Mirëpo, numrin që e zgjedhim për të shumëzohet njëri barazim merret i atillë që pas shumëzimit barazimi i rifituar të jetë barazim linear me një të panjohur. Kjo mënyrë e zgjidhjes së sistemit është e njohur si metoda e koeficienteve të kundërt.

Detyra 5. Zgjidhe sistemin $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$ me metodën e koeficienteve të kundërt.

Zgjidhje. Nëse barazimin e dytë e shumëzojmë me 2 dhe e mbledhim me barazimin e parë do të fitojmë barazimin $x + 2y + 2\cdot(5x - y) = 3 + 2 \cdot 4$ d.m.th. $11x = 11$, dhe barazimi i tillë së bashku me cilindo nga barazimet e sistemit të dhënë (fillestar) jep sistem ekuivalent me fillestarin. Pra, $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 11x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$. Prandaj zgjidhje e sistemit është $(1,1)$. ♦

4. Metoda e Kramerit

Shprehja $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} a \cdot d - b \cdot c$ quhet determinantë e rendit të dytë (*a* dhe *d* janë elemente të diagonales kryesore, kurse *a, b* dhe *c* elemente të diagonales dytësore).

Le të jetë $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sistem në formë të përgjithshme. Shprehjet

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \text{ dhe } \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

quhen determinanta të sistemit dhe atë Δ është determinanta kryesore, kurse Δ_x dhe Δ_y janë determinanta që i shoqërohen ndryshoreve përkatëse.

Nëse $\Delta \neq 0$, atëherë sistemi ka zgjidhje të vetme $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ dhe $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Këto formula për zgjidhjen quhen **formula të Kramerit.**

Nëse vlen $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, atëherë sistemi është i papërcaktuar, kurse, nëse $\Delta = 0$ dhe së paku njëra nga determinantat $\Delta_x \neq 0$ ose $\Delta_y \neq 0$, atëherë sistemi është kundërthënës.

Detyra 6. Me ndihmën e metodës së Kramerit, zgjidhni sistemin $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$.

Zgjidhje. $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-3\cdot 1=-2-3=-5$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-10$ dhe $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-15$, prej nga fitohet $x=\frac{-10}{-5}=2$ dhe $y = 3$. ♦

5. Metoda e Gausit

Sistemi është zgjidhur me metodën e Gausit nëse i bëjmë transformimet ekuivalente në vijim:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1 / : a_1, a_1\neq 0\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{b_1}{a_1}y=\frac{c_1}{a_1} / (-a_2)\\ a_2x+b_2y+(-a_2)\cdot\left(x+\frac{b_1}{a_1}y\right)=c_2+(-a_2)\cdot\frac{c_1}{a_1}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{b_1}{a_1}y=\frac{c_1}{a_1}\\ \left(b_2+(-a_2)\frac{b_1}{a_1}\right)y=c_2+(-a_2)\cdot\frac{c_1}{a_1}\end{cases}$$

Në këtë mënyrë fillimisht caktohet vlera e ndryshores y, kurse pastaj e ndryshores x.

Në mënyrë analoge, mund të bëhen këto transformime edhe nëse $b_1 \neq 0$ dhe barazimi i parë nëse pjesëtohet me b_1.

Detyra 7. Zgjidhe sistemin $\begin{cases}5x-7y=1\\ 8x+3y=30\end{cases}$ me metodën e Gausit.

Zgjidhje.

$$\begin{cases}5x-7y=1 / : 5\\ 8x+3y=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{7}{5}y=\frac{1}{5} / \cdot(-8)\\ 8x+3y-8x+\frac{56}{5}y=-\frac{8}{5}+30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{7}{5}y=\frac{1}{5}\\ \frac{71}{5}y=\frac{142}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}.\ ♦$$

6. Metoda e të barazuarit

Kjo metodë bazohet në të barazuarit e shprehjeve të cilat fitohen kur ndryshoren e njëjtë e shprehim prej secilit barazim të sistemit, dhe shprehjet e fituara i barazojmë. Pra, nëse në sistemin $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ e shprehim ndryshoren x (gjatë kushtit $a_1 \neq 0 \wedge a_2 \neq 0$) prej të dy barazimeve dhe shprehjet e fituara i barazojmë, do të fitohet barazia $\frac{c_1-b_1y}{a_1}=\frac{c_2-b_2y}{a_2}$, prej nga fitohet vlera y. Pastaj prej njërës nga barazimet e sistemit gjendet vlera e ndryshores x.

Detyra 8. Zgjidhe sistemin $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ me metodën e të barazuarit.

Zgjidhje. Me të barazuarit e shprehjeve përmes ndryshores x fitohet $\frac{3-2y}{4}=\frac{1+2y}{3}$ prej nga $y=\frac{5}{14}$, a $x=\frac{4}{7}$. ♦

7. Metoda e ndryshores ndihmëse

Sistemet e llojit

$$\begin{cases} \frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1 \\ \frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=c_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{a_1}{x+y}+\frac{b_1}{x-y}=c_1 \\ \frac{a_2}{x+y}+\frac{b_2}{x-y}=c_2 \end{cases}$$

zgjidhen duke sjell ndryshore ndihmëse $\frac{1}{x}=m$ dhe $\frac{1}{y}=n$ (ose $\frac{1}{x+y}=m$ dhe $\frac{1}{x-y}=n$) gjatë kushtit $x \neq 0$ dhe $y \neq 0$ (ose $x + y \neq 0$ dhe $x - y \neq 0$). Atëherë fitohet sistemi $\begin{cases} a_1m+b_1n=c_1 \\ a_2m+b_2n=c_2 \end{cases}$ i cili ka dy ndryshore m dhe n dhe mund të zgjidhet përmes ndonjërës nga mënyrat e mësipërme të mësuara.

Detyra 9. Zgjidhe sistemin: $\begin{cases} \frac{2}{3x-y}+\frac{5}{3x+y}=3 \\ \frac{3}{3x-y}-\frac{10}{3x+y}=1 \end{cases}$.

Zgjidhje. Sistemin e zgjidhim për ato vlera të x dhe y për të cilat $3x - y \neq 0$ dhe $3x + y \neq 0$. Marrim zëvendësimin $\frac{1}{3x-y}=m$ dhe $\frac{1}{3x+y}=n$.

Atëherë fitojmë sistemin $\begin{cases} 2m+5n=3 \\ 3m-10n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=\frac{1}{5} \end{cases}$. Nëse i kthehemi zëvendësimit,

do të kemi $\frac{1}{3x-y}=1 \Rightarrow 3x-y=1$ dhe $\frac{1}{3x+y}=\frac{1}{5} \Rightarrow 3x+y=5$. Pra fitojmë sistemin

$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Kjo paraqet zgjidhjen pasi që është plotësuar kushti $3x - y \neq 0$ dhe $3x + y \neq 0$. ♦

Detyra

1. Sistemet e dhëna të zgjidhen përmes metodës grafike

a) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

2. Sistemet e dhëna të zgjidhen përmes metodës së zëvendësimit

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

3. Sistemet e dhëna të zgjidhen përmes metodës së koeficienteve të kundërt

a) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-10y=1 \end{cases}$

4. Sistemet e dhëna të zgjidhen përmes formulave të Kramerit

a) $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

5. Sistemet e dhëna të zgjidhen përmes metodës së Gausit

a) $\begin{cases} x-3y=4 \\ x-y=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x-y=10 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

6. Sistemet e dhëna të zgjidhen me metodën e të barazuarit

a) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+2y=26 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x-5y=8 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$

6.5. Zbatimi i sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura

Numër i madh i problemeve të përditshmërisë, teknikës dhe shkencës në përgjithësi, bazohen në të zgjidhurit e barazimeve dhe sistemeve të barazimeve.

Shembulli 1. Në një test nga matematika ka 10 detyra. Për çdo detyrë saktë të zgjidhur fiton 3 pikë, kurse për çdo detyrë gabim të zgjidhur humb 2 pikë. Sa detyra ka zgjidhur saktë nxënësi i cili ka fituar gjithsej 15 pikë, nëse dihet se nxënësi i ka zgjidhur të gjitha detyrat?

Nëse numrin e detyrave saktë të zgjidhura e shënojmë me x, kurse ato gabim i shënojmë me y, atëherë $3x - 2y = 15$ është numri i pikëve që ka fituar nxënësi. Dimë se ky barazim i fituar me dy të panjohura ka pafund zgjidhje. Nëse marrim parasysh faktin se testi ka gjithsej 10 detyra, dhe se nxënësi i ka zgjidhur të gjitha, atëherë duhet të marrim edhe kushtin $x + y = 10$. Edhe ky barazim ka pafund shumë zgjidhje. Prandaj, ne kërkojmë ato vlera të x dhe y për të cilën të dy barazimet e fituara kalojnë në barazi numerike të vërteta (të sakta) d.m.th. e zgjidhim sistemin

$\begin{cases} 3x-2y=15 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$. Nxënësi saktë ka zgjidhur vetëm 7 detyra. ♦

Shembulli 2. Kemi dy enë të cilat zënë përkatësisht 144 litra dhe 100 litra. Në të dy enët ka pasur sasi të caktuar lëngu. Nëse lëngu i enës më të vogël derdhet në enën e madhe dhe e mbushim përplot, atëherë në enën e vogël ngel vetëm $\frac{1}{5}$ e sasisë që ka qenë në fillim. Mirëpo, nëse lëngun e enës së madhe e derdhim në enën e vogël dhe e mbushin përplot, atëherë në enën e madhe ngel $\frac{7}{12}$ e sasisë që ka qenë në fillim. Sa ka qenë sasia e lëngut në secilën enë para derdhjes?

Zgjidhje. T'i shënojmë sasitë e kërkuara me x dhe y . Atëherë

$$\begin{cases} x+\dfrac{4}{5}y=144 \\ y+\dfrac{5}{12}x=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=96 \\ y=60 \end{cases}. \ \blacklozenge$$

Shembulli 3. Dy gypa mbushin një basen. Gypi i parë punon 7 orë, kurse gypi i dytë 4 orë. Për këtë kohë, gypat kanë mbushur $\frac{5}{9}$ e basenit. Pastaj 4 orët e ardhshme, të dy gypat punojnë njëkohësisht dhe është konstatuar ka ngelur $\frac{1}{18}$ e basenit pa u mbushur. Për sa kohë secili gyp, duke punuar vetëm, mund ta mbushë basenin?

Zgjidhje. Nëse koha që është e nevojshme njëri gyp vet të mbush basenin shënohet me x, kurse e dyta me y, atëherë për një orë gypi i parë do të mbush $\frac{1}{x}$ pjesë të basenit, kurse i dyti $\frac{1}{y}$ pjesë të basenit. Nga fakti se gypi i parë ka punuar 7 orë, ai ka mbushur $\frac{7}{x}$ pjesë të basenit, kurse i dyti $\frac{4}{y}$ pjesë të basenit, prandaj së bashku $\frac{7}{x}+\frac{4}{y}=\frac{5}{9}$. Koha prej 4 orësh kur punojnë së bashku është $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}$ dhe më në fund sistemi që i përgjigjet detyrës është:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{5}{9} \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}=1-\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{5}{9} \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{7}{18} \end{cases}.$$

Nëse marrim zëvendësimin $\frac{1}{x}=m$ dhe $\frac{1}{y}=n$, atëherë fitohet sistemi x y

$$\begin{cases} 7m+4n=\dfrac{5}{9} \\ 4m+4n=\dfrac{7}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{1}{18} \\ n=\dfrac{3}{72} \end{cases}.$$

Për vlerat e x dhe y kemi $x=18, y=\frac{72}{3}=24$. $\blacklozenge$

Detyra

1. Një grup nxënësish kanë vendosur të grumbullojnë mjete dhe të blejnë një numër të caktuar të fidanëve. Nëse secili prej tyre jep nga 150 denarë, atëherë iu mungojnë edhe 170 denarë, mirëpo, nëse japin secili nga 180 denarë, do të ketë tepricë prej 100 denarë. Sa nxënës numëron grupi dhe sa denarë janë të nevojshme për t'i blerë fidanët?

2. Shuma e dy numrave është 130, kurse ndryshimi i tyre 22 . Cakto këta numra?

3. Shuma e dy numrave është 20, kurse ndryshimi 4. Cakto këta numra?

4. Këndi pran majës së trekëndëshit barakrahës është katër herë më i vogël se këndi i bazës. Cakto madhësinë e këndeve të trekëndëshit.

5. Gjatësia e drejtkëndëshit është dy herë më e madhe se gjerësia. Njehso gjatësinë dhe gjerësinë e drejtkëndëshit nëse perimetri i tij është $72cm$?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Cakto zeron e funksionit:
a) $f(x) = 3x - 3$ **b)** $f(x) = 2x + 11$
c) $f(x)=\frac{4-5x}{9}$ **ç)** $f(x)=\frac{x+1}{3}+\frac{2x+3}{2}$

2. Cakto vlerën e parametrit a te funksioni:
a) $f(x) = (a + 3)x + 1$, nëse $x_0 = -2$ është zero e funksionit
b) $f(x)=\frac{a-3}{2}x-\frac{1+(a+1)x}{3}$, nëse grafiku i tij kalon nëpër pikën $M(1,0)$
c) $f(x)=\frac{1}{a+3}x+\frac{3}{a+2}$, nëse grafiku i tij e pret boshtin x në pikën $N(1,0)$

3. Cakto funksionin $f(x) = ax + b$, nëse për parametrat e tij vlen:
a) $a = 3b$ dhe kalon nëpër pikën $A(2,1)$
b) $3 - a = 2b$ dhe kalon nëpër origjinën e koordinatave

4. Cakto vlerën e parametrit k te funksioni:
a) $f(x) = (3k + 1)x - 2$, nëse funksioni monotonë rritet
b) $f(x) = (-5k - 1)x + 3$, nëse funksioni monotonë zvogëlohet.

5. Për cilën vlerë të parametrit a drejtëzat janë paralele, nëse:
a) $y = 1 - (12a - 3)x$ dhe $y = (a + 1)x + 5$
b) $y = (2a - 7)x + 1$ dhe $y = (3a + 1)x - 7$

6. Për cilën vlerë të parametrit m drejtëzat priten në boshtin e ordinatës, nëse
a) $y=3\frac{1}{4}x+\left(2\frac{1}{7}-3m\right)$ dhe $y=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{7}+m\right)$
b) $y=3x-(7-m)$ dhe $y=\frac{1}{4}x+(4-2m)$

7. Për cilën vlerë të b grafiku i $2x + by = 5$ kalon nëpër pikën $A(-1,5)$?

8. Cakto vlerën e c në barazimin $2x - 8y = c$ ashtu që grafiku i tij kalon nëpër pikën $B(1,-1)$.

9. Përmes transformimeve ekuivalente, barazimin e dhënë $\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{4}=3$ sille në formë të përgjithshme.

10. Shkruaj bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit $\frac{x+5}{3}-\frac{y+3}{5}-1=0$

11. Nga bashkësia e zgjidhjeve të barazimit $5(x - y) + 2 = 3x - 2y + 1$ cakto atë zgjidhje për të cilën $x = 2y$.

12. Sistemet e dhëna të zgjidhen me metodën grafike

a) $\begin{cases} 5x+y=7 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$

13. Sistemet e dhëna të zgjidhen me metodën e zëvendësimit

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-3y=-5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-2y=2 \\ 3x-y=10 \end{cases}$

14. Sistemet e dhëna të zgjidhen me metodën e koeficienteve të kundërt

a) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

15. Sistemet e dhëna të zgjidhen me formulat e Kramerit

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x+2y=-5 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

16. Sistemet e dhëna të zgjidhen me metodën e Gausit

a) $\begin{cases} x-3y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x-y=10 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

17. Sistemet e dhëna të zgjidhen me metodën e të barazuarit

a) $\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 5x+y=16 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x-5y=8 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$

18. Katër shokë duan të blejnë një top futbolli. I pari dha gjysmën e parave, i dyti dha një të tretën e parave të tre shokëve të ngelur, i treti dha një të katërtën e parave të tre shokëve të ngelur dhe i katërti dha 50 denarë. Sa denarë kushton topi?

19. Nëse sasisë prej $8l$ ujë të nxehtë i shtojmë $2l$ ujë më pak të nxehtë, fitohet ujë me temperaturë $66°C$, dhe nëse sasisë prej $7l$ ujë të nxehtë i shtojmë $3l$ ujë më pak të nxehtë fitohet ujë me temperaturë $59°C$. Sa është temperatura e ujit të nxehtë dhe sa e ujit më pak të nxehtë?

20. Zgjidhe sistemin $\begin{cases} (2x-3):(y+5)=3:4 \\ (5x-4):(3y+1)=5:2 \end{cases}$.

7. FIGURAT GJEOMETRIKE NË RRAFSH

7.1. Konceptet themelore dhe të nxjerra

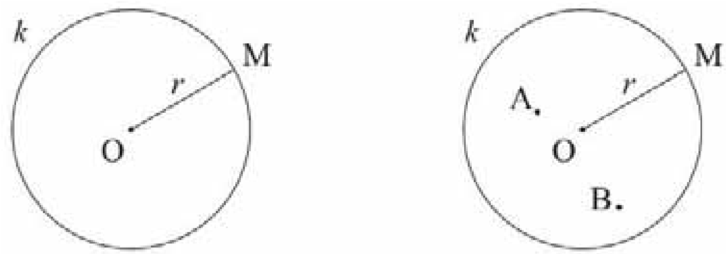
Gjatë shkollimit të deritanishëm u njoftuat me më tepër koncepte (kuptime) nga gjeometria: pika, drejtëza, rrafshi, vija rrethore, rrethi, këndi etj. Disa nga këto koncepte definohen me fjali të caktuara, kurse disa koncepte nuk definohen porse shpjegohen vetëm përmes shembujve.

Fjalia, me të cilën shprehet kuptimi dhe përmbajtja e konceptit të caktuar, quhet **definicioni** i atij koncepti.

Shembulli 1. Konceptet vijë rrethore dhe rreth i shprehim me definicione:

„Bashkësia e të gjitha pikave në rrafsh, largesa e të cilave nga një pikë e dhënë *O* në atë rrafsh është e barabartë me *r*, quhet **vijë rrethore** me qendër *O* dhe rreze r dhe shënohet me *k* (*O*, *r*)" (vizatimi 1a).

„Bashkësia e të gjitha pikave në rrafsh, largësia e të cilave nga një pikë e saj *O* në atë rrafsh është më e vogël ose e barabartë me,*r* quhet **rreth** me qendër *O* dhe rreze *r* dhe shënohet me *K* (*O*, *r*)" (vizatimi 1b). ♦



Vizatimi 1a Vizatimi 1b

Shohim se definicionet për koncepte vijë rrethore dhe rreth përdorim koncepte tjera: bashkësi, pika, rrafsh dhe largesa, kinse tanimë të njohura. Kjo ndodh gjithmonë gjatë definimit të shumë koncepteve. Prandaj, definuari i një koncepti bazohet në atë që kuptimi dhe përmbajtja e saj thuhet përmes koncepteve tjera „tanimë të njohura". Mirëpo, ato koncepte „tanimë të njohura" po ashtu duhet të definohen me ndihmën e disa koncepteve të treta paraprakisht të njohura, etj.

Është evidente se, ky zinxhir i të definuari të një koncepti me ndihmën e një koncepti tjetër doemos do të ndërpritet, kur të arrijmë në ndonjë koncept i cili s'mund të definohet, meqenëse koncepte„tanimë të njohura" më të thjeshta s'kemi. Prandaj konceptet e këtilla jemi të detyrueshëm t'i marrim pa definicion dhe mënyra e vetme për t'i shpjeguar ngel ajo përmes sjelljes së shembujve. Konceptet që i pranojmë pa definicion quhen **nisma** ose **koncepte themelore**, kurse konceptet tjera quhen **koncepte të nxjerra**.

Gjatë ndërtimit të **gjeometrisë në rrafsh** nisemi nga konceptet themelore: **pika**, **drejtëza**, **rrafshi dhe largesa**, kurse pastaj duke i shfrytëzuar këto si dhe koncepte tjera matematikore, definohen koncepte tjera gjeometrike.

Shikuam se konceptet vijë rrethore dhe rreth i definojmë si bashkësi pikash në rrafsh, të cilat kanë veti saktësisht të përcaktuar. Në gjeometri, secila bashkësi pikash nga rrafshi quhet **figurë gjeometrike në rrafsh**. Prandaj do të themi vetëm *figura gjeometrike,* në vend të figurave gjeometrike në rrafsh. Pra, çdo vijë rrethore apo rreth është figurë gjeometrike.

Konceptet themelore pika, drejtëza dhe rrafshi janë figura gjeometrike, të ashtuquajtura figura gjeometrike themelore. Rrafshi i shënuar me Σ është bashkësi elementet e së cilës janë pikat të cilat do t'i shënojmë me shkronjat *A, B, C, D* .... Çdo drejtëz paraqet bashkësi pikash dhe e cila është nënbashkësi e rrafshit. Drejtëzat i shënojmë me shkronjat *a, b, c, p, q, r* ... Çdo pikë mund të llogaritet si figurë rrafshore – bashkësi një elementësh.

Gjatë definimit të cilësdo figurë gjeometrike veprojmë njëjtë sikur që definuam vijën rrethore dhe rrethin – i cekim vetitë e pikave nga të cilat përbëhet figura përkatëse.

Nëse një pikë i takon bashkësisë së pikave të drejtëzës së dhënë, themi se **pika shtrihen në drejtëz**, dhe po ashtu **drejtëza kalon nëpër pikën**. Nëse një pikë *A* shtrihet në drejtëzën *a*, ajo simbolikisht shënohet me $A \in a$. Pikat që shtrihen në të njëjtën drejtëz quhen **pika kolineare**, kurse drejtëzat që kalojnë nëpër një pikë të njëjtë quhen **drejtëza konkurrente**. Katër konceptet e mësipërme quhen koncepte të nxjerra.

Detyra

1. Një i huaj e pyeti Ademin, çfarë domethënie ka fjala „moçal". Ademi iu përgjigj: „Moçali është liqe i shumë i vogël". I huaji, meqenëse nuk dinte çfarë domethënie ka fjala liqeni, pyeti: „A çfarë është ajo liqe". Ademi iu përgjigj: „Liqe – ajo është një moçal i madh". Vallë i huaji ka mundur të kuptoj nga përgjigjet e Ademit, çfarë domethënie ka fjala „moçal"? Shpjegimet e tilla të dhëna për moçal dhe liqe themi se shpien në „rrotullimin në rreth".

2. Në pyetjen: „Çka është katror?", Merita u përgjigj: „Katrori është drejtkëndësh me brinjë të puthitshme". Për çfarë përgjigje të pyetjes: „A çfarë është drejtkëndëshi?", do të arrijmë te „rrotullimi në rreth"?

3. Përmend shembuj tjerë, gjatë së cilave arrihet deri te rrotullimi në rreth.

4. Emërto disa figura të njohura gjeometrike.

7.2. Aksiomatika e gjeometrisë në rrafsh

<u>Pohime themelore dhe të nxjerra</u>

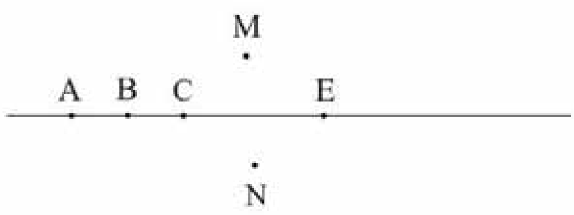
Gjatë ndërtimit të pjesëve përkatëse të matematikës, gjegjësisht të modeleve matematikore nisemi nga konceptet themelore, nga të cilat pastaj nxirren koncepte të reja. Për të gjitha ato koncepte potencohen vetitë dhe pohimet e caktuara të tyre në vërtetësinë e të cilave bindemi përmes rrugës së provës, skicave, kryerjes së matjeve të caktuara ose në bazë të gjykimit logjik duke shfrytëzuar veti dhe pohime vërtetësia paraprakisht të konstatuara. Ngjashëm sikur edhe gjatë sjelljes së koncepteve, doemos do të nisim nga disa veti dhe pohime fillestare (nismëtare) vërtetësia e së cilave nuk mund të vërtetohet duke shfrytëzuar veti dhe pohime tjera më të thjeshta. Për vetitë dhe pohimet e tilla, ne supozojmë se janë të vërteta dhe ato quhen **vetit themelore** ose **pohime**, respektivisht **aksioma**.

Vetitë dhe pohimet vërtetësia e së cilave dëshmohet përmes gjykimit logjik të argumentuar, gjatë së cilës shfrytëzojmë veti dhe pohime vërtetësia e të cilave është paraprakisht e dëshmuar, quhen **veti të nxjerra** ose **pohime**, respektivisht **teorema**. Analiza për konstatimin e vërtetësisë të teoremës së caktuar quhet **vërtetim**.

Pozita reciproke e pikës dhe drejtëzës

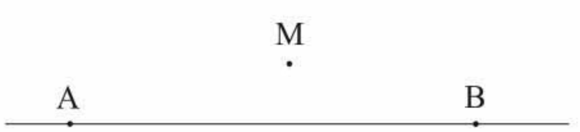
Gjatë ndërtimit të gjeometrisë në rrafsh, përskaj koncepteve themelore supozohet se për to janë të vërteta disa aksioma caktuara, të shënuara me $\mathbf{A}_к$.

$\mathbf{A}_1$. Në çdo drejtëz shtrihen pafund shumë pika (vizatimi 2).



Vizatimi 2

$\mathbf{A}_2$. Ekzistojnë së paku tri pika që nuk shtrihen në të njëjtën drejtëz (vizatimi 3).



Vizatimi 3

$\mathbf{A}_3$**.** nëpër çfarëdo dy pika të dhëna kalon saktësisht një drejtëz e vetme (vizatimi 3).

Fjala „një e vetme“ ka të njëjtën domethënie sikur „saktësisht një“, ose „një dhe vetëm një“.

Nga supozimet themelore, rrjedh se dy pika A dhe B ose janë të **ndryshme** (shënojmë $A \neq B$) ose **puthiten** ($A \equiv B$). Shënimi $A \equiv B$ tregon se A dhe B janë dy simbole të ndryshme për të njëjtën pikë.

Pozita reciproke e dy drejtëzave

Si mund të jetë pozita reciproke e dy drejtëzave të ndryshme? Për këtë pyetje nisemi nga një veti e nxjerrë, respektivisht teoremës në vijim.

Teorema 1. Dy drejtëza të ndryshme s'mund të kenë më tepër se një pikë të përbashkët.

Vërtetë, nëse supozojmë se dy drejtëza të ndryshme a dhe b kanë dy pika të ndryshme të përbashkëta M dhe N, atëherë nëpër këto dy pika do kalonin jo një, porse dy drejtëza të ndryshme. Mirëpo, kjo është në kundërshtim me aksiomën A_3. Prandaj, drejtëzat e ndryshme *a* dhe *b* nuk mund të kenë më tepër se një pikë të përbashkët.

Definicioni 1. Për dy drejtëza, të cilat kanë vetëm një pikë të përbashkët, themi se ato **priten**. Për dy drejtëza të ndryshme *a* dhe *c* që nuk kanë pika të përbashkëta, themi se janë **paralele** dhe shënojmë $a \parallel c$. Për dy drejtëza themi se **puthiten** (**mbulojnë njëra-tjetrën**), nëse ato janë të barabarta si bashkësi pikash.

Prej Teoremës 1 dhe koncepteve tjera të nxjerra përkatëse, rrjedh se dy drejtëza ose puthiten ose priten ose janë paralele.

A_4. Nëpër pikën *A* që nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë *a*, kalon drejtëza e vetme *c* e cila është paralele me drejtëzën e dhënë *a*.

Largesa

Përskaj koncepteve themelore pika, drejtëza dhe rrafshi në të ndërtuarit e një gjeometrie në rrafsh përdoret edhe një koncept themelor, respektivisht **largesa**.

Largesa ndërmjet dy pikave *A* dhe *B* shënohet me $\overline{AB}$. Për largesën si koncept, supozohen këto vetit themelore.

A_5. Largesa nga një pikë *A* deri te pika tjetër *B* është numër pozitiv ose zero, respektivisht $\overline{AB} \geq 0$. Është numër pozitiv, nëse pikat janë të ndryshme, dhe është zero nëse ato puthiten; respektivisht

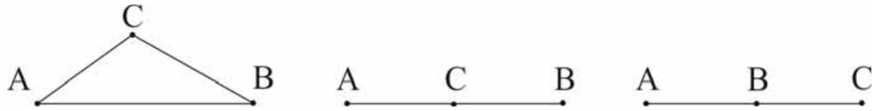
nëse $A \neq B$, atëherë $\overline{AB} > 0$, dhe nëse $A = B$, atëherë $\overline{AB} = 0$.

A_6. Për çdo dy pika *A* dhe *B*, largesa prej *A* deri në *B* është e barabartë me largesën prej *B* deri në *A*, respektivisht $\overline{AB} = \overline{BA}$.

A_7. Për çfarëdo tre pika *A*, *B* dhe *C*, largesa prej *A* deri *C* nuk është më e madhe se shuma e largesave $\overline{AB}$ dhe $\overline{BC}$, respektivisht

$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$.

Në vizatimin 3a dhe vizatimin 3b kemi se $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, dhe në vizatimin 3c kemi se $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.



Vizatimi 3a Vizatimi 3b Vizatimi 3c

Duke shfrytëzuar A_7, do ta vërtetojmë teoremën në vijim.

Teorema 2 . Për çfarëdo tre pika të ndryshme *A*, *B* dhe *C*, largesa $\overline{AC}$ është më e madhe ose e barabartë me ndryshimin e largesave $\overline{AB}$ dhe $\overline{BC}$, respektivisht gjatë kushtit $\overline{AB} > \overline{BC}$ vlen jobarazia

$$\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}.$$

Me të vërtetë, në pajtim me aksiomën A_7 kemi $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$. Nëse të dy anët e jobarazisë i zvogëlojmë për $\overline{BC}$, fitojmë $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{BC}$, respektivisht $\overline{AB} - \overline{BC} \leq \overline{AC}$, që domethënë se $\overline{AC} \geq \overline{AB} - \overline{BC}$.

Segmenti, gjysmërrafshi dhe gjysmëdrejtëza

Me ndihmën e konceptit largesë definojmë konceptin e nxjerrë vijues.

Definicioni 2. Për një pikë *S* themi se **shtrihet ndërmjet** dy pikave *A* dhe *B*, nëse ato tre pika janë të ndryshme dhe vlen barazia

$$\overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AB}.$$

Me ndihmën e konceptit *shtrihet ndërmjet* do t'i shprehim këto dy aksioma.

A_8. Nëse një pikë shtrihet ndërmjet dy pikave tjera, atëherë këto tre pika janë kolineare. Për çfarëdo tre pika kolineare, saktësisht njëra nga këto shtrihet ndërmjet dy tjerave.

Definicioni 3. Bashkësia prej dy pikave të ndryshme *A* dhe *B* dhe të gjitha pikave që shtrihen ndërmjet tyre, quhet **segment** dhe shënohet me [*AB*].

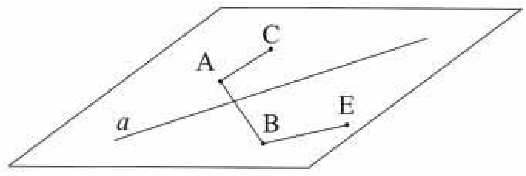
Pikat *A* dhe *B* quhen **pika të skajshme**, kurse secila pikë që shtrihet ndërmjet tyre, quhet **pikë e brendshme** e segmentit [*AB*].

Dy segmente ose segment dhe drejtëz që kanë saktësisht një pikë të përbashkët, themi se **priten**.

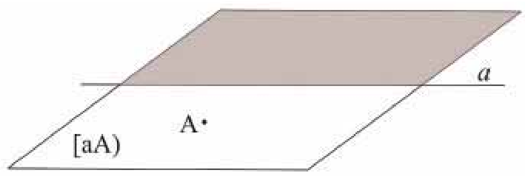
A_9. Për çdo drejtëz *a*, bashkësia e pikave nga rrafshi është e barabartë me $M_1 \cup a \cup M_2$, ku M_1 dhe M_2 janë nënbashkësi disjunkte nga rrafshi të cilat nuk kanë pika të përbashkëta me drejtëzën *a* dhe për të cilat është e saktë se për cilat do pika *A*, *C* nga M_1 dhe *B*, *E* nga M_2, segmenti [*AB*] e pret, kurse segmentet [*AC*] dhe [*BE*] nuk e presin drejtëzën *AB*.

Definicioni 4. Secila nga bashkësitë, gjegjësisht pjesëve nga rrafshi $M_1 \cup a$ dhe $a \cup M_2$ quhet **gjysmërrafsh me drejtëz kufitare** (**kufi ose teh**) *a*. (vizatimi 4.)

Prandaj, çdo drejtëz *a* e ndanë rrafshin në saktësisht dy gjysmërrafshe me drejtëz kufitare *a*. Secila nga këto gjysmërrafshe është plotësisht e përcaktuar me drejtëzën *a* dhe një pikë A e cila nuk shtrihet në *a*. (vizatimi 5.) Gjysmërrafshin e tillë e shënojmë me [*aA*).



Vizatimi 4



Vizatimi 5

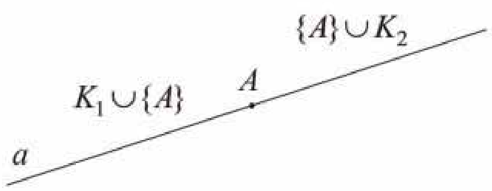
Vetia në vijim është analogji e aksiomës A_9.

Teorema 3. Për secilën pikë A të një drejtëze a, bashkësia e pikave të drejtëzës është e barabartë me $K_1 \cup \{\} A \cup K_2$, ku K_1 dhe K_2 janë nënbashkësi disjunkte nga drejtëza që nuk e përmbajnë pikën A dhe për të cilat është e saktë se për çfarëdo pika B, E nga K_1 dhe C, T nga K_2, segmenti $[BC]$ e përmban, derisa segmentet $[BE]$ dhe $[CT]$ nuk e përmbajnë pikën A.

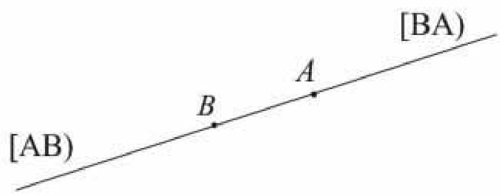
Me të vërtetë, nga fakti se në rrafshin ekzistojnë tre pika jokolineare, rrjedh se nëpër pikën A kalon drejtëza c e cila e ndanë rrafshin në dy gjysmërrafshe. Pikat B dhe C gjenden në gjysmërrafshe të ndryshme, prandaj segmenti $[BC]$ e pret drejtëzën a në pikën A, dhe prandaj $[BC]$ e përmban A. Në anën tjetër, pikat B, E dhe C, T i takojnë gjysmërrafshit të njëjtë, prandaj nuk e presin drejtëzën a, prej ku rrjedh se nuk e përmbajnë A.

Definicioni 5. Secila nga bashkësitë, $K_1 \cup \{A\}$dhe $\{A\} \cup K_2$ nga Teorema 3, quhet **gjysmëdrejtëz me fillim në pikën** A. Këto gjysmëdrejtëza quhen gjysmëdrejtëza **përbërëse** (**të kundërta**). (vizatimi 6.)

Sipas kësaj secila pikë A që shtrihen në drejtëzën e dhënë, e ndanë atë drejtëz në dy gjysmëdrejtëza me fillim të përbashkët A. Secila nga këto gjysmëdrejtëza është plotësisht e përcaktuar me pikën A dhe një pikë tjetër të drejtëzës të ndryshme nga pika A. Nëse B është pika nga gjysmëdrejtëza $K_1 \cup \{ A \}$, atëherë ajo shënohet me $[AB)$. Ngjashëm, shënohet gjysmëdrejtëza $\{ A \} \cup K_2$. Ngjashëm, ashtu siç dy pika të ndryshme përcaktojnë drejtëz të vetme, ashtu dy pika të ndryshme, po ashtu dy pika të ndryshme A dhe B përcaktojnë saktësisht dy gjysmëdrejtëza $[AB)$ dhe $[BA)$ (vizatimi 7.)



Vizatimi 6



Vizatimi 7

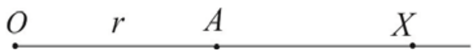
Nga definicionet për konceptet segment dhe gjysmëdrejtëz, rrjedh se për çdo dy pika të ndryshme A dhe B, segmenti $[AB]$ është i barabartë me prerjen e gjysmëdrejtëzave $[AB)$ dhe $[BA)$.

Aksioma e fundit në ndërtimin e gjeometrisë në rrafsh është kjo:

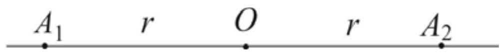
A_{10}. Në secilën gjysmëdrejtëz $[OX)$ ekziston një pikë e vetme A e cila gjendet në largësi të dhënë r prej fillimit të saj O (vizatimi 8).

Nga këtu, rrjedh Teorema.

Teorema 4. Në drejtëzën e dhënë p ekzistojnë saktë dy pika A_1 dhe A_2, të cilat gjenden në largësi të dhënë r prej pikës O të asaj drejtëze (vizatimi 9).

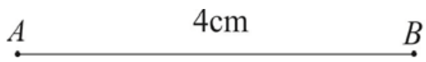


Vizatimi 8

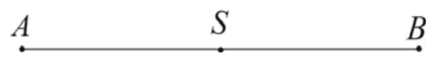


Vizatimi 9

Largesa $\overline{AB}$ ndërmjet pikave të skajshme të segmentit $[AB]$ quhet **gjatësi e segmentit** $[AB]$. Gjatësitë e segmenteve i caktojmë me matje. Për këtë qëllim zgjedhim ndonjë segment $[MN]$, për të cilën marrim, si për shembull, se ka gjatësinë $1(cm)$, respektivisht $\overline{\mathrm{MN}} = 1(cm)$. Kështu në vizatimin 10 gjatësia e segmentit $[AB]$ është $4(cm)$, respektivisht $\overline{AB} = 4(cm)$.



Vizatimi 10



Vizatimi 11

Pika e brendshme S e një segmenti, largesat e së cilës deri në pikat e skajshme të saja janë të barabarta, quhet **pikë e mesme** ose **mesi** i atij segmenti (vizatimi 11).

Definicioni 6. Për dy segmente që kanë gjatësi të barabarta quhen segmente të **barabarta** ose të **puthitshme**.

Dy segmente me gjatësi a dhe c mund të krahasohen (përmes gjatësive të tyre) gjatës së cilës e saktë është vetëm njëra nga këto tre mundësi: $a = c$, $a < c$ ose $a > c$.

Aksioma A_{10} mundëson të vizatuarit e segmenteve me gjatësi të barabartë vetëm me ndihmën e vizores dhe kompasit, si dhe kryerje të operacioneve grafike me segmente. Të vizatuarit e një figure të dhënë gjeometrike vetëm me ndihmën e vizores dhe kompasit quhet **konstruksion** i asaj figure.

Detyra

1. Cilat pika në vizatimin 2 i takojnë drejtëzës p, kurse cilat nuk i takojnë? Shëno simbolikisht.

2. Sa vija të lakuara mund të tërhiqen nëpër dy pika A dhe B? A sa drejtëza kalojnë nëpër ato dy pika?

3. Sa drejtëza kalojnë nëpër një pikë të dhënë?

4. A është e saktë se për secilën pikë ekzistojnë drejtëzat:
a) që kalojnë nëpër të **b)** që nuk kalojnë nëpër të?

5. Vallë çdo:
a) dy pika të dhëna janë kolineare **b)** tre pika të dhëna janë kolineare?

6. Sa drejtëza përcaktojnë tre pika të dhëna jokolineare?

7. Është e njohur largesa $\overline{AB}=7cm$. Sa është largesa $\overline{BA}$?

8. Për tre pika A, B, C është e njohur se $\overline{AB}=5cm$ dhe $\overline{AC}=7cm$. Vallë mundet largesa $\overline{BC}$ të jetë e barabartë me:
a) 12 cm **b)** 5 cm **c)** 13 cm **ç)** 2 cm?

9. Për largesat të përcaktuara nga pikat A, B, C dhe D vlen $\overline{AB}=4cm$, $\overline{CB}=2cm$ dhe $\overline{AD}=7cm$. Njehso largesat $\overline{BC}$, $\overline{CC}$, $\overline{BA}$, $\overline{BB}$ dhe $\overline{DA}$.

10. Cilat koncepte gjeometrike janë përdorur në definicionin për konceptin „shtrihet ndërmjet“?

11. Çfarë mund të thuhet për pozitën e pikave të ndryshme K, S dhe M, nëse $\overline{KS}+\overline{KM}=\overline{SM}$? Cila nga këto pika shtrihet ndërmjet dy tjerave?

12. Pika S shtrihet mes pikave A dhe B, kurse pika M shtrihet mes pikave S dhe B. Çka mund të thuash për pikat A, B, S dhe M. Vallë ato janë kolineare?

13. Në çfarë pozicioni janë pikat A, B dhe M, nëse $\overline{BM}+\overline{BA}=\overline{AM}$?

14. A janë të ndryshme gjysmëdrejtëzat $[AB)$ dhe $[BA)$?

15. A munden dy gjysmëdrejtëza të kenë:
a) vetëm një pikë të përbashkët **b)** vetëm dy pika të përbashkëta?

16. Janë dhënë tre pika të ndryshme. Sa segmente përcaktojnë ato?

17. Në sa pjesë ndahet segmenti $[AB]$ prej:
a) dy pikave të ndryshme të brendshme të saja
b) tri pikave të ndryshme të brendshme të saja?

18. Çfarë figure paraqesin prerja e gjysmëdrejtëzave $[AB)$ dhe $[BA)$?

19. Cili pohim quhet Aksiomë, kurse cila Teoremë?

20. Cilat nga gjykimet e dhëna janë aksioma, cilat teorema dhe cilat definicione?

a) Nëpër një pikë kalojnë pafund shumë drejtëza.

b) Nëse një drejtëz kalon nëpër dy pika të ndryshme të një rrafshi, atëherë edhe tërë drejtëza shtrihet në atë rrafsh.

c) Nëpër tre pika të ndryshme kalojnë një ose tre drejtëza.

ç) Jashtë një drejtëze shtrihen pafund shumë pika.

d) Dy drejtëza priten, nëse ato kanë vetëm një pikë të përbashkët.

7.3. Figurat gjeometrike

Vija rrethore (qarku) dhe rrethi

Në pjesën e parë dhamë definicionet për qarkun dhe rrethin duke shfrytëzuar konceptin themelor *largesën*. Do të përmendim edhe disa koncepte në lidhje me to si dhe disa veti pa vërtetime.

Segmenti pikat e skajshme të së cilit janë pika të vijës rrethore quhet **kordë**. Korda e cila e përmban qendrën quhet **diametër**. Segmentin i cili për njërën pikë të skajshme ka qendrën kurse për tjetrën skaj ka pikë të vijës rrethore quhet **rreze**. Këtu përdoret termi i njëjtë edhe për segmentin edhe për gjatësinë e saj.

Konceptet e njëjta përdoren edhe për rrethin.

Për vijën rrethore të dhënë $k(O, r)$ dhe pikën e dhënë A nga rrafshi, janë të mundshme këto pozita reciproke.

1. Largesa nga O deri A është e barabartë me r (A **shtrihet** në vijë rrethore);

2. Largesa nga O deri A është më e vogël se r (A **shtrihet** në brendësinë e rrethit K (O, r);

3. Largesa nga O deri A është më e madhe se r (A **shtrihet** jashtë rrethit $K(O, r)$.

Bashkësia e të gjitha pikave largesa e të cilave deri te pika O është më e vogël se r, quhet **brendësia** e rrethit $K\ O\ r(,\ )$. Kështu, çdo rreth $K(O, r)$ është i barabartë me unionin e brendësisë së saj dhe vijës rrethore $k(O, r)$.

> **Definicioni 1.** Figura e dhënë quhet **konvekse**, nëse ajo e përmban çdo segment, pikat e skajshme të së cilës shtrihen në të.

Çdo rreth është konveks, kurse çdo vijë rrethore nuk është figurë konvekse.

Rrafshi, drejtëzat, gjysmëdrejtëzat dhe segmentet janë figura konvekse.

Për vijë të dhënë rrethore $(k\ O, r)$ dhe drejtëz të dhënë a në rrafsh, janë të mundshme këto pozita reciproke.

1. Drejtëza a dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta.

2. Drejtëza a dhe vija rrethore kanë saktësisht një pikë të përbashkët. Në këtë rast, drejtëza quhet **tangjentë** e vijës rrethore (**tangjentë** e rrethit $K(O, r)$).

3. Drejtëza a dhe vija rrethore kanë saktësisht dy pika të përbashkëta. Në këtë rast themi se drejtëza dhe vija rrethore **priten** në ato pika.

Për dy vija rrethore në rrafsh janë të mundshme këto pozita reciproke.

1. Ato nuk kanë pika të përbashkëta dhe gjatë së cilës:

- Kanë qendra të njëjta por rreze të ndryshme (quhen **koncentrike**)
- Nuk kanë qendra të njëjta (quhen **ekscentrike**).

2. Ato kanë saktësisht një pikë të përbashkët (themi se ato **preken**).

3. Ato kanë saktësisht dy pika të përbashkëta (themi se ato **priten**).

Çdo dy pika të ndryshme të vijës rrethore e ndajnë qarkun në dy pjesë, gjegjësisht në dy harqe dhe secila prej tyre quhet **hark rrethor**.

Këndi. Llojet e këndeve

Me konceptin kënd do të njihemi në këtë mënyrë.

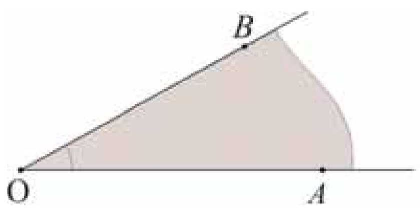
Ngjashëm sikur çdo drejtëz që e ndan rrafshin në dy gjysmërrafshe, po ashtu edhe dy gjysmëdrejtëza të ndryshme $[OA)$ dhe $[OB)$ me fillim të përbashkët O e ndajnë rrafshin në dy pjesë, njëri nga ata, i shënuar me K, është prerja e gjysmërrafsheve $[aA)$ dhe $[cB)$, ku $a = OA$, $c = OB$, kurse pjesa tjetër është bashkësi e të gjitha pikave në rrafsh që s'janë në K.

Definicioni 2. Për dy gjysmëdrejtëza të ndryshme $[OA)$ dhe $[OB)$ me fillim të përbashkët O, unioni prej këtyre gjysmëdrejtëzave dhe njëra nga pjesët e rrafshit të përmendura më lartë quhet **kënd** dhe shënohet me $\angle AOB$.

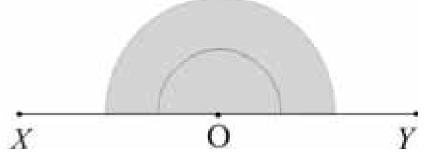
Gjysmëdrejtëzat OA dhe OB quhen **krah të këndit**, kurse fillimi i përbashkët i tyre O quhet **kulm i këndit**, kurse bashkësia e të gjitha pikave të saja që nuk shtrihen në krahët, quhet **zona e brendshme e këndit** (vizatimi 1).

Është e qartë se dy gjysmëdrejtëza të ndryshme me fillim të përbashkët, përcaktojnë dy kënde me krahë të përbashkët, njëri nga të cilët është figurë konvekse. Në varësi prej llojit të zonës së këndit, konvekse ose jokonvekse, ai ashtu edhe do të quhet, d.m.th. kënd **konveks** ose **jokonveks** (**konkav**). Prandaj mund të themi se një kënd është plotësisht i përcaktuar me dy gjysmëdrejtëza të ndryshme me fillim të përbashkët dhe një pikë që nuk shtrihet në ato gjysmëdrejtëza.

Definicioni 3. Këndi, krahët e të cilit janë dy gjysmëdrejtëza përbërëse (të kundërta), quhet **kënd i shtrirë** (vizatimi 2).

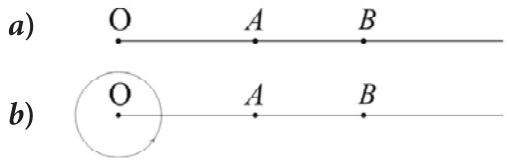


Vizatimi 1

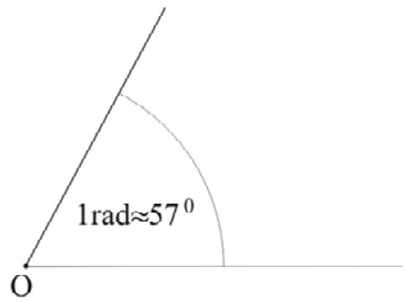


Vizatimi 2

Në rast special themi se edhe dy gjysmëdrejtëza (OA dhe OB me fillim të përbashkët), të cilat përputhen (vizatimi 3) po ashtu përcaktojnë dy kënde. Zona e brendshme e njërit prej tyre është bashkësi e zbrazët dhe ai quhet **këndi zero** (vizatimi 3a), kurse tjetri është i barabartë me tërë rrafshin dhe quhet **kënd i plotë** (vizatimi 3b).



Vizatimi 3



Vizatimi 4

Për dy kënde, të cilat me „vënie njëri mbi tjetrin“ mund të mbulojnë njëra-tjetrën, respektivisht t'iu përputhen krahët dhe zonat e tyre të brendshme, quhen **kënde të puthitshme** ose **të barabarta**. Dhe, nëse s'mund të sillen në puthitshmëri, atëherë themi se njëri është më i vogël ose pjesë e tjetrit. Pra, këndet mund t'i krahasojmë. Themi se çdo kënd ka **madhësi** saktë të caktuar. Të gjithë këndet e shtrira janë të barabarta mes tyre. Pastaj të gjitha këndet e plota janë të barabarta mes tyre, po ashtu edhe të gjitha zero këndet janë të barabarta.

Definicioni 4. Gjysmëdrejtëza *OS*, e cila e ndanë këndin e dhënë në dy kënde të puthitshme quhet **simetralja** (bisektrisa) e këndit.

Këndet mundet të ndahen edhe në numër më të madh pjesësh të puthitshme. Ta shqyrtojmë këndin e shtrirë të ndarë në 180 kënde të puthitshme. Madhësia e çdonjërit prej këtyre këndeve me marrëveshje është pranuar të quhet **shkallë këndore**, ose shkurtë vetëm shkallë dhe shënohet me 1^o. Madje, ky kënd është pranuar si njësi matëse për matje të madhësisë së këndeve. Rrjedh se këndi zero ka madhësinë 0^o, këndi i shtrirë ka madhësinë 180^o, kurse këndi i plotë $360°$.

Përveç shkallës këndore, në matematikë shpesh përdoret edhe një njësi tjetër për matje të këndit. Le të jetë dhënë vija rrethore k (O, r). Gjatësia e saj është e barabartë me $2\pi r$. Të krijojmë kënd të atillë α me kulm në O, i cili përfshinë harkun rrethor me gjatësi të barabartë me rrezen e vijës rrethore r. Këtë kënd (në shkallë) do ta fitojmë kur 360 e pjesëtojmë me 2π. Kështu për këndin e kërkuar α fitojmë se ka madhësinë përafërsisht 57 ^{0}. Ky kënd α merret për njësi matëse dhe quhet **radian**. Pra $\alpha = 1 rad$ (vizatimi 4). Është e zakonshme që shenja për radian „rad“ të mos shënohet, për shembull,

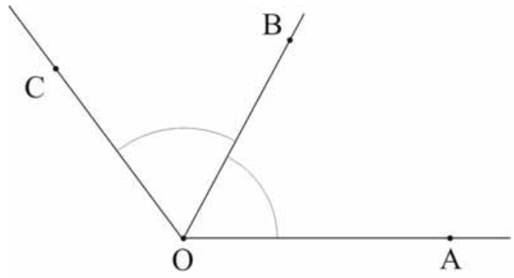
$360^0 = 2\pi,\ 180^0 = \pi,\ 90^0 = \frac{\pi}{2}$, etj.

Këndi kulmi i të cilit është qendër e vijës rrethore të dhënë quhet **kënd qendror mbi kordën** e cila gjendet në atë kënd, pikat e skajshme të së cilit janë pikat prerëse të krahëve të atij këndi me vijën rrethore.

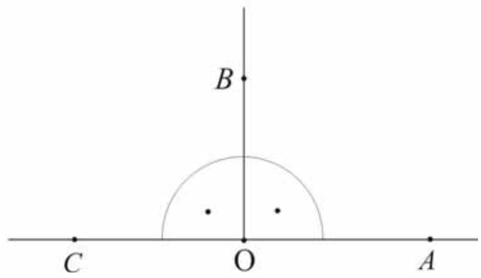
Në vizatimin 5 janë vizatuar dy kënde $\angle AOB$ dhe $\angle BOC$, të cilët kanë kulm të përbashkët dhe një krah të përbashkët *CB*, i cili parqet prerjen e tyre, $\angle AOB \cap \angle BOC = [OB)$. Këndet e këtilla quhen **kënde fqinje**, kurse këndi $\angle AOC$ paraqet **shumën** e tyre.

Definicioni 5. Dy kënde fqinje, tek të cilët krahët e ndryshëm janë pjesë përbërëse të një drejtëze, quhen **kënde të puqtë**.

Në rast të përgjithshëm dy kënde të puqtë janë të pabarabartë, por në rast special ato mund të jenë edhe të barabartë. Të tilla janë këndet $\angle AOB$ dhe $\angle BOC$ në vizatimin 6.



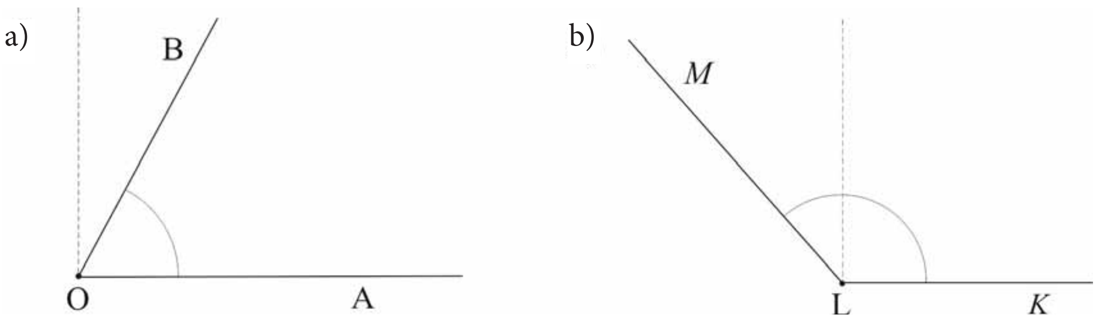
Vizatimi 5



Vizatimi 6

Definicioni 6. Këndi, i cili është i barabartë me këndin e tij të puqtë, quhet **kënd i drejtë**. Është e qartë se gjitha këndet e drejta janë të barabarta dhe kanë madhësinë 90^0.

Definicioni 7. Çdo kënd që është më i vogël se këndi i drejtë, quhet **kënd i ngushtë**, ndërsa çdo kënd më i madh se këndi i drejtë por më i vogël se këndi i shtrirë quhet **kënd i gjerë** (vizatimi 7a dhe vizatimi 7b).



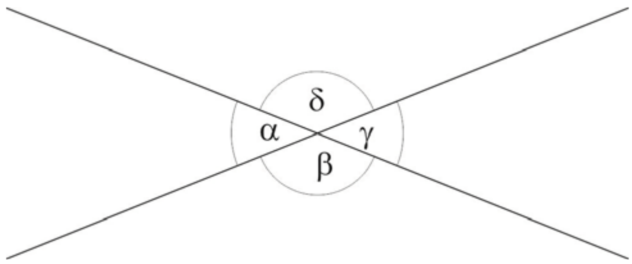
Vizatimi 7

Nëse dy kënde kanë, njëri α shkallë, kurse tjetri β shkallë dhe nëse $\alpha + \beta = 90^0$, atëherë këndet e tilla quhen **kënde komplementar** kështu që për çdonjërin prej tyre themi se është **komplement** i tjetrit.

Nëse për këndet α dhe β vlen $\alpha + \beta = 180^0$, atëherë ato quhen **kënde suplementar** dhe çdonjëri prej tyre themi se është **suplement** i tjetrit.

Kështu që është e qartë se për këndin e ngushtë të dhënë α komplementi i tij është $90^0 - \alpha$, ndërsa suplementi $180^0 - \alpha$. Kuptohet se çdo dy kënde të puqtë janë po ashtu edhe suplementar.

Dy drejtëza *a* dhe *b* që priten (vizatimi 8), formojnë katër kënde konvekse (të ndryshme prej këndit të shtrirë) α, β, γ dhe δ. Prej tyre mund të emërtojmë gjashtë palë kënde të ndryshme (α, β), (β, γ), (γ, δ), (δ, α), (α, γ) dhe (β, δ). Katër të parat dimë se



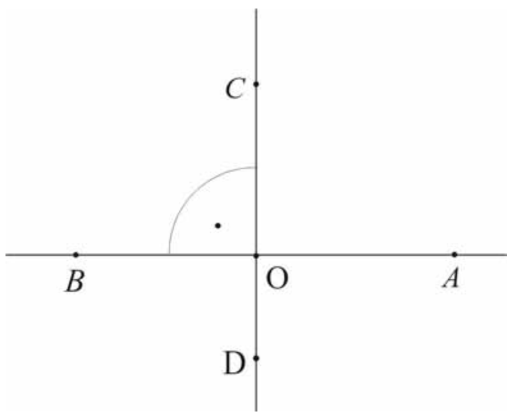
Vizatimi 8

quhen **kënde të puqtë**, kurse për çiftet (α, γ) dhe (β, δ) themi se janë **kënde të kryqëzuar**. Nga vizatimi 8 vërejmë se këndet e kryqëzuar α dhe γ kanë kulm të përbashkët, kurse krahët e njërit prej tyre janë gjysmëdrejtëza përbërëse të gjysmëdrejtëzave që janë krah të këndit tjetër. E njëjta vlen edhe për çiftin tjetër të këndeve të kryqëzuar β dhe δ (vizatimi 8).

Definicioni 8. Dy kënde, të cilat kanë kulm të përbashkët dhe krahët e njërit kënd janë përbërës të krahëve të këndit tjetër, quhen kënde të **kryqëzuar**.

T'i shqyrtojmë këndet kryqëzorë α dhe γ (vizatimi 8). Shihet se këndi β është i puqtë edhe me α edhe me γ. Prandaj, këndi β e përplotëson edhe këndin α edhe këndin γ deri në kënd të shtrirë. Nga këtu rrjedh se këndet γ dhe α janë të barabartë. Pra, këndet e kryqëzuar janë të barabartë ndërmjet veti.

Në vizatimin 9 janë vizatuar dy drejtëza *AB* dhe *CD*, që priten në pikën *O*. Ato formojnë katër kënde konvekse, nga të cilët ∠AOC është i drejtë. Çfarë janë të tjerët? Edhe tjerët janë të drejtë. Përse?



Vizatimi 9

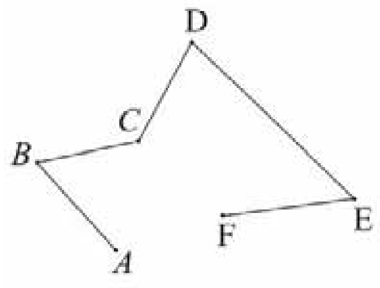
Definicioni 9. Dy drejtëza, të cilat priten dhe formojnë katër kënde të drejta, quhen drejtëza **reciprokisht normale**

Madje themi se drejtëza *AB* është **normal** me drejtëzën *CD*, dhe anasjelltë. Simbolikisht shënohet: $AB \perp CD$ gjegjësisht $CD \perp AB$.

Në vend të „drejtëz normale“, shpesh themi **normalja**; kurse në vend të „drejtëza reciprokisht normale“ themi **drejtëza normale.**

Vija e thyer. Shumëkëndëshi

Në vizatimin 10 është dhënë një figurë gjeometrike *ABCDEF*, e cila paraqet union të segmenteve *AB*, *BC*, *CD*, *DE* dhe *EF*, nga të cilat asnjë nga dy brinjët fqinje nuk shtrihen në një drejtëz të njëjtë. Kjo figurë quhet **vijë e thyer**.

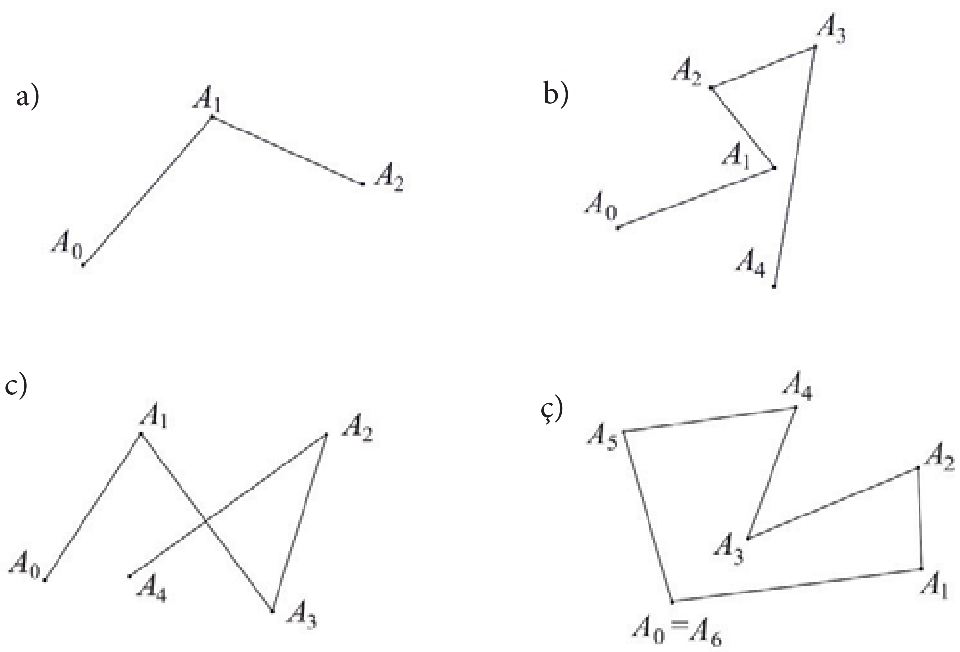


Vizatimi 10

Segmentet *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, quhen **brinjë** të vijës së thyer, pikat *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dhe *F* quhen **kulme**, kurse pikat *A* dhe *F* (vizatimi 10) – **pika të skajshme** të vijës së thyer. Dy kulme, të cilat i takojnë të njëjtës brinjë të vijës së thyer quhen **kulme fqinje**; kurse dy brinjë me kulm të përbashkët quhen **brinjë fqinje** të vijës së thyer.

Vija e thyer tek e cila çfarëdo dy brinjë jofqinje të saja nuk kanë pika të përbashkëta, quhet **vijë e thyer e thjeshtë**. Për shembull vijat e thyera në vizatimin 11 nën a), b), ç) janë të thjeshta, kurse vija e thyer në vizatimin 11 nën c) s'është e thjeshtë meqenëse brinjët e saja jofqinje A_1A_2 dhe A_3A_4 priten.

Nëse pikat e skajshme të një vije të thyer puthiten (vizatimi 11 nën ç)) themi se ajo është vijë e thyer e **mbyllur**, kurse për ato në vizatimin 11 nën a),b), c), themi se janë vija të thyera të **hapura** (pambyllura).

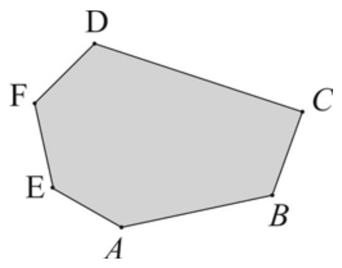


Vizatimi 11

Shuma e të gjitha gjatësive të brinjëve të vijës së thyer quhet **gjatësi e vijës së thyer**.
Në vizatimin 12 është dhënë një vijë e thyer e thjeshtë e mbyllur. Nëse e analizojmë, përfundojmë se ajo: i ndanë pikat e rrafshit (që nuk i takoj asaj) në dy **zona** (pjesë) - **brendshme** dhe **jashtme**. Vet vija e thyer paraqet **kufi të përbashkët** respektivisht prerje të këtyre dy zonave.

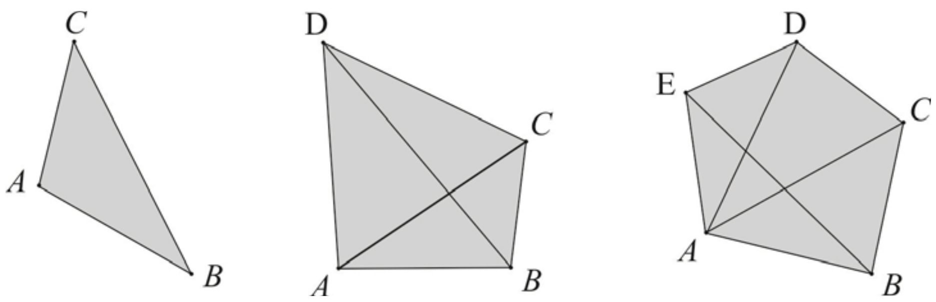
Definicioni 10. Secila figurë e formuar nga një vijë e thyer e mbyllur e thjeshtë dhe pjesës së saj të brendshme, quhet **shumëkëndësh**.

Pikat e vijës së thyer quhen **pika kufitare**, kurse pikat nga zona e brendshme e saj – **pika të brendshme** të shumëkëndëshit. Kulmet dhe brinjët e vijës së thyer quhen **kulme** dhe **brinjë** të shumëkëndëshit. Shumëkëndëshi simbolikisht shënohet përmes emërtimit të të gjitha kulmeve të saja *ABC*, *ABCD*, *ABCDE* (vizatimi 13).



Vizatimi 12

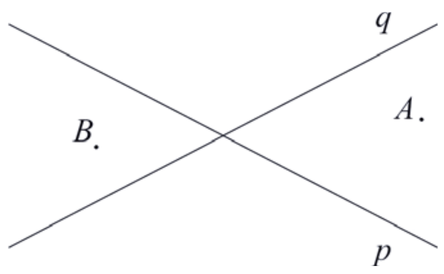
Dy kulme që i takojnë të njëjtës brinjë, quhen **kulme fqinje**, kurse dy brinjë me kulm të përbashkët quhen **brinjë fqinje**.
Në çdo shumëkëndësh numri i kulmeve është i barabartë me numrin e brinjëve. Sipas numrit të brinjëve, gjegjësisht kulmeve, shumëkëndëshi mund të jetë trekëndësh, katërkëndësh, pesëkëndësh, gjashtëkëndësh, etj. (vizatimi 13).



Vizatimi 13

Segmenti që lidhë çfarëdo dy kulme jofqinje të shumëkëndëshit quhet **diagonale**. Pesëkëndëshi ka pesë diagonale, katërkëndëshi - dy, kurse trekëndëshi nuk ka asnjë diagonale. Përse? (vizatimi 13).

Shuma e të gjitha gjatësive të brinjëve të shumëkëndëshit quhet **perimetri i shumëkëndëshit**.



Vizatimi 14

Detyra

1. Në vizatimin 14 janë tërhequr dy drejtëza *p* dhe *q* që priten dhe janë shënuar dy pika *A* dhe *B*. Ndërto vizatim të njëjtë dhe hijeso figurën e cila është prerje e gjysmërrafsheve:
a) [*pA*) dhe [*qB*) **b)** [*pA*) dhe [*qA*) **c)** [*pA*) dhe [*pB*) **ç)** [*qA*) dhe [*pB*).

2. Cila figurë quhet konvekse dhe cila jo konvekse?

3. Vizato dy drejtëza *AB* dhe *CD*, të cilat priten në pikën *S*. Sa kënde konvekse sheh aty? Shënoi.

4. Vizato një kënd të çfarëdoshëm dhe konstrukto këndet e tij të puqtë. Sa kënde të tilla paska? Çfarë janë ato kënde?

5. Vizato dy kënde të ndryshme, kurse pastaj konstrukto këndet përkatëse të tyre të kryqëzuar.

6. Tërhiq normalen ndaj drejtëzës së dhënë *p*, e cila kalon nëpër pikën *A*, nëse:
a) $A \in p$ **b)** $A \notin p$.

7. Çfarë këndi qendror i përgjigjet diametrit të qarkut?

8. Vizato vijë të thyer me më së paku brinjë:
a) të hapur **b)** të mbyllur.

9. Sa më së paku kulme mund të ketë:
a) shumëkëndëshi konveks **b)** shumëkëndëshi jo konveks?

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Tri pika të ndryshme mund të përcaktojnë një ose tre drejtëza. Trego përmes vizatimit se katër pika të ndryshme në rrafsh mund të përcaktojnë një, katër ose gjashtë drejtëza.

2. Për tre pika të ndryshme kolineare A, B dhe C, dihet se $\overline{AC} = 12\,cm$ dhe $\overline{BC} = 7\,cm$. Sa mundet të jetë largesa $\overline{AB}$? Për çdo rast të mundshëm bëje vizatimin.

3. A ekzistojnë pika A, B dhe C, të tilla që të vlej:
a) $\overline{AC} < 0$ **b)** $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ **c)** $\overline{AC} \geq \overline{AB} + \overline{BC}$
ç) $\overline{AB} > \overline{AC} + \overline{CB}$ **d)** $\overline{AB} \leq 0$?

4. A është e vërtetë se nëse pika M shtrihet ndërmjet pikave A dhe B, atëherë ato tri pika nuk janë kolineare?

5. Vallë pikat K, L dhe M janë kolineare nëse:
a) $\overline{KL} = 7cm$, $\overline{KM} = 5cm$ $\overline{LM} = 4cm$
b) $\overline{KL} = 5cm$, $\overline{KM} = 9cm$ $\overline{LM} = 4cm$?

6. Me sa dhe me cilat pika është njëvlershëm e përcaktuar gjysmëdrejtëza?

7. Çfarë figure mundet me qenë unioni i dy gjysmëdrejtëzave që shtrihen në drejtëz të njëjtë? Trego me vizatim.

8. Është dhënë drejtëza p dhe pika $A \in p$. Çfarë paraqet bashkësia e pikave nga drejtëza p, largesa e të cilave nga pika A është:
a) jo më e vogël se $3cm$
b) e barabartë me $3cm$
c) më e vogël ose e barabartë me $3cm$?

9. Segmenti AB ka gjatësinë $12cm$. Vallë pika M shtrihet në segmentin $[AB]$, nëse:
a) $\overline{AM} = 7cm$ dhe $\overline{MB} = 5cm$ **b)** $\overline{AM} = 9cm$ dhe $\overline{MB} = 6cm$ **c)** $\overline{AM} = \overline{MB}$?

10. Pikat A, B dhe C shtrihen në një drejtëz sipas kësaj renditje: Pika S është mesi i segmentit AB, kurse pika T është mesi i segmentit BC. Nëse $\overline{AB} = a$ dhe $\overline{BC} = b$, sa është gjatësia e segmentit ST ?

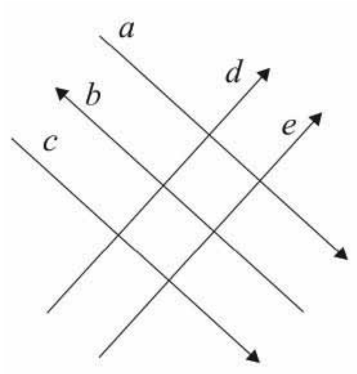
11. Sa kënde të drejta do të përfshij shigjeta e madhe e orës për
a) 1 orë **b)** 1 ditë **c)** 1 muaj?

12. Sa radian ka këndi prej 60^0 ?

13. Sa diagonale mund të tërhiqen prej një kulmi te shumëkëndëshit konveks:
a) katërkëndëshi **b)** pesëkëndëshi **c)** shtatëkëndëshi?

14. Cilat nga gjysmëdrejtëzat në vizatimin 1 janë me kah të njëjtë, dhe cilat me kah të kundërt, nëse $a \parallel b \parallel c$ dhe $d \parallel e$.

15. Çfarë figure është
a) prerja **b)** unioni
i dy gjysmëdrejtëzave me orientim (kah) të njëjtë të cilat shtrihen në një drejtëz të njëjtë?



Vizatimi 1

16. Çfarë figure është
a) prerja **b)** unioni
i dy gjysmëdrejtëzave me orientim të kundërt të cilat shtrihen në të njëjtën drejtëz?

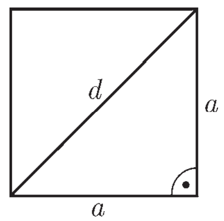
8. SYPRINA DHE PERIMETRI I FUGRAVE TË RRAFSHTA

8.1. Koncepti për syprinë. Syprina dhe perimetri i paralelogramit

Syprina e shumëkëndëshit është masë për madhësinë e pjesës së brendshme nga rrafshi që e përfshinë shumëkëndëshi. Njehsimi i kësaj madhësie është në fakt caktimi i numrit të katrorëve njësi të cilët e përplotësojnë pjesën e brendshme të shumëkëndëshit pa përputhje, ashtu që figurat e puthitshme kanë syprinë të njëjtë.

Syprina dhe perimetri i katrorit dhe drejtkëndëshit

Syprina e katrorit me brinjë a është $\boxed{S = a^2}$. Perimetri i katrorit me brinjë a është $\boxed{P = 4a}$.



Shembulli 1. Syprina e katrorit me brinjë $a = 3$cm është e barabartë me $S = a^2 = 3^2 = 9\text{cm}^2$, kurse perimetri është $P = 4 \cdot 3 = 12cm$. ♦

Shembulli 2. Që të njehsojmë syprinën e katrorit kur është dhënë diagonalja $d = 5$ cm, fillimisht duhet të gjejmë lidhjen ndërmjet gjatësive të brinjës dhe diagonales së katrorit, të cilën e arrijmë nga zbatimi i teoremës së Pitagorës

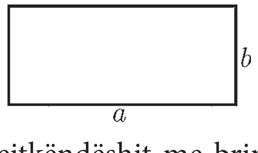
$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$ prej nga $a^2 = \frac{d^2}{2}$, prandaj $S = \frac{d^2}{2} = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5\,\text{cm}^2$. ♦

Kështu që përfundojmë se:

Syprina e katrorit me diagonale të dhënë d njehsohet me formulën $\boxed{S = \frac{d^2}{2}}$.

Syprina e drejtkëndëshit me brinjët a dhe b njehsohet me formulën $\boxed{S = ab}$.

Perimetri i drejtkëndëshit me brinjët a dhe b njehsohet me formulën $\boxed{P = 2(a + b)}$.



Shembulli 3. Syprina e drejtkëndëshit me brinjë $a = 7$cm dhe $b = 4$cm është e barabartë me $S = ab = 7 \cdot 4 = 28\text{cm}^2$, ndërsa perimetri i tij $P = 2 \cdot (7 + 4) = 22cm$. ♦

Detyra 1. Njehso perimetrin e drejtkëndëshit, nëse brinjët e tij qëndrojnë si 3:7 kurse syprina e tij është 756cm^2.

Zgjidhje. Meqenëse $a : b = 3 : 7$ rrjedh se $a = 3k$ dhe $b = 7k$, ku k është koeficienti i proporcionit. Atëherë, kemi $ab = 756$ dhe fitojmë $3k \cdot 7k = 756$, pra $k^2 = 36$. Rrjedh se

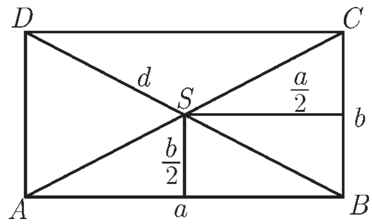
$k = 6$ ose $k = -6$. Rasti për $k = -6$ nuk përfillet pasi që $a = 3k > 0$. Prandaj, $k = 6$, dhe gjejmë gjatësitë e brinjëve a =18cm dhe b = 42cm si dhe $P = 2(18 + 42) = 120$cm. ♦

Detyra 2. Njehso perimetrin dhe syprinën e drejtkëndëshit nëse njëra brinjë është me gjatësi 1dm, kurse tjetra për 2cm më e vogël se diagonalja.

Zgjidhje. Le të jetë a =10cm dhe $b + 2 = d$. Me zbatimin e teoremës së Pitagorës fitojmë $a^2 + (d - 2)^2 = d^2$ gjegjësisht $4d = 100 + 4$, pra d = 26cm. Atëherë, b = 24cm, kurse perimetri $P = 2(10 + 24) = 68$cm ndërsa syprina $S = 10 \cdot 24 = 240\text{cm}^2$. ♦

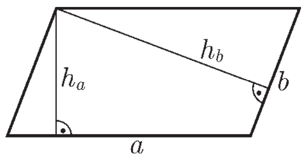
Detyra 3. Në një drejtkëndësh pikë-prerja e diagonaleve është për 4cm më afër brinjës më të madhe se sa prej brinjës së vogël. Njehso syprinën e drejtkëndëshit nëse perimetri i tij është 56cm. ♦

Zgjidhje. Le të jetë $a > b$. Atëherë $\frac{a}{2} = 4 + \frac{b}{2}$, d.m.th. $a = 8+b$. Po ashtu $2a + 2b = 56$, d.m.th. $a + b = 28$. Rrjedh se $8+ 2b = 28$, pra b =10cm. Kështu kemi a =18cm, kurse syprina është $S = 180\text{cm}^2$.♦



Syprina dhe perimetri i paralelogramit

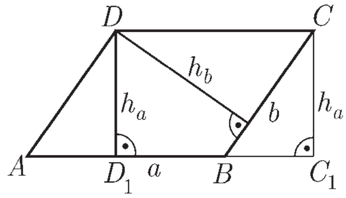
Syprina S e paralelogramit me brinjë a dhe b dhe lartësitë përkatëse të lëshuara në ato brinjë h_a dhe h_b, është e barabartë me $\boxed{S = ah_a = bh_b}$.



Vërtetim. Të vërtetojmë se $S = ah_a$.

Le të jetë D_1 nënkëmbëza e lartësisë h_a e lëshuar nga pika D.

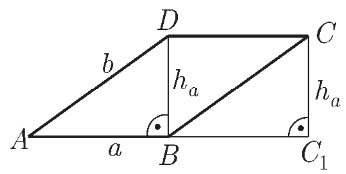
a) Pika D_1 i takon brinjës AB. Le të jetë C_1 nënkëmbëza e lartësisë e lëshuar nga pika C drejt AB. Kuptohet, C_1 i takon vazhdimit të AB. Atëherë trekëndëshat AD_1D dhe BC_1C janë kënddrejtë dhe $\sphericalangle DAD_1 = \sphericalangle CBC_1$, dhe rrjedh se edhe $\sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle BCC_1$. Pastaj, $\overline{DD_1} = \overline{CC_1} = h_a$ dhe $\overline{AD} = \overline{BC} = b$, pra rrjedh se $\Delta AD_1D \cong \Delta BC_1C$. Sipas kësaj, $S_{AD1D} = S_{BC1C}$.



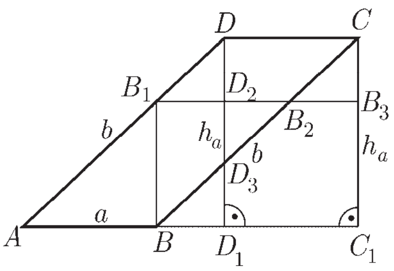
Tani, $S_{ABCD} = S_{AD1D} + S_{D1BCD} = S_{BC1C} + S_{D1BCD} = S_{D1C1CD}$. Nga $\Delta AD_1D \cong \Delta BC_1C$ rrjedh se $\overline{AD_1} = \overline{BC_1}$, prandaj katërkëndëshi D_1C_1CD është drejtkëndësh me brinjë a dhe h_a, dhe syprina e tij është ah_a. Së fundmi, $S_{ABCD} = S_{D1C1CD} = ah_a$.

b) Pika D_1 puthitet me B .

Ngjashëm me rastin a) fitojmë se $\Delta ABD \cong \Delta BC_1C$, pra



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = S_{BC1C} + S_{BDC} = S_{BC1CD} = ah_a.$$



c) Pika D_1 i takon vazhdimit të brinjës AB . Sikur deri tash, le të jetë C_1 nënkëmbëza e lartësisë e lëshuar nga C. Të tërheqim normalen nga pika B e brinjën AB dhe le të jetë B_1 prerja e këtaj normaleje me drejtëzën AD . Shihet se, pika B_1 i takon segmentit AD. Nga B_1 Tërheqim drejtëz p paralele me AB, dhe le të jetë $\{B_2\} = BC \cap p$, $\{B_3\} = p \cap CC_1$, $\{D_2\} = DD_1 \cap BB_3$ dhe $\{D_3\} = DD_1 \cap BB_3$. Sipas b) fitojmë se $S_{ABB2B1} = S_{D1C1B3D2}$, dhe meqenëse prerja e të dy drejtkëndëshave është trekëndëshi $D_2B_2D_3$ rrjedh se $S_{ABD3D2B1} = S_{D1C1B3B2D3}$. Ngjashëm sikur te a) fitojmë se $\Delta B_1D_2D \cong \Delta B_2B_3C$, prandaj syprinat e tyre janë të barabarta. Përfundimisht,

$$S_{ABCD} = S_{ABD_3D_2B_1} + S_{D_3B_2D_2} + S_{B_1D_2D} + S_{DD_2B_2C} =$$
$$= S_{D_1C_1B_3B_2D_3} + S_{D_3B_2D_2} + S_{B_2B_3C} + S_{DD_2B_2C} = S_{D_1C_1CD} = ah_a$$

Nga kjo formulë fitojmë se syprina e rombit me brinjë a dhe lartësi h është e barabartë me $S = a_h$. ♦

Perimetri i paralelogramit me brinjë a dhe b njehsohet me formulën $\boxed{P = 2(a + b)}$, kurse perimetri i rombit me brinjë a njehsohet me formulën $\boxed{P = 4a}$.

Shembulli 4. Syprina e paralelogramit $ABCD$ nëse $a = \overline{AB} = 12\,\text{cm}$ dhe $h_a = 7\text{cm}$ është e barabartë me $S = a \cdot h_a = 12 \cdot 7 = 84\text{cm}^2$.♦

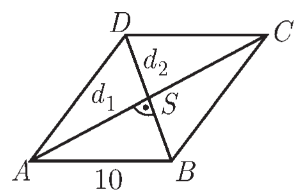
Shembulli 5. Paralelogrami me syprinën 56cm^2 dhe brinjën $a = 5{,}2\text{cm}$ dhe $b = 4{,}8\text{cm}$ ka lartësinë $h_a = \frac{S}{a} = \frac{56}{5{,}2} = \frac{140}{13} \approx 10{,}77\,\text{cm}$ dhe $h_b = \frac{S}{b} = \frac{56}{4{,}8} = \frac{35}{3} \approx 11{,}7\,\text{cm}$ ♦

Detyra 4. Dy brinjë të paralelogramit sillen si 3 : 4, kurse perimetri është 28. Njehso gjatësitë e brinjëve të paralelogramit.

Zgjidhje. $a : b = 3 : 4 = k$, prandaj $a = 3k$, $b = 4k$, ku k është koeficienti i proporcionit, dhe nga $P = 28 = 2(a + b)$ kemi $a + b = 14$ d.m.th. $7k = 14$, pra $k = 2$. Domethënë $a = 6$, $b = 8$. ♦

Syprina e rombit me diagonale d_1 dhe d_2 njehsohet me formulën

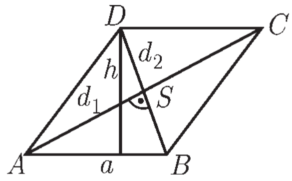
$$\boxed{S = \frac{d_1 d_2}{2}.}$$



Detyra 5. Njehso syprinën e rombit me brinjën 1dm dhe njërën diagonale 12cm.

Zgjidhje. Le të jetë d_2=12cm. nga trekëndëshi kënddrejtë ABS fitojmë se $\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 10^2$

prandaj d_1 = 16cm. Syprina është $S = \frac{d_1 d_2}{2} = 96\,\text{cm}^2$. ♦



Detyra 6. Lartësia e rombit është 48cm kurse diagonalja më e madhe 8dm . Njehso perimetrin e rombit.

Zgjidhje. Pra, $h = 48$cm, $d_1 = 80$cm dhe le të jetë a brinja e rombit. Meqenëse $S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ fitojmë se

$$48a = \frac{80d_2}{2}, \text{ d.m.th. } a = \frac{5}{6}d_2.$$

Nga trekëndëshi kënddrejtë ABS fitojmë se $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, d.m.th. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.

Prej nga fitojmë se $80^2 + d_2^2 = 4\frac{25}{36}d_2^2$, d.m.th. $\frac{16}{9}d_2^2 = 80^2$ prandaj $d_2 = 60$cm .

Kështu që $a = \frac{5}{6}60 = 50\,\text{cm}$, ndërsa perimetri është $P = 4a = 200$cm . ♦

Detyra

1. Dihet se:

a) Katrori ka syprinën $S = 36\text{cm}^2$. Njehso gjatësitë e brinjës dhe diagonales së katrorit.

b) Katrori ka perimetrin $P = 12$cm. Njehso gjatësitë e brinjës dhe diagonales së katrorit.

2. a) Është dhënë drejtkëndëshi me syprinën $108dm^2$ dhe brinjën $a = 120$cm. Njehso gjatësinë e brinjës tjetër dhe diagonales së drejtkëndëshit.

b) Është dhënë drejtkëndëshi me perimetrin 246cm dhe brinjën b=80cm. Njehso gjatësinë e brinjës tjetër dhe diagonalen.

3. Njehso syprinën e drejtkëndëshit të brendashkruar në vijën rrethore me rreze 12,5cm nëse njëra brinjë e tij është 7cm.

4. Në katrorin me brinjë a është brendashkruar katrori tjetër kulmet e të cilit e ndajnë brinjën e katrorit të parë në raport 2 : 3. Cakto raportin e syprinave të katrorëve.

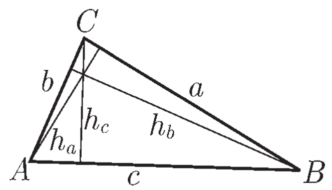
5. Është dhënë drejtkëndëshi $ABCD$ me brinjët $8cm$ dhe $6cm$. Përmes diagonales AC është ndarë në dy trekëndësha në të cilat janë brendashkruar vijat rrethore. Njehso largesën ndërmjet qendrave të tyre.

6. Cakto gjatësinë e brinjës b dhe raportin e lartësive në paralelogramin me perimetër $124dm$ dhe brinjën $a = 12dm$.

7. Njehso syprinën e rombit me diagonalen e vogël të gjatë 6cm dhe rreze $r = 24$mm të vijës rrethore të brendashkruar.

8.2. Syprina dhe perimetri i trekëndëshit

Syprina S e trekëndëshit ABC me brinjët a, b, c dhe lartësitë përkatëse h_a, h_b, h_c të lëshuara në ato, është e barabartë me $\boxed{S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}}$, kurse perimetri $\boxed{P = a + b + c}$.

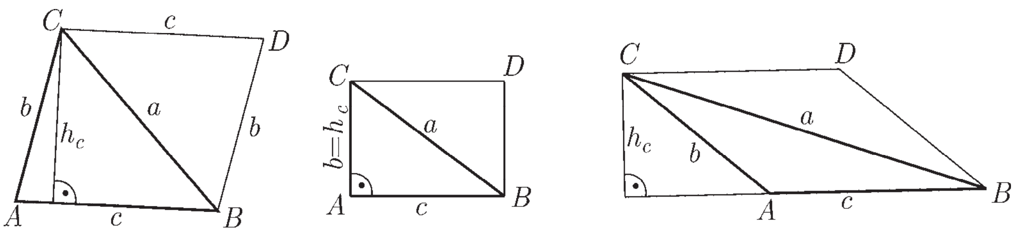


Vërtetim. Do të vërtetojmë se $S=\dfrac{ch_c}{2}$. Barazitë e tjera vërtetohen plotësisht ngjashëm.

Në varësi prej faktit, vallë këndet te A dhe B janë të ngushtë (d.m.th. trekëndëshi është këndngushtë) ose njëri nga ata është i drejtë ose njëri nga ata është i gjerë, fitojmë raste sikur në vizatimin.

Nëpër pikën B tërheqim drejtëz paralele me AC dhe nëpër C tërheqim drejtëz paralele me AB. Pikë-prerja e këtyre dy drejtëzave le të jetë pika D. Katërkëndëshi $ABDC$ është paralelogram. Pra, $\overline{AB}=\overline{CD}$ dhe $\overline{AC}=\overline{BD}$. Meqenëse BC është brinjë e përbashkët, rrjedh se $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, prandaj $S_{ABC}=S_{DCB}$.

Pra, $S_{ABC}=\dfrac{S_{ABDC}}{2}=\dfrac{ch_c}{2}$. ♦



Shembulli 1. Syprina e trekëndëshit me $b=7$cm dhe $h_b=4$cm është e barabartë me $S=\dfrac{bh_b}{2}=\dfrac{28}{2}=14\,\text{cm}^2$. ♦

Syprina e **trekëndëshit barabrinjës** me brinjën a është $\boxed{S=\dfrac{ah}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$.

Le të jenë a, b, c brinjët e trekëndëshit kurse $\boxed{s=\dfrac{a+b+c}{2}}$ le të jetë gjysmëperimetri i trekëndëshit ABC.

Atëherë syprina S e trekëndëshit njehsohet me formulën $\boxed{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$. Kjo formulë njihet me emrin **formula e Heronit**.

Shembulli 2. Syprina e trekëndëshit me brinjët $a=5$, $b=4$ dhe $c=7$ është e barabartë me

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}=\sqrt{8\cdot 3\cdot 4\cdot 1}=\sqrt{96}=4\sqrt{6},$$

ku $s=\dfrac{5+4+7}{2}=8$. ♦

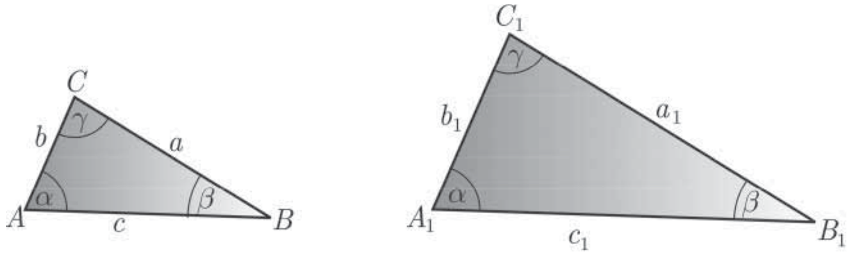
Le të jetë s gjysmëperimetri, r rrezja e vijës rrethore të brendashkruar dhe S është syprina e trekëndëshit ABC. Atëherë $\boxed{S=rs}$.

Le të jetë ABC trekëndëshi me brinjët a ,b, c dhe rreze R të vijës rrethore të jashtëshkruar në trekëndëshin e dhënë. Atëherë syprina e trekëndëshit është e barabartë me $\boxed{S=\dfrac{abc}{4R}}$.

Shembulli 3. Për ΔABC me brinjë $a = 4cm$, $b= 6cm$ dhe $c = 8cm$ rrezja e vijës rrethore të brendashkruar është $r = \frac{S}{s} = \frac{\sqrt{9\cdot(9-4)\cdot(9-6)\cdot(9-8)}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}cmm,$

ndërsa rrezja e vijës rrethore të jashtëshkruar është $R = \frac{abc}{4S} = \frac{192}{12\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}cm$. ♦

Le të jetë $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ku $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ dhe le të jenë S dhe S_1 syprinat përkatëse të ΔABC dhe $\Delta A_1B_1C_1$. Atëherë $\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}$.



Shembulli 4. Syprinat e dy trekëndëshave të ngjashëm janë 15 dhe 18, kurse brinja a e trekëndëshit të parë është 5, atëherë brinja përkatëse a_1 e trekëndëshit të dytë është $a_1^2 = \frac{a^2S_1}{S} = \frac{25\cdot 18}{15} = 30$, pra $a_1 = \sqrt{30}$. ♦

Detyra 1. Perimetri i trekëndëshit barakrahës është 64cm, ndërsa ndryshimi mes krahut dhe bazës është 11cm . Njehso syprinën e trekëndëshit.

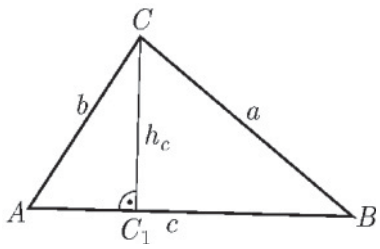
Zgjidhje. Le të jetë a baza kurse b krahu i trekëndëshit. Atëherë kemi $a + 2b = 64$ dhe $b - a = 11$. Me mbledhjen e këtyre dy barazimeve fitojmë $3b = 75$, prandaj $b = 25$cm. Dhe rrjedhimisht $a = 14$cm . Nga teorema e Pitagorës, për lartësinë kemi

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625-49} = 24\,\text{cm}$, prandaj syprina është $S = \frac{ah}{2} = 168\,\text{cm}^2$. ♦

Detyra 2. Njehso syprinën e trekëndëshit nëse $a = 73$dm, $b = 52$dm dhe $h_c = 48$dm.

Zgjidhje. Nga teorema e Pitagorës për ΔC_1BC dhe ΔAC_1C fitojmë $\overline{C_1B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 55\,\text{dm}$ dhe $\overline{AC_1} = \sqrt{b^2 - h_c^2} = 20\,\text{dm}$, prandaj rrjedh se $c = 75$dm.

Syprina do të jetë $S = \frac{75\cdot 48}{2} = 1800\,\text{dm}^2$. ♦



Detyra

1. Është dhënë trekëndëshi me brinjë $a = 21$, $b = 17$ dhe $c = 10$. Njehso syprinën, lartësitë përkatëse, rrezen e rrethit të brendashkruar dhe të jashtëshkruar dhe perimetrin e tij.

2. Është dhënë trekëndëshi barakrahës me bazën a = 10cm dhe krahun b = 13cm. Njehso syprinën, lartësitë përkatëse, rrezen e rrethit të brendashkruar dhe të jashtëshkruar dhe perimetrin e tij.

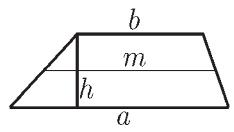
3. Njehso syprinën e trekëndëshit nëse dy brinjë të tij kanë gjatësitë 27cm dhe 29cm kurse vija e rëndimit ndaj brinjës së tretë është me gjatësi 26cm .

4. Le të jetë S qendra e vijës rrethore të brendashkruar në trekëndëshin ABC dhe le të jetë $S_{\Delta ASB} = 36cm^2$, $S_{\Delta ASC} = 40cm^2$ dhe $S_{\Delta CSB} = 68cm^2$. Njehso brinjët e trekëndëshit.

5. Brinjët e një trekëndëshi janë 13cm, 14cm dhe 15cm. Njehso rrezen e vijës rrethore me qendër në brinjën e mesme të trekëndëshit sipas madhësisë e cila i prek dy brinjët tjera.

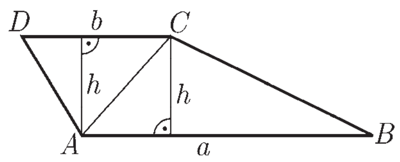
8.3. Syprina e trapezit, deltoidit dhe trapezoidit

Trapezi është katërkëndësh me një palë brinjë paralele të cilat quhen baza të trapezit, kurse largesa ndërmjet bazave quhet lartësi e trapezit. Syprina e trapezit me baza a, b dhe lartësi h njehsohet me formulën $\boxed{S=\frac{(a+b)h}{2}}$. Gjatësia e vijës së mesme m të trapezit me baza a dhe b është e barabartë me $\frac{a+b}{2}$, prandaj syprina e trapezit njehsohet edhe me formulën $\boxed{S=mh}$.



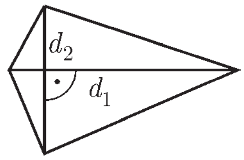
Do të vërtetojmë se $S=\frac{a+b}{2}h$.

Le të jetë $ABCD$ një trapez me bazat a dhe b dhe lartësinë h. Trapezin e ndajmë në dy trekëndësha përmes diagonales AC. Atëherë $S = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=\frac{a+b}{2}h$. ♦

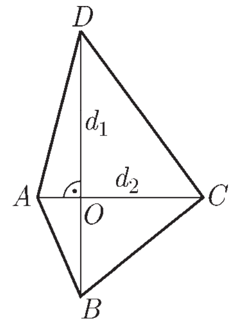


Shembulli 1. Syprina e trapezit me baza $a = 4$, $b = 8$ dhe lartësi $h = 10$ është e barabartë me $S=\frac{8+4}{2}10=60$. ♦

Syprina e katërkëndëshit me diagonale reciprokisht normale d_1 dhe d_2 njehsohet me formulën $\boxed{S=\frac{d_1d_2}{2}}$.



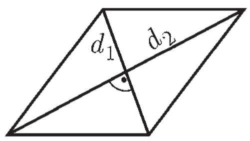
Pikërisht, për syprinën e katërkëndëshit $ABCD$ kemi

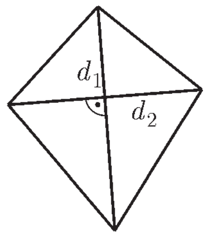


$$S = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$$
$$= \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OD}}{2} + \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OD}}{2} =$$
$$= \frac{(\overline{AO}+\overline{CO})\cdot\overline{OB}}{2} + \frac{(\overline{AO}+\overline{CO})\cdot\overline{OD}}{2} =$$
$$= \frac{(\overline{OB}+\overline{OD})(\overline{AO}+\overline{CO})}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Shembulli 2. Syprina e katërkëndëshit me diagonale reciprokisht normale $d_1 = 12$ dhe $d_2 = 7$ është e barabartë me $S = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12\cdot 7}{2} = 42$. ♦

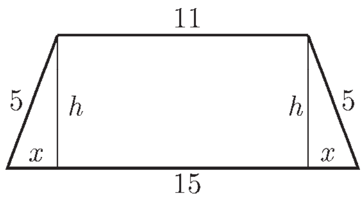
Rombi dhe deltoidi janë katërkëndësha me diagonale reciprokisht normale, prandaj syprina e tyre njehsohet me formulën $S = \frac{d_1 d_2}{2}$.





Detyra 1. Është dhënë trapezi barakrahës me bazat a = 15cm, b = 11cm dhe krah c = 5cm. Njehso lartësinë dhe syprinën e trapezit.

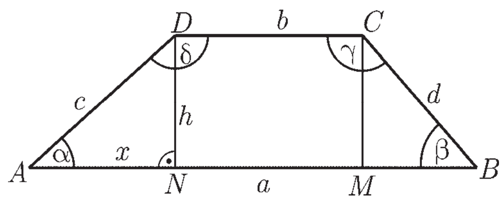
Zgjidhje. Nga vizatimi kemi $15 = 2x + 11$, prandaj $x = 2$. Tani, me zbatimin e teoremës së Pitagorës, njehsojmë lartësinë $h = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$,



$$S = \frac{(15+11)\sqrt{21}}{2} = 13\sqrt{21}\ .\ ♦$$

Detyra 2. Është dhënë trapezi me bazat a = 35cm, b = 14cm dhe krahët c = 13cm, d = 20cm. Njehso lartësinë dhe syprinën e trapezit.

Zgjidhje. Nga vizatimi kemi $\overline{AN} + \overline{MB} = 35 - 14 = 21\text{cm}$. Nëse marrim $\overline{AN} = x$, atëherë $\overline{MB} = 21 - x$ dhe sipas teoremës së Pitagorës për ΔAND dhe ΔMBC fitojmë $h^2 = 13^2 - x^2$ dhe $h^2 = 20^2 - (21-x)^2$, përkatësisht. Sipas kësaj

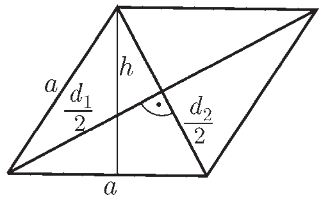


$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$$
$$169 - \cancel{x^2} = 400 - 441 + 42x - \cancel{x^2}$$
$$42x = 210$$
$$x = 5$$

Pra $h^2 = 13^2 - 5^2$ d.m.th. $h = 12\text{cm}$. Për syprinën e trapezit do të kemi

$$S = \frac{(35+14)}{2}\cdot 12 = 294\text{cm}^2.\ ♦$$

Shembulli 3. Rombi me diagonale $d_1 = 16$cm dhe $d_2 = 12$cm ka syprinën



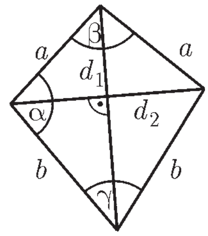
$$S = \frac{d_1 d_2}{2} = 96\,\text{cm}^2,\ a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10\,\text{cm}$$

$$h = \frac{S}{a} = 9{,}6\,\text{cm}\ .\ ♦$$

Shembulli 4. Deltoidi me brinjë $a = 4dm$, $b = 5dm$ dhe $d_1 = 7dm$ (d_1 është boshti i simetrisë së deltoidit) ka syprinën $S = 2 \cdot S_\Delta = 8\sqrt{6}dm^2$, ku S_Δ është syprina e trekëndëshit me brinjët a, b dhe d_1 e njehsuar me formulën e Heronit,

$P = 2(a + b) = 18dm$ dhe $d_2 = \frac{2S}{d_1} = \frac{16\sqrt{6}}{7}dm$.♦

Shembulli 5. Deltoidi me brinjë $a = 4dm$, $b = 5dm$ dhe $d_2 = 7dm$ (d_2 nuk është boshti i simetrisë së deltoidit) ka $d_1 = x + y = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} + \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 5{,}51dm$, ku x dhe y janë pjesët nga diagonalja të përcaktuara me trekëndëshat barakrahës, $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \approx 19{,}29dm^2$ dhe $P = 2(a + b) = 18dm$. ♦



Detyra

1. Në trapezin barakrahës me kënd të ngushtë α= 45^0, baza më e vogël është 12*cm*, kurse lartësia 3*cm*. Njehso syprinën e trapezit.

2. Njehso syprinën e trapezit barakrahës me baza 20*cm* dhe 12*cm* diagonalet e së cilës janë reciprokisht normale.

3. Njehso syprinën e trapezit me baza 20cm dhe 11cm dhe krahët 17cm dhe 10cm .

4. Në deltoidin me brinjë 4 dhe 5 është brendashkruar rreth me rreze 2. Njehso syprinën e deltoidit.

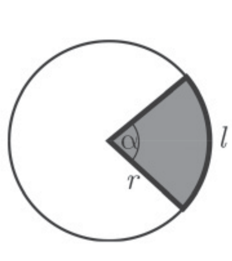
5. Te rombi është brendashkruar rrethi me rreze *r*. Shprehe gjatësinë e brinjës së rombit nëpërmjet rrezes, nëse dihet se ajo është gjashtë herë më e vogël se shuma e diagonaleve.

8.4. Perimetri i vijës rrethore. Syprina e rrethit dhe e pjesëve të rrethit

Gjatësia (perimetri) i vijës rrethore me rreze *r* njehsohet me formulën $\boxed{P = 2r\pi}$, kurse syprina e rrethit me rreze *r* njehsohet me formulën $\boxed{S = r^2\pi}$.

Shembulli 1. Perimetri i vijës rrethore me rreze 7 është i barabartë me $P = 2 \cdot 7\pi = 14\pi$, ndërsa syprina është e barabartë me $S = 7^2\pi = 49\pi$. ♦

Harku rrethor paraqet pjesë të vijës rrethore të përfshirë ndërmjet dy pikave të saja. Gjatësia e harkut rrethor me rreze *r*, që i përgjigjet këndit qendror α njehsohet me formulën $\boxed{l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}}$.

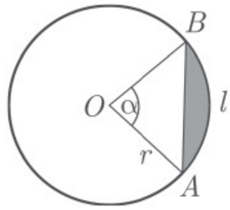


Shembulli 2. Gjatësia e harkut rrethor me rreze 6 dhe kënd qendror 45^0 është i barabartë me $l = \frac{6\pi 45^0}{180^0} = \frac{3\pi}{2}$. ♦

Sektori rrethor me rreze r është pjesa e rrethit e përfshirë ndërmjet dy rrezeve. Syprina e sektorit rrethor me rreze r, me këndin përkatës qendror α njehsohet me formulën $\boxed{S = \frac{r^2\pi\alpha}{360^0}}$ ose $\boxed{S = \frac{lr}{2}}$.

Shembulli 3. Syprina e sektorit rrethor nga rrethi me rreze 6cm, me kënd përkatës qendror 45^0 është e barabartë me $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}6 = \frac{9\pi}{4}\text{cm}^2$. ♦

Segmenti rrethor paraqet pjesë të rrethit e kufizuar përmes një korde. Syprina e segmentit rrethor njehsohet me formulën $S = S_1 - S_{\Delta ABO}$ ku S_1 është syprina e sektorit rrethor me rreze r, me kënd përkatës qendror α.

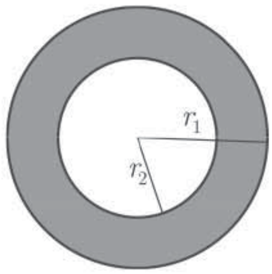


Shembulli 4. Syprina e segmentit rrethor nga rrethi me rreze 6cm, me kënd përkatës qendror 45^0 është e barabartë me

$$S = \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{2}r^2 \sin 45^\circ = \frac{9\pi}{4} - 18\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi - 36\sqrt{2}}{4}\text{cm}^2. \ ♦$$

Unaza rrethore është pjesë e rrafshit e përkufizuar nga dy vija rrethore koncentrike. Syprina e unazës rrethore e përkufizuar me dy vija rrethore koncentrike me rrezet r_1 të vijës rrethore më të madhe dhe r_2 të vijës rrethore më të vogël njehsohet me formulën

$\boxed{S = r_1^2\pi - r_2^2\pi}$ ose $\boxed{S = \left(r_1^2 - r_2^2\right)\pi}$.



Shembulli 5. Syprina e unazës rrethore e formuar prej vijave rrethore koncentrike me rreze 5 dhe 4 është e barabartë me $S = (5^2 - 4\ )^2\ \pi = 9\pi$. ♦

Shembulli 6. Vija rrethore me rreze 6 është ndarë në 8 pjesë (sektor) të barabarta, kurse vija rrethore me rreze 8 është ndarë në 6 pjesë. Nga secila vijë rrethore është marr nga një sektor. Cili ka syprinën më të madhe?

Le të jetë $S_1 = \dfrac{6^2\pi\frac{360^0}{8}}{360^0} = \dfrac{36\pi}{8}$ $\quad S_2 = \dfrac{8^2\pi\frac{360^0}{6}}{360^0} = \dfrac{64\pi}{6}$. Qartë se $S_2 > S_1$. ♦

Shembulli 7. Syprina e unazës rrethore është e barabartë me një të katërtën e syprinës së rrethit më të vogël. Raportin e rrezeve të vijave rrethore e njehsojmë në këtë mënyrë:

Nga kushti $\left(R^2 - r^2\right)\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$ kemi $R^2 = \frac{5}{4}r^2$ d.m.th. $R : r = \sqrt{5} : 2$. ♦

Shembulli 8. Nëse gjatësia e harkut AB është $\pi\ cm$ dhe këndi përkatës qendror është $\alpha=15^0$, atëherë perimetri i vijës rrethore njehsohet në këtë mënyrë:

Nga barazia $l=\dfrac{r\pi\alpha}{180^0}$ fitohet $l=\dfrac{2r\pi\alpha}{360^0}=\dfrac{P\alpha}{360^0}$ d.m.th. $P=\dfrac{l\cdot 360^0}{\alpha}$.

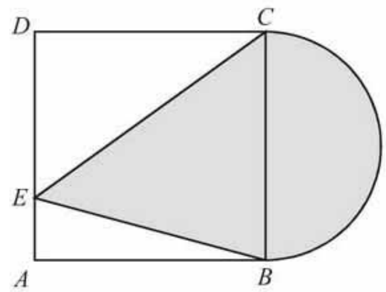
Domethënë perimetri i kërkuar është $P=24\pi cm$. ♦

Detyra

1. Nga pikë e çfarëdoshme A që shtrihet në vijën rrethore janë tërhequr dy korda me gjatësi 9cm dhe 17cm. Njehso rrezen e vijës rrethore, nëse largesa ndërmjet meseve të kordave është 5cm.

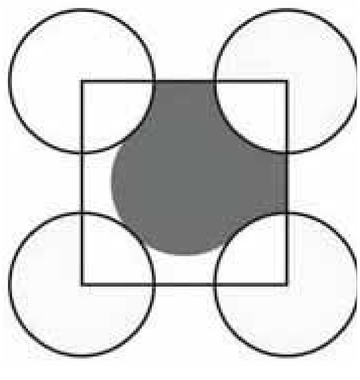
2. Kordat $\overline{AB}=6cm$ dhe $\overline{AC}=8cm$ janë reciprokisht normale. Njehso syprinën e rrethit.

3. Njehso syprinën e pjesës së hijesuar të figurës së dhënë nëse $ABCD$ është katror me diagonale $4cm$, BC është diametri i rrethit dhe E është pikë e çfarëdoshme e brinjës AD.



4. Nga gjysmërrethi me rreze R = 10cm, janë prerë dy gjysmërrathë me rreze $r_1=3cm$ dhe $r_2=7cm$ qendrat e të cilave shtrihen në diametrin e gjysmërrethit dhe preken mes tyre. Njehso syprinën e mbetjes.

5. Njehso syprinën e pjesës së hijesuar nëse të gjitha vijat rrethore kanë rreze $1cm$. Gjithashtu, vijat rrethore kanë qendrat në kulmet e katrorit dhe e prekin vijën rrethore të pestë nga jashtë.



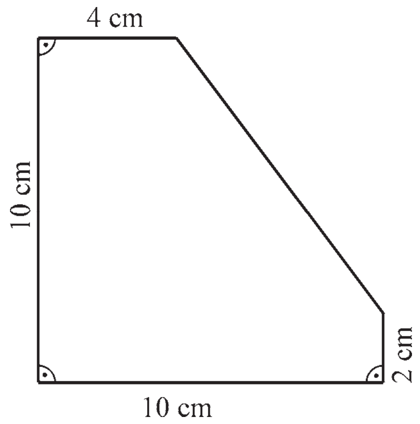
DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Bazat e një trapezi janë a = 25 dhe b = 15, njëri nga krahët është c = 8. Njehso perimetrin dhe syprinën e trapezit nëse shuma e këndeve që shtrihen mbi bazën e madhe është 90°.

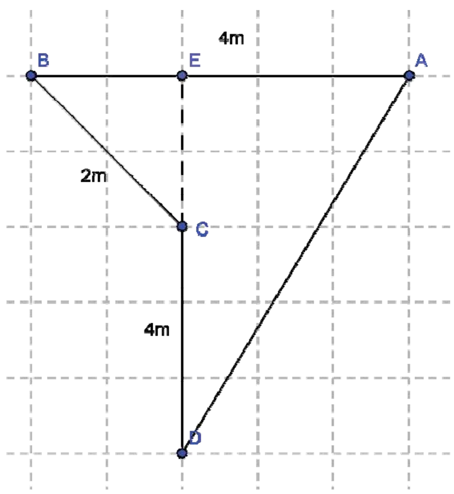
2. Një kuti me ngjyrë mjafton të ngjyroset copë kartoni në formë drejtkëndëshi i cili ka gjatësinë tre herë më të madhe se gjerësia. Nëse nga kjo copë kartoni ndërtojmë drejtkëndësh të ri duke e shkurtuar brinjën më të gjatë për 18 *cm* dhe duke e zgjatur të shkurtën për 8*cm*, do të harxhojmë të njëjtën sasi të ngjyrës. Njehso perimetrin e drejtkëndëshit të ri.

3. Katrori *ABCD* ka brinjën me gjatësi 36*cm*. Në brinjën *AB* është zgjedh pika *E* e cila është në lagësi 12*cm* prej kulmit *B*, në mesin e brinjës *BC* shtrihet pika *F* dhe në brinjën *CD* është zgjedh pika *G* e cila është në largësi 12*cm* prej kulmit *C* . Njehso syprinën e pjesës që shtrihet në brendësinë e trekëndëshit *EFG* dhe në pjesën e jashtme të trekëndëshit *AFD*.

4. Njehso syprinën e figurës.



5. Një lepur ndodhet në livadh. Në fillim kërcen 4*m* në perëndim, pastaj 2*m* në juglindje dhe 4*m* në jug. Njehso largesën në të cilën do të gjendet lepuri nga fillimi i kërcimit.



6. Njehso gjatësinë e vijës së mesme të trapezit kënddrejtë të jashtëshkruar rreth vijës rrethore, nëse largesat nga qendra e vijës rrethore deri te kulmet e krahut më të gjatë janë 6 dhe 8.

7. Segmenti *AB* lidh dy kulme të kundërta të gjashtëkëndëshit të rregullt. Segmenti *CD* lidh pikat e mesme të dy brinjëve të kundërta të gjashtëkëndëshit. Njehso prodhimin e gjatësive të segmenteve *AB* dhe *CD*, nëse syprina e gjashtëkëndëshit është 60 .

8. Njehso syprinën e trekëndëshit me brinjë $a = 2$, $b = 3$ dhe $c = 4$.

9. Njehso syprinën e deltoidit me diagonale $d_1 = 15$ dhe $d_2 = 12$.

10. Gjatësia e hipotenuzës së trekëndëshit kënddrejtë është 6,5cm kurse gjatësia e njërës katete është 2,5cm. Njehso perimetrin e trekëndëshit.

11. Lartësia e trekëndëshit barakrahës e lëshuar mbi bazë është 8cm, kurse krahu është 10cm. Njehso syprinën e atij trekëndëshi.

12. Njehso syprinën e unazës rrethore të kufizuar me vijat rrethore me perimetra 8π dhe 20π.

13. Në vijë rrethore është brendashkruar tetëkëndësh i rregullt, kurse rreth saj është jashtëshkruar katror. Njehso raportin e syprinave të shumëkëndëshave.

14. Syprina e rrethit e brendashkruar në gjashtëkëndësh të rregullt është 9π. Njehso syprinën e gjashtëkëndëshit.

15. Në romb është brendashkruar vijë rrethore me rreze r. Shprehe gjatësinë e brinjës së rombit përmes rrezes, nëse dihet se ajo është katër herë më e vogël se shuma e diagonaleve.

16. Njehso syprinën e trapezit barakrahës me baza 40cm dhe 24cm diagonalet e së cilës janë reciprokisht normale.

17. Në katrorin me brinjë a është brendashkruar katror tjetër kulmet e të cilit e ndajnë brinjën e katrorit të parë në raport 1 : 4. Njehso raportin e syprinave të katrorëve.

18. Njehso syprinën e trapezit me baza $a = 9cm$, $b = 3cm$ dhe krahë $c = 8cm$ dhe $d = 10cm$.

19. Njehso rrezen R të vijës rrethore të jashtëshkruar në trekëndëshin barakrahës ABC me bazë a dhe krah b.

20. Në rombin me diagonale 30cm dhe 40cm është brendashkruar vija rrethore e cila e ndanë brinjën e rombit në dy pjesë. Njehso gjatësinë e pjesës më të madhe.

PËRGJIGJE DHE UDHËZIME

Njësia modulare 1

1.1.

1. Gjykime janë **c)** dhe **ç)**.

2. a) gjykim jo i vërtet, **b)** gjykim i vërtetë, **c)** gjykim i vërtetë, **ç)** gjykim i vërtet

3. a) $\perp$, **b)** T, **c)** $\perp$, **ç)** $\perp$.

4. a) përbërë, **b)** thjeshtë, **c)** përbërë, **ç)** thjeshtë.

1.2.

1. a) T, **b)** $\perp$, **c)** T, **ç)** $\perp$, **d)** T, **dh)** T.

2. a) $\perp$, **b)** T, **c)** T, **ç)** T.

3.a) $p \Leftrightarrow r$:Çdo katror ka diagonale të barabarta nëse dhe vetëm nëse diagonalet në çdo trapez janë të barabarta, $\tau(p \Leftrightarrow r) = \perp$,

b) $q\ r\vee$: Diagonalet në romb janë reciprokisht normale ose diagonalet në çdo trapez janë të barabarta, $\tau({}_{q\ r}\vee) =$ T,

c) $r \Rightarrow p$: Nëse diagonalet në çdo trapez janë të barabarta, atëherë çdo katror ka diagonale të barabarta, $\tau(r \Rightarrow p) =$ T.

4. a) T**, b)** T**, c)** $\perp$.

5. a) $\perp$, **b)** T, **c)** $\perp$, **ç)** T, **d)** $\perp$, **dh)** T.

1.3.

1. a) formulë gjykimore neutrale, **b)** formulë gjykimore neutrale.

4. a) po (Udhëzim: ndërto tabelë me 8 mundësi për p, q dhe r), **b)** po.

5. a) po, **b)** po.

1.4.

1. $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$**,** $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$**,** $B \neq C$.

2. a) gjykim i vërtetë, **b)** gjykim i vërtetë,**c)** gjykim jo i vërtet.

3. $B = \{15, 20, 35, 40, 55\}$.

4. $\{2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29\}$.

5. Bashkësia $\varnothing$ nuk ka elemente, kurse $\{\varnothing\}$ është bashkësi njëelementëshe.

1.5.

1. a) $A \cap B = \{2, 4, 5\}$, $B \cap C = \{4, 5, 7\}$ dhe $A \cap C = \{3, 4, 5\}$,

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$**,** $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dhe $C \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$,

c) $A \setminus B = \{1, 3\}$, $B \setminus C = \{2, 6\}$ dhe $C \setminus A = \{7,8\}$**,**

ç) $A \Delta B = \{1, 3, 6, 7\}$, $B \Delta C = \{2, 3, 6, 8\}$ dhe $C \Delta A = \{1, 2, 7, 8\}$.

2. a) $A \cap B = A$, **b)** $A \cup B = B$, **c)** $A \setminus B = \varnothing$, **ç)** $B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$, **d)** $A \Delta B = B \setminus A$, **dh)** $A'_B = B \setminus A$.

3. a) $A \setminus B = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19\}$, **b)** $A \Delta B = A \setminus B$.

4. a) $(A \times A) \cap A = A^2 \cap A = \varnothing$, **b)** $A \times (A \cap A) = A \times A = A^2$, **c)** $A \Delta A' = \mathcal{U}$.

5. a) $A \setminus C = \varnothing$, **b)** $B \Delta C = \{1,2,4\}$, **c)** $B \cup C = \{1,2,3,4\}$,

ç) $A \times C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2,2), (2, 3)\}$.

1.6.

1. a) $M_{P_1(x)\wedge P_2(x)}=\{6\}$, **b)** $M_{P_1(x)\vee P_2(x)}=\{2,3,4,6,8,9,10\}$,

c) $M_{\neg P_1(x)}=D\setminus M_{P_1(x)}=\{1,3,5,7,9\}$.

2. a) $M_{P_1(x)\veebar P_2(x)}=\{-3,-1,0,1\}$, **b)** $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=\{-4,-3,-2,0,2,3,4\}$,

c) $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=\{-4,-2,2,3,4\}$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) jo, **b)** po, **c)** jo, **ç)** jo.

2. a) gjykim i vërtetë, **b)** gjykim i vërtetë, **c)** gjykim i vërtetë, **ç)** gjykim i pa vërtetë.

3. a) T, **b)** $\perp$, **c)** T**, ç)** T.

4. a) „Numri 12 është i pjesëtueshëm me 3“, „Numri 12 është i pjesëtueshëm me 4“,

b) „$\frac{2}{3}$ është numër racional“, „0, (3) është numër racional“,

c) „Numri 3 është numër i përbërë“, „Numri 3 është tek“ .

5. a) $\perp$, **b)** T, **c)** T, **ç)** $\perp$, **d)** $\perp$.

6. a) T, **b)** T, **c)** $\perp$.

7. a) T, **b)** T, **c)** T.

8. a) tautologji, **b)** kontradiksion.

11. $B = \{6,12\}$, $C = \{4,8,12\}$, $B \neq C$ **.**

12. a) $\perp$,**b)**T,**c)** T.

13. $B =\{15,20,30,35,40\}$.

14. $\{3,6,9\}$.

15. a) $A \cap B = \{3,4,5\}$, **b)** $B \cup C = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$, **c)** $A\setminus B =\{1,2\}$**, ç)** $C\Delta A = \{9\}$.

16. a) $A \cap B = B$, **b)** $B\setminus A = \varnothing$, **c)** $A\Delta B= A\setminus B$**.**

17. $A\setminus B =\{10,11,13,14,16,17,19\}$, **b)** $A\Delta B = \{3,6,9,10,11,13,14,16,17,19\}$**.**

18. a) $(A \cap A)\Delta A' = \mathcal{U}$, **b)** $A \times (A \cup A) = A^2$, **c)** $(A \cap A') \times A' = \varnothing$**.**

19. $A \times B = \{0,2\} \times \{0, -1\} = \{(0,0), (0, -1), (2, 0), (2, -1)\}$.

20. a) $M_{P_1(x)\veebar P_2(x)}=\{-3,1,-2,-1\}$, **b)** $M_{P_1(x)\Rightarrow P_2(x)}=\{-4,-2,-1,0,2,3,4\}$,

в) $M_{P_1(x)\Leftrightarrow P_2(x)}=\{-4,0,2,3,4\}$.

Njësia modulare 2

2.1.

1. a) gjykim i vërtetë, **b)** gjykim i pavërtetë, **c)** gjykim i vërtetë.

2. a) 1310, **c)** 330,**b)** 1275, **ç)** 10000.

3. a) i përbërë, **b)** i përbërë, **c)** i thjeshtë.

4. a) 2, **b)** 117780.

5. $SHVP(3,5,7) = 105$ dhe $2 \cdot 105 = 210$, prandaj numri i kërkuar është 210.

2.2.

1. a) 7, **b)** 0, **c)** 33.

2. a) 18, **b)**38.

3. a) 19, **b)** 27.

4. $A = 24 < 72 = B$.

5. $(-2+3-5+11)+(-3+2-6+10)+(-1+4-4+12)+(2-3+5-11)=14$

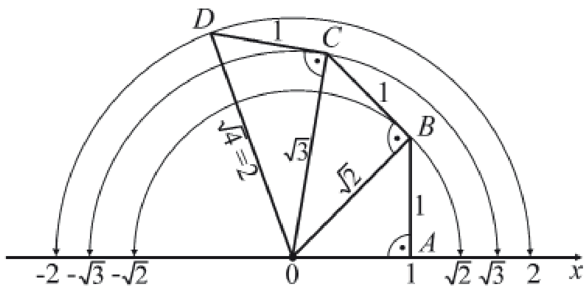
2.3.

1. a) 0,625, **b)** 0,16, **c)** 0,8125. **2. a)** 5,(83) > 5,8(3), **b)** 4, (371) < 4,(37).

3. a) −752, **b)** 8550. **4. a)** $\frac{62}{15}$, **b)** $\frac{1559}{660}$. **5.** 1.

2.4.

1.



2. $(-3,6]\cap[-5,2) = (-3,2)$ dhe $(-3,6]\cup[-5,2) = [-5,6]$.

3. a) 3,4567 < 3,4576, **b)** −3,1223 > −3,1224 .

4. a) $7\sqrt{7}$, **b)** $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}$.

5. a) shenja të ndryshme, **b)** shenja të njëjta edhe ato pozitive, **c)** shenja të njëjta edhe ato negative,**ç)** shenja të njëjta.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, **b)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, **c)** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 31$.

2. a) 1404, **b)** 6.

3.a)1000, b) 855.

4. 84.

5. $5460cm = 54{,}6m$.

6.{105,140,175} .

7. a) 10, **b)** −1.

8. a) 0, **b)** −1179, **c)** −1014, **ç)** −724.

9. a) 42, **b)** 41, **c)** 31, **ç)** 8.

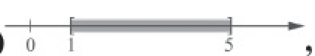
10. a) −678 , **b)** $\frac{2143}{234}$.

11. a) 1,39, **b)** 0,125.

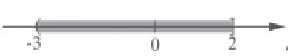
12. a) $\frac{139}{12}$, **b)** $-\frac{29}{90}$.

13. a) $\frac{133}{18}$, **b)** $\frac{245}{99}$.

14.

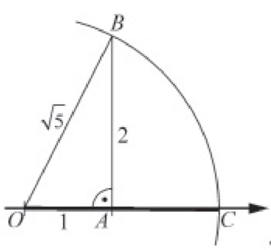
a) 

, **b)** 

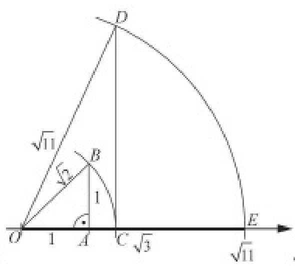
, **c)** 

.

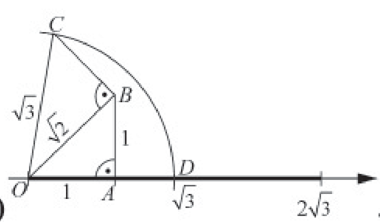
15.



a) ,



b) ,



c) .

16. a) $[0,4]$**, b)** $(-2,5)$**. 17.** $[-3,8;3,2]$**. 18. a)** $8\sqrt{5}$**, b)** $13\sqrt{2}$**. 19. a)** $15,2$**, b)** $7,8$**, c)** $42,55$**.**

20. jo

Njësia modulare 3

3.1.

1. a) 17; **b)** 5; **c)** 0. **2. a)** 399; **b)** −23,568. **3. a)** 150; **b)** 4375.
4. a) a^{10}; **b)** a^{n+5}; **c)** x^n; **ç)** a^3; **d)** b^{n-1}; **dh)** a.
5. a) a^6 ; **b)** a^{2n} ; **c)** $8a^3b^6$; **ç)** $9a^4b^4c^6$; **d)** $100^3 = 1000000$; **dh)** $-a^6$ **e)** 1;
ë) $-\frac{125x^6}{b^3}$; **f)** $\frac{a^{12}b^4}{16c^{12}}$

3.2.

1. a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$; **b)** $\left(\frac{4}{5}\right)^0$. **2. a)** 2; **b)** 128.

3. a) $\frac{1}{16}$; **b)** −16; **c)** 16; **ç)** −4; **d)** 1; **dh)** $\frac{1}{15,1321}$. **4. a)** $\frac{3x}{4a^2c^3}$; **b)** $\frac{3a^2y^4}{2^2x^2}$; **c)** $\frac{5c^3x^3}{4a^5}$.

5. a) $xa^{-1}y^{-2}$; **b)** $3xc^{-1}y^3$; **c)** $2ax^2(a-b)^3$. **6. a)** $\frac{40}{5x^2c^3a^6}$; **b)** $\frac{25b}{a^5}$; **c)** $4x^2y^6$.

7. a) $2x^3+\frac{4}{x^3}$; **b)** $\frac{125}{8}x^9y^{24}$; **c)** $\frac{xy}{y-x}$; **ç)** $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^2}$;

3.3.

1. a) $a = 3$; **b)** $x = -2$; **c)** $a = b$. **2. a)** −4; **b)** 2,5; **c)** −1; **ç)** $-\frac{1}{3}$; **d)** $\frac{2}{5}$.
3. $-3ab$ dhe ab, $\frac{1}{2}a^2x$, $-a^2x$ dhe $6a^2x$, $-7ax^2$ dhe ax^2. **4.** $6ab$, $-a^2b^2$, $2ax$, $-\frac{x}{3}$, x^2y, $-0,5a$.
5. 4. **6. a)** Po; **b)** Po; **c)** Jo. **7. a)** $2ab - 5ab^2$; **b)** $1,2a - 1,5b - ab$.

3.4.

1. a) $19x^4 - 4x^3 + x^2$; **b)** $7xy$. **2. a)** $5x^2 + 5ax + 8$; **b)** $3a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 3ab^3 - b^4$.
3. a) $-8a$; **b)** $5x$; **c)** 0; **ç)** $3ax + ax^2$.
4. a) $2a^2x - 3ax^2 + 8$; **b)** $5x^3y + xy^2 + 2xy - 5x^2y - 3$.
5. a) $-2x^2 - 5xy + 6y^2$; **b)** $6x^2y - 2xyz - 2x^2z$.

3.5.

1. a) $10a^5b^4$; **b)** $-3a^2x^8y^4$; **c)** $\frac{3}{7}x^3y^5z$.
2. a) $-16x^5y + 8x^4y^2 + 10x^3y^3 - 6x^2y^3$; **b)** $-9a^2b^3c^2 + 21a^3b^2c^3 + 3a^3b^2c^2$.
3. a) $x^3 - 5xy^2 + 4xy^2 + 8x^2 - 15xy - 8y^2 + 10y + 15x$;
b) $3a^6 - 15a^5b + 26a^4b^2 - 28a^3b^3 + 17a^2b^4 + 20ab^5 - 9b^6$.
4. a) $x^2 - 10x + 25$; **b)** $9c^2 + 12c + 4$; **c)** $1 - 6x + 9x^2$; **ç)** $9x^2 + y^2 + 25 - 6xy + 30x - 10y$;
d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$; **dh)** $64y^4 + 49z^2 + 112y^2z$; **e)** $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$;
ë) $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$. **5. a)** $27 - 4x$; **b)** $-c^2$.

3.6.

1. a) $-4x$; **b)** $3ab$; **c)** $-\frac{3}{5}y$.

2. a) $4a - 5b$; **b)** $-1 + 3x^2y^2$; **c)** $6ax - 9a^2x^2 + 15a^3$; **ç)** $3x^2 - 2ax + 5a^2$.

3. a) $3a^3 - 6a^2b + 2b^2 - 4a^3b$; **b)** $-5x + 2a - 6x^2 - 8a^2x^3$; **c)** $x^2 - 9y^2 - \frac{2x^2}{y} + \frac{y}{2}$

4. a) $x^2 - x + 1$; **b)** $2a^2b - 3ab^2 - b^3$; **c)** $3x^3 - 2x^2 + x - 1$. **5. a)** Jo; **b)** Po; **c)** Jo; **ç)** Po.

3.7.

1. a) $3(x + 2)y$; **b)** $2a(b - c)$; **c)** $7x^3(x^2 + 3)$.

2. a) $9b^3(3a - b)$; **b)** $ay(a - y^2)$; **c)** $3a(3x - 2y + 4z)$.

3. a) $(2a + 5c)(b - 3)$; **b)** $(a - b)(x + 1)$; **c)** $(5 - 2x - 2y)(x + y)$.

4. a) $(ab - 2)(ab + 2)$; **b)** $(10x - 1)(10x + 1)$;**c)** $\left(\frac{1}{3}a - c\right)\left(\frac{1}{3}a + c\right)$.

5. a) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; **b)** $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$; **c)** $(2m - n)(4m^2 + 2mn + n^2)$.

6. a) $(2a - b - c)(2a + b + c)$; **b)** $(x - y)(x + y - 3)$; **c)** $(a - b)(x - y)(a^2 + ab + b^2)$.

3.8.

1. a) 6; **b)** 15; **c)** 15; **ç)** 4. **2. a)** $3ab$; **c)** $3x^2y^2$; **c)** $a(a + b)^2$; **ç)** $x + y$; **d)** $x^2 - y^2$.

3. a) 900; **c)** 168; **c)** 4500; **ç)** 2880.

4. a) $120a^3b^3c^2$; **b)** $ab(x + 2)$; **c)** $x(x + y)$; **ç)** $a^2(a + 3b)(a - 3b)$;
d) $x(1 - x)(x^3 + 1)$; **dh)** $15y(x - 2y)^3(x + 2y)$.

3.9.

1. a) Nuk ka kuptim për $x = 0$, kurse për $x = -2$ merr vlerën 0;
b) Nuk ka kuptim për $x = 1$, kurse për $x = 3$ merr vlerën 0;
c) Nuk ka kuptim për $x = 2$ dhe $x = 5$, kurse asnjëherë s'është e barabartë me zero.

2. a) $\frac{3x}{4a}$; **b)** $\frac{3x^2}{y}$; **c)** $\frac{x-y}{a}$; **ç)** $\frac{1}{3a-1}$; **d)** $\frac{3}{a^2-2a+4}$; **dh)** $-\frac{1}{3a}$.

3. a) $-\frac{1}{2a}$, $-\frac{1}{6}$; **b)** $x-2$; 1,5; **c)** в) -1.

4. a) $\frac{a+1}{a(a+1)}$ dhe $\frac{2a}{a(a+1)}$; **b)** $\frac{20c^2}{30a^2b^3c^2}$, $\frac{25a^3}{30a^2b^3c^2}$ dhe $\frac{6ab^2c}{30a^2b^3c^2}$; **c)** $\frac{a(x+y)}{(x+y)^2}$ dhe $\frac{b}{(x+y)^2}$;

ç) $\frac{2x(x-y)}{x^2-y^2}$, $\frac{2y(x+y)}{x^2-y^2}$ dhe $\frac{xy}{x^2-y^2}$; **d)** $\frac{10x}{2x(2x-1)}$ dhe $\frac{x}{4x^2-2x}$;

dh) $\frac{2a(a+x)}{a(a-x)(a+x)^2}$, $\frac{3ax(a^2-x^2)}{a(a-x)(a+x)^2}$ dhe $\frac{5a^2(a-x)}{a(a-x)(a+x)^2}$.

3.10.

1. a) $\frac{3(a-1)}{b}$; **b)** $\frac{2(a+x+1)}{a}$. **2. a)** $\frac{x-2}{(x+1)(2x+1)}$; **b)** $\frac{6x-8}{(x-2)^2(x+2)}$.

3. a) $-\frac{1}{x^2+1}$; **b)** $\frac{7}{2(a+2)}$. **4. a)** $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{4x}{(x-3)(x+3)^2}$. **5. a)** $\frac{2a(a+b)}{a^2+b^2}$; **b)** $-\frac{1}{2x}$.

6 a) $\frac{2y}{x-1}$; **b)** $\frac{3x}{2a}$.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) 28,27; **b)** −32. **2. a)** $\frac{33}{43}$; **b)** −0,3. **3. a)** x^8; **b)** a^7b^4; **c)** $\frac{a^3}{8c^3}$.

4. Shprehje racionale të plota janë nën a) dhe ç), shprehje thyesore racionale janë nën b) dhe c).

5. a) jo; **b)** po. **6.** $5x^2 + 8x - 7$. **7. a)** $4xy - 3x$; **b)** $3x$. **8.** $-2x^2 + 5xy - y^2 - 2y + 4x + 6$.

9. a) $x^2 + 4xy - y^2$; **b)** $-c^2 - 4c + 9$. **10. a)** 160801; **b)** 494209; **c)** 1004004.

11. $5a^2 - a - 122$. **12.** Kryej pjesëtimin e polinomeve $x^2 + x + 1$.

13. a) $(a + 3)(a^2 + 3)$; **b)** $(2a - b)(6x + y)$.

14. a) $(x^2 - 1)(x^3 - 1)$; **b)** $(x + y)(x^2 - xy + y^2 + x2)$.

15. a) $(a - b - c)(a - b + c)$; **b)** $(x + a)(x^2 - 3x + 1)$.**16. a)** 15; **b)** 1. **17. a)** 1500 **b)** $30x^3a^4b^3$.

18. a) $\frac{1}{y}$; **b)** $\frac{x+1}{x-1}$. **19.** $\frac{2a^3c}{abc}$, $\frac{5b^3a}{abc}$, dhe $\frac{7c^3b}{abc}$. **20. a)** $\frac{1}{x^2-c^2}$; **b)** 4. **21.** $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$. **22.** 15

Njësia modulare 4

4.1.

1. Të gjitha proporcionet janë të sakta. **2. a)** $x = 4{,}8$; **b)** $x = 15$; **c)** $x = 1$. **3.** $x = 4$, $y = 12$, $z = 12$.

4. $a : b : c : d = 12 : 18 : 15 : 11$. **5.** pjesa e parë 60, pjesa e dytë 180, pjesa e tretë 360.

4.2.

1. a) proporcionale të drejta, **b)** proporcionale të zhdrejta, **c)** proporcionale të drejta, **ç)** proporcionale të zhdrejta.

2. Janë proporcionale të drejta me koeficient të proporcionit 6.

3. jo. **4.** Varësi proporcionale të drejtë.

5. Varësi proporcionale e zhdrejtë, kurse koeficienti i proporcionit është vëllimi i basenit i shprehur në litra.

4.3.

1. 6 punëtorë. **2.** 57,6 kilogram sheqer. **3.** 5 orë dhe 24 minuta. **4.** 4 ditë. **5.** $2400kW$.

4.4.

1. a) 112,5 kilogram; b) 720 denar. **2.** 15% **3.** 35 nxënës. **4.** 120 kilogram. **5.** 1800 denar.

4.5.

1. a) 372, 558 dhe 930; **b)** 900, 600 dhe 360. **2.** 540, 360 dhe 180.

3. 5913 denarë, 9461 denarë dhe 11826 denarë.

4. 300000 denarë, 360000 denarë dhe 432000 denarë

5. 50000 denarë, 45000 denarë dhe 40500 denarë.

4.6.

1. a) 360 euro; **b)** 360 euro; **c)** 4080 euro. **2. a)** 3300; **b)** 3200; **c)** Merva. **3.** 7,5%.

4. 38465 denarë. **5.** 16347 denarë.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) 1 : 4; **b)** 2 : 5; **c)** $\frac{32}{51}$; **ç)** 1 : 3b; **2.** 16 : 15. **3. a)** $x = 6$; **b)** $x = 3$; **c)** $x = \frac{ab}{a-b}$.

4. 16, 40, 56, 48. **5.** 480 denarë. **6.** 864 metra kub. **7.** 27 punëtorë.

8. 1 orë e 30 minuta. **9.** 5400 denarë. **10.** 24 ton. **11.** 100 ditë. **12.** 45,83%.

13. 18 denarë. **14.** 40360000 banorë. **15.** 612 denarë.

16. 600 litra, 800 litra, 440 litra, 320 litra dhe 320 litra. **17.** 360000 denarë. **18.** 18,5%.

19. 2572,5 denarë. **20. a)** 4504,5 denarë; **b)** 15004,5 denarë.

Njësia modulare 5

5.1.

1. a) po; **b)** jo; **c)** jo. **2. a)** $x = 2$; **b)** $x=\frac{9}{5}$; **c)** $x=\frac{2}{5}$; **ç)** $x=\frac{8}{5}$.. **3.** $x = -3$.
4. a) po; **b)** jo; **c)** po.

5.2.

1. a) $x = 4$; **b)** $x = 6$. **2. a)** $x = 4$; **b)** $y = 13$. **3. a)** $x=\frac{5}{13}$; **b)** $x=\frac{26}{35}$.
4. a) $x=\frac{9}{4}$; **b)** $y \in \circ$ dhe $y \neq \pm 3$. **5. a)** $x = 1$; **b)** $x = -2$ dhe $x = 1$.

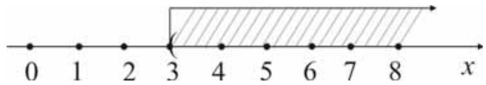
5.3.

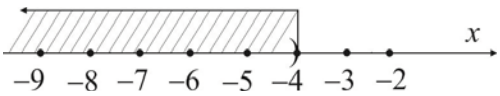
1. 36. **2.** Nëna ka 42 vjet kurse Genti 14 vjet **3.** 1956, 5 denarë.
4. Krahu është i gjatë 13*cm*, kurse baza 10*cm*. **5.** 9 orë e 20 minuta.

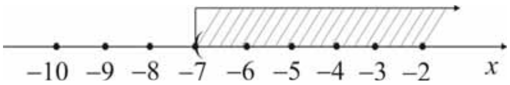
5.4.

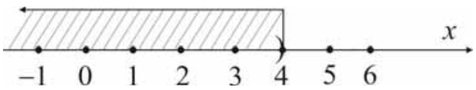
1. a) po; **b)** po. **2. a)** po; **b)** po; **c)** po.

5.5.

1. a)


b)


c)


ç)


2. a) $\left(\frac{3}{2,},\infty\right)$ **b)** $(-1,\infty)$ **c)** $(-9,\infty)$. **3. a)** $\left(\frac{9}{7},\infty\right)$ **b)** $\varnothing$ **c)** $\left(\frac{55}{13},\infty\right)$

4. a) $(-\infty,2)$ **b)** $\left(\frac{13}{14},\infty\right)$ **c)** $\left(-\infty,\frac{70}{14}\right]$ **5.** më së shumti 32.

5.6.

1. $\left(-\infty,\frac{2}{5}\right)$. **2.** $\left(\frac{8}{3},\infty\right)$. **3.** $\left(\frac{5}{2},\infty\right)$. **4.** $(-2,\infty)$. **5.** $(4,\infty)$. **6.** $\left(\frac{11}{7},11\right)$. **7.** $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$.

8. $\left(-\frac{3}{2},4\right)$. **9.** $(-5,-1)$. **10.** $(2,\infty)$. **11.** $(-\infty,\infty)$. **12.** $\left(\frac{9}{14},\infty\right)$.

13. Pas 11 viteve punë.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) $x = -2$; **b)** $u = 2$. **2. a)** $t = 12$; **b)** $w = -11$. **3. a)** $x=\frac{1}{6}$ **b)** $x=\frac{3}{16}$.

4. a) nuk ka zgjidhje; **b)** $x = -5$. **5. a)** $y=-\frac{1}{4}$; **b)** $x=\frac{19}{5}$. **6. a)** $x = 0$ dhe $x = 6$; **b)** $x = -2$.

7. 18 dhe 20. **8.** Merita ka 14 vjet, kurse vëllai i saj ka 11 vjet. **9.** 32*cm*.

10. 4 orë. **11. a)** $(-\infty,6\,;]$ **b)** $\left[1\frac{4}{31},\infty\right)$. **a)** $(-1,\infty)$; **b)** $\left(-\infty,\frac{3}{7}\right)$.

13. $\left(-\frac{5}{2},4\right)$. **15.** $(-\infty,-4)$. **16.** $\left(\frac{13}{5},\infty\right)$.

17. sistemi nuk ka zgjidhje. **18.** $(7,\infty)$. **19.** $(-\infty\ \infty,\ )$.
20. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$. **21.** $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{5},\infty\right)$. **22.** $\left(\frac{5}{4},2\right)$.

Njësia modulare 6

6.1.

1. a) $a=6, b=-1$, **b)** $a=-2, b=1$, **c)** $a=\sqrt{3}, b=-\frac{1}{2}$, **ç)** $a=\frac{3}{7}, b=-\frac{5}{7}$. **2. a)** $x_0=3$, **b)** $x_0=-\frac{9}{10}$, **c)** $x_0=4$, **ç)** $x_0=-\frac{1}{7}$. **3. a)** $a=2$, **b)** $a=\frac{8}{3}$, **c)** $a=1$. **4.** $D\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ i takon grafikut të funksionit. **5. a)** $a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{4}$, **b)** $a=5, b=0$.

6.2.

1. *f* është monotonë rritëse, kurse *g* dhe *h* janë monotonë zvogëluese. **2. a)** $k\in\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$, **b)** $k\in\left(\frac{1}{5},\infty\right)$. **3. a)** $a = 1$, **b)** meqenëse gjithmonë $a - 7 \neq a + 1$ rrjedh se drejtëzat nuk janë paralele për asnjë vlerë të a . **4. a)** priten në (0,2), **b)** priten në $\left(0,\frac{3}{4}\right)$, **c)** nuk priten në boshtin e ordinatës. **5. a)** $s = 2$, **b)** $s = -3$.

6.3.

1. $b=\frac{7}{3}$. **2.** $c=9$. **3.** $2x-y=12$. **4.** $5x-3y=16$. **5.** $(x,y)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$.

6.4.

1. a) $(2,1)$, **b)** $\left(\frac{9}{7},\frac{8}{7}\right)$. **2. a)** $(1,2)$, **b)** $\left(\frac{8}{9},\frac{2}{3}\right)$. **3. a)** $(2,1)$, **b)** $\left(1,\frac{1}{5}\right)$. **4. a)** $(1,2)$, **b)** (2, 3). **5. a)** (10, 2), **b)** (3, 2) . **6. a)** (4, 3), **b)** (3, 2).

6.5.

1. 9 nxënës, 1520 denarë. **2.**76 dhe 54. **3.** 12 dhe 8. **4.** 80°, 80° dhe 20°. **5.** 24*cm* dhe 12*cm*

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. a) $x_0=1$, **b)** $x_0=-\frac{11}{2}$, **c)** $x_0=\frac{4}{5}$, **ç)** $x_0=-\frac{11}{8}$. **2. a)** $a=-\frac{5}{2}$, **b)** $a=13$, **c)** $a=-\frac{11}{4}$. **3. a)** $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{1}{7}$, **b)** $a=3$, $b=0$. **4. a)** $k>-\frac{1}{3}$, **b)** $k>-\frac{1}{5}$. **5. a)** $a=\frac{2}{13}$, **b)** $a=-8$. **6. a)** $m=\frac{1}{2}$, **b)** $m=\frac{11}{3}$. **7.** $b=\frac{7}{5}$. **8.** $c=10$. **9.** $2x-y=8$. **10.**

$\left\{\left(x,\frac{5x+1}{3}\right)|\, x\in\mathbb{R}\right\}$. **11.** $(x,y)=(-2,-1)$. **12. a)** $(2,-3)$ **b)** $(2,1)$. **13. a)** $(1,2)$, **b)** $\left(\frac{18}{5},\frac{4}{5}\right)$. **14. a)** $(3,2)$, **b)** $(2,1)$. **15. a)** $(1,2)$, **b)** $(1,-1)$. **16. a)** $\left(\frac{32}{5},\frac{4}{5}\right)$, **b)** $\left(\frac{17}{7},-\frac{2}{7}\right)$. **17. a)** $\left(\frac{55}{19},\frac{29}{19}\right)$, **b)** $\left(\frac{17}{4},\frac{7}{2}\right)$. **18.** Topi kushton 1000 denarë. **19.** 80° dhe 10°. **20.** $\left(\frac{61}{15},\frac{83}{45}\right)$.

Njësia modulare 7

7.1.

1. jo. **2.** Drejtkëndëshi është katërkëndësh që ka kënde të barabarta sikur katrori.

7.2.

1. $A, B, C, E \in p$, $M,N \notin p$.
2. mund të tërhiqen pafund shumë vija të lakuara, kurse vetëm një vijë e drejtë(një drejtëz).
3. pafund shumë. **4. a)** saktë; **b)** saktë. **5. a)** po; **b)** jo. **6.** 3. **7.** 7*cm*.
8. a) po; **b)** po; **c)** jo; **ç)** po. 9. 2*cm*, 0*cm*, 4*cm*, 0*cm*, 7*cm*.
10. largesa, pika dhe barabarësia . **11.** Pika *K* shtrihet mes pikave *S* dhe *M*.
12. ato janë jolineare dhe janë shpërndarë sipas këtij radhitjeje *A*,,*S M B*, .
13. Pika *B* shtrihet mes *A* dhe *M*, ose *B* = *A* ose *B* = *M*. **14.** po.
15. a) mundet; **b)** nuk mundet. **16.** 3. **17. a)** 3; **b)** 4. **18.** segmenti *AB*.
20. a) Teorema; **b)** Aksioma; **c)** Teorema; **ç)** definicioni.

7.3.

3. 8 kënde konvekse mes të cilave katër janë kënde të shtrira.
4. Çdo kënd ka dy kënde të puqtë të cilat janë të barabarta mes tyre. **7.** kënd i shtrirë.
8. a) Vija e thyer do të ketë vetëm një brinjë dhe do të paraqet segment;
b) Vija e thyer do të ketë tre brinjë dhe do të paraqet trekëndësh **9. a)** 3; **b)** 4.

DETYRA PËR PËRSËRITJE

2. $5cm \le AB \le 19cm$. **3. a)** Jo; **b)** Po; **c)** Po;**ç)** Jo; **d)** Po, kur $A \equiv B$. **4.** Nuk është e saktë. **5. a)** jo; **b)** po.
6. Është përcaktuar me dy pika: fillimi dhe pikë tjetër e çfarëdoshme.
7. Drejtëz, gjysmëdrejtëz ose union i gjysmëdrejtëzave disjunkte.
8. a) union i dy gjysmëdrejtëzave disjunkte; b) dy pika; c) segment.
9. a) Po; **b)** Jo; c) Pika *M* mund të shtrihet dhe s'mund të shtrihet në segmentin. **10.** $\frac{a+b}{2}$.
11. a) 4; **b)** 96; **c)** 2688 (për 28 ditë), 2784 (për 29 ditë), 2880 (për 30 ditë), 2976 (për 31 ditë).
12. $\frac{\pi}{3}$. **13. a)** 1; **b)** 2; **c)** 4. **14.** $a \uparrow\uparrow c$, $d \uparrow\uparrow e$, $a \uparrow\downarrow b$, $b \uparrow\downarrow c$.
15. a) Gjysmëdrejtëz **b)** Gjysmëdrejtëz. **16. a)** bashkësi e zbrazët, pikë ose segment; **b)** drejtëz ose dy gjysmëdrejtëza pa pika të përbashkëta.

Njësia modulare 8

8.1.

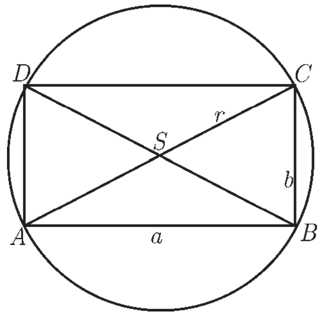
1. a) $a=\sqrt{P}=\sqrt{36}=6\text{cm}$ dhe $d=\sqrt{2P}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}\text{cm}$,
b) $a=\frac{L}{4}=\frac{12}{4}=3\text{cm}$ dhe $d=a\sqrt{2}=\frac{L\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2}\text{cm}$.

2. a) $b=\frac{P}{a}=\frac{108}{12}=9dm$ dhe $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=15dm$,

b) $a=\frac{L}{2}-b=\frac{246}{2}-80=43\text{cm}$ dhe $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{80^2+43^2}=\sqrt{8249}\approx 90{,}8\text{cm}$.

3. Nëse diagonalja e drejtkëndëshit e $d = 2r = 25$cm dhe $b = 7$cm.

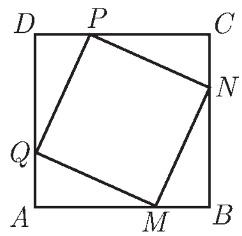
Atëherë $a=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24\,\text{cm}$, prandaj syprina është $S = ab = 24 \cdot 7 = 168\text{cm}^2$.



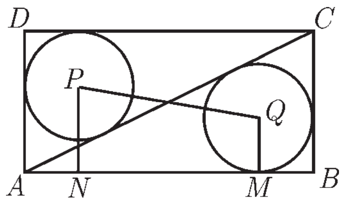
4. Le të jetë në katrorin $ABCD$ i brendashkruar katrori $MNPQ$ Dhe sipas kushtit të detyrës $\overline{AM}:\overline{MB}=2:3=k$.

Atëherë $\overline{AM}=2k$, $\overline{MB}=3k$, prandaj $\overline{AB}=a=5k$ dhe

$\overline{MN}=a_1=\sqrt{(3k)^2+(2k)^2}=\sqrt{13k^2}$. Për raportin e syprinave kemi $\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^{\,2}}=\frac{25k^2}{13k^2}=\frac{25}{13}$.

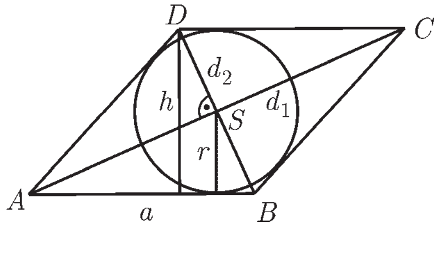


5. Nga teorema e Pitagorës kemi $\overline{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10cm$, prandaj nga barazia $S = rs$ për rrezen e vijave rrethore të brendashkruara kemi $r = 2cm$. Katërkëndëshi $MNPQ$ është trapez kënddrejtë, ku P dhe Q janë qendrat e vijave rrethore të brendashkruara, kurse N dhe M janë këmbëzat e tyre përkatëse në brinjën AB të drejtkëndëshit. Prandaj $\overline{PQ}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}cm$.



6. $b=\frac{L}{2}-a=\frac{124}{2}-12=50dm$ dhe $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{50}{12}=\frac{25}{6}$.

7. Meqenëse diagonalet janë edhe simetrale të këndeve të rombit, rrjedh se qendra e rrethit të brendashkruar është në prerjen e diagonaleve. Prandaj $h = 2r = 4{,}8$cm. Për syprinat kemi $S=ah=\frac{d_1d_2}{2}$, d.m.th. $4{,}8a=\frac{6d_1}{2}$ prej ku fitojmë se $d_1=1{,}6a$.



Nga trekëndëshi kënddrejtë ABS fitojmë se $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2$, d.m.th.

$d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 4a^2$, dhe rrjedh se $(1{,}6\,)a^2 + 6^2 = 4a^2$, pra $a = 5$cm .

Pra, syprina është $S = ah = 4{,}8 \cdot 5 = 24\text{cm}^2$.

8.2.

1. $S=\sqrt{24\cdot 3\cdot 7\cdot 14}=\sqrt{7056}=84$, ku $s=\dfrac{a+b+c}{2}=24$, $h_a=\dfrac{2S}{a}=8$,

$h_b=\dfrac{2S}{b}=\dfrac{168}{17}$ dhe $h_c=\dfrac{2S}{c}=16.8$, $r=\dfrac{P}{s}=\dfrac{84}{24}=\dfrac{7}{2}$, $R=\dfrac{abc}{4P}=\dfrac{85}{8}$ dhe $P=2s=48$.

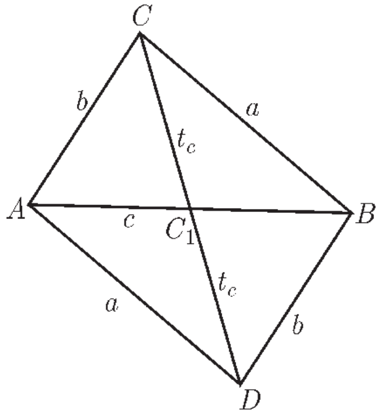
2. $P=\dfrac{ah_a}{2}=60\text{cm}^2$, $h_a=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\text{cm}$, $h_b=\dfrac{2S}{b}=\dfrac{120}{13}\approx 9{,}2\text{cm}$, $r=\dfrac{S}{s}=\dfrac{10}{3}\text{cm}$,

ku $s=\dfrac{a+2b}{2}=18\text{cm}$, $R=\dfrac{ab^2}{4\dfrac{bh_b}{2}}=\dfrac{ab}{2h_b}=\dfrac{130}{\dfrac{240}{13}}=\dfrac{169}{24}\text{cm}$ dhe P=2s=36cm.

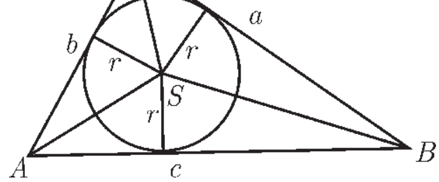
3. Le të jetë $a=29\text{cm}$, $b=27\text{cm}$ dhe $t_c=\overline{CC_1}=26\,\text{cm}$. Le të jetë pika D jolineare me C dhe C_1 e tillë që $\overline{CD}=2t_c$. Atëherë $\Delta AC_1C\cong BC_1D$ dhe $\Delta AC_1D\cong\Delta BC_1C$ (meqenëse $\overline{AC_1}=\overline{C_1B}=\dfrac{c}{2}$, $\overline{CC_1}=\overline{C_1D}=t_c$ dhe $\sphericalangle AC_1C=\sphericalangle DC_1B$), prandaj katërkëndëshi $ADBC$ është paralelogram. Prandaj syprina e kërkuar është

$$S_{\Delta ABC}=\frac{S_{ADBC}}{2}=\frac{2S_{\Delta ADC}}{2}=P_{\Delta ADC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-2t_c)}$$

$s=\dfrac{a+b+2t_c}{2}=54\,\text{cm}$. Tash, $S_{\Delta ABC}=\sqrt{54\cdot 27\cdot 25\cdot 2}=270\,\text{cm}^2$.



4. Meqenëse $S_{\Delta ASB}=36=\dfrac{cr}{2}$, $S_{\Delta ASC}=40=\dfrac{br}{2}$ dhe $S_{\Delta CSB}=68=\dfrac{ar}{2}$ fitojmë $cr=72$, $br=80$ dhe $ar=136$ dhe nga këtu $a:b:c=136:80:72=17:10:9$. Prandaj $a=17k$, $b=10k$ dhe $c=9k$, gjatë së cilës $k>0$ është koeficienti i proporcionit. Nëse s është gjysmëperimetri i trekëndëshit, atëherë $s=\dfrac{a+b+c}{2}=18k$.

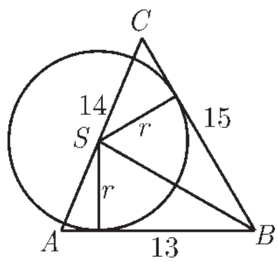


Syprina e trekëndëshit është 144cm, dhe nga formula e Heronit fitojmë $144=\sqrt{18k\cdot 9k\cdot 8k\cdot k}$, d.m.th $144=36k^2$. Që këtej $k=2$. Tani, brinjët janë $a=34\text{cm}$, $b=20\text{cm}$ dhe $c=18\text{cm}$.

5. Le të jetë $a=15\text{cm}$, $b=14\text{cm}$ dhe $c=13\text{cm}$. Syprina e trekëndëshit është

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}=84\,\text{cm}^2$.

Le të jetë S qendra e asaj vije rrethore dhe r rrezja e saj.

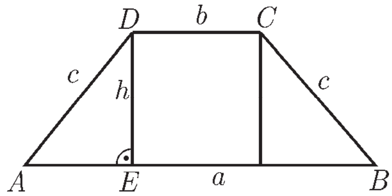


Atëherë $S = S_{\Delta ABS} + S_{\Delta SBC} = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2}$, d.m.th. $84 = 14r$.

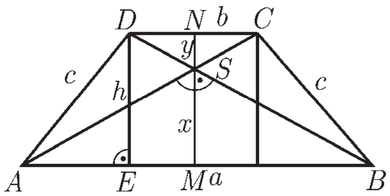
Rrjedh se $r = 6$cm.

8.3.

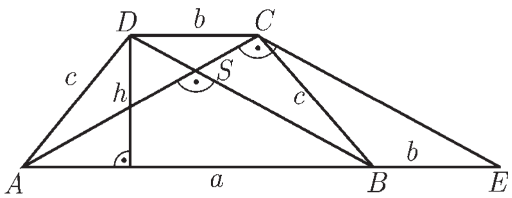
1. Sipas vizatimit ΔAED është barakrahës kënddrejtë, prandaj $\overline{AE} = 3cm$, respektivisht gjatësia e bazës më të madhe është $a = 2\cdot 3 + 12 = 18cm$, pra $S = \frac{(18+12)\cdot 3}{2} = 45cm^2$.



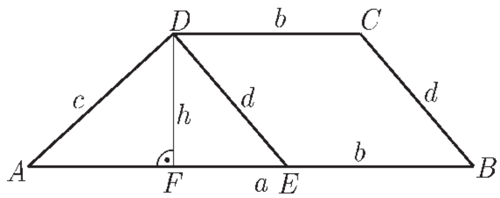
2. mënyra e 1. Të shënojmë prerjen e diagonaleve me S. Atëherë ΔABS është barakrahës dhe kënddrejtë me lartësi $\overline{SM} = x$, dhe sipas barazimeve të Euklidit kemi $x^2 = \overline{AM}\cdot\overline{MB}$ d.m.th. $x = 10cm$. Sipas analogjisë nga ΔCDS rrjedh se $y = \overline{SN} = 6cm$. Përfundimisht $h = x + y = 16cm$, pra $S = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$.



mënyra e 2. Nëse nëpër pikën C tërheqim drejtëz paralele me BD deri në prerjen me vazhdimin e AB në pikën E, atëherë $BECD$ është paralelogram, kurse ΔAEC është trekëndësh barakrahës kënddrejtë me hipotenuzë $\overline{AE} = 32cm$, dhe me zbatimin e teoremave të Euklidit $h^2 = \left(\frac{32}{2}\right)^2$ d.m.th. $h = 16cm$. Përfundimisht për syprinën e trapezit kemi $S = \frac{(20+12)\cdot 16}{2} = 256cm^2$.



3. Le të jetë E pikë e AB ashtu që $\overline{EB} = b$. Atëherë $EBCD$ është paralelogram dhe $\overline{DE} = d$. Rrjedh se $\overline{AE} = a - b = 9\,\text{cm}$. Tani mundemi ta njehsojmë lartësinë e trapezit (kjo lartësia është njëkohësisht edhe lartësi e trekëndëshit AED).

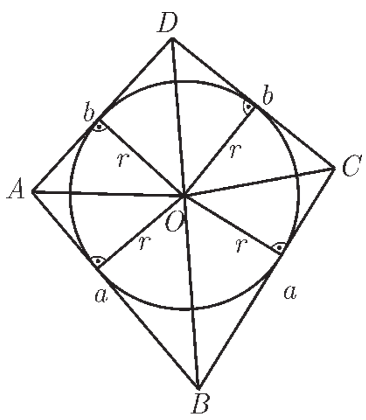


Kemi $s = \frac{9+17+10}{2} = 18$, pra $S_{\Delta AED} P_{\Delta AED} = \sqrt{18(18-9)(18-17)(18-10)} = 36\,\text{cm}^2$.

Rrjedh $\frac{h(a-b)}{2} = 36$, d.m.th. $9h = 72$, pra $h = 8$cm.

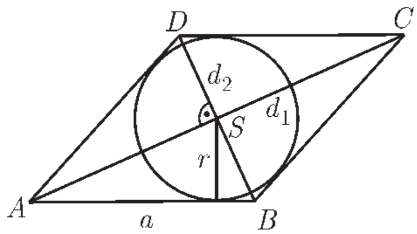
Syprina e trapezit është $S = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{31\cdot 8}{2} = 124\,\text{cm}^2$.

4. Le të jetë $a = 5$, $b = 4$, $r = 2$ dhe le të jetë O qendër e rrethit të brendashkruar në deltoid. Atëherë syprina e kërkuar është



$S = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta DOA} =$
$= \frac{r}{2}(2a+2b) = r(a+b) = 18.$

5. $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$, prej nga $d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 4a^2$.

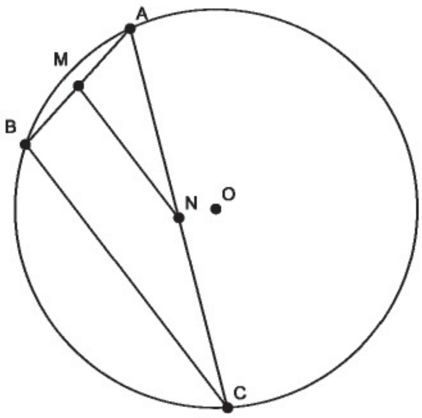


Meqenëse në rombin është brendashkruar rrethi me rreze r kemi $h = 2r$, prandaj për syprinën e rombit vlen barazia $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = a \cdot 2r$, prej ku fitojmë se $d_1 \cdot d_2 = 4ar$. Nga kushti i detyrës kemi $6a = d_1 + d_2$. Me ngritje në katrorë të këtij barazimi dhe me zëvendësim të $d_1 \cdot d_2 = 4ar$ fitohet $4a^2 - ar = 0$, prej nga $a(4a - r) = 0$. Prandaj nuk mundet $a = 0$, sepse a është gjatësia e rombit dhe prandaj mbet $a = \frac{r}{4}$.

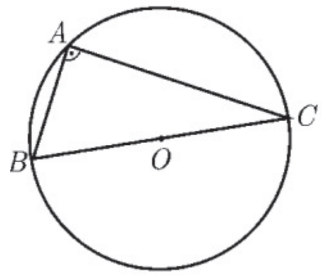
8.4.

1. T'i shënojmë kordat $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$ dhe $\overline{AC} = 17\,\text{cm}$ dhe pikat e tyre të mesme me M dhe N, përkatësisht. Segmenti MN paraqet vijën e mesme të trekëndëshit ABC, prandaj $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$ d.m.th. $\overline{BC} = 10\,\text{cm}$. Me ndihmën e formulës së Heronit $S_{\Delta ABC} = 36\text{cm}^2$,

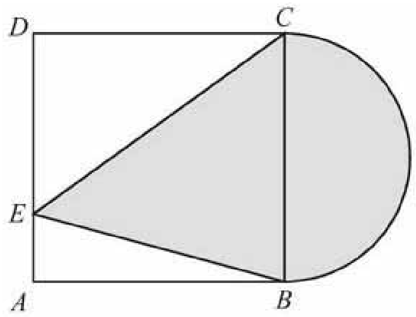
$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 17}{4 \cdot 36} = \frac{85}{8}\text{cm}$$



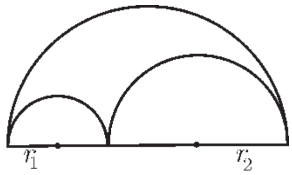
2. Meqenëse ΔABC është kënddrejtë, rrethi është jashtëshkruar përreth tij dhe qendra e saj shtrihet në mesin e hipotenuzës BC. Nga teorema e Pitagorës kemi $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10cm$, prandaj rrezja e rrethit është $r = 5cm$, kurse syprina e kërkuar është $S = 25\pi cm^2$.



3. Syprina e pjesës së hijesuar të figurës është shuma e syprinave të gjysmërrethit me rreze $r=\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{2}=\sqrt{2}cm$ dhe trekëndëshit me bazë $a=2\sqrt{2}$ dhe llartë si $h=\overline{AB}=2\sqrt{2}cm$. . Pra, syprina e figurës është $S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2=(\pi+4)cm^2$.



4. Sipas vizatimit, kemi $r_1 + r_2 = R$, dhe me ngritje në katror, fitojmë $r_1^2+2r_1r_2+r_2^2=R^2$. Syprina e mbetjes është ndryshimi i syprinave të gjysmërrethit dhe shumës së syprinave të të dy gjysmërrathëve,



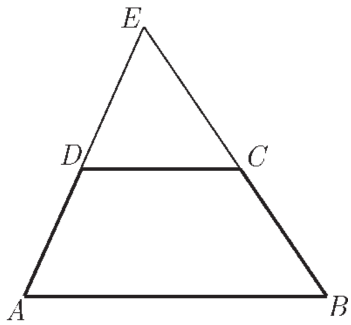
pra $S=\frac{R^2\pi}{2}-\left(\frac{r_1^2\pi+r_2^2\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(R^2-r_1^2-r_2^2\right)=r_1r_2\pi$ d.m.th.

$P = 21\pi cm^2$

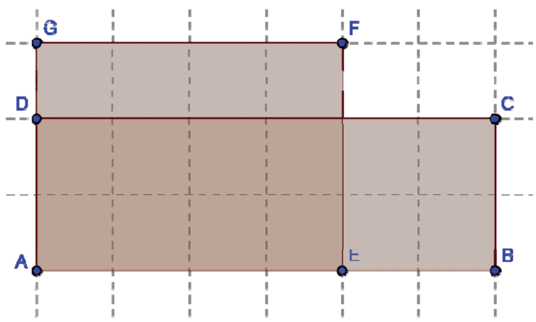
5. $P = 4cm^2$

DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Le të jetë $\overline{AD}=c=8$ dhe $\overline{DE}=x$, ku E është prerja e krahëve të trapezit. Nga ngjashmëria kemi $\Delta ABE \sim \Delta DCE$ kemi $\frac{25}{15}=\frac{8+x}{8}$. Prej këtu fitojmë se $x = 12$. Nga kushti i detyrës $\sphericalangle AEB=90^\circ$. Nga teorema e Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë ΔDCE kemi $\overline{CE}=9$. Nga teorema e Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë ΔABE kemi $\overline{BE}=15$. Tani fitojmë $\overline{BC}=6$. Dhe për perimetrin e trapezit fitojmë $P = 54$. Për syprinën e trapezit fitojmë $S = S_{ABE} - S_{DCE} = 150 - 54 = 96$.



2. Ta shënojmë drejtkëndëshin e vjetër me $ABCD$, ku $\overline{AB}=a$ dhe $\overline{BC}=b$. Nga kushti i detyrës kemi $a = 3b$. Nëse, tani, me $AEFG$ e shënojmë të riun, atëherë $\overline{AE}=\overline{AB}-18=3b-18$ dhe $\overline{EF}=\overline{BC}+8=b+8$.

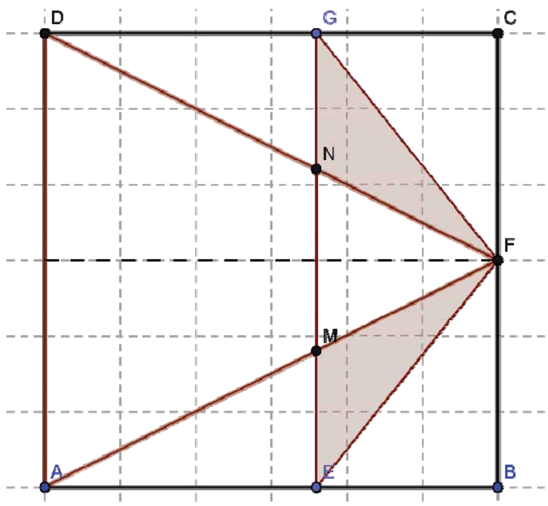


Meqenëse për ngjyrosje do të përdorim sasinë e njëjtë të ngjyrës, kemi:
$S_{ABCD} = S_{AEFG}$ d.m.th $3b^2 = (3b - 18)(b + 8)$, respektivisht $3b^2 = 3b^2 + 24b - 18b - 144$, pra $b = 24cm$.
Prandaj $P_{AEFG} = 2(3 \cdot 24 - 18 + 24 + 8) = 172cm$.

3. Sipas kushteve të detyrës

$$S_{\Delta GEF} = \frac{36 \cdot 12}{2} = 216cm^2.$$

Nëse i shënojmë me M, N pikat prerëse të GE me brinjët AF, DF përkatësisht, atëherë syprina e kërkuar $S = S_{\Delta GEF} - S_{\Delta NMF}$. Domethënë ngel ta njehsojmë syprinën e trekëndëshit NMF.



Trekëndëshat ABF dhe AEM janë të ngjashëm pra: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EM}}$ d.m.th. $\frac{36}{18} = \frac{36-12}{\overline{EM}}$, respektivisht $\overline{EM} = 12cm$. . Ngjashëm, trekëndëshat DFC dhe DNG janë të ngjashëm, pra $\overline{GN} = 12cm$. Pra $\overline{MN} = 36 - 2 \cdot 12 = 12cm$. Së fundmi $S_{\Delta NMF} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72cm^2$, prandaj $S = S_{\Delta GEF} - S_{\Delta NMF} = 216 - 72 = 144cm^2$.

4. mënyra 1. syprina e kërkuar është shuma e syprinave të drejtkëndëshit me brinjë $10cm$ dhe $2cm$, trekëndëshit kënddrejtë me katete $6cm$ dhe $8cm$ dhe drejtkëndëshit me brinjë $8cm$ dhe $4cm$. Prandaj $S = 20 + 24 + 32 = 76cm^2$.

mënyra 2. $S = 10 \cdot 10 - \frac{6 \cdot 8}{2} = 76cm^2$.

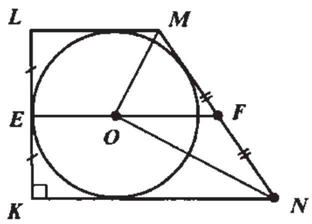
5. Trekëndëshi BCE është kënddrejtë dhe barakrahës, prandaj $\overline{CE} = \overline{BE} = \sqrt{2}m$ ..
Megjithatë $\overline{AE} = 4 - \sqrt{2}, \overline{DE} = 4 + \sqrt{2}$. Prandaj

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2 + \left(4+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16 + 8\sqrt{2} + 2} = \sqrt{32+4} = 6m$$

6. Le të jetë O qendra e rrethit. Atëherë MO dhe NO janë simetrale të këndeve te kulmet M dhe N, prandaj

$$\sphericalangle OMN + \sphericalangle ONM = \frac{1}{2}\sphericalangle KNM + \frac{1}{2}\sphericalangle LMN = \frac{1}{2}180^0 = 90^0,$$

pra ΔOMN është kënddrejtë. Rrjedh se $\overline{MN} = 10$. Le të jetë h lartësi në ΔOMN e lëshuar prej pikës O. Atëherë

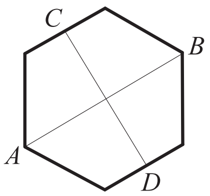


$S_{\Delta OMN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = \frac{1}{2} 10h$, d.m.th. $h = 4{,}8$. Prandaj edhe $\overline{LE} = \overline{EK} = 4{,}8$, pra $\overline{LK} = 9{,}6$.
Meqenëse trapezi është tangjencial, rrjedh se $\overline{KL} + \overline{MN} = \overline{LM} + \overline{KN}$, d.m.th.
$\overline{LM} + \overline{KN} = 9{,}6 + 10 = 19{,}6$. Së fundmi, $\overline{EF} = \frac{19{,}6}{2} = 9{,}8$.

7. Nëse a është gjatësia e brinjës së gjashtëkëndëshit, nga kushti i detyrës kemi

$$60 = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ a^2 = \frac{40}{\sqrt{3}},\ \text{d.m.th. } a = \sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}.$$

Prandaj $\overline{AB} = 2a = 2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$. Segmenti CD Ka gjatësi
$\overline{CD} = 2h$, ku h Është lartësia e trekëndëshit barabrinjës
me brinjë a. Prandaj $\overline{CD} = 2h = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}}$.



Në fund, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3}\sqrt{\frac{40}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot 40 = 80$.

8. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$**.**

9. 90. **10.** $15\,cm$ **. 11.** $48cm^2$ **. 12.** $S = 84\pi$ **. 13.** $\sqrt{2} : 2$ **14.** $18\sqrt{3}$

15. $a = \frac{2}{3}r$. **16.** $1024cm^2$**. 17.** $\frac{S}{S_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{25k^2}{17k^2} = \frac{25}{17}$**. 18.** $S = 48cm^2$ **.**

19. rasti 1. Qendra e rrethit shtrihet në lartësinë CD e trekëndëshit ABC. Të shënojmë me $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AO} = R$. Atëherë $\overline{AD} = \frac{a}{2}$ dhe ΔADC dhe ΔADO Janë kënddrejtë, dhe nga T. e Pitagorës kemi $\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{OD}^2$. meqenëse $\overline{OD} = \overline{CD} - \overline{CO} = \overline{CD} - R$ kemi

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + R^2 \text{ d.m.th. } b^2 - 2R\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 0$$

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

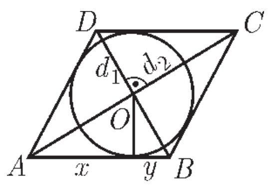
Rasti 2. Qendra e rrethit shtrihet në vazhdimin e lartësisë CD të trekëndëshit ABC.
Të shënojmë me $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AO} = R$. Atëherë $\overline{AD} = \frac{a}{2}$ dhe ΔADC dhe ΔADO janë kënddrejtë, dhe me teoremën e Pitagorës kemi

$\overline{CD}^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ dhe $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{OD}^2$. Meqenëse $\overline{OD} = \overline{CO} - \overline{CD} = R - \overline{CD}$ kemi

$R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+R^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ d.m.th. $b^2-2R\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=0$ prej ku

$R=\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$. Së fundmi, shprehja për rrezen e rrethit të jashtëshkruar nuk varet nga lloji i trekëndëshit.

20. E qartë se $a^2=\left(\frac{30}{2}\right)^2+\left(\frac{40}{2}\right)^2$ d.m.th. $a=25cm$.



Nga barazitë $h=2r$ dhe $ah=\frac{d_1d_2}{2}$ kemi se $r=\frac{d_1d_2}{4a}=12cm$.
Meqenëse ΔABO është kënddrejtë, nga teoremat e Euklidit kemi $r^2=xy$, ku x dhe y janë pjesët nga brinja e rombit të fituara nga pika e prekjes së rrethit të brendashkruar. Pjesa më e madhe e brinjës njehsohet përmes zgjidhjes së sistemit $\begin{cases}x+y=25\\ xy=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=25-x\\ x^2-25x+144=0\end{cases}$.

Kemi $x_1=16cm$, $x_2=9cm$ dhe përkatësisht $y_1=9cm$, $y_2=16cm$. Qartë se pjesa më e madhe është $16cm$.