

MATEMATİK

mesleki lise eğitimi

4



MESLEK/SEKTÖR: Jeolojik–madencilik ve metalurji/Jeoloji, madencilik ve metalurji, İnşaat–jeodezi/İnşaat ve jeodezi, Grafik Grafikler, Ekonomik–hukuk ve ticaret/Ekonomi, hukuk ve ticaret, Elektrik mühendisliği/Elektrik mühendisliği, Sağlık/Sağlık ve sosyal koruma, Tarım–veterinerlik/ Tarım, balıkçılık ve veterinerlik, Kişisel hizmetler/Kişisel hizmetler, Makine/ Makine mühendisliği, Trafik/Trafik, ulaşım ve depolama, Tekstil ve deri/ Tekstil, deri ve benzeri ürünler, Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm/ Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm, Kimya ve teknolojik meslekler/ Kimya ve teknoloji ve Ormancılık ve ağaç işleme/ Ormancılık ve ağaç işleme

Limonka Koceva Lazarova

Bilyana Zlatanovska

DÖRDÜNCÜ SINIFLAR İÇİN MATEMATİK

(seçmeli)

MESLEKİ LİSE EĞİTİMİ

Jeolojik–madencilik ve metalurji/Jeoloji, madencilik ve metalurji, İnşaat–jeodezi/İnşaat ve jeodezi, Grafik/ Grafikler, Ekonomik–hukuk ve ticaret/Ekonomi, hukuk ve ticaret, Elektrik mühendisliği/Elektrik mühendisliği, Sağlık/Sağlık ve sosyal koruma, Tarım – veterinerlik/Tarım, balıkçılık ve veterinerlik, Kişisel hizmetler/Kişisel hizmetler, Makine/Makine mühendisliği, Trafik/Trafik, ulaşım ve depolama, Tekstil ve deri/ Tekstil, deri ve benzeri ürünler, Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm, Kimya ve teknolojik meslekler/ Kimya ve teknoloji ve Ormancılık ve ağaç işleme/ Ormancılık ve ağaç işleme

DÖRDÜNCÜ SINIFLAR İÇİN MATEMATİK (seçmeli)

MESLEKİ LİSE EĞİTİMİ

Jeolojik–madencilik ve metalurji/Jeoloji, madencilik ve metalurji, İnşaat–jeodezi/İnşaat ve jeodezi, Grafik Grafik-ler, Ekonomik–hukuk ve ticaret/Ekonomi, hukuk ve ticaret, Elektrik mühendisliği/Elektrik mühendisliği, Sağlık/ Sağlık ve sosyal koruma, Tarım–veterinerlik/ Tarım, balıkçılık ve veterinerlik, Kişisel hizmetler/Kişisel hizmetler, Makine/ Makine mühendisliği, Trafik/Trafik, ulaşım ve depolama, Tekstil ve deri/ Tekstil, deri ve benzeri ürünler, Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm/ Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm, Kimya ve teknolojik meslekler/ Kimya ve teknoloji ve Ormancılık ve ağaç işleme/ Ormancılık ve ağaç işleme

Yazarlar:

Limonka Koçeva Lazarova

Bilyana Zlatanovska

İnceleyenler:

Mariya Miteva

Yagoda Tanuşoska

İsmail Ameti

Orijinal baskının başlığı:

МАТЕМАТИКА ЗА ЧЕТВРТА ГОДИНА (изборен)

средно стрчно образование

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Графичка/Графичарство, Економско-правна и трговска/Економија, право и трговија, Електротехничка/Електротехника, Здравствена/Здравство и социјална заштита, Земјоделска-ветеринарна/ Земјоделство, рибарство и ветеринарство, Лични услуги/Лични услуги, Машинска/Машинство, Сообраќајна/ Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка/ Угостителство и туризам, Хемиско-технолошка струка/Хемија и технологија и Шумарско-дрвопреработувачка/Шумарство и обработка на дрво

Лимонка Коцева Лазарова

Билјана Златановска

Makedonca'dan Türkçe'ye çeviri: Abdülgani Ali

Lektör: Ahmetnafi İbrahim

Mesleki redaksiyon: Aybeyan Selim

Editör: İlker Ali

Çizen:

Limonka Koçeva Lazarova

Bilyana Zlatanovska

Yayıncı: Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı

“Az. Kiril ve Metodiy” Sok.no. 54, 1000 Üsküp

Grafik ve teknik düzenleme: Todor Traykovski – ARS STUDIO

Yayın yeri ve yılı: Üsküp, 2025

Matematik, seçmeli, dördüncü sınıf, mesleki lise eğitimi, meslek: Jeoloji–madencilik ve metalurji, İnşaat–jeodezik, Grafik, Ekonomik–hukuk ve ticaret, Elektrik mühendisliği, Kişisel hizmetler, Makine, Trafik, Tekstil–deri, Otelcilik–turizm, Kimya teknolojisi konularında ders kitabının onaylanması, sayı 26–316/1 ve 14.03.2024 tarihli kararı ile Ulusal Ders Kitapları Komisyonu tarafından kabul edilmiştir.

Önsöz

Ders kitabı, öncelikle aşağıdaki mesleklerin temsil edildiği Kuzey Makedonya Cumhuriyeti'ndeki ortaöğretim meslek okullarının 4. sınıfındaki öğrencilere yöneliktir: Jeoloji, madencilik ve metalurji, İnşaat ve jeodezi, Grafik, Ekonomi, hukuk ve ticaret, Elektrik mühendisliği, Sağlık ve sosyal koruma, Tarım, balıkçılık ve veterinerlik, Kişisel hizmetler, Makine mühendisliği, Trafik, ulaştırma ve depolama, Tekstil ve deri, Tekstil, deri ve benzeri ürünler, Yiyecek–içecek hizmetleri ve turizm, Kimyasal ve teknolojik meslekler ve Ormanlık ve ahşap işleme, matematik dersi için temel ders kitabı olarak (seçmeli). Ama aynı zamanda içindekileri incelemek isteyen herkes için bir edebiyat eseri olarak da kullanılabilir.

Ders kitabı aşağıdaki modüler üniteleri kapsamaktadır:

1. Diferansiyel hesap (ekonomi mesleği/sektörüne yönelik);
2. İntegral hesap (ekonomi mesleği/sektörü);
3. Matrisler (Diğer tüm meslekler/sektörler);
4. Uzayda Analitik Geometri (diğer tüm meslekler/sektörler);
5. Belirsiz integral (diğer tüm meslekler/sektörler);
6. Kesin integral ve uygulama (diğer tüm meslekler/sektörler).

Modüler üniteler, meslek liselerinde IV sınıftan itibaren yukarıda adı geçen mesleklere ait matematik derslerinde uygulanması planlanan müfredata uygun olarak geliştirilmiştir.

Her modüler ünite bir bütün olarak öğretim ünitelerine ayrılmıştır. Öğretim birimler, sadece bir öğretim birimi tarafından işlenmesi amaçlanan malzemeyi incelemiyor. Öğretmen dilerse bunları birden fazla derste işleyebilir. Modüler ünite kapsamında her öğretim ünitesinde, yeni kavramların açık ve net bir biçimde tanıtıldığı, bunlar arasındaki ilişkilerin ve daha önce öğrenilen kavramlarla ilişkilerinin ortaya konulduğu özgül öğretim içerikleri işlenmektedir. Öğrencinin yeni kavramları benimsemesini sağlayacak çözümlü örnekler ve problemlerle desteklenir. Her öğretim ünitesinin sonunda öğrencinin daha önce öğrendiklerini kontrol etmesine yardımcı olacak bağımsız çalışma ödevleri verilmektedir. Her modüler ünitenin sonunda, modüler ünite edinilen bilgilerin tekrarlanması ve teyit edilmesine yönelik görevler verilmektedir. Öğrencinin bu görevleri başarıyla tamamlaması, edindiği bilgilerin derinleşmesini sağlayacaktır.

Ders kitabının sonunda bağımsız çalışmaya yönelik görevlerin kısa cevapları yer almaktadır.

Her öğretim birimi ve her modülerin tekrarlanması ve belirlenmesi için alıştırmalar. Öğrencinin doğru ve başarılı bir şekilde çözdüğü ödevin teyidi niteliğindedir.

Son olarak, bu ders kitabının, her öğrencinin yukarıda belirtilen alanlardaki ortaöğretim meslek okullarının dördüncü sınıfında öğrenim görmesi amaçlanan matematik dersinde gerekli malzemeyi başarıyla kavramasına yardımcı olacağını içtenlikle umuyoruz. Bu ders kitabının her öğrencinin matematiğe olan sevgisini daha da canlı tutması veya uyandırması durumunda, biz yazarlar olarak gurur ve mutluluk duyacağız.

Yazarlar

İÇİNDEKİLER

Modüler Ünite 1 – Diferansiyel Hesap.....	7
1. Bir Fonksiyonun Türevinin Tanımı.....	8
2. Temel Elemanter Fonksiyonların Türevlerinin Tablosu	14
3. Diferansiyel İşleminin Kuralları	18
3.1. Bir sabitin ve bir fonksiyonun çarpımının türevi	18
3.2. Fonksiyonların toplamının türevi	19
3.3. Fonksiyonların çarpımının türevi	20
3.4. Fonksiyonların Bölümünün Türevi	22
4. Bileşik fonksiyonun türevi	24
5. Kapalı fonksiyonun ve logaritmik fonksiyonun türevi	27
6. Diferansiyelin tanımı	29
7. Parametrelili fonksiyonun türevi.....	31
8. Teğet ve normalin denklemi	32
9. Yüksek mertebeden türevler	39
10. Fonksiyonun monotonluğu ve yerel ekstremumları	40
11. Fonksiyonun dışbükeyliği/içbükeyliği ve dönüm noktaları	51
12. Fonksiyonun Değişiminin İncelenmesi ve Grafiğinin Çizimi	56
13. Ekstremumları içeren problemleri çözmek için türevin uygulanması	69
14. Modüler üniteyi tekrarlama alıştırmaları.....	79
Modüler Ünite 2 – İntegral Hesabı.....	81
1. Belirsiz integral	82
2. Belirsiz integralin temel özellikleri ve temel integraller tablosu	86
3. Değişirme yöntemi	90
4. Kısmi integralleme yöntemi.....	95
5. Belirli integralin tanımı.....	98
6. İntegral Hesabın Temel Teoremi	104
7. Belirli bir integralde yerine koyma yoluyla integral alma	109
8. Belirli integralde kısmi entegrasyon.....	114
9. Düzlem şeklinin alanı	118
10. Dönel Cismin Hacmi.....	125
11. Modüler üniteyi tekrarlama alıştırmaları.....	131
Modüler Ünite 3 – Matrisler.....	133
1. İkinci ve üçüncü dereceden determinantların kavramı	134

2. İkinci ve üçüncü dereceden determinantların özellikleri	140
3. Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözmek ve çözümler kümesini inceleme	147
4. Matris tanımı	158
5. Matrislerle işlemleri	164
6. Tersinir ve ters matris	171
7. Matris denklemlerini çözme.....	175
8. Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözme	178
9. Gauss Eleme Yöntemi	180
10. Modüler üniteyi tekrarlama alıştırmaları.....	183
Modüler Ünite 4 – Uzayda Analitik Geometri.....	185
1. Vektörlerin skaler çarpımı.....	186
2. Vektörlerin çarpımı	192
3. Vektörlerin karma çarpımı.....	195
4. Düzlem denkleminin genel şeklii	197
5. Düzlem denkleminin normal şekli.....	201
6. Düzlem denkleminin Eksen Parçaları Biçiminde Şekli	204
7. Üç noktadan geçen düzlemin denklemi	208
8. İki düzlemin karşılıklı durumları.....	210
9. Bir noktadan bir düzleme olan uzaklık	214
10. Uzayda doğrunun denklemleri	214
11. Doğru ve düzlem arasındaki durumlar	223
12. İki doğru arasındaki durumlar	227
13. İki doğru arasındaki uzaklık.....	235
14. Modüler üniteyi tekrarlama alıştırmaları.....	239
Modüler Ünite 5 – Belirsiz İntegral	241
1. Belirsiz integral	242
2. Belirsiz integralin temel özellikleri ve temel integraller	246
3. Yerine koyma yöntemi	254
4. Kısmi entegralleme yöntemi.....	256
5. Modüler üniteyi tekrarlama alıştırmaları	261
Modüler Ünite 6 – Belirli İntegral	262
1. Belirli integralin tanımı.....	263
2. İntegral Hesabın Temel Teoremi	269

3. Belirli bir integralde yerine koyma yöntemi	273
4. Belirli integralde kısmi integralleme yöntemi	280
5. Düzlem şeklinin alanı	285
6. Modüler üniteyi tekrarlama alıştırmaları	291
Çözümler	293

Modüler Ünite 1 – Diferansiyel Hesaplama

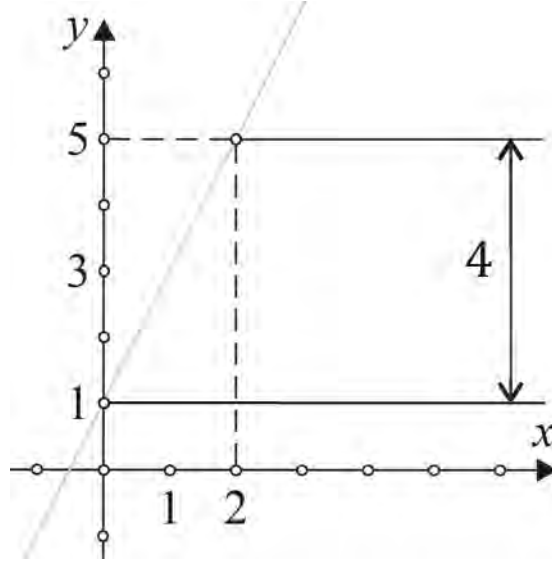
(ekonomi bölümü öğrencileri için)

Birçok fiziksel olay değişken büyüklükler içerir – bir roketin hızı, para enflasyonu, belirli bir ürünün satışından elde edilen kârdaki değişim, bir kültürdeki bakteri sayısı, elektrik sinyallerinin voltajı ve daha birçokları. Bu bölümde, fiziksel niceliklerin değişim hızlarını incelemek için kullanılan matematiksel bir araç olan “bir fonksiyonun türevi” kavramını geliştireceğiz.

1. Bir fonksiyonun türevinin tanımı

Örnek 1 $y = 2x + 1$ fonksiyonunu ele alalım. Fonksiyonun x argümanı 0 ise, fonksiyonun değeri $(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ olur. Şu soru soruluyor: x argümanı 0’dan 2’ye değişirse fonksiyonun değeri ne kadar değişir (Şekil 1)?

$$y(2) - y(0) = (2 \cdot 2 + 1) - (2 \cdot 0 + 1) = 5 - 1 = 4.$$

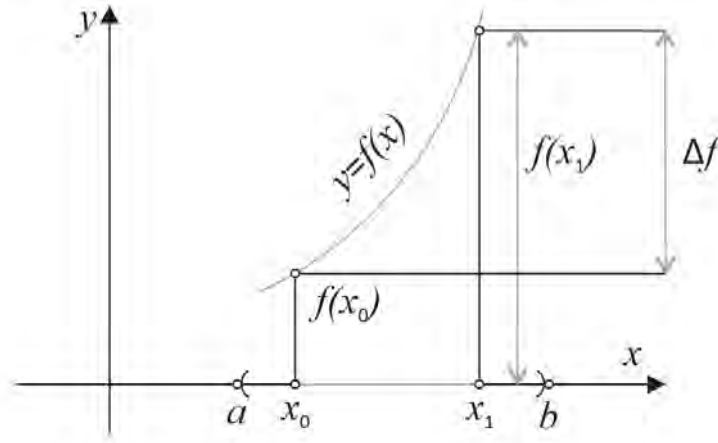


Şekil 1

$y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı olsun ve x_0 ve x_1 değerleri x bağımsız değişkeninin (a,b) aralığında değerleri olsun. f fonksiyonunun x_0 ve x_1 noktalarındaki değerleri $y_0 = f(x_0)$ ve $y_1 = f(x_1)$ olur.

x argümanının değişimi, yani $[x_0, x_1]$ aralığındaki argümanın artışı $\Delta x = x_1 - x_0$ ile tanımlanırken, $y = f(x)$ fonksiyonunun değişim (fonksiyonun artışı) şu şekilde tanımlanır:

$$\Delta y = \Delta f = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0).$$



Şekil 2

$\Delta x = x_1 - x_0$ olduğuna göre $x_1 = x_0 + \Delta x$ gerekir. Buna göre fonksiyonun değerinin değişimi şu şekilde yazılabilir: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Fonksiyonun değerinin değişimi Δf biçiminde yazılabilir.

Örnek 2 $f(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ ve $x_1 = 2$ ise Δx ve Δf değerlerini bulalım. Argümandaki artış ve fonksiyon değerindeki artış için şunu elde ederiz:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2 - 0 = 2,$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + 2) - f(0) = f(2) - f(0) = (2 \cdot 2^2 + 1) - (2 \cdot 0^2 + 1) = 9 - 1 = 8.$$

1 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ fonksiyonu için, $x_0 = 1$ ve $x_1 = 2$ ise, Δx ve Δf değerlerini belirtiniz.

Örnek 3 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ fonksiyonu için herhangi bir x noktasındaki Δf değerini bulalım.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 6 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6 \\
&= x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x
\end{aligned}$$

Eğer $x = x_0 = 3$ ve $\Delta x = 1$ yerine koyarsak, $\Delta f = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = \frac{1}{2}$ elde ederiz.



Aşağıdaki fonksiyonlar için Δf 'yi bulunuz:

a) $f(x) = x^2 + 2$, herhangi bir x_0 noktasında.

b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ $x_0 = 4$ ve $\Delta x = 2$ ise.

Örnek 4

3'teki $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ fonksiyonu için, herhangi bir x_0 noktasındaki Δf 'yi bulduk. Aynı fonksiyon için şunları belirteceğiz:

a) Fonksiyon değerinin değişimi ile argümanın değişimin oranını;

b) $\Delta x \rightarrow 0$ iken, bölümün limitinin değerini.

$x = 3,5$ için limit değerini bulacağız.

$$a) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = x + \frac{1}{2}\Delta x - 3.$$

$$b) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{2}\Delta x - 3 \right) = x - 3.$$

$x = 3,5$ için, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = x - 3 = 3,5 - 3 = 0,5$ dir.

Tanım 1: Eğer $y = f(x)$ fonksiyonunun değeriindeki değişimin ile argümanındaki $x_0 \in D_f$ değişimine oranının limiti, argümandaki değişim 0'a yaklaşırken sonlu bir değere sahipse, yani:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

o zaman bu limit değerine $y = f(x)$ **fonksiyonunun** x_0 **noktasındaki (birinci) türevi** denir ve $f'(x_0)$ ile gösterilir. Bir fonksiyonun türevini bulma işlemine **türev alma** denir ve belirli bir x_0 noktasında birinci türevi olan bir fonksiyona, o noktada **türevlenebilir** denir.

Eğer fonksiyon $y=f(x)$ şeklinde verilmişse, türevi genellikle y' veya $f'(x)$ ile gösterilir.

Örnek 5

a) $y = 2x^2 + 5x$ fonksiyonunun $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarındaki türevini bulalım.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (2(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x)) - (2x^2 + 5x) = \Delta x(4x + 5 + 2\Delta x)$$

Şu oranı bulalım:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 5 + 2\Delta x)}{\Delta x} = 4x + 5 + 2\Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 5 + 2\Delta x) = 4x + 5.$$

$$y'(-1) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1$$

$$y'(1) = 4 \cdot 1 + 5 = 9.$$

b) $y = x^3$ fonksiyonunun herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevini bulalım.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

3

Verilen fonksiyonun türevini belirtiniz: a) $y = x^2 + 1$; b) $y = x^2 + x$

Örnek 6

a) $y = \frac{x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ fonksiyonun türevini belirtelim.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x + 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x((x + \Delta x + 1)(x + 1))} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

b) $y = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$ fonksiyonu için şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} - \sqrt{x + 1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} - \sqrt{x + 1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 1 - (x + 1)}{\Delta x (\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

$x = -1$ noktasındaki türev mevcut değildir, çünkü bu değer için belirsiz bir ifade elde ederiz.

4

$y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Tanım 2: Şu

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

sonlu limit değerler varsa, ki bunlar sırasıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 **noktasındaki sol ve sağ türevleri** olarak adlandırılır. Ancak ve ancak o noktada sol ve sağ türevleri mevcutsa ve bunlar eşitse, yani $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ olduğu durumda, $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır deriz.

Örnek 7

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $D_f = [0, \infty)$ kümesinde tanımlı ve tanım kümesine ait her $x \neq 0$ noktasında türevi vardır.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Eğer $x = 0$ ise, Tanım 2 gereğince ve fonksiyonun tanım kümesine göre, fonksiyonun $x = 0$ noktasında sadece sağ türevi mevcut olabilir. Onu hesaplayalım:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty.$$

Limit değeri sonsuz olduğundan, $x = 0$ 'da sağ türev mevcut değildir.

Teorem 1: Eğer $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında bir türevi varsa, o zaman $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 'da süreklidir.

İspat: $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında bir türevi olduğunu varsayalım. O zaman

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ mevcuttur. } y = f(x) \text{ fonksiyonunun } x_0 \text{ noktasında sürekli olduğunu}$$

göstermek için, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

ve $x - x_0 = \Delta x$ değişimini kullanarak, $x = x_0 + \Delta x$ olduğundan şunu elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0, \text{ olduğundan, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ sonucu elde edilir.}$$

Yani fonksiyon x_0 noktasında süreklidir.

Teorem 1'in tersi genel olarak geçerli değildir. Örnek olarak, örnek 7'deki $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunu gösterebiliriz. Bu fonksiyon tüm tanım kümesinde $[0, \infty)$ süreklidir, ancak $x_0 = 0$ noktasında türevi yoktur.

Çalışma Alıştırmaları

1. Bir dikdörtgenin kenarları 10 m ve 20 m'dir. Aşağıdaki durumlarda dikdörtgenin çevresindeki ve alanındaki değişimi belirleyin:

a) Uzun kenar 1 m artarsa; b) kısa kenar 0.5 m artarsa.

2. Şu durumlarda Δy 'yi hesaplayınız:

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$; b) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 1$;

c) $f(x) = x^2 + 5$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 1$; ç) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 8$.

3. Fonksiyonun türevini hesaplayınız:

a) $y = 4x - 3$, $x = 1$ noktasında; b) $y = x^2 - 3$, $x_0 = 2$ noktasında;

c) $y = (x - 2)^3$, $x_0 = 5$ noktasında; ç) $y = (x^2 - 1) / x$, $x_0 = 1$ noktasında.

4. Fonksiyonun sol ve sağ türevlerini belirleyiniz:

a) $y = |x - 3|$, $x_0 = 3$ noktasında;

b) $y = |x + 2|$, $x_0 = -2$ noktasında;

c) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x = 0$ noktasında; ç) $y = \sqrt{x-5}$, $x_0 = 5$ noktasında.

2. Temel Elementer Fonksiyonların Türev Tablosu

Tanım yoluyla türev belirlemek genellikle çok zaman alır ve çok karmaşık olabilir. Bu amaçla, bu ders ünitesinde, türev tablosu veya tablo türevleri olarak bilinen bazı temel fonksiyonların türevlerinin bir listesini sunacağız. Bir sonraki ders ünitesinde ele alacağımız türev kuralları ve tablo türevleri, toplama, çarpma ve bölme işlemleriyle elde edilen temel fonksiyonlardan kaynaklanan fonksiyonların türevlerini bulmak için bize bir araç sağlar.

Aşağıdaki örneği inceleyeceğiz:

Örnek 1

$f(x) = x^2$ ve $f(x) = x^3$ fonksiyonlarının türevlerini tanım yoluyla bulalım ve ardından $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ fonksiyonunun türevinin neye eşit olduğu sonucuna varalım.

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x. \end{aligned}$$

Demek ki, $f'(x) = (x^2)' = 2x$ elde edilir.

$$f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2. \end{aligned}$$

$f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ elde edilir.

Şimdi, genel durumda her $n \in \mathbb{N}$ için şu sonuca varabiliriz:

$f(x) = x^n$ ise, $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ geçerli olacaktır.

$f(x) = c$, c sabit sayı olmak üzere, sabit fonksiyon verildiği durumda ise:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Demek ki, $f'(x) = c' = 0$ dır.

Örnek 2

Elde edilen formül yardımıyla şu fonksiyonların türevini belirteceğiz:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^7$ c) $f(x) = x^{10}$

Verilen fonksiyonların türevlerini hesaplarız:

a) $f'(x) = x' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1,$

b) $f'(x) = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6,$

c) $f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9.$

1

Verilen fonksiyonun türevini belirtiniz:

a) $f(x) = x^4;$ b) $f(x) = x^6;$ c) $f(x) = x^9.$

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için, türevinin hesaplanması formülü her $n \in \mathbb{R}$ için $(x^n)' = nx^{n-1}$ dir.

Örnek 3 Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtelim:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; b) $f(x) = x(\sqrt[3]{x})$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevinin formülü gereğince şunları elde edeceğiz:

$$a) f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$b) f(x) = x(\sqrt[3]{x}) = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}},$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$$

$$c) f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2};$$

$$d) f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

2

Verilen fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$a) f(x) = \sqrt{x^3}, x \geq 0; \quad c) f(x) = x^2\sqrt{x}, x \geq 0;$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0; \quad d) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \neq 0.$$

Örnek 4

$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ fonksiyonunun türevini tanıma göre belirtelim.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ olduğuna göre, $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$ elde edilir. $a = e$ ise, $(e^x)' = e^x$ elde edilir.

Örnek 5

$f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ fonksiyonun türevini tanıma göre belirtelim.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\Delta x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \log_a e \text{ olduğuna göre, } f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \text{ elde edilir.}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ yani elimizde. } a = e \text{ durumundaki şunu elde ederiz } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

İlerde, elemanter fonksiyonların **türevler tablosu** denilen tablo gösterilmiştir:

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$	2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$	4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$	6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$	

Çalışma Alıştırmaları

1. Uygun formül kullanarak şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$\text{a) } y = x^5; \quad \text{b) } y = x^2 \sqrt[3]{x}; \quad \text{c) } y = \sqrt[3]{x^5}; \quad \text{ç) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}, \quad x \neq 0.$$

2. Uygun formül kullanarak şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^5 \sqrt{x}, \quad x \geq 0; & \text{b) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}, \quad x \neq 0; & \text{c) } y = x\sqrt{x^5}, \quad x \geq 0; \\ \text{ç) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}, \quad x \neq 0; & \text{d) } y = 3^x; & \text{e) } y = \log_2 x, \quad x > 0. \end{array}$$

3. Türev Alma Kuralları

Tanım yoluyla türev bulmak genellikle çok karmaşık olabilir. Şu an kadar bazı temel fonksiyonların türevlerini belirledik. Temel fonksiyonların yerine, daha çok temel fonksiyonlardan aritmetik işlemlerle elde edilen fonksiyonlarla karşılaşırız. Fonksiyonun türevinin belirli özelliklerini uygulayarak, temel fonksiyonların türevlerine dayanarak, çok daha karmaşık fonksiyonların türevini nispeten basit bir şekilde hesaplanabilir.

3.1. Bir Sabit ve Bir Fonksiyonun Çarpımının Türevi

Aşağıdaki teoremi sunacağız:

Teorem 1: $y = f(x)$ fonksiyonunun x noktasında türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu ve c 'nin bir sabit olduğunu varsayalım. O zaman $c \cdot f$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ve şu eşitlik doğrudur:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

İspat: Türevin tanımından şunu elde ederiz:

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x). \quad \blacksquare$$

Örnek 1

Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtelim:

$$\text{a) } f(x) = 2x^3; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2} \ln x, \quad x > 0; \quad \text{c) } f(x) = 5 \cdot 2^x.$$

Türevler tablosundan ve Teorem 1'in uygulanmasından şunu elde ederiz:

$$\text{a) } f'(x) = (2x^3)' = 2(x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2;$$

$$b) f'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x \right)' = \frac{1}{2} (\ln x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x};$$

$$c) f'(x) = (5 \cdot 2^x)' = 5(2^x)' = 5 \cdot 2^x \ln 2.$$

1

Verilen fonksiyonun türevini belirtiniz:

$$a) f(x) = 3x^4; \quad b) f(x) = 4 \ln x, \quad x > 0; \quad c) f(x) = \frac{1}{2} e^x.$$

3.2. Fonksiyonların Toplamının Türevi

Aşağıdaki teorem, iki fonksiyonun toplamının türevine aittir.

Teorem 2: $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonlarının x noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O zaman $u + v$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir ve şu eşitlik doğrudur:

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

İspat: $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonlarının x noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım.

Türevin tanımından şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} (u + v)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x + \Delta x) - (u + v)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Not: İki fonksiyonun farkı, iki fonksiyonun toplamı ile tanımlandığından, yani $(u - v)(x) = u(x) - v(x) = u(x) + (-1)v(x)$ olduğundan, iki türevlenebilir fonksiyon $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ farkının türev alma kuralı şu şekilde ifade edilir:

$$(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x).$$

Örnek 2

Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtelim:

$$a) f(x) = 2x^3 + 5x^2; \quad b) f(x) = 3 \ln x + \sqrt{x}, \quad x > 0; \quad c) f(x) = 5e^x + \sqrt[3]{x}.$$

Teorem 2'den şunu elde ederiz:

$$\text{a) } f'(x) = (2x^3 + 5x^2)' = (2x^3)' + (5x^2)' = 6x^2 + 10x;$$

$$\text{b) } f'(x) = (3\ln x + \sqrt{x})' = (3\ln x)' + (\sqrt{x})' = \frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6 + \sqrt{x}}{2x};$$

$$\text{c) } f'(x) = (5e^x + \sqrt[3]{x})' = (5e^x)' + (\sqrt[3]{x})' = 5e^x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Toplam kuralının herhangi bir x noktasında üç veya daha fazla türevlenebilir fonksiyon için de geçerli olduğunu belirtelim.

Örnek 3

$f(x) = 2x^3 + 3x + \ln x$, $x > 0$ fonksiyonunun türevini belirtelim.

$$f'(x) = (2x^3 + 3x + \ln x)' = (2x^3)' + (3x)' + (\ln x)' = 6x^2 + 3 + 1/x.$$

2

Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirleyin:

$$\text{a) } f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x; \text{ b) } f(x) = \ln x + 2x - 1/x, x > 0.$$

3.3. Fonksiyonların Çarpımının Türevi

İki fonksiyonun çarpımının türevi ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlayacağız:

Teorem 3: $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonlarının x noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O zaman bunların uv çarpımı da x noktasında türevlenebilir bir fonksiyondur ve şu eşitlik doğrudur:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

İspat: $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonlarının x noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım. uv çarpımının fonksiyonundaki değişimi x noktasında ele alırsak şunu elde edeceğiz:

$$\begin{aligned} \Delta(u(x)v(x)) &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) \\ &\quad + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = v(x + \Delta x)[u(x + \Delta x) - u(x)] \\ &\quad + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] = v(x + \Delta x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x). \end{aligned}$$

Türevin tanımından şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}(u(x)v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u(x)v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

Örnek 4

Şu fonksiyonların türevini belirtelim:

a) $f(x) = (2x+5)(x^2-3x+2)$; b) $f(x) = 5x^2 \cdot e^x$; c) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x, x > 0$.

a) $f(x) = (2x+5)(x^2-3x+2)$ fonksiyonu için $u(x) = 2x+5$ ve $v(x) = x^2-3x+2$ olsun. Fonksiyonların çarpımına ait türev formülünden yararlanarak şunu elde ediyoruz:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = (2x+5)'(x^2-3x+2) + (2x+5)(x^2-3x+2)'$$

$$f'(x) = 2(x^2-3x+2) + (2x+5)(2x-3)$$

$$f'(x) = 2x^2 - 6x + 4 + 4x^2 - 6x + 10x - 15$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 11.$$

b) $f(x) = 5x^2 \cdot e^x$ fonksiyonu için, iki fonksiyonun çarpımına ait türev formülünden yararlanarak şunu elde ediyoruz:

$$f'(x) = (5x^2)'e^x + 5x^2(e^x)'$$

$$f'(x) = 10x \cdot e^x + 5x^2 \cdot e^x = 5xe^x \cdot (2+x).$$

c) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x, x > 0$ fonksiyonu için, iki fonksiyonun çarpımına ait türev formülünden yararlanarak şunu elde ediyoruz:

$$f'(x) = (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)'$$

$$f'(x) = \ln x + (x+1) \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}.$$

3

Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = (x^2+2)(x^3-1)$; b) $f(x) = 3x\sqrt{x}, x \geq 0$; c) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$.

3.4. Fonksiyonların Bölümünün Türevi

Aşağıdaki teoremi sunacağız:

Teorem 4: $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonlarının x noktasında $v(x) \neq 0$ koşuluyla türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım. O zaman $\frac{u}{v}$ bölümü de x noktasında türevlenebilir bir fonksiyondur ve şu eşitlik doğrudur:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

İspat: $u = u(x)$ ve $v = v(x)$ fonksiyonlarının x noktasında $v(x) \neq 0$ koşuluyla türevlenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım. x noktasındaki $\frac{u}{v}$ fonksiyonunun değişimi için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \\ &= \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}. \end{aligned}$$

Türevin tanımı gereğince,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

elde edilir.

Örnek 5 Şu fonksiyonların türevini belirtelim:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}, x \neq -1;$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, x \neq 0.$

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonunda $u(x) = x$ ve $v(x) = x + 1$ olsun. İki fonksiyonun bölümüne ait türev formülünden yararlanarak şunu elde ediyoruz:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ fonksiyonunu için, İki fonksiyonun bölümüne ait türev formülünden yararlanarak şunu elde ediyoruz:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'x^2 - (x^2-1)(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - x^2 \cdot 2x + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$



Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

Çalışma alıştırmaları

a) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, x \neq \pm 1;$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1.$

1. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = 2x^2;$

b) $f(x) = -\frac{2}{4}\sqrt[4]{x}, x \geq 0;$

c) $f(x) = 3\sqrt[3]{x};$

ç) $f(x) = 2x+3.$

2. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 6;$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}, x \neq 0;$

c) $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3};$

ç) $f(x) = 3x + \sqrt{x}, x \geq 0.$

3. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = 4x^3\sqrt{x} - x\sqrt{x\sqrt{x}}, x \geq 0$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, x \geq 0$

4. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = \ln x + e^x - 5x$, $x > 0$;

b) $f(x) = 2^x + 5 \cdot 4^x$.

5. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$

b) $f(x) = x^3 e^x$.

6. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$;

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $x > 0$;

ç) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

4. Bileşik Fonksiyonun Türevi

$f(g(x))$ biçimindeki bir fonksiyona **bileşik fonksiyon** veya $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının bileşkesi denir.

Örneğin, $y = \sqrt{x^2 - 1}$ biçimindeki bir fonksiyon bileşik fonksiyondur. $u(x) = x^2 - 1$ değişimini kullanarak, bileşik fonksiyon $y = \sqrt{u}$ biçimini alır.

Eğer $y = (2x + 1)^4$ biçiminde bir bileşik fonksiyonumuz varsa, $u(x) = 2x + 1$ değişimini uygulayarak, bileşik fonksiyon $y = u^4$ biçimini alır.

Örnek 1

Aşağıdaki fonksiyonları, yerine koyma yöntemini kullanarak, daha basit bir biçimde yazalım:

a) $y = (x - 3)^3$ fonksiyonu, $u(x) = x - 3$ dönüşümü ile $y = u^3$ biçiminde yazılabilir.

b) $y = \ln(x^2 - 3)$ fonksiyonu, $u(x) = x^2 - 3$ dönüşümü ile $y = \ln u$ biçiminde yazılabilir.

c) $y = e^{(3x + 5)}$ fonksiyonu, $u(x) = 3x + 5$ dönüşümü ile $y = e^u$ biçiminde yazılabilir.

1

Aşağıdaki bileşik fonksiyonların her biri için:

$u(x)$ i belirleyin ve fonksiyonu $y = f(u)$ biçiminde yazınız.

a) $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$;

b) $y = \sqrt[3]{3x + 1}$,

Bileşik fonksiyonun türev kuralı aşağıdaki teorem ile verilecektir.

Teorem 1: $u(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olduğunu ve f fonksiyonunun $u_0 = u(x_0)$ noktasında türevlenebilir olduğunu varsayalım. O zaman bunların bileşkesi olan $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ bileşik fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve şu eşitlik geçerlidir:

$$(f(u(x_0)))' = f'(u(x_0))u'(x_0).$$

İspat: Türevin tanımından şunu elde ederiz:

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ olduğundan, $u(x_0 + \Delta x) = \Delta u + u_0$ elde ederiz. u sürekli olduğundan, $\Delta x \rightarrow 0$ olduğunda $\Delta u \rightarrow 0$ elde ederiz. O zaman,

$$\begin{aligned} (f(u(x_0)))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = f'(u_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

Yani, $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir ve şu eşitlik doğrudur $(f(u(x_0)))' = f'(u_0)u'(x_0)$.

Örnek 1

Şu fonksiyonların türevini hesaplayalım:

a) $y = (3x - 4)^4$ b) $y = \sqrt{x-1}$ c) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ ç) $y = e^{-2x}$ d) $y = e^{x^2 - 3x}$.

a) $y = (3x - 4)^4$

$$u(x) = 3x - 4, \quad y = u^4$$

$$y' = 4u^3 \cdot u'(x)$$

$$y' = 4(3x - 4)^3 \cdot (3x - 4)'$$

$$y' = 4(3x - 4)^3 \cdot 3 = 12(3x - 4)^3.$$

b) $y = \sqrt{x-1}$

$$u(x) = x - 1, \quad y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

$$c) y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

$$u(x) = x^2 - 4, \quad y = \sqrt[3]{u}$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot (x^2 - 4)'$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}.$$

$$ç) y = e^{-2x}$$

$$u(x) = -2x, \quad y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u'(x)$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2x)'$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}.$$

$$d) y = e^{x^2 - 3x}$$

$$u(x) = x^2 - 3x, \quad y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u'(x)$$

$$y' = e^{x^2 - 3x} \cdot (x^2 - 3x)'$$

$$y' = e^{x^2 - 3x} \cdot (2x - 3) = 2xe^{x^2 - 3x} - 3e^{x^2 - 3x}.$$

2

Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$a) y = (4x - 3)^6; \quad b) y = e^{-x^3}.$$

3

Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$a) y = (2x^2 + 3x + 1)e^x; \quad b) y = (x + 1)\sqrt{x^2 + 1}; \quad c) y = 3xe^{x^2 + 1}.$$

Çalışma alıştırmaları

1. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$a) y = (2x^2 + 5x - 6)^5;$$

$$b) y = (x^5 + 2x)^8;$$

$$c) y = (5x^5 + 3x^3 + 1)^5;$$

$$ç) y = (mx + n)^6.$$

2. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

$$a) y = (x + 3)(2x - 5)^2;$$

$$b) y = (x + 2)^2 (x^2 - 3x + 1)^3.$$

3. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

b) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$.

4. Şu fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $y = e^{2x+5}$;

b) $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$.

5. Kapalı Fonksiyonun Türevi ve Logaritmik Türevler

Bu ders ünitesinde, ilk olarak fonksiyonun kapalı biçimde verildiği durumlarda türevin hesaplanmasını ele alacağız. Kapalı olarak verilen bir fonksiyonun türevini bulma prosedürü, logaritmik türevler olarak adlandırılan türevin hesaplanmasında kullanılabilir.

Kapalı fonksiyon, y değişkeninin x değişkeni cinsinden ifade edilmediği bir fonksiyondur.

$F(x, y) = 0$ kapalı biçiminde bir fonksiyonun verildiğini varsayalım, burada $y = y(x)$ olarak $x \in (a, b)$ aralığında tanımlanır ve x bağımsız değişkendir. Fonksiyon kapalı biçimde verildiğinde y' yi x cinsinden ifade etmek bazen çok zordur. Fonksiyonun türevi kapalı yöntemle belirlenebilirse çok daha basit olurdu.

$y = y(x)$ fonksiyonunun $x \in (a, b)$ aralığında türevlenebilir olduğunu varsayalım. Kapalı biçimi, her $x \in (a, b)$ için $F(x, y(x)) = 0$ olarak yazabiliriz. O zaman bileşik fonksiyonun türevini kullanarak şunu elde ederiz:

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \cdot y' = 0,$$

burada $F'_x(x, y(x))$ fonksiyonun x 'e göre türevi ve $F'_y(x, y(x))$ fonksiyonun x 'e bağlı olan y' ye göre türevidir. y' türevini ifade edersek, kapalı olarak verilen fonksiyonun türevinin aşağıdaki formülle göre bulunabileceğini elde ederiz:

$$y' = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}.$$

Türevin doğrudan hesaplanması, verilen fonksiyonun her teriminin türevinin hesaplanmasıyla yapılır ve burada x 'in bağımsız bir değişken ve y 'nin x değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğu dikkate alınmalıdır.

Kapalı bir fonksiyonun türevini hesaplama yöntemi, örnekler aracılığıyla en iyi şekilde incelenebilir.

Örnek 1

Aşağıda kapalı biçimde verilen fonksiyonun türevini belirtelim.

$$x^2 + 4x + y^2 = 5.$$

Doğrudan türev olarak şunu elde ederiz:

$$2x + 4 + 2yy' = 0.$$

Kapalı olarak verilen $F(x, y) = 0$ fonksiyonunun türevini alırken, $y = y(x)$ fonksiyonunun varlığına dikkat etmek gerekir. Başka bir deyişle, y bağımsız değişken x 'e bağlı olan bağımlı bir değişkendir ve y 'nin türevini almak aslında bileşik bir fonksiyonun türevini almaktır.

Şimdi sadece y' türevini ifade etmemiz gerekiyor. Yani şunu elde ederiz:

$$2yy' = -2x - 4,$$

$$y' = \frac{-x-2}{y},$$

$$y' = -\frac{x+2}{y}.$$

Örnek 2

Kapalı biçimde verilen fonksiyonun türevini belirtelim.

$$x^2 + xy + y^2 = 2.$$

Burada xy çarpımının türevini bulmak için iki fonksiyonun çarpımının türevi kuralını kullanacağımızı belirtelim. Yani şunu elde edeceğiz:

$$2x + (y + xy') + 2yy' = 0,$$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$

$$y'(x + 2y) = -2x - y$$

$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

1

Kapalı biçimde verilen fonksiyonun türevini belirtiniz:

a) $x^2 + 4x + y^2 = 5$

b) $x^3 + 2x + 2y^2 = 5,$

c) $xy^2 + 2xy + y = 1,$

ç) $x^3 + y^3 + 2 = 0.$

Ders ünitesinin başında belirttiğimiz gibi, kapalı olarak verilen bir fonksiyonun türevini, logaritmik türev olarak adlandırılan türevi hesaplamak için kullanabiliriz. Logaritmik türev, bağımsız değişkenin hem tabanda hem de bir kuvvetin üssünde olduğu durumlarda uygulanır.

Örnek 3

$y = x^x, x > 0$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım. Bu fonksiyonun türevini bulmak için, üsde bulunan x 'ten kurtulmamız gerekiyor. Bu amaçla, fonksiyonun logaritmasını alıyoruz:

$$\ln y = \ln x^x, \text{ yani } \ln y = x \ln x.$$

Ondan sonra, türevini alıyoruz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} & \text{yani} & & y' &= y(1 + \ln x) \\ \frac{y'}{y} &= 1 + \ln x & & & y' &= x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

2

Aşağıdaki fonksiyonların türevini belirtiniz:

a) $y = x^{1-x^2};$

b) $y = x^{x^3}.$

Çalışma Alistirmaları

1. Aşağıdaki kapalı olarak verilen fonksiyonların türevini belirleyin:

a) $x^2 y + 2x + y^2 = 1;$

b) $x^2 + 4xy + y^2 = 0;$

c) $xy^2 + 2x + y = 4;$

ç) $x^3 + xy^3 - 5 = 0.$

2. Aşağıdaki fonksiyonların logaritmik türevini belirtiniz:

a) $y = x^{\sqrt{x}};$

b) $y = x^{2x};$

c) $y = \left(\frac{1+x^2}{x} \right)^x;$

ç) $y = x^{\frac{1}{x}}.$

6. Diferansiyel Kavramı

Bir fonksiyonun türevinin varlığı ile ilgili önemli bir kavram, fonksiyonun diferansiyel kavramıdır. Bu, yaklaşık hesaplamalar için de kullanılabilir.

Tanım 1: $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olduğunu, yani $y'(x_0) = f'(x_0)$ türevinin var olduğunu varsayalım. $y'(x_0)\Delta x$ çarpımına $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki diferansiyeli denir ve $dy(x_0)$ veya kısaca dy ile gösterilir.

Yani, $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki diferansiyeli $dy(x_0) = y'(x_0)\Delta x$ tir ve herhangi bir x noktasında $dy = y'\Delta x$ tir.

Örnek 1

a) $f(x) = x^4$ fonksiyonunun herhangi bir x noktasındaki diferansiyeli $dy = 4x^3 \Delta x$ tir, çünkü $f'(x) = 4x^3$ tür.

b) $y = x$ doğrusal fonksiyonunun türevinin $y' = 1$ olduğu gerçeğini kullanarak, doğrusal fonksiyonun diferansiyeli için $dy = dx = y' \Delta x = \Delta x$ tir, dolayısıyla $dx = \Delta x$ tir. Bu nedenle, $y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyelini $dy = y' dx$ şeklinde yazabiliriz. Buradan tekrar $y' = \frac{dy}{dx}$ sonucu çıkar. $y' = \frac{dy}{dx}$ (de y de x olarak okunur), bu ise Lagrange'inkinden farklı olarak Leibniz tarafından tanımlanan bir başka türev işaretidir.

1

Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyelini belirtiniz:

a) $y = xe^x$; b) $y = \ln(x^2 + 1)$.

Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirse, o zaman $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ artışı ve x_0 noktasındaki dy diferansiyeli $\Delta x \rightarrow 0$ olduğunda eşdeğer sonsuz küçüklerdir. Bu özellik nedeniyle, dy diferansiyeli Δy nin ana değeri olduğu söylenir, çünkü yeterince küçük $|\Delta x|$ için $\Delta y \approx dy$ olduğunu düşünebiliriz.

Bu özellik, $|\Delta x|$ 'in küçük değerleri için, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$, yani $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ formülü kullanılarak fonksiyonların değerlerini yaklaşık olarak hesaplamak için kullanılabilir.

Örnek 1

$D = \mathbb{R}$ tanım aralığına sahip $y = x^2$ fonksiyonu için, tanım aralığında herhangi bir x noktasındaki diferansiyeli $dy = 2x dx$ tir, çünkü $y' = 2x$ 'tir. Fonksiyonun $x_0 = 1$ noktasındaki diferansiyeli $dy = 2dx$ tir. Fonksiyonun diferansiyelini kullanarak, $1,2^{21}$ 'yi yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

İlk olarak, $x = 1$ ve $\Delta x = 1.2 - 1 = 0.2$ olduğu $dy = 2x \Delta x$ formülünü kullanacağız. $dy = 2x \Delta x = 0.4$ elde ederiz. Daha sonra, $x_0 = 1$ ve $\Delta x = 1.2 - 1 = 0.2$ için $f(x + \Delta x) = f(x) + dy$ formülünü kullanacağız. $f(x + \Delta x) = f(1.2) = f(x_0) + dy = 1 + 0.4 = 1.4$ elde ederiz. Yani, $1,2^{21} \approx 1,4$ elde edilir.

2

Aşağıdakileri yaklaşık olarak hesaplayınız:

a) $\sqrt{4,0002}$; b) $\ln 2.003$.

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyelini belirleyin:

a) $y = xe^{-x}$; b) $y = xe^{\frac{x^2}{2}}$; c) $y = x^2 \ln x$; ç) $y = \frac{x^3 + 2x}{x+1}$.

2. Aşağıdakileri yaklaşık olarak hesaplayın:

a) $\sqrt[3]{1,0003}$; b) $\ln 1,001$; c) $\sqrt{9,0003}$.

7. Parametrik Olarak Verilen Bir Fonksiyonun Türevi

$y = y(x)$ in sürekli bir fonksiyon olduğunu ve $x = x(t)$, $y = y(t)$ nin $t \in (a, b)$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Bu durumda, $y = y(x)$ fonksiyonunun $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (a, b)$ parametrik denklemleri ile belirlendiğini söyleriz.

Teorem 1: Eğer $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in (a, b)$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ise ve $y'(t) \neq 0$ ise, $y = y(x)$ fonksiyonu da türevlenebilirdir ve şu eşitlik doğrudur:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

İspat: t parametresinin Δt değişimi olduğunu varsayalım. O zaman x ve y fonksiyonları Δx ve Δy değişimlerini alır, yani $x + \Delta x = x(t + \Delta t)$, $y + \Delta y = y(t + \Delta t)$, $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$. $y = y(x)$ fonksiyonunun türevi için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{x(t + \Delta t) - x(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \\ y = \ln(x^2 + 1) & \\ &= \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \end{aligned}$$

Örnek 1

$x = x(t)$, $y = y(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = y(x)$ fonksiyonu için $y'(x)$ i hesaplayalım:

$$\text{a) } x(t) = t^3 + 3t + 1, y(t) = t^3 - 3t + 1; \quad \text{b) } x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

a) Teorem 1'de verilen formüle göre, birinci türev için $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ elde edilir.

$$\text{b) } y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

$x = x(t), y = y(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = y(x)$ fonksiyonu için $y'(x)$ i hesaplayınız.

a) $x = 3t^2 + 2t - 3, y = 2t^2 + 2t - 1;$ b) $x = \sqrt{t}, y = \sqrt[3]{t}.$

c) $x = 2 \ln t, y = \frac{1}{t} + 8;$ ç) $x = 2e^{t^2+3t}, y = 2t^2 + 6t.$

Çalışma Alıştırmaları

1. $x = x(t), y = y(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = y(x)$ fonksiyonu için $y'(x)$ i hesaplayınız.

a) $x = \ln(t) + 4, y = t^2 + 2;$ b) $x = \ln(t + 5), y = \ln(-t).$

2. $x = x(t), y = y(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = y(x)$ fonksiyonu için $y'(x)$ i hesaplayınız.

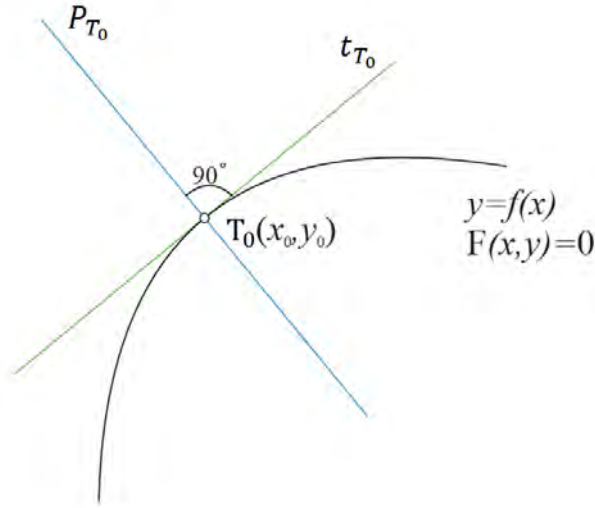
a) $x = 5(e^t + e^{-t}), y = 3(e^t - e^{-t});$ b) $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$

8. Teğet Denklemi ve Normal Denklemi

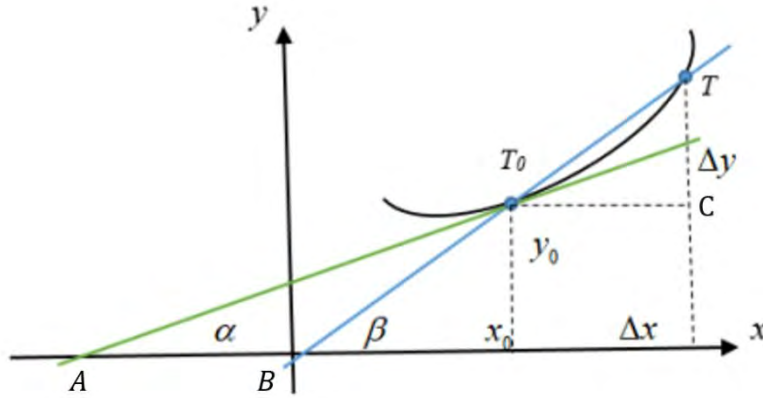
Burada, bir fonksiyonun grafiğinin teğet ve normal denklemlerini belirlemede birinci türevin uygulamasını inceleyeceğiz.

$y = f(x)$ fonksiyonunun verildiğini varsayalım. $T_0(x_0, y_0)$ noktasının fonksiyonun grafiğine ait olduğunu varsayalım. $T_0(x_0, y_0)$ noktasındaki fonksiyonun grafiğinin teğeti, fonksiyonun grafiğine T_0 noktasında değen bir doğrudur. Teğeti t_{T_0} ile göstereceğiz, buradaki indis, teğetin hangi noktada olduğunu işaret etmektedir

Verilen bir noktadaki fonksiyonun grafiğinin normali, o noktadan geçen teğete dik olan bir doğrudur. Normal genellikle p_{T_0} ile gösterilir, burada da indis normalin hangi noktada olduğunu işaret etmektedir, şekil 4.



Sekil 4 a)



Sekil 4 b)

$T_0(x_0, y_0)$ noktasında çizilen teğetin eğimi katsayısı $k_{t_{T_0}} = \tan \alpha$ dır (Şekil 4b). $\tan \alpha$ trigonometrik fonksiyonunun tanımından ve Şekil 4b'deki ΔT_0CT üçgeninden şu sonuca varılır: $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, burada β , T_0 noktasından geçen kesenin (BT doğrusu) x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açıdır.

Dolayısıyla $y - y_0 = \tan \beta \cdot (x - x_0)$ elde edilir.

Δx azaldıkça, yani $\Delta x \rightarrow 0$ olduğunda, kesenin sapması teğetin sapmasına giderek daha çok yaklaşır ve $\Delta x = 0$ için kesen teğetle çakışacaktır.

O halde $k_{t_{T_0}} = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$ geçerlidir.

Buna göre,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

elde edilir ve bu eşitlik teğetin denklemdir.

İki doğrunun dik olma koşulundan $k_p = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$ olduğunu elde ederiz, dolayısıyla normalin denklemi için

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ elde edilir.}$$

Örnek 1 $y = 2x^2 - x + 1$ fonksiyonunun grafiğinin $A(1, 2)$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini yazalım.

Teğet denklemi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$
$$f'(x) = 4x - 1, \quad f'(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3,$$

dolayısıyla teğetin denklemi için,

$$y - 2 = 3(x - 1),$$
$$3x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1 \text{ elde edilir.}$$

Normal denklemi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$
$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$
$$x + 3y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Örnek 2 $y = 2x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun grafiğinin $A(1, y_0)$ noktasındaki teğet ve normalinin denklemlerini yazalım.

$A(1, y_0)$ noktasının ordinatını belirtiyoruz:

$$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1.$$

Teğetin denklemi şu formülle verilir:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

burada teğetin eğimi $x = 1$ noktasındaki birinci türevin değeridir, yani:

$$f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 3,$$

buradan verilen $A(1, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini belirtiyoruz:

$$y - 1 = 3(x - 1),$$
$$3x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Normal denklemi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$

$$x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Örnek 3 $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinin $A\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ noktasındaki teğet denklemini ve normal denklemini yazalım.

$A\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ noktasının apsisini belirtelim.

$$f(x_0) = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{x_0} = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{4}.$$

Teğet denklemi için,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

elde edilir. burada teğetin eğimi $x_0 = \frac{1}{4}$ noktasındaki birinci türevin değeridir, yani:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1,$$

buradan verilen $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ noktasındaki teğetin denklemi için,

$$y - \frac{1}{2} = 1\left(x - \frac{1}{4}\right) \text{ yani } y = x + \frac{1}{4} \text{ elde edilir.}$$

$A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ noktasındaki normalin denklemi:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$y = -x + \frac{3}{4}.$$

1

Verilen fonksiyonun grafiğinin verilen noktasındaki teğetin ve normalin denklemini yazınız.

a) $y = -x^2 - 2x$, nokta $A(-2, y_0)$;

b) $y = \frac{1}{x^2}$, nokta $A(-1, y_0)$.

Örnek 4 $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x - 8}$ fonksiyonunun grafiğinin $A(5, y_0)$ noktasındaki teğetin denklemini ve normalin denklemini yazalım.

Çözüm yöntemi önceki örneklerdekiyle aynıdır:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(5) = \sqrt[3]{5^2 - 5 \cdot 5 - 8} = \sqrt[3]{-8} = -2, \\ f'(x) &= \left[(x^2 - 5x - 8)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^2 - 5x - 8)^{\frac{1}{3}-1} (2x - 5), \\ &= \frac{1}{3} (x^2 - 5x - 8)^{-\frac{2}{3}} (2x - 5) = \frac{2x - 5}{3\sqrt[3]{(x^2 - 5x - 8)^2}}, \\ f'(x_0) &= f'(5) = \frac{2 \cdot 5 - 5}{3\sqrt[3]{(5^2 - 5 \cdot 5 - 8)^2}} = \frac{5}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Teğet denklemi:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), \\ y + 2 &= \frac{5}{12}(x - 5), \\ 5x - 12y - 49 &= 0. \end{aligned}$$

Normalin denklemi:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\ y + 2 &= -\frac{12}{5}(x - 5), \\ 12x + 5y - 50 &= 0. \end{aligned}$$

Örnek 5 $y = x^2 - 2x$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktadaki teğetin ve normalin denklemini yazalım.

Bu fonksiyonun grafiği bir paraboldür. Önce x eksenini keşişim noktalarını bulalım:

$$y = 0, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Yani $A(0, 0)$ ve $B(2, 0)$ noktalarındaki teğet ve normalin denklemini belirtmeliyiz.

Fonksiyonun birinci türevini belirleyeceğiz:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

$A(0, 0)$ noktasındaki teğet denklemini:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$A(0, 0)$ noktasındaki normalin denklemini:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$\begin{aligned}f'(0) &= 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\y &= -2x, \\2x + y &= 0.\end{aligned}$$

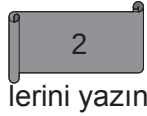
$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x, \\x - 2y &= 0.\end{aligned}$$

$B(2, 0)$ noktasındaki teğet denklemi:

$$\begin{aligned}f'(2) &= 2 \cdot 2 - 2 = 2, \\y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), \\y &= 2(x - 2), \\2x - y - 4 &= 0.\end{aligned}$$

$B(2, 0)$ noktasındaki normalin denklemi:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 2), \\y &= -\frac{1}{2}x + 1.\end{aligned}$$



2 Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin belirtilen noktalardaki teğet ve normalin denklemlerini yazın:

a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ fonksiyonunun $A(2, y_0)$ noktasında;

b) $y = x^4 - 3x^2$ fonksiyonunun $A(2, y_0)$ noktasında.

Örnek 6

$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ eğrisinin $7x - 4y + 28 = 0$ doğrusuna paralel olan teğet denklemini yazalım. Değme noktalarında normalin denklemini de yazalım.

Teğet $7x - 4y + 28 = 0$ doğrusuna paralel olduğundan, onların eğimi aynıdır.

$$7x - 4y + 28 = 0$$

$$4y = 7x + 28$$

$$y = \frac{7}{4}x + 7$$

$$k = \frac{7}{4}$$

$$k = f'(x) = 3x^2 - 4x + 1,$$

$$3x^2 - 4x + 1 = \frac{7}{4},$$

$$12x^2 - 16x - 3 = 0.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{13}{8}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{481}{216}$$

Bu ikinci dereceden denklemin çözümleri: $x_1 = \frac{3}{2}$ ve $x_2 = -\frac{1}{6}$ dir.

Verilen noktada normalin

$$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right) \text{ ve } k = \frac{7}{4} \text{ denklemi:}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$y + \frac{13}{8} = \frac{7}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

$$14x - 8y - 34 = 0,$$

$$7x - 4y - 17 = 0.$$

Verilen noktada normalin

$$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right) \text{ ve } k = \frac{7}{4} \text{ denklemi:}$$

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$y + \frac{481}{216} = \frac{7}{4}\left(x + \frac{1}{6}\right).$$

Verilen noktada teğet denklemi :

$$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right) \text{ ve } k = \frac{7}{4} \text{ denklemi:}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

$$y + \frac{13}{8} = -\frac{4}{7}\left(x - \frac{3}{2}\right),$$

$$32x + 56y + 43 = 0.$$

Verilen noktada teğet denklemi :

$$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right) \text{ ve } k = \frac{7}{4} \text{ denklemi:}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

$$y + \frac{481}{216} = -\frac{4}{7}\left(x + \frac{1}{6}\right).$$

Demek ki, $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right)$ ve $B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right)$ noktalarındaki teğetin ve normalin denklemini belirtmeliyiz.

3 $y = x^3 + 3x^2 - 5$ eğrisinin $6x + 2y + 3 = 0$ doğrusuna paralel olan teğetin denklemini yazınız. Değme noktalarında normalin denklemini de yazınız.

Çalışma Alıştırmaları:

1. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin belirtilen noktalardaki teğet ve normalin denklemlerini yazınız:

a) $y = x^4 - x^2 + 3$ fonksiyonunun $A(1, 0)$ noktasında;

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$ fonksiyonunun $A(-2, y_0)$ noktasında.

2. $y = 4 - x^3$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine kesişim noktalarındaki teğet ve normalin denklemlerini yazınız.

3. $y = x^2 - 1$ eğrisinin $6x - y - 10 = 0$ doğrusuna paralel olan teğet denklemini yazınız. Değme noktalarında normalin denklemini de yazınız.

4. $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ eğrisinin $2x + y + 4 = 0$ doğrusuna dik olan teğetin denklemini yazınız. Değme noktalarında normalin denklemini de yazınız.

9. Yüksek Mertebeden Türevler

Yüksek mertebeden bir fonksiyonun türevini tanımlamak için, önce $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevini tanımlayacağız. $y = f(x)$ fonksiyonunun D_f kümesinde türevlenebilir olduğunu varsayalım, o zaman $f'(x)$ türevi D_f üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 1: Eğer $f'(x)$ türev fonksiyonunun D_f üzerinde birinci türevi varsa, o zaman $(f'(x))'$ ifadesine $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi denir ve $f''(x)$ ile gösterilir.

$f''(x) = (f'(x))'$ veya $y''(x) = (y'(x))'$ olarak gösteririz.

İkinci türev $f''(x)$ 'in daha fazla türevini alarak, fonksiyonun üçüncü türevini $(f''(x))' = f'''(x)$ elde ederiz. Aynı prosedürle, sonraki türevlerin varlığı koşulu sağlandığı sürece dördüncü, beşinci vb. türevleri elde edebiliriz.

Örnek 1 $y = x^5$ fonksiyonu için şunları elde ederiz:

$y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = 0$ ondan sonra her türev 0 olacaktır.

Örnek 2 $y = x \ln x$ fonksiyonunun üçüncü türevini belirtelim.

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x,$$

$$y'' = (1 + \ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Örnek 3 $y = x^3 \ln \frac{x}{2}$ fonksiyonunun ikinci türevini belirtelim:

$$y' = 3x^2 \ln \frac{x}{2} + x^3 \frac{2}{x} \frac{1}{2} = 3x^2 \ln \frac{x}{2} + x^2,$$

$$y'' = 6x \ln \frac{x}{2} + 3x^2 \frac{2}{x} \frac{1}{2} + 2x = 6x \ln \frac{x}{2} + 5x.$$

1

Aşağıdaki fonksiyonların ikinci türevini belirtiniz:

a) $y = xe^x$;

b) $y = x^2 \ln x$.

$$c) y = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$ç) y = \frac{x+1}{x-1}.$$



$y = \frac{x-2}{x+3}$ fonksiyonu $(x-2)y'' + 2yy' = 0$ eşitliğini sağladığını ispatlayınız.

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci türevini belirtiniz:

$$a) y = e^{2x-3};$$

$$b) y = \ln(x^2 + 2x);$$

$$c) y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$ç) y = x^3 \ln x.$$

$$d) y = \sqrt{x}\sqrt{x};$$

$$e) y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2};$$

$$f) y = 2x^2 + 5x - 3.$$

2. Aşağıdaki kapalı fonksiyonların ikinci türevini belirleyin:

$$a) x^3 - 3x^2 + 1 - y = 0;$$

$$b) y + xy + x^2 = 2.$$

3. $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ fonksiyonunun $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$ denklemini sağladığını kanıtlayınız.

10. Fonksiyonların Monotonluğu ve Yerel Ekstremum Değerleri

Bir fonksiyon için $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$ geçerli olduğu durumda, fonksiyon monoton artan olduğunu, diğer taraftan bir fonksiyon için $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$ geçerli ise fonksiyon monoton eksilen (azalan) olduğunu hatırlayalım. Fonksiyonların monotonluğunu sadece monotonluk tanımını kullanarak incelemek bazen çok zor olabilir. Bu modüler ünite, bir türevin yardımıyla fonksiyonların monotonluğunu tanım kümesinin bazı aralıklarında nasıl basit bir şekilde belirleyebileceğimizi göreceğiz.

Teorem 1. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayalım.

1. $y = f(x)$, (a, b) aralığında monoton artan ise, her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ 'dır;

2. $y = f(x)$, (a, b) aralığında monoton azalan ise, her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ 'dır;

İspat: $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ile tanımlanır. $\Delta x > 0$ olduğunu varsayarsak ve $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin tanımında $x = x_0$ ve $x + \Delta x = x_1$ 'i, yani

$x_0 < x_1$ 'i yerine koyarsak, x_0 noktasındaki birinci türev şu şekilde olacaktır: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$

1. $y = f(x)$ 'in (a, b) aralığında monoton arttığını varsayalım. O zaman $x_0, x_1 \in (a, b)$ için $x_0 < x_1$ ise $f(x_0) < f(x_1)$ olacaktır. Buradan $f(x_1) - f(x_0) > 0$ sonucu çıkar. Dolayısıyla

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \text{ olur, dolayısıyla her } x \in (a, b) \text{ için } f'(x) > 0 \text{ dir.}$$

2. $y = f(x)$ 'in (a, b) aralığında monoton azaldığını varsayalım. O zaman $x_0, x_1 \in (a, b)$ için $x_0 < x_1$ ise $f(x_0) > f(x_1)$ olacaktır. Buradan $f(x_1) - f(x_0) < 0$ sonucu çıkar. Dolayısıyla

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ olur, dolayısıyla her } x \in (a, b) \text{ için } f'(x) < 0 \text{ olur. } \blacksquare$$

Teorem 1'deki ifadenin tersi de doğrudur.

Teorem 2: $y = f(x)$ fonksiyonunun $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ olmak üzere (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu varsayalım.

1. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise, $y = f(x)$ (a, b) aralığında monoton artandır;
2. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise, $y = f(x)$ (a, b) aralığında monoton azalandır.

İspat: $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ile tanımlanır.

$\Delta x > 0$ olduğunu varsayarsak ve $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin tanımında $x = x_0$ ve $x + \Delta x = x_1$ 'i, yani $x_0 < x_1$ 'i yerine koyarsak, x_0 noktasındaki birinci türev şu şekilde olacaktır:

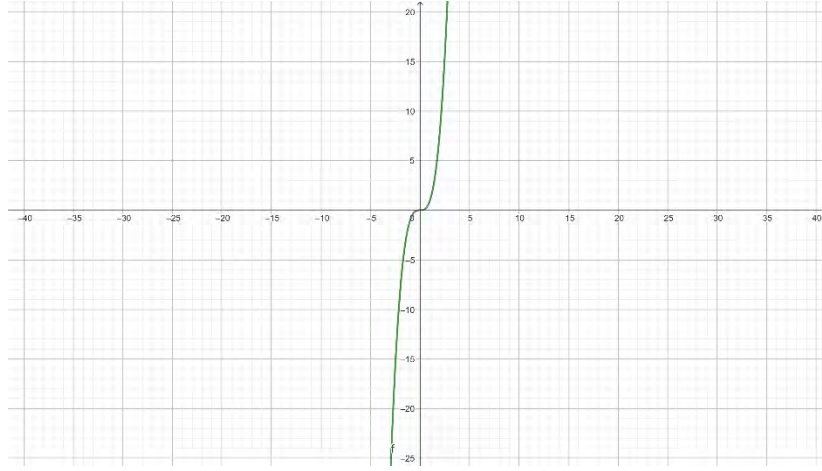
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ olduğunu varsayalım. Birinci türevin tanımından şu sonuç

çıkar: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ $\Delta x > 0$ olduğundan, $f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) > 0$, yani $f(x_1) > f(x_0)$ sonucu elde edilir, dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonu her $x \in (a, b)$ için monoton artandır.

2. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ olduğunu varsayalım. Birinci türev tanımından $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$ sonucu elde edilir. $\Delta x > 0$ olduğundan, $f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) < 0$, yani $f(x_1) < f(x_0)$ sonucu çıkar, dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonu her $x \in (a, b)$ için monoton azalandır. ■

Örnek 1 $y = x^3$ fonksiyonu için birinci türev $y' = 3x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 'dir. Türev her $x \in \mathbb{R}$ için sıfırdan büyük olduğundan, bu fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için monoton artandır (Şekil 5).



Şekil 5

Örnek 2 $y = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun artan ve eksilen aralıkları belirtelim. Fonksiyonun birinci türevini buluyoruz: $y' = 2x - 2$.

1. $y' = 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, yani fonksiyon $(1, \infty)$ aralığında artandır.
2. $y' = 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, yani fonksiyon $(-\infty, 1)$ aralığında eksilendir.
3. $y' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Birinci türev $y' = f'(x) = 0$ olduğunda x_0 noktasına ekstremum (durağan) nokta denir. Örneğimizde $x = 1$ noktası ekstremum noktasıdır.

Örnek 3 $y = x^3 - 3x$ fonksiyonunun artan ve eksilen aralıklarını belirtelim. Fonksiyonun birinci türevini buluyoruz: $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Ekstremum (durağan) noktaları elde etmek için şunu hesaplıyoruz: $y' = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$, buradan $x_1 = 1$ ve $x_2 = -1$ elde ederiz.

Devam ediyoruz,

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Yani fonksiyon $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ aralığında artandır.

$$y' < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1).$$

Yani fonksiyon $(-1, 1)$ aralığında azalandır.

1 $y = x^2 - 1$ ve $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ fonksiyonları için ekstremum noktalarını ve artan ve eksilen aralıklarını belirtelim.

$$\text{a) } y = x^2 - 1; \quad \text{b) } y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$$

Örnek 4 $y = \frac{x^2}{x-2}$ fonksiyonu için artan ve eksilen aralıkları belirtelim. Fonksiyonun birinci

türevini hesaplıyoruz: $y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}.$

Burada her $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ için $(x-2)^2 > 0$ olduğunu fark etmeliyiz.

$$y' > 0 \Leftrightarrow x(x-4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty).$$

Yani fonksiyon $(-\infty, 0)$ ve $(4, \infty)$ aralıklarında artandır.

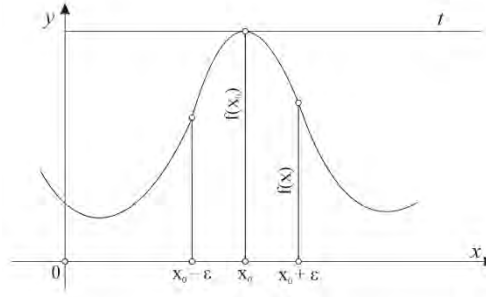
$$y' < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4),$$

olduğundan, fonksiyon $(0, 4)$ aralığında eksilendir.

2 Aşağıdaki fonksiyonlar için artan ve azalan aralıkları belirtelim.

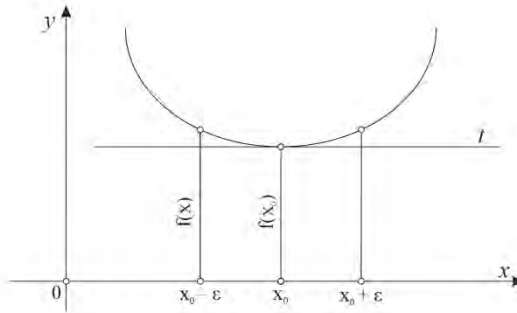
$$\text{a) } y = x^2 e^x; \quad \text{b) } y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında tanımlı olduğunu ve $x_0 \in (a, b)$ olduğunu varsayalım. Eğer x_0 'ın öyle bir ε komşuluğu varsa ki, her $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ için $f(x) < f(x_0)$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında yerel maksimumu olduğunu söyleriz (şekil 6).



Şekil 6

$y = f(x)$ 'in (a, b) aralığında tanımlı olduğunu ve $x_0 \in (a, b)$ olduğunu varsayalım. Eğer x_0 'ın öyle bir ε komşuluğu varsa ki, her $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ için $f(x) > f(x_0)$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında yerel minimumu olduğunu söyleriz (Şekil 7).



Şekil 7

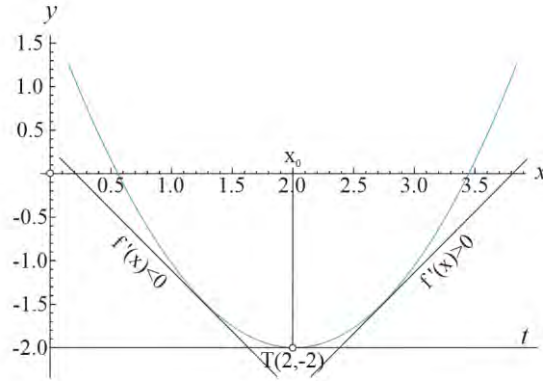
Fonksiyonun yerel minimumu ve yerel maksimumu **fonksiyonun yerel ekstrem noktaları** olarak adlandırılır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun yerel bir ekstremuma sahip olduğu x_0 noktası, fonksiyonun tanım kümesini artan bir aralık ve azalan bir aralık olarak ayırır, yani $\delta > 0$ için fonksiyon $(x_0 - \delta, x_0)$ aralığında artarsa (azalırsa), $(x_0, x_0 + \delta)$ aralığında azalır (artar).

Örnek 5

$f(x) = x^2 - 4x + 2$ fonksiyonunun yerel ekstremlerini belirtelim.

Öncelikle monotonluk aralıklarını belirteceğiz. Şunları elde ederiz: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$ ve bu aralıkta fonksiyon artandır. $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$ ve bu aralıkta fonksiyon azalandır (Şekil 8). Yani $x_0 = 2$ noktasında, birinci türev işareti negatiften pozitifte değişir, bu nedenle bu noktada fonksiyonun yerel bir minimumu vardır.



Şekil 8

Teorem 3: $y = f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu ve $f(x_0)$ 'ın bir $x_0 \in (a, b)$ için yerel bir ekstremum olduğunu varsayalım. O zaman $f'(x_0) = 0$ 'dır.

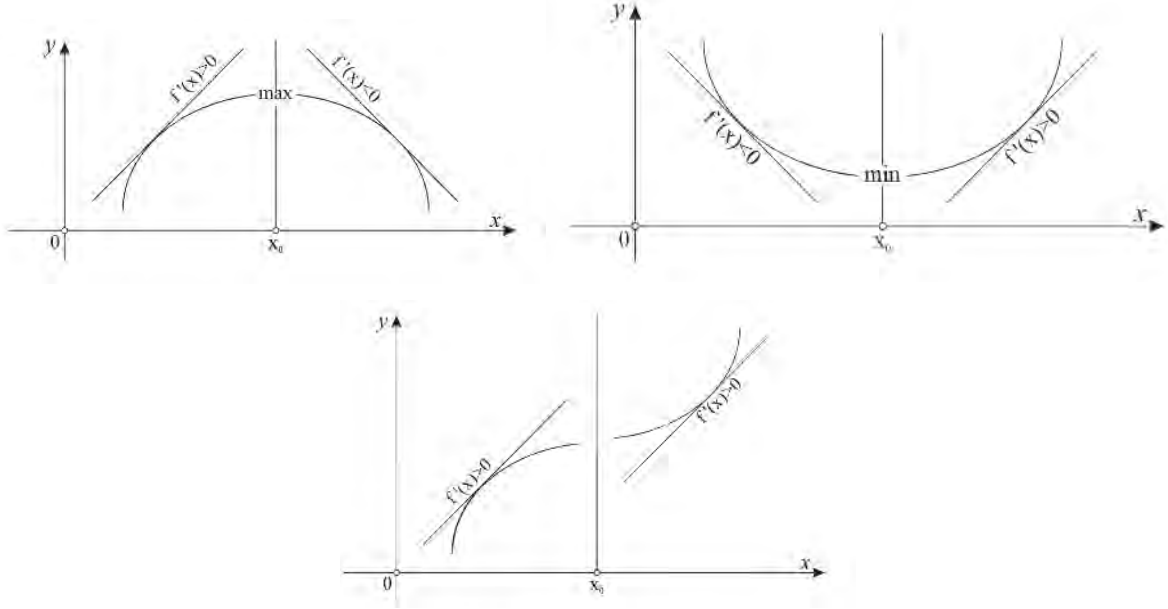
Ters ifade doğru olmak zorunda değildir, bu nedenle $f'(x_0) = 0$ 'ın x_0 noktasında yerel bir ekstremumun varlığı için gerekli, ancak yeterli bir koşul olmadığı sonucuna varabiliriz. Yani, verilen bir noktada yerel bir ekstremumun varlığını garanti edecek ek koşulların belirlenmesi gerekmektedir. Örnek olarak $y = x^3 + 3x$ fonksiyonunu ele alabiliriz. Bu fonksiyonun birinci türevi her zaman pozitiftir, yani $y' = 3x^2 + 3 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, bu da bu fonksiyonun tüm reel sayılarda monoton olarak arttığı anlamına gelir. Bu, ne minimum ne de maksimum olduğu anlamına gelir. Aynı şekilde, $y = x^3$ fonksiyonu da tüm reel doğrultuda monoton olarak artar, bu da ne minimum ne de maksimum olduğu anlamına gelir, ancak $x_0 = 0$ noktasında $f'(0) = 0$ 'dır.

Teorem 4: $y = f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında türevlenebilir olduğunu ve bir $x_0 \in (a, b)$ noktası için şunların geçerli olduğunu varsayalım:

1. $f'(x_0) = 0$,
 2. $f'(x)$, x_0 'ın bir komşuluğunda işaret değiştirir,
- o zaman $f(x_0)$, $f(x)$ fonksiyonunun yerel bir ekstremumdur.

Yani, şu üç durum mümkündür:

Eğer $f'(x)$ işareti pozitiften negatife işaret değiştirirse, fonksiyonun yerel bir maksimumu vardır. $f'(x)$ işareti negatiften pozitive işaret değiştirirse, yerel bir minimumu vardır. İşareti değiştirmezse, ekstremum değeri yoktur (Şekil 9).



Şekil 9

Örnek 6 'teki $y = x^3 - 3x$ fonksiyonunun yerel ekstrem noktalarını bulalım.

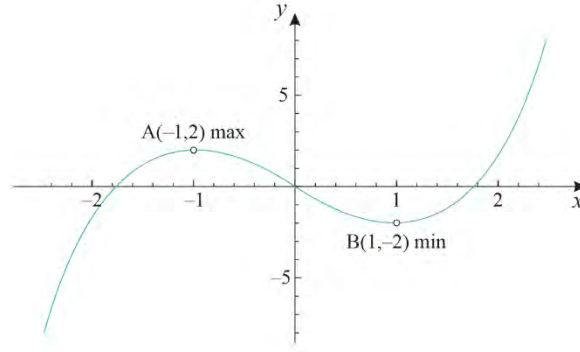
$(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında $f'(x) > 0$ pozitif olduğunu gördük. $(-1, 1)$ aralığında ise $f'(x) < 0$ negatiftir.

Yani, $(-\infty, -1)$ aralığında fonksiyon artar ve $(-1, 1)$ aralığında fonksiyon azalır. $x = -1$ noktasında, birinci türev işareti pozitiften negatife değişir. Bu nedenle, bu noktada fonksiyonun yerel bir maksimumu vardır, $y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.

Buradan fonksiyonun A $(-1, 2)$ noktasında yerel bir maksimumu olduğu elde edilir.

$(-1, 1)$ aralığında fonksiyon azalır ve $(1, \infty)$ aralığında fonksiyon artar. Yani $x = 1$ noktasında, birinci türev işareti negatiftan pozitive değiştirir, bu nedenle bu noktada fonksiyonun yerel bir minimumu vardır, $y_{\min} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$.

Demek ki $B(1,-2)$ noktasında fonksiyonun minimumu vardır (şekil 10).



Şekil 10

3

Aşağıdaki fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını belirtelim.

a) $y = x^3 - x^2 - x - 1$;

b) $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Örnek 7

$y = \sqrt[3]{x^2}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını belirtelim. Bu fonksiyon için tanım kümesi tüm reel sayılar kümesidir, yani $D_f = \mathbb{R}$ dir.

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty), \text{ и } y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Buradaki sorun, birinci türevin $x = 0$ için tanımlanmamış olmasıdır, ancak 0 fonksiyonun tanım kümesine ait olduğundan, bu, fonksiyonun $x = 0$ 'da ekstremum değerine sahip olmayacağı anlamına gelmez, bu durumda bir minimum vardır.

Bazen birinci türevin işaretini belirlemek kolay bir iş değildir. İkinci türevin uygulanmasıyla bu tür problemler oldukça basitleşir. Fonksiyonun x_0 noktasının bir komşuluğunda birinci ve ikinci türevlere sahip olduğunu varsayalım. Birinci türevin yardımıyla fonksiyonun x_0 noktasının bir komşuluğunda artıp artmadığını belirlediğimiz gibi, ikinci türevin yardımıyla $f'(x)$ 'in artıp artmadığını da belirleyeceğiz.

x_0 noktasında fonksiyonun bir maksimumu varsa, o zaman birinci türevi $f'(x)$, x_0 noktasının bir komşuluğunda azalır. Bu, $f'(x)$ fonksiyonunun türevinin negatif olduğu anlamına gelir, yani $(f'(x))' = f''(x) < 0$ noktasının bir komşuluğunda 0'dır.

x_0 noktasında fonksiyonun bir minimumu varsa, o zaman birinci türevi $f'(x)$, x_0 noktasının bir komşuluğunda artar. Bu, $f'(x)$ fonksiyonunun türevinin pozitif olduğu anlamına gelir, yani $(f'(x))' = f''(x) > 0$ noktasının bir komşuluğunda 0'dır.

O halde aşağıdaki kuralı çıkarabiliriz:

$f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasının bir komşuluğunda birinci ve ikinci türevleri sürekli olduğunu ve $f'(x_0) = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman fonksiyonun x_0 noktasında yerel bir ekstremumu vardır ve:

1. Eğer $f''(x_0) < 0$ ise, fonksiyonun yerel bir maksimumu vardır.
2. Eğer $f''(x_0) > 0$ ise, fonksiyonun yerel bir minimumu vardır.
3. Eğer $f''(x_0) = 0$ ise, ekstremum değerini belirlemek için ikinci türevi kullanamayız, bu durumda fonksiyonun birinci türevinin işaretini inceleyeceğiz.

Örnek 8

$y = x^3 - 3x^2$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını belirtelim.

Birinci türevi hesaplırsak ve 0'a eşitlersek şunu elde ederiz:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ veya } x = 2,$$

yani fonksiyonun $x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında ekstremum değerleri olacaktır.

İkinci türevi hesaplayıp değerlendirerek şunu elde ederiz:

$$y'' = 6x - 6, \quad x = 0 \text{ için, } y''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0,$$

yani fonksiyonun $x = 0$ noktasında bir maksimumu vardır, $y_{maks} = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.

$$y''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0,$$

yani fonksiyonun $x = 2$ noktasında bir minimumu vardır, $y_{\min} = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$.

4

Aşağıdaki fonksiyonların yerel ekstremlerini belirtelim.

a) $y = x^4 + 2x^2 - 1$;

b) $y = 3x^2 - 5x^3$.

İki kez türevlenebilir fonksiyonların ekstremum değerlerini belirlemek için aşağıdaki kuralları kullandığımız sonucuna varabiliriz:

1. Fonksiyonun birinci türevi $f'(x)$ belirlenir.
2. ekstremum noktaları belirlemek için $f'(x) = 0$ denklemi çözülür.
3. İkinci türev $f''(x)$ belirlenir ve her ekstremum nokta için işareti incelenir.

Örnek 9

$y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini belirtelim.

Birinci türevi hesaplayarak, 0'a eşitlersek şunu elde ederiz:

$$y' = x^4 - x^3 = x^3(x - 1),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 1) = 0,$$

fonksiyonun $x = 0$ veya $x = 1$ noktalarında ekstremum değerleri olacağı sonucu çıkar.

İkinci türevi hesaplayıp değerlendirerek şunu elde ederiz:

$y'' = 4x^3 - 3x^2$, $x = 0$ için, $y''(0) = 0$, buradan elde edilen ekstremum nokta hakkında hiçbir şey çıkaramayız.

Çünkü,

$$y''(1) = 1 > 0,$$

demek ki, fonksiyonun $x = 1$ noktasında yerel bir minimumu olduğu sonucuna varılır,

$$x=1, y_{\min}(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$$

Çünkü,

$$y''(0) = 0,$$

buna göre, $x = 0$ noktasında fonksiyonun ikinci türev ile ekstremum olup olmadığını belirleyemeyiz. Bu noktada birinci türevin davranışını incelememiz gerekiyor.

$f'(x) > 0$ için, $x^3 \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$, yani fonksiyon monoton artandır.

$f'(x) < 0$ değerleri için ise, $f'(x) < 0$, $x^3 \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, yani fonksiyon monoton eksilendir.

Fonksiyonun birinci türevi $x = 0$ 'da işaret değiştirir, bu nedenle $x = 0$ noktasında fonksiyonun yerel bir maksimumu olduğu sonucu çıkar.

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki fonksiyonların artan ve azalan aralıklarını belirleyin:

a) $y = 2x - x^2 + 5$;

b) $y = x^2 + 2x - 3$;

c) $y = 5x^3 - 7x^2 + 2$;

ç) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$;

d) $y = \frac{2x-1}{3x+4}$;

e) $y = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$;

f) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$.

2. Aşağıdaki fonksiyonların yerel ekstremum noktalarını belirtiniz:

a) $y = 2x - 5$;

b) $y = x^2 - 5x + 3$;

c) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$;

ç) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$;

d) $y = x^3(x-1)$;

e) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

f) $y = x^2 e^x$;

g) $y = \ln x + \frac{1}{x}$;

ğ) $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$;

h) $y = \frac{x^2 - 7}{x + 4}$.

3. $f(x) = ax^2 - 4x + 2$ fonksiyonunda a parametresini, fonksiyonun aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde belirleyiniz:

a) $x = 2$ 'de yerel bir minimumu;

b) $x = 4$ 'te yerel bir minimumu.

4. $f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x - 1$ fonksiyonunda a ve b parametrelerini, fonksiyonun $x = 3$ 'te yerel bir minimuma ve $x = -2$ 'de yerel bir maksimuma sahip olacak şekilde belirtiniz.

11. Fonksiyonların Konveksliği/Konkavlığı ve Dönüm Noktaları

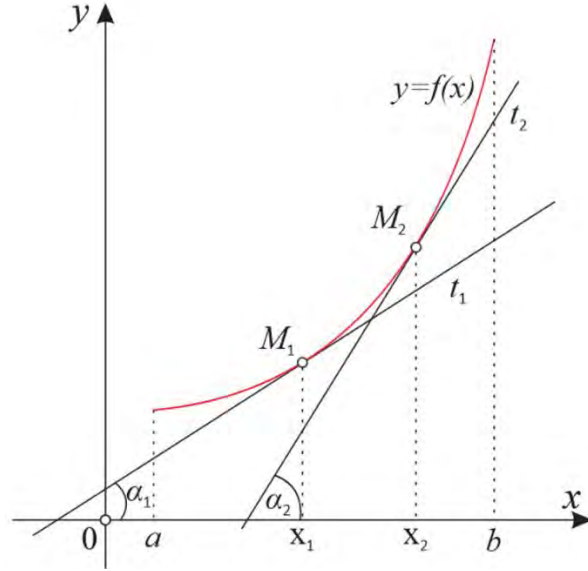
Verilen türevlenebilir bir fonksiyonun monotonluğunu incelemek için birinci türevi kullanabileceğimizi gördük. Benzer şekilde, ikinci türevin yardımıyla verilen bir aralıkta $y = f(x)$ eğrisinin “eğriliğini” inceleyebiliriz.

Teorem 1: $y = f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında birinci ve ikinci türevleri sürekli olduğunu varsayalım.

1. Her $x \in (a, b)$ için $f''(x) < 0$ ise, fonksiyonun grafiği bu aralıkta konvekstir (dışbükeydir).
2. Her $x \in (a, b)$ için $f''(x) > 0$ ise, fonksiyonun grafiği bu aralıkta konkavdır (içbükeydir).

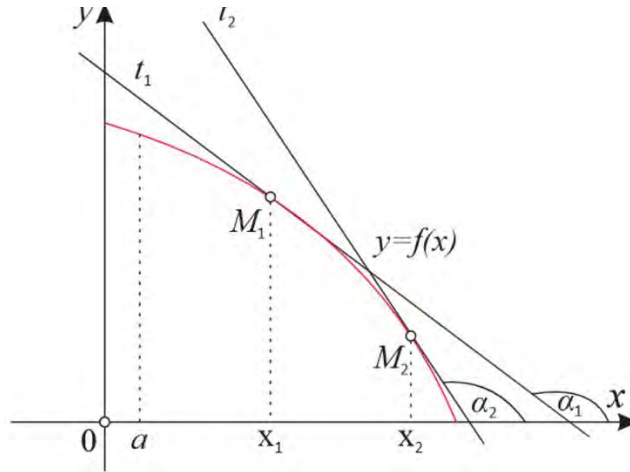
Bu teorem, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin eğrilik doğasını belirlememize yardımcı olur.

(Şekil 11 ve Şekil 12)'de (a, b) aralığında türevlenebilir olan $y = f(x)$ eğrisini ele alalım. $M_1(x_1, f(x_1))$ ve $M_2(x_2, f(x_2))$ eğri üzerindeki herhangi iki nokta olsun, öyle ki $x_1 < x_2$ olsun. M_1 ve M_2 noktalarındaki teğetler t_1 ve t_2 doğruları olsun, ve α_1 ve α_2 , teğetlerin x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açılar olsun (Şekil 11 ve Şekil 12).



Şekil 11

Şekil 11'de (a, b) aralığında konvex (içbükey) bir eğri gösterilmektedir. x değerinin artmasıyla, karşılık gelen teğetin x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açının da arttığını gözlemleyebiliriz, yani $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$. $f'(x_1) = \tan \alpha_1$ ve $f'(x_2) = \tan \alpha_2$ olduğundan ve $\tan \alpha$ artan bir fonksiyon olduğundan, $f'(x)$ 'in de (a, b) üzerinde artan bir fonksiyon olduğu sonucuna varılır, yani $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, dolayısıyla $f'(x)$ fonksiyonunun türevi (a, b) aralığında pozitifdir, yani $f''(x) > 0$.



Şekil 12

Şekil 12'de (a, b) aralığında konveks (dışbükey) bir eğri gösterilmektedir. x değerinin artmasıyla, karşılık gelen teğetin x ekseninin pozitif yönü ile yaptığı açının azaldığını gözlemleyebiliriz, yani $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$.

$f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$ ve $f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$ olduğundan ve $\operatorname{tg} \alpha$ artan bir fonksiyon olduğundan, $f'(x)$ 'in de (a, b) aralığında artan bir fonksiyon olduğu sonucu çıkar, yani $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$, dolayısıyla $f'(x)$ fonksiyonunun türevi (a, b) aralığında negatiftir, yani $f''(x) < 0$.

Örnek 1

$y = x^3$ eğrisinin konkavlık ve konvekslik aralıklarını belirtelim. Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri $y' = 3x^2$ ve $y'' = 6x$ 'tir. $y'' = 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ olduğunda fonksiyon konkavdır. Yani $(0, \infty)$ aralığında eğri konkavdır (içbükeydir). $y'' = 6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$, yani $(-\infty, 0)$ aralığında fonksiyon konvektir (dışbükeydir).

1

Aşağıdaki fonksiyonların konvekslik ve konkavlık aralıklarını belirtelim:

a) $y = x^3 - 1$;

b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Örnek 2

$y = x^2 + 2\ln x$ eğrisinin konkavlık ve konvekslik aralıklarını belirleyelim.

Fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri şunlardır:

$$y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

Fonksiyon $(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında konkavdır. Fonksiyon $(-1, 1)$ aralığında konvektir.

2

Aşağıdaki fonksiyonların konvekslik ve konkavlık aralıklarını belirtelim:

a) $y = \ln x, x \in (0, \infty)$;

b) $y = e^{-x^2}$.

Tanım 1: Eğrinin konkav/konveks olduğu aralığı konveks/konkav olduğu aralıktan ayıran eğri üzerindeki noktalara **dönüm noktaları** denir.

Demek ki, x_0 dönüm noktasında, eğri şeklini konkavdan (içbükey) konvekse (dışbükey) veya tersine değiştirir, bu da fonksiyonun x_0 üzerinden soldan sağa geçerken işaret değiştirdiği anlamına gelir ve eğer ikinci türev varsa $f''(x_0) = 0$ olur. Tüm bunlardan şu sonuca varabiliriz:

$y = f(x)$ eğrisinin x_0 noktasında bir dönüm noktasına sahip olması için gerekli koşul $f''(x_0) = 0$ 'dır ve yeterli koşul $f''(x)$ 'in x_0 noktasının bir komşuluğunda işaret değiştirmesidir.

Örnek 3

$y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ fonksiyonunun grafiğinin dönüm noktalarını belirtelim.

$$y' = 3x^2 - 6x + 5, y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Konkavlık ve konvekslik aralıkları için şu sonuca varabiliriz:

$$y'' > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0, x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$$

$$y'' < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0, x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

$x = 1$ noktasının bir komşuluğunda, ikinci türev işaret değiştirir.

$y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = 2$, o halde dönüm noktası $P(1, 2)$ 'dir.

3

Aşağıdaki fonksiyonların dönüm noktalarını belirleyin:

a) $y = x^3 - x^2 - x - 1$;

b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

$y = f(x)$ fonksiyonu ikinci türevi varsa, fonksiyonun dönüm noktaları aşağıdaki adımlarla belirlenir:

1. $f''(x)$ bulunur;
2. $f''(x) = 0$ denklemi çözülür;
3. $f''(x)$ 'in işareti dönüm noktalarının bir komşuluğunda incelenir.

Örnek 4

$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun dönüm noktalarını belirleyelim.

Yukarıdaki adımlara göre, önce fonksiyonun birinci türevini belirteceğiz:

$$y' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Daha sonra fonksiyonun ikinci türevini belirteceğiz: .

$$y'' = \frac{-4x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x \cdot (2-2x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$y'' = \frac{(x^2+1)[-4x(x^2+1) - 4x(2-2x^2)]}{(x^2+1)^4}$$

$$y'' = \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2+1)^3}.$$

Fonksiyonun ikinci türevini 0'a eşitleyerek şunu elde ederiz:

$$y'' = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-3) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}.$$

Dönüm noktalarının bir komşuluğunda işaretin incelenmesiyle şunu elde ederiz:

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3}), f''(x) < 0 \Rightarrow \text{fonksiyon konvektir},$$

$$x \in (-\sqrt{3}, 0), f''(x) > 0 \Rightarrow \text{fonksiyon konkavdır},$$

$$x \in (0, \sqrt{3}), f''(x) < 0 \Rightarrow \text{fonksiyon konvektir},$$

$$x \in (\sqrt{3}, \infty), f''(x) > 0 \Rightarrow \text{fonksiyon konkavdır}.$$

$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$ noktalarının solunda ve sağında fonksiyonun ikinci türevi farklı işaretlere sahip olduğundan, bu noktalar dönüm noktaları olduğu sonucuna varılır.

$$P_1\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0,0), P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Elde edilen sonuçları daha iyi bir genel bakış için tabloya yerleştireceğiz:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	konveks	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	konkav	0	konveks	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	konkav

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen eğrinin konvekslik ve konkavlık aralıklarını belirtiniz:

a) $y = 2x^3 - x^2 + 5$; b) $y = 4x - 4x^3 - 4$;

c) $y = 3x^2 - 5x + 2$; ç) $y = 2x^4 - 12x^2$.

2. Verilen eğrinin dönüm noktalarını belirtiniz:

a) $y = \frac{x}{x+1}$; b) $\frac{x}{x^2+1}$.

3. Verilen eğrinin konvekslik ve konkavlık aralıklarını belirttikten sonra dönüm noktalarını da belirtiniz:

a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$

b) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$, $x \neq -1$;

c) $y = x \ln^2 x$, $x > 0$;

ç) $y = x^2 e^x$;

d) $y = x e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$;

e) $y = x^2 \ln x$, $x > 0$.

12. Fonksiyonun Değişiminin İncelenmesi ve Grafiğinin Çizimi

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için, önce fonksiyonun grafiğinin değişimini aşağıdaki adımlarla analiz etmemiz gerekir:

1. Fonksiyonun tanım kümesi;
2. Fonksiyonun çift/tekliği ve periyodikliği;
3. Fonksiyonun grafiğinin koordinat eksenleriyle kesişim noktaları (sıfırlar, y eksenine kesişimi);
4. Fonksiyonun asimptotları;
5. Ekstremum değerleri ve monotonluk aralıkları;
6. Dönüm noktaları, konkavlık ve konvekslik.

Fonksiyonun grafiğini, fonksiyonun değişimini ve grafiğinin şekli hakkında elde edilen verilere dayanarak çizeriz. Belirtilen şema takip edilmek zorunda değildir.

Verilerin kademeli olarak bir tabloya ve aynı zamanda koordinat sistemine girilmesi önerilir.

Fonksiyonun özelliklerinin incelenmesi ve grafiğinin çizilmesi birkaç örnek üzerinden ele alınacaktır.

Örnek 1

$y = 2x^2 - 3x + 1$ fonksiyonunun grafiğini inceleyelim ve çizelim.

1. Fonksiyonun Tanım Kümesi

Fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır, dolayısıyla $D_f = \mathbb{R}$ 'dir.

2. Fonksiyonun Çift/Tekliği

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 \neq f(x).$$

Fonksiyon çift değildir:

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 = -(-2x^2 - 3x - 1) = -f(x).$$

Fonksiyon tek değildir. Yani fonksiyon ne çift ne de tektir.

3. Koordinat eksenleriyle kesişim noktaları

x eksenile kesişim (fonksiyonun sıfırları)

$$y = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2} \text{ ve } x_2 = 1.$$

x eksenile kesişim noktaları $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ve $B(1, 0)$ 'dir.

y eksenile kesişim

$$x = 0, \quad 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$$

y eksenile kesişim noktası $C(0, 1)$ 'dir.

4. Fonksiyonun Asimptotları

Yatay asimptot yoktur, çünkü:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty.$$

Fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olduğundan dikey asimptot yoktur.

Eğik asimptot $y = kx + n$ şeklindedir.

Çünkü:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \right) = \infty,$$

fonksiyonun grafiğinin eğimli asimptotları olmadığı sonucu çıkar.

5. Ekstremum değerleri ve monotonluk aralıkları

$$y' = 4x - 3,$$

$$y' = 0, 4x = 3, x = \frac{3}{4}$$

$$y'' = 4 > 0.$$

Demek ki, $x = \frac{3}{4}$ için fonksiyonun yerel minimumu vardır,

$$y_{\min} = y\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{8}.$$

$D\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ noktası grafikte yerel minimum noktasıdır.

Fonksiyonun monotonluğu için şunlar şu sonuca varılır:

$y' = 4x - 3 > 0, 4x > 3, x > \frac{3}{4}$, yani $x \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ için fonksiyon artandır.

$y' = 4x - 3 < 0, 4x < 3, x < \frac{3}{4}$, yani $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ için fonksiyon azalandır.

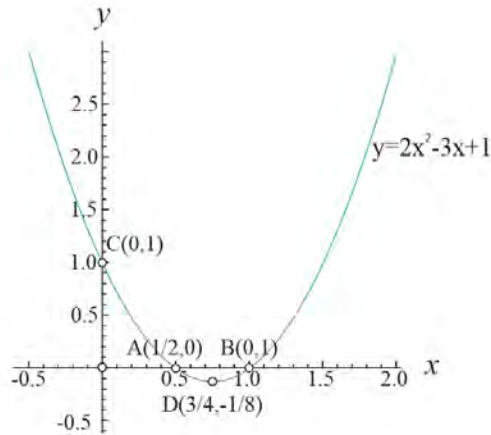
İncelemeyi tablo aracılığıyla yaparsak şunu elde ederiz:

x	$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
y'	- ↘	+ ↗

6. Dönüm Noktaları ve Eğrilik Aralıkları

$y'' = 4 > 0$, her $x \in \mathbb{R}$ için, eğrinin dönüm noktası yoktur ve tüm aralıkta konkavdır (içbükeydir) ve grafiği "U" şeklindedir.

Fonksiyonun grafiği Şekil 13'te verilmiştir.



Şekil 13

Örnek 2

$y = x^4 - 4x^3$ fonksiyonunun değişimini inceleyelim ve grafiğini çizelim.

1. Tanım kümesi

Fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır, dolayısıyla $Df = \mathbb{R}$ 'dir.

2. Fonksiyonun çift/tekliği

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 \neq f(x).$$

Fonksiyon çift değildir.

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 = -(-x^4 - 4x^3) = -f(x).$$

Fonksiyon tek değildir. Yani fonksiyon ne çift ne de tektir.

3. Koordinat eksenleriyle kesişim noktaları

x eksenile kesişim (fonksiyonun sıfırları)

$$y = 0, x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0, x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 4.$$

x eksenile kesişim noktaları $A(0, 0)$ ve $B(4, 0)$ 'dir.

y eksenile kesişim

$$x = 0, 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0.$$

y eksenile kesişim noktası $A(0,0)$ 'dir.

4. Fonksiyonun asimptotları

Yatay asimptot yoktur, çünkü:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 4x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty.$$

Fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlı olduğundan dikey asimptot yoktur.

Eğimli asimptot $y = kx + n$ şeklindedir. Çünkü:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 - 4x^3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty,$$

demek ki fonksiyonun grafiğinin eğik asimptotları yoktur.

5. Ekstremum değerleri ve monotonluk aralıkları

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$y'' = 12x^2 - 24x.$$

Fonksiyonun $x_1 = 0$ noktasındaki ikinci türevi için $y''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$ olduğundan, fonksiyonun $x_1 = 0$ noktasında yerel bir ekstremuma sahip olup olmadığını söyleyemeyiz.

Fonksiyonun $x_2 = 3$ noktasındaki ikinci türevi için $y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 > 0$ olduğundan, fonksiyonun $x_2 = 3$ noktasında yerel bir minimumu olduğu sonucuna varılır,

$$y_{\min} = y(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27.$$

$C(3, -27)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

Fonksiyonun birinci türevinin işaretini inceleyerek şunu elde ederiz:

$$y' = 4x^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x-3) > 0, x > 3, \text{ yani } x \in (3, \infty) \text{ için fonksiyon artandır,}$$

$$y' = 4x^2(x-3) < 0 \Leftrightarrow (x-3) < 0, x < 3, \text{ yani } x \in (-\infty, 3) \text{ için fonksiyon azalandır.}$$

İncelemeyi tablo aracılığıyla yaparsak şunu elde ederiz:

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	- ↘	+ ↗

6. Dönüm noktaları ve eğrilik aralıkları

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2),$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2.$$

İkinci türev y'' , $x_1 = 0$ ve $x_2 = 2$ noktalarından geçerken işaret değiştirir, çünkü

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \text{ yani bu aralıklarda fonksiyon konkavdır}$$

$$\text{ve } y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) < 0, x \in (0, 2) \text{ yani bu aralıklarda fonksiyon konvektir.}$$

$x_1 = 0$ ve $x_2 = 2$ noktaları için şunu diyebiliriz:

$$y(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0,$$

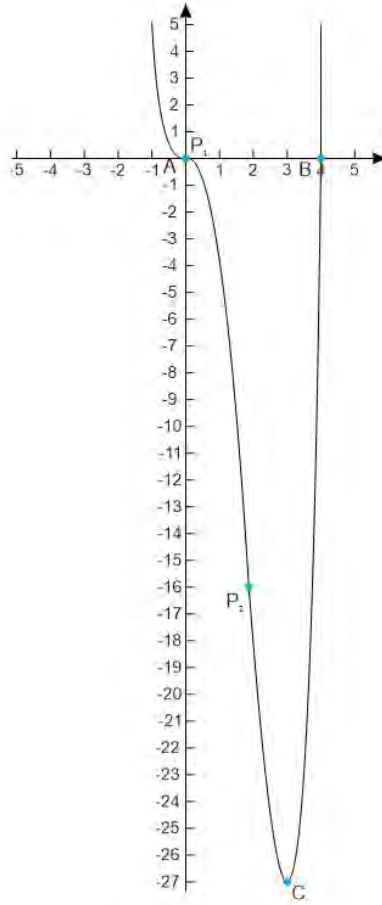
$$y(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16.$$

Dönüm noktaları $P_1(0, 0)$ ve $P_2(2, -16)$ dır.

Elde edilen sonuçları daha iyi bir genel bakış için tabloya yerleştireceğiz:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
y''	+	-	+
y	konkav	konveks	konkav

Fonksiyonun grafiği Şekil 14'te çizilmiştir.



Şek. 14

Örnek 3 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyelim ve grafiğini çizelim.

1. Tanım kümesi:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Rightarrow x \neq \pm 1,$$

Fonksiyon her $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ için tanımlıdır, dolayısıyla $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ 'dir.

2. Fonksiyonun çift/tekliği

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Fonksiyon tektir, bu da grafiğinin koordinat başlangıcına göre simetrik olduğu anlamına gelir.

3. Koordinat eksenleriyle kesişim noktaları

x eksenine kesişim (fonksiyonun sıfırları)

$$y = 0, \quad \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

x ekseniiyle kesişim noktası $(0, 0)$ 'dır.

$$y \text{ ekseniiyle kesişim} \quad x = 0, \quad y(0) = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0,$$

Kesişim noktası $(0, 0)$ 'dır.

4. Fonksiyonun asimptotları

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \right) = \frac{1}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

Dikey asimptot:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \varepsilon)^3}{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \varepsilon)^3}{(1 - \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \varepsilon)^3}{-\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \varepsilon)^3}{(-1 + \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (-2 + \varepsilon)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 - \varepsilon)^3}{(-1 - \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = -\infty.$$

Dikey asimptotların $x = 1$ ve $x = -1$ doğruları olduğunu elde ediyoruz.

Eğik asimptot $y = kx + n$ şeklindedir. Eğim katsayısı ve sabit terimi belirleyerek şunu elde ederiz:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{1 - 0}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

Eğik asimptot $y = x$ doğrusudur.

5. Ekstremum değeri ve monotonluk aralıkları için

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

elde edilir. Oradan

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 3 = 0$$

yani,

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}.$$

olduğunu buluyoruz. Fonksiyonun ikinci türevi belirtilir:

$$y'' = \left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \right)' = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Fonksiyonun $x_1 = 0$ noktasındaki ikinci türevi için $y''(0) = 0$ olduğundan, fonksiyonun $x_1 = 0$ noktasında yerel bir ekstremuma sahip olup olmadığını söyleyemeyiz.

Fonksiyonun $x_2 = \sqrt{3}$ noktasındaki ikinci türevi için $y''(\sqrt{3}) = \frac{12\sqrt{3}}{8^3} > 0$ olduğundan, fonksiyonun $x_2 = \sqrt{3}$ noktasında yerel bir minimumu olduğu elde edilir,

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ noktası yerel minimum noktasıdır.

Fonksiyonun $x_3 = -\sqrt{3}$ noktasındaki ikinci türevi için $y''(-\sqrt{3}) = \frac{-12\sqrt{3}}{8^3} < 0$ olduğundan, fonksiyonun $x_3 = -\sqrt{3}$ noktasında yerel bir maksimumu olduğu elde edilir

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

$x^2 > 0$ ve $(x^2 - 1)^2 > 0$ olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $y' > 0$ olduğunda

$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, fonksiyon artandır,

$x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, fonksiyon azalandır.

Fonksiyonun tek olduğunu gördük, bu da fonksiyonun grafiğinin koordinat başlangıcına göre simetrik olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, sadece x 'in pozitif değerlerini inceleyebiliriz.

İncelemeyi tablo aracılığıyla yaparsak şunu elde ederiz:

	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$x^2 - 3$	-	+
y'	-	+
y		

6. Dönüm noktaları ve eğrilik aralıkları

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3},$$

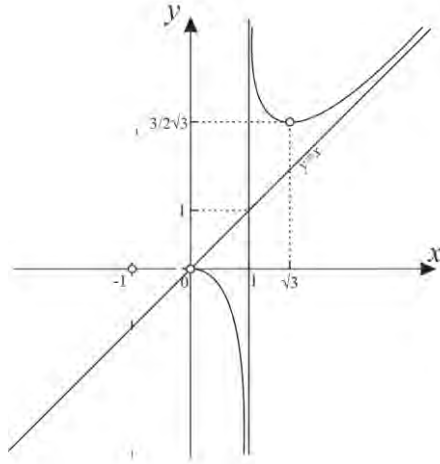
$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 3 = 0$$

$x^2 + 3 = 0$ denkleminin reel çözümü yoktur, bu nedenle sadece $x = 0$ ve $y(0) = 0$ koordinatlı nokta vardır. Dönüm noktası adayı $P(0, 0)$ 'dir.

Daha iyi bir genel bakış ve basitleştirme için, $x^2 + 3 > 0, \forall x \in D_f$ olduğunu ve fonksiyonun tek olduğunu göz önünde bulundurarak bir tablo oluşturacağız:

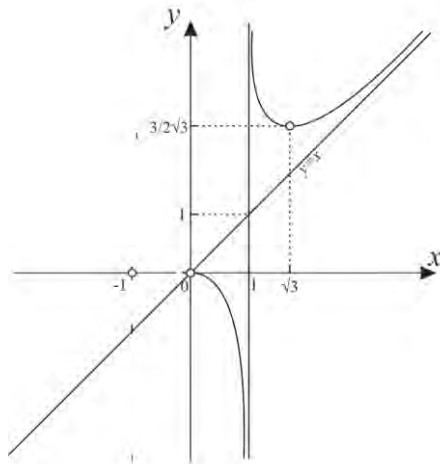
	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	+	+
$(x^2 - 1)^3$	-	+
y''	-	+
y	$\cap$	$\cup$

Artık fonksiyonun grafiğini çizebiliriz. Şekil 15'te sadece x 'in pozitif değerleri için grafik verilecektir.



Şekil 15

Fonksiyon tektir, yani fonksiyonun grafiği koordinat başlangıcına göre simetrik ve şekil 16'da grafiği görebilirsiniz:



Örnek 4

$y = \ln \frac{x+1}{x+2}$ fonksiyonunun değişimini inceleyelim ve grafiğini çizelim.

1. Tanım kümesi

$$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2,$$

Fonksiyon logaritmiktir, bu nedenle $\frac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ olmalıdır.

Yani fonksiyon $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ için tanımlıdır, yani

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-1, \infty).$$

2. Fonksiyonun çift/tekliği

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x+2} = \ln \frac{1-x}{2-x}.$$

Tanım kümesi simetrik olmadığından, fonksiyonun ne çift ne de tek olduğu sonucuna varabiliriz.

3. Koordinat eksenleriyle kesişim noktaları

x eksenile kesişimi (fonksiyonun sıfırları)

$$y = 0, \quad \ln \frac{x+1}{x+2} = 0 = \ln 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 1 \Rightarrow x+1 = x+2 \Rightarrow 0 \cdot x = 1,$$

bu da fonksiyonun sıfırlarının olmadığı anlamına gelir.

y eksenile kesişim

Fonksiyonun y eksenile kesişimi vardır, çünkü $x = 0$ için fonksiyonun değeri vardır:

$$y(0) = \ln \frac{1}{2}.$$

y eksenile kesişim noktası $A\left(0, \ln \frac{1}{2}\right)$ 'dir.

4. Fonksiyonun asimptotları

Yatay asimptot:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \ln \frac{1+0}{1+0} = \ln 1 = 0,$$

olduğuna göre, $y = 0$ doğrusu yatay asimptot olduğu sonucuna varılır.

Dikey asimptot

Fonksiyonun tanımlı olmadığı noktalardaki fonksiyonun limit değerini belirleyerek şunu elde ederiz:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{-2-\varepsilon+1}{-2-\varepsilon+2} = \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon} = \infty,$$

bu nedenle $x = -2$ 'nin soldan dikey asimptot olduğu sonucuna varılır.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{-1+\varepsilon+1}{-1+\varepsilon+2} = \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = -\infty,$$

olduğuna göre, $x = -1$ 'in sağdan dikey asimptot olduğu sonucuna varılır.

Eğik asimptot yoktur, çünkü $y = kx + n$ doğrusunda k katsayısı 0'dır, yani:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x+2} \right) \\ &= \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2}} = 0. \end{aligned}$$

5. Ekstremum değerleri ve monotonluk aralıkları

Fonksiyonun birinci türevini belirliyoruz:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \frac{(x+1)'(x+2) - (x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Fonksiyonun birinci türevinin değişimini incelemek için şu tabloyu oluşturuyoruz:

	$(-\infty, -2)$	$(-1, \infty)$
$x+1$	-	+
$x+2$	-	+
y'	+	+
y		

Fonksiyon tüm tanım kümesinde $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ artandır, bu nedenle fonksiyonun ekstremum değerleri yoktur. Ekstremum değerlerin olmaması, tanım kümesinin hiçbir noktasında birinci türevin 0 değerine sahip olmamasından da anlaşılabilir.

6. Dönüm noktaları ve eğrilik aralıklar

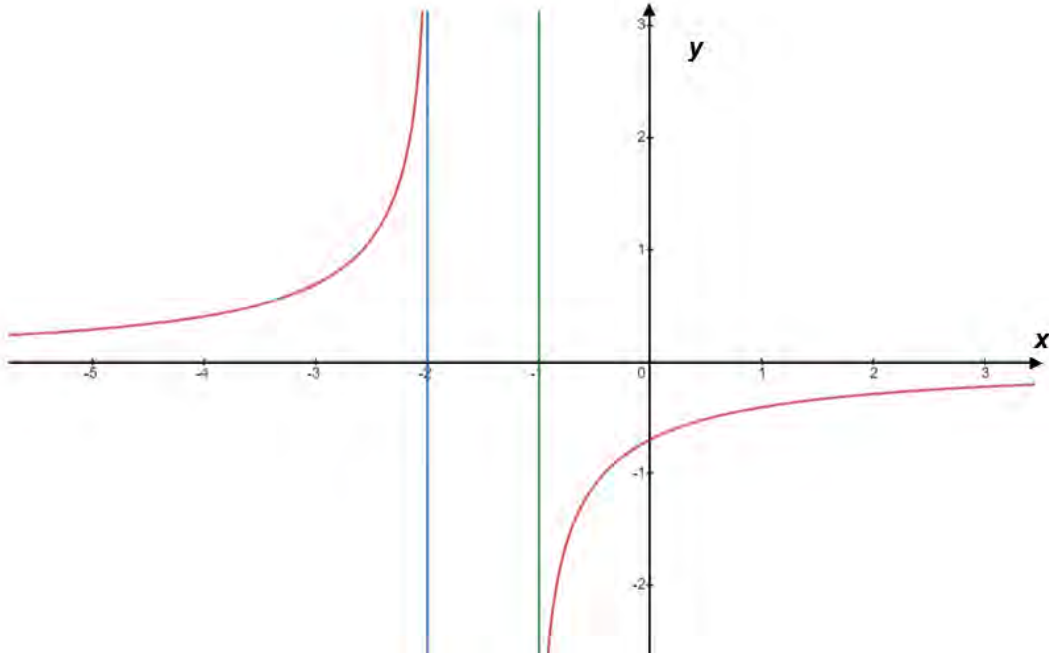
Fonksiyonun ikinci türevini belirliyoruz:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)' = \left(\frac{1}{x^2+3x+2} \right)' = \left((x^2+3x+2)^{-1} \right)' \\ &= -1 \cdot (x^2+3x+2)^{-2} (x^2+3x+2)' = \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}. \end{aligned}$$

Fonksiyonun ikinci türevinin değişimini incelemek için şu tabloyu oluşturuyoruz:

	$(-\infty, -2)$	$(-1, \infty)$
$2x+3$	-	+
-1	-	-
y''	+	-
y	$\cup$	$\cap$

Fonksiyonun grafiği Şekil 17'de verilmiştir.



Şekil 17

Çalışma alıştırmaları

1. Fonksiyonun değişimini inceleyin ve grafiğini çizin:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

b) $y = x^3 - 3x + 2$;

c) $y = \frac{1}{1+x^2}$;

ç) $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$;

d) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;

e) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;

f) $y = \frac{x^2+2x-1}{x^2}$;

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

2. Fonksiyonun değişimini inceleyin ve grafiğini çizin:

a) $y = x^2 e^x$;

b) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

c) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

ç) $y = x - \ln x$.

13. Ekstremum problemlerini çözmek için türevin uygulanması

Burada, pratik problemleri çözmek için birinci ve ikinci türevin uygulamasını ele alacağımız örnekler vereceğiz.

Örnek 1 Bir dikdörtgenin çevresi 20 birim olsun. Alanın en büyük olması için dikdörtgenin kenar uzunlukları ne olmalıdır?

Dikdörtgenin kenarlarını a ve b ile gösterelim. Dikdörtgenin çevresinin formülünden $L = 2a + 2b$ olduğunu biliyoruz. Yani:

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a.$$

Dikdörtgenin alanı $P = a \cdot b$ formülü ile hesaplanır. $b = 10 - a$ yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} P(a) &= a(10 - a) = 10a - a^2. \\ P'(a) &= 10 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5. \end{aligned}$$

Kenar uzunluğunun elde edilen değeri için alanın en büyük olup olmadığını kontrol etmek için ikinci türevi bulmamız gerekir.

İkinci türev $P''(5) = -2 < 0$, yani herhangi bir noktada sıfırdan küçüktür. $a = 5$ birim için alanın maksimum olduğu sonucuna varırız. b kenarı $b = 10 - a = 10 - 5 = 5$ birimdir.

Yani aynı çevreye sahip tüm dikdörtgenler arasında, kenar uzunluğu $a = 5$ olan karenin en büyük alanı vardır ve alan $P = 5 \cdot 5 = 25$ birim karedir.

Örnek 2 Bir doğru parçasının uzunluğu 20 cm olsun. Doğru parçası, iki parçanın küplerinin toplamı en küçük olacak şekilde iki parçaya bölünsün.

Doğru parçasının kısımlarını a ve b ile gösterelim.

$a + b = 20 \Rightarrow b = 20 - a$ olduğunu biliyoruz.

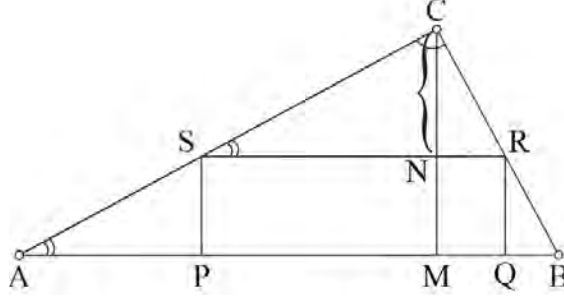
Küplerinin toplamını S ile gösterelim:

$$\begin{aligned} S &= a^3 + b^3 \\ S(a) &= a^3 + (20 - a)^3. \\ S'(a) &= 3a^2 + 3(20 - a)^2(20 - a)' = 3a^2 - 3(20 - a)^2 \\ &= 3a^2 - 3(400 - 40a + a^2) = 120a - 1200 \\ S'(a) &= 120a - 1200 = 0 \Rightarrow a = 10. \\ S''(10) &= 120 > 0 \end{aligned}$$

Yani $a = 10$ için S en küçük değere sahiptir, bu nedenle doğru parçasının kısımları 10 cm ve 10 cm dir.

Örnek 3 Kenarları 15, 20 ve 25 olan bir dik üçgenin içine, dikdörtgenin iki köşesi üçgenin hipotenüsünde olacak şekilde bir dikdörtgen yerleştirilmiştir. Yerleştirilen dikdörtgenin maksimum alanı nedir?

Üçgenin köşelerini A , B ve C ile, dikdörtgenin köşelerini ise P , Q , R ve S ile gösterelim (Şekil 18). Dikdörtgenin alanı $P = \overline{PQ} \cdot \overline{RQ}$ dur. Sorunun koşulundan: $\overline{AB} = 25$, $\overline{BC} = 15$, $\overline{AC} = 20$, olduğunu biliyoruz ve dikdörtgenin kenarlarını $\overline{PQ} = a$ ve $\overline{RQ} = b$ ile gösterelim. $\overline{CM}$, ABC üçgeninin hipotenüsüne indirilen yükseklik ve $\overline{CN}$, SRC üçgeninin hipotenüsüne indirilen yükseklik olsun. $\overline{PQ} = a$ ve $\overline{RQ} = b$ arasındaki ilişkiyi bulalım. Şekil 18'den şunu görüyoruz: $\triangle ABC \sim \triangle SRC$. Üçgenlerin benzerliğinden karşılık gelen kenarların orantılı olduğu sonucu çıkar.



Şekil 18

$$\triangle ABC \sim \triangle SRC,$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$$

Şimdi $\overline{CM}$ yi bulalım. ABC üçgeninin alanı iki şekilde hesaplanabilir:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$$

$$25 \cdot \overline{CM} = 15 \cdot 20$$

Orantıda yerine koyalım:

$$\frac{25}{a} = \frac{12}{\overline{CN}}.$$

$\overline{CN}$ yi bulmak kaldı. $\overline{MN} = \overline{RQ}$ olduğundan, $\overline{CN}$, $\overline{CN} = \overline{CM} - \overline{MN} = 12 - \overline{RQ} = 12 - b$, dir.

$$\frac{25}{a} = \frac{12}{12 - b},$$

$$12a = 25(12 - b),$$

$$a = \frac{25}{12}(12 - b).$$

Dikdörtgenin alanı için şunu elde ederiz:

$$P = a \cdot b = \frac{25}{12}(12 - b)b,$$
$$P(b) = \frac{25}{12}(12b - b^2).$$

Ondan sonra $P(b)$ nin birinci türevini bulalım:

$$P'(b) = \frac{25}{12}(12 - 2b),$$
$$P'(b) = 0$$
$$\frac{25}{12}(12 - 2b) = 0$$
$$b = 6,$$
$$P''(6) = -\frac{25}{6} < 0.$$

Yani $b = 6$ için dikdörtgenin alanı maksimumdur. a kenarını ve maksimum alanın bulunması kalır.

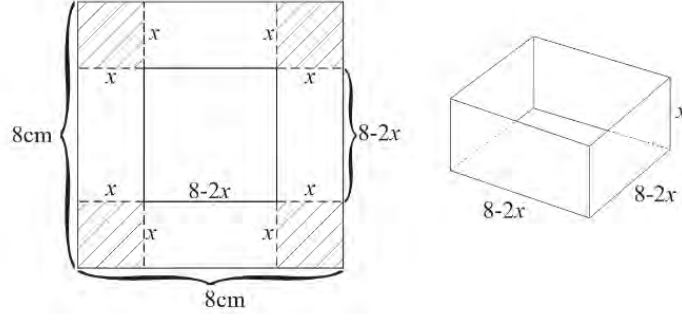
$$a = \frac{25}{12}(12 - 6) = \frac{25}{2},$$
$$P = ab = 6 \cdot \frac{25}{2} = 75.$$

Yani dik üçgenin içine böyle yerleştirilen dikdörtgenin maksimum alanı 75'tir.

Örnek 4

Kenarı 8 cm olan kare şeklinde bir karton parçasından her köşede birer küçük kare kesilir (Şekil 19'daki gibi) ve bu şekilde bir kutu oluşturulur. Kutunun en büyük hacme sahip olacağı boyutları bulacağız.

Kutudan kesilen karenin kenarını x ile gösterelim. Kutunun tabanı $8 - 2x$ kenarlı bir kare olacak, kutunun yüksekliği ise x olacaktır (Şekil 19).



Şekil 19

Kutu, düzgün bir dörtgen prizmadır ve hacmi şu şekilde belirtilir:

$$V = B \cdot H = (8 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V(x) = (64 - 32x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 32x^2 + 64x.$$

x için kritik değeri (maksimum veya minimum değeri), fonksiyonun birinci türevi $V'(x)$ 'i 0'a eşitlediğimizde elde ederiz.

$$V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$$

$$V'(x) = 0$$

$$4(3x^2 - 16x + 16) = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 4.$$

Öte yandan, kenar uzunluğu pozitif olmalıdır, yani:

$8 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -8 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$, yani x $(0, 4)$ aralığındaki değerleri alabilir. Buradan

tek çözüm $x_1 = \frac{4}{3}$ tür.

Bu değer için hacim maksimum mu? Kutunun taban kenarının uzunluğu için şunu elde ederiz:

$$V''(x) = 24x - 64,$$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \cdot \frac{4}{3} - 64 = 32 - 64 = -32 < 0.$$

$x = \frac{4}{3}$ için hacmin maksimum olduğu ve değerinin şu olduğu sonucuna varabiliriz:

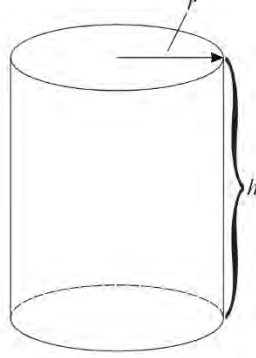
$$V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\frac{4}{3} = \frac{1024}{27} \approx 38.$$

Kutunun taban kenarının uzunluğu için şunu elde ederiz:

$$8 - 2x = 8 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33.$$

Örnek 5

Bir gıda saklama kutusu üreticisi, 1000 cm^3 hacimli silindir şeklinde konserve kutusu yapmak istiyor. Silindir şeklindeki konserve kutusunun maliyetinin en düşük olacağı silindirin boyutlarını bulacağız.

**Şekil 20**

Konserve kutusunun maliyetinin en düşük olması için, silindirin yüzey alanının en küçük olacağı yarıçap ve yükseklik değerleri bulunmalıdır.

Silindirin yüksekliği h ve silindirin yarıçapı r olsun.

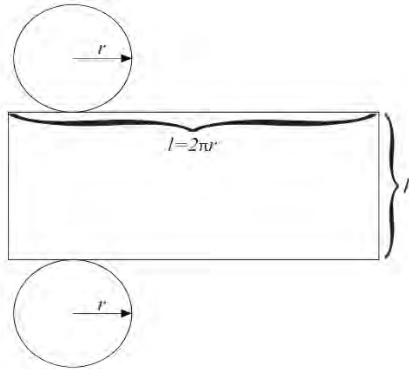
Silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ dir.

Hacim formülünden r ve h arasındaki ilişkiyi bulacağız. Yükseklik, yarıçap cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$\pi r^2 h = 1000,$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Silindirin yüzey alanı, tabanların alanının (πr^2) ve dikdörtgenin alanının ($2\pi r h$) toplamıdır (Şekil 21):

**Şekil 21**

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h,$$

$$P(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \frac{1000}{\pi r^2} = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Şimdi yüzey alanı $P(r)$ nin bir fonksiyonudur:

$$P(r) = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Yarıçapın sıfırdan büyük ($r > 0$) olmasına dikkat edilmelidir. Birinci türevi bularak şunu elde ederiz:

$$P'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2}.$$

Ekstremum değerini bulmak için birinci türevi sıfıra eşitleriz:

$$4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4r\pi = \frac{2000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,41 \text{ cm.}$$

Bu değer için yüzey alanının minimum olup olmadığını bulmak için ikinci türevi bulmamız gerekir:

$$P''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}.$$

$$P''(5,41) = 4\pi + \frac{4000}{(5,41)^3} > 0.$$

Yani $r \approx 5,41$ cm için silindirin yüzey alanı minimumdur. Yükseklik için şunu elde ederiz:

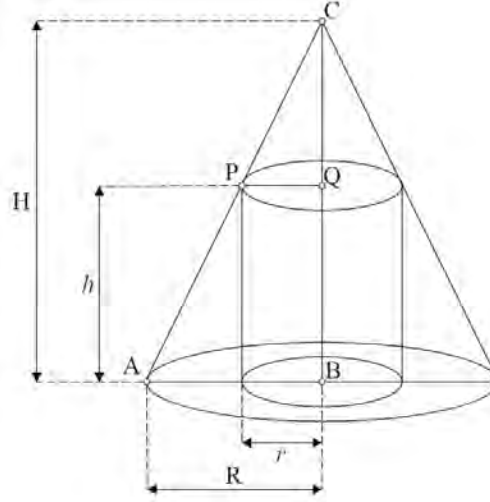
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi (5,41)^2} \approx 10,88 \text{ cm.}$$
 O halde silindirin minimum yüzey alanı:

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h \approx 553,58 \text{ cm}^2.$$

Örnek 6

Taban yarıçapı 4 cm ve yüksekliği 6 cm olan dik bir koninin içine maksimum hacimli bir silindir yerleştirilmiştir. Silindirin hacmini bulacağız.

Koninin yüksekliği H ve koninin tabanının yarıçapı R , silindirin yarıçapı ve yüksekliği ise sırasıyla r ve h olsun. Silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ 'dir. Hacmin sadece bir değişken r veya h 'ye bağlı olması, yani r veya h cinsinden ifade edilmesi gerekir.



şekil 22

$\overline{AB} = R$, $\overline{PQ} = r$ olsun ve C koninin tepe noktası olsun. şekil 22'den $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ olduğunu ve karşılık gelen kenarlarının orantılı olduğunu gorebiliriz. Yani aşağıdaki orantı elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{QC}}, \\ \frac{R}{r} &= \frac{H}{H-h}, \\ \frac{4}{r} &= \frac{6}{6-h}, \\ 6r &= 24 - 4h, \\ 4h &= 24 - 6r, \\ h &= 6 - \frac{3}{2}r.\end{aligned}$$

şimdi silindirin hacim formülünde yüksekliği yerine koyalım:

$$\begin{aligned}V(r) &= \pi r^2 \left(6 - \frac{3}{2}r\right), \\ V(r) &= \pi \left(6r^2 - \frac{3}{2}r^3\right).\end{aligned}$$

Birinci türevi bularak şunu elde ederiz:

$$V'(r) = \pi \left(12r - \frac{9}{2}r^2 \right).$$

Ekstremum değerini bulmak için birinci türevi sıfıra eşitleriz:

$$\pi \left(12r - \frac{9}{2}r^2 \right) = 0,$$

$$12r - \frac{9}{2}r^2 = 0,$$

$$24r - 9r^2 = 0,$$

$$3r(8 - 3r) = 0.$$

$r_1 = 0$ veya $r_2 = \frac{8}{3}$ olduğunu elde ederiz. Ancak $r_1 = 0$ ise h da 0 olur ve bu en büyük hacim değildir. Yani tek ekstremum değeri $r_2 = \frac{8}{3}$ cm için elde edilir. Bu değer için hacmin maksimum olup olmadığını görmek için ikinci türevi buluruz:

$$V''(r) = 12\pi - 9r\pi = 3\pi(4 - 3r),$$

$$V''\left(\frac{8}{3}\right) = 3\pi \left(4 - 3 \cdot \frac{8}{3} \right) = -12\pi < 0.$$

Yani $r = \frac{8}{3}$ cm için silindirin hacmi maksimumdur. Yükseklik için şunu elde ederiz:

$h = 6 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 2$ cm. O halde silindirin maksimum hacmi:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \frac{128\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

Örnek 7

Bir tişört üreticisi, x adet yeni tişört satmak için bir tişörtün fiyatının $p(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu ile ifade edilmesi gerektiğini belirler.

Üretici ayrıca x adet yeni tişörtün üretim maliyetinin $C(x) = 20 + 1,5x$ fonksiyonu ile verildiğini belirler. Üretici, maksimum $kâr$ elde edeceği bir tişört fiyatını bulmak istiyor.

Toplam maliyet şu şekilde hesaplanır:

$$C(x) = \text{Sabit maliyetler} + (\text{Değişken maliyetler}) \cdot (\text{Üretilen birim sayısı})$$

Toplam gelir şu şekilde hesaplanır: $R(x) = (\text{Birim sayısı}) \cdot (\text{Birim başına fiyat})$

Toplam kâr şu şekilde hesaplanır: $P(x) = \text{Toplam gelir} - \text{Toplam maliyetler}$.

Maksimum kârı bulmak için önce kâr fonksiyonu $P(x)$ 'in birinci türevini bulmamız, yani $P'(x)$ i hesaplamamız gerekir.

Ekstremum noktayı $P'(x) = 0$ denklemini çözerek bulacağız.

Birim başına fiyat $p(x)$ fonksiyonu $p(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ile verilir
 x tişört üretmenin toplam maliyeti $C(x) = 20 + 1,5x$ fonksiyonu ile verilir.

Toplam kâr $R(x) = x \cdot p = x \cdot \frac{16}{\sqrt{x}} = 16\sqrt{x}$ dir.

Kâr fonksiyonu:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 16\sqrt{x} - (20 + 1,5x) \\ &= 16\sqrt{x} - 20 - 1,5x \\ &= 16\sqrt{x} - 1,5x - 20. \end{aligned}$$

Maksimum kârı bulmak için $P(x)$ 'in birinci türevini buluruz:

$$P'(x) = \frac{16}{2\sqrt{x}} - 1,5 = \frac{8}{\sqrt{x}} - 1,5$$

Ekstremum noktayı bulmak için:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{16}{2\sqrt{x}} - 1,5 = 0 \\ \frac{16}{2\sqrt{x}} &= 1,5 \\ 3\sqrt{x} &= 16 \\ \sqrt{x} &= \frac{16}{3} = 5,33 \\ x &= 5,33^2 = 28,44 \approx 28. \end{aligned}$$

Bu değerin maksimum olup olmadığını görmek için ikinci türevi buluruz:

$$P''(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} - 1,5 \right)' = -\frac{4}{\sqrt{x^3}}.$$

$P''(x)$ negatif olduğu için, 28 tişört üretildiğinde kâr maksimum olacaktır.

Maksimum kâr $P(28) = 16\sqrt{x} - 1.5x - 20 = 22,66$ dir.

Yani üretici 28 tişört ürettiğinde 2,66 para birimi maksimum kâr elde eder.

Maksimum kârı elde etmek için bir tişörtün fiyatı $p(x) = \frac{16}{\sqrt{28}} = 3$ olmalıdır.

Çalışma Alıştırmaları

1. 15 sayısını, çarpımları en büyük olacak şekilde iki toplama ayırın.
2. 180 sayısını öyle iki toplanana ayır ki, ilk terimin karesinin iki katı ile ikinci terimin karesinin üç katının toplamı en küçük olacak şekilde olsun.
3. Bir üçgenin kenarı 10 cm ve yüksekliği 4 cm'dir. Üçgenin içine bir dikdörtgen yerleştirilmiştir, öyle ki iki köşesi verilen kenar üzerinde, diğer iki köşesi ise üçgenin diğer kenarları üzerindedir. Dikdörtgenin kenarlarını, dikdörtgenin alanı en büyük olacak şekilde bulunuz.
4. Kenarları 10 cm ve 8 cm olan dikdörtgen şeklinde bir karton parçasından, her köşeden bir kare kesilir ve bu şekilde açık bir kutu oluşturulur. Kutunun en büyük hacme sahip olacağı boyutları bulunuz.
5. Çevresi 15 olan tüm ikizkenar üçgenler arasında, en büyük alana sahip üçgenin boyutlarını bulunuz.
6. Bir kutu üreticisi, hacmi 500 cm^3 olan paralel yüzlü şeklinde bir kutu yapmak istiyor. Kutunun maliyetinin en düşük olacağı paralel yüzünün boyutlarını bulunuz.
7. $4x^2 + 9y^2 = 36$ elipsinin içine, tabanı elipsin büyük eksenine paralel olacak şekilde en büyük alana sahip bir ikizkenar üçgen yerleştirilmiştir ve üçgenin bir köşesi de elipsin köşesidir. Üçgenin alanını bulunuz.
8. Yarıçapı 6 cm olan bir kürenin etrafına en küçük hacimli bir koni yerleştirilmiştir. Koninin alanını hesaplayınız.
9. Bir ürünün talep fonksiyonu $x = -\frac{1}{2}p + 100$, dür, burada p ürünün fiyatı ve maliyet fonksiyonu $C(x) = x^2 + 20x + 147$ 'dir. Maksimum karı (kazancı) belirleyin.
(İpucu: Gelir fonksiyonu talep ve birim ürün fiyatının çarpımıdır)
10. Bir süt ürünleri işletmesinin günlük toplam maliyetleri ve günlük toplam gelirleri sırasıyla $C(x) = 30x + 1000$ ve $R(x) = -\frac{1}{500}x^2 + 50x$ fonksiyonları ile verilmiştir. Maksimum karın elde edileceği günlük üretimi belirleyin. Maksimum kar ne kadardır?

14. Modüler üniteye ait pekiştirme Alıştırmaları

1. Verilen fonksiyonun türevini bulunuz:

a) $y = x - 4$, $x_0 = 5$ noktasında,

b) $y = x^2 + 3$, $x_0 = 1$ noktasında,

c) $y = (2x + 1)^2$, $x_0 = 2$ noktasında,

ç) $y = \frac{x^2 + 3}{x}$, $x_0 = 1$ noktasında.

2. Uygun formülü uygulayarak fonksiyonun türevini bulunuz:

a) $y = 2x^4 + \frac{1}{x}$,

b) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$,

c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

c) $y = \frac{1}{x^4} + 2x^3$.

3. Fonksiyonun türevini bulunuz:

a) $y = 5x^2 - 4 \ln x$,

b) $y = \log_2 x + e^x + 3x^4$,

c) $y = 3^x + 5 \cdot e^x$,

ç) $y = \frac{x}{1 - x^2}$,

d) $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

e) $y = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.

4. Fonksiyonun türevini bulunuz:

a) $y = \ln x \cdot \cos x$,

b) $y = 2x^3 \ln x$,

c) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$,

ç) $y = \frac{\ln x}{x^3}$,

d) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$,

e) $y = (2x + 1)e^x$,

f) $y = (x^2 + 3x - 4)e^x$,

g) $y = \frac{e^x}{x}$.

5. Bileşik fonksiyonun türevini bulun:

a) $y = (5x + 7)^{12}$,

b) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$,

c) $y = e^{x^3 - 2x}$

ç) $y = \ln x^5$,

d) $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$,

e) $y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$,

f) $y = \ln \sqrt{\frac{2x}{1 - 2x}}$,

g) $y = (2x + 1)^2 e^{2x}$

ğ) $y = e^{\sqrt{x}} \ln 2x$,

h) $y = e^{x^2} x^3$.

6. Fonksiyonun türevini bulun:

a) $y = e^{x^2 + 3x + 4}$,

b) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$,

$$c) y = x^{1-x^2}$$

$$ç) y = x^{\ln x}.$$

7. Fonksiyonun ikinci türevini belirtiniz:

$$a) y = (5x + 7)^{12},$$

$$b) y = \ln(x^2 + 2x),$$

$$c) y = 2x^2 - 3x^2 + 5,$$

$$ç) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

8. Fonksiyonun monotonluk aralıklarını ve ekstremum değerlerini belirtiniz:

$$a) y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

$$b) y = \frac{x}{1-x},$$

$$c) y = (x-1)e^x,$$

$$ç) y = -x^2 + 6x - 7.$$

9. Eğrinin konvekslik ve konkavlık aralıklarını belirleyin ve dönüm noktalarını belirtiniz:

$$a) y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

$$b) y = \frac{x}{1-x},$$

$$c) y = (x-1)e^x,$$

$$ç) y = -x^2 + 6x - 7.$$

10. Fonksiyonun grafiğini çiziniz:

$$a) y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad b) y = \frac{x^2}{2x-4}; \quad c) y = \frac{e^x}{x}; \quad ç) y = \ln(x^2 + 1).$$

Modüler ünite 2 – İntegral hesabı (iktisat alanı için)

1. Belirsiz İntegral

Diferansiyel hesabın görevi, verilen bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevlerini bulmaktır. İntegral hesabı, türev bulma probleminin tersi olan bir problemi çözer. Bu problem aslında türevi bilinen fonksiyonu bulmaktır. Bu nedenle, integral hesabı diferansiyel hesabın ters işlemi olarak anlaşılır.

Tanım 1: (a, b) aralığında tanımlı bir f fonksiyonu verilmiş olsun. (a, b) aralığında tanımlı

$$f'(x) = f(x), x \in (a, b)$$

olmak üzere her türevlenebilir F fonksiyonuna f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu denir.

Örnek 1

$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $F(x) = \frac{x^4}{4}, x \in \mathbb{R}$ bir ilkel fonksiyondur, çünkü $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}$ dir.

Halbuki, $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonunu incelersek, bu fonksiyon için de

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R} \text{ geçerlidir.}$$

Buradan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 1: $F(x), (a, b)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olsun. O zaman $C \in \mathbb{R}$ herhangi bir sabit olmak üzere $F(x) + C$ fonksiyonu da $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonudur.

İspat: Teoremdeki ifade, $F(x)$ ve $F(x) + C$ 'nin $f(x)$ fonksiyonuna eşit olan aynı birinci türeve sahip olmasından kaynaklanmaktadır.

$$(F(x) + C)' = (F(x))' = f(x).$$

■

Teorem 2: $F(x)$ ve $G(x), (a, b)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun farklı ilkel fonksiyonları olsun. O zaman $G(x)$ fonksiyonu için $G(x) = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ geçerlidir.

İspat: Eğer $F(x)$ ve $G(x)$, (a, b) aralığında $f(x)$ fonksiyonunun farklı ilkel fonksiyonları olduğu durumda şu eşitlik elde edilir:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

$H(x) = G(x) - F(x)$ olsun, buradan şu sonuç elde edilir:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$H'(x) = 0$ için, $H(x) = C$ olduğunu biliyoruz, bu nedenle

$$C = G(x) - F(x), \text{ yani } G(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Verilen bir fonksiyonun ilkel fonksiyonunu bulma işlemine **integral alma** denir. Bu işlem, fonksiyonun türevini bulma işlemine, yani **türev almaya** ters bir işlemdir.

Ancak, türev almada bir fonksiyonun benzersiz bir şekilde tanımlandığını gördük, bu integral almada geçerli değildir. Bunu Örnek 1'de de gördük.

Teorem 1'den, her fonksiyonun sonsuz sayıda ilkel fonksiyona sahip olduğu sonucuna varabiliriz.

Ayrıca, Teorem 2'den, verilen bir fonksiyonun tüm ilkel fonksiyonlarını bulmak yerine, bunlardan herhangi birini bulmanın yeterli olduğu sonucuna varabiliriz. Sadece bir ilkel fonksiyon bulunursa, diğerlerinin hepsi bir C sabiti eklenerek elde edilir.

Fonksiyonun tüm ilkel fonksiyonlarının kümesini şu şekilde gösterebiliriz:

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Tanım 2: Verilen bir f fonksiyonunun tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine **belirsiz integral** denir.

Fonksiyonun belirsiz integrali

$$\int f(x) dx$$

şu şekilde gösterilir.

Buna göre, $\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ veya kısaca $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ yazabiliriz.

Tanım 2'de $f(x)$ integrand veya integral altındaki fonksiyon olarak adlandırılır ve $f(x) dx$ integral altındaki ifade olarak adlandırılır.

Yine $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ ifadesinde C sabiti, integral alma işlemi sabiti olarak adlandırılır.

Örnek 2 $(a^x)' = a^x \ln a$ olduğundan, $\frac{a^x}{\ln a}$ fonksiyonu $a^x, a > 0, a \neq 1$ 'in ilkel fonksiyonudur.

Bu nedenle $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$ yazabiliriz.

1 Aşağıdaki fonksiyonun ilkel fonksiyonunu bulunuz:

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = x^n$.

Verilen bir fonksiyonun sonsuz sayıda ilkel fonksiyonu olabileceğini gördük. Ancak, her fonksiyonun ilkel fonksiyonu yoktur. Her sürekli fonksiyonun ilkel fonksiyonu olduğunu vurgulayabiliriz.

(a, b) aralığında tanımlı verilen bir f fonksiyonu için bir ilkel fonksiyon varsa, o zaman fonksiyonun (a, b) aralığında integrallenebilir olduğunu söyleriz.

Matematiğin ilkel fonksiyonları belirleme, yani integralleri hesaplama ve bunların uygulamaları ile ilgilenen kısmına integral hesabı denir.

Belirsiz integral kavramını geometrik olarak açıklamak istersek, onu ilkel fonksiyonların kümesi olarak tanımladığımız için, belirsiz integralin düzlemde ilkel fonksiyonların grafikleri olan ve integral eğrileri olarak adlandırılan bir eğri kümesini temsil ettiğini söyleyebiliriz.

Verilen bir $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen integral eğrisini bulmak için, noktanın koordinatlarını $y = f(x) + C$ 'ye yerine koyarak integral alma işlemi sabitini elde ederiz, yani

$$y_0 = F(x_0) + C, \text{ buradan } C = y_0 - F(x_0).$$

O zaman $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen gerekli integral eğrisi $y = f(x) + y_0 - F(x_0)$ denkleminde sahiptir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyeceğiz:

Örnek 3 $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ fonksiyonunun $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğunu göstereceğiz.

$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ fonksiyonunun türevini alırsak şunu elde ederiz:

$$(F(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Örnek 4 $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun grafiği $A(1, 2)$ noktasından geçen F ilkel fonksiyonunu belirteceğiz.

$f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, çünkü:

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

dir. $A(1, 2)$ noktasının koordinatlarını $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$ yerine koyarak

$$F(1) = \frac{1^4}{4} + 2\sqrt{1} = \frac{9}{4}$$

elde edilir. Yani $A(1, 2)$ noktasından geçen gerekli integral eğrisi

$$y = f(x) + y_0 - F(x_0) \text{ denkleminde sahiptir, yani } y = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki fonksiyonlar için birer ilkel fonksiyon bulunuz:

a) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$ b) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $F(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|$ fonksiyonu, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğunu gösterin.

3. Doğru olup olmadığını kontrol edin:

a) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2 \ln^2 x} + C$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx$.

4. f fonksiyonunun, grafiği $A(0, 2)$ noktasından geçen F ilkel fonksiyonunu belirtiniz:

a) $f(x) = 3x^2$; b) $f(x) = e^x$.

2. Belirsiz İntegralin Temel Özellikleri ve Temel İntegraller Tablosu

Belirsiz integralin tanımından aşağıdaki özellikler elde edilir.

Teorem 1: f fonksiyonu (a, b) aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun, o zaman aşağıdakiler geçerlidir:

1. Belirsiz integralin türevi, integral altındaki fonksiyona eşittir, yani eğer

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \text{ ise, o zaman}$$
$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in (a, b).$$

2. Belirsiz integralin diferansiyeli, integral altındaki ifadeye eşittir, yani eğer

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \text{ ise, o zaman}$$
$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx, x \in (a, b).$$

3. İkel fonksiyon $f(x)$ 'in diferansiyelinin belirsiz integrali, $f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ 'ye eşittir, yani

$$\int df(x) = \int f'(x) dx = \int f(x) dx = f(x) + C, x \in (a, b).$$

İspat: 1. F fonksiyonu, (a, b) aralığında f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olsun, yani

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

O zaman: $\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ dir.

2. F fonksiyonu, (a, b) aralığında f fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olsun, yani $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

O halde: $d(\int f(x) dx) = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx, x \in (a, b)$ dir.

3. F fonksiyonu, (a, b) aralığında f fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olsun, yani $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

O halde: $\int df(x) = \int f'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b)$ elde edilir. ■

Teorem 1, türev alma ve integral almanın ters işlemler olduğunu gösterir.

Belirsiz integrali hesaplarken, aşağıdaki teoremlerde verilen özellikler geçerlidir:

Teorem 2:

1. Eğer f ve g fonksiyonları (a, b) aralığında integrallenebilirse, o zaman toplamı $(f + g)$ ve farkları $(f - g)$ de (a, b) aralığında integrallenebilir fonksiyonlardır ve aşağıdaki geçerlidir:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, x \in (a, b).$$

2. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında integrallenebilirse ve $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise, o zaman $k \cdot f$ fonksiyonu da (a, b) aralığında integrallenebilirdir ve aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx, x \in (a, b).$$

İspat: 1. Diferansiyel hesapta $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$ geçerlidir. Bu eşitliğin her iki tarafının integralini alırsak şunu elde ederiz:

$$\int d(f(x) \pm g(x)) = \int (df(x) \pm dg(x)).$$

Teorem 1'in 3. özelliğini kullanarak şunu elde ederiz:

$$\int (df(x) \pm dg(x)) = \int d(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x) = \int df(x) \pm \int dg(x).$$

2. $d(\int k \cdot f(x) dx) = kd(\int f(x) dx)$ olduğundan ve **Teorem 1'in 2. özelliğini** kullanarak şunu elde ederiz:

$$d(\int k \cdot f(x) dx) = k \int f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Teorem 2'de kanıtlanan özellikler, **temel integral alma kuralları** olarak da bilinir.

Belirsiz integralin tanımı ve temel türevler tablosuna dayanarak, **temel integraller tablosunu** yazabiliriz.

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	

Belirsiz integralin temel özelliklerini ve temel integraller tablosunu kullanarak birkaç örnek çözeceğiz:

Örnek 1 Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

a) $\int x^6 dx$; b) $\int (x^2 + 3x - 1) dx$; c) $\int x^3 \sqrt{x} dx$; d) $\int (2^x + 5^x)^2 dx$.

a) Temel integraller tablosunu, yani ikinci temel integrali kullanarak şunu elde ederiz:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

b) Temel integraller tablosunu ve fonksiyonların toplamının ve farkının integral alma kuralını kullanarak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx - \int 1 dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int 1 dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + 3 \frac{x^2}{2} + 3C_2 - x - C_3 = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + (C_1 + 3C_2 - C_3) = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

c) Önce integral altındaki fonksiyonu dönüştüreceğiz ve ardından ikinci tablo integralini kullanacağız:

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$$

c) İntegral altındaki fonksiyonu başka bir şekilde yazarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}\int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C\end{aligned}$$

Daha basit bir yazım için sonuca birden fazla sabit yazmayacağız, bunun yerine doğrudan en sona bir sabit yazacağız.

1

Belirsiz integralleri çözün:

$$\text{a) } \int (1 + 2x + 4x^2) dx; \quad \text{b) } \int (1 - 3x) \cdot (x^2 + 1) dx; \quad \text{c) } \int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x - 4}{x} \right) dx.$$

Örnek 1

Verilen belirsiz integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

Temel integral alma tablosunu ve integralleme kurallarını kullanarak şunu elde ediyoruz:

a)

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{x^3} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx = \\ &= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C.\end{aligned}$$

Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad \text{b) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^x) dx; & \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx; & \quad \text{c) } \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx; \\ \text{c) } \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx; & \quad \text{d) } \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right) dx; & \quad \text{e) } \int (2 + x^2)^3 dx. \end{aligned}$$

3. Yerine Koyma Yöntemi

Belirsiz integralleri çözmek için belirli yöntemler (integral alma teknikleri) uygulamak gerekir. En basit integraller, daha önce ele aldığımız tablo ve temel özellikleri uygulayarak çözülür, ancak bu integral alma tüm durumlarda uygulanması mümkün değildir. Daha karmaşık belirsiz integralleri çözmek için kullanılan temel yöntemlerden biri, değişkeni yeni bir değişkenle değiştirme veya yerine koyma yöntemidir.

Bu yöntem, başlangıç integralini tablo integraline indirgeyerek basitleştirecek yeni bir değişkenle x değişkenini değiştirmeyi ifade eder.

Yerine koyma yöntemi aşağıdaki teoremdedir verilmiştir:

Teorem 1: $f, (a, b)$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun ve $\varphi, (\alpha, \beta)$ aralığını (a, b) aralığına eşleyen türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$x = \varphi(t) \text{ için, } \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \text{ dir.}$$

İspat: F fonksiyonu f fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olsun. O zaman tanıma göre $\int f(x) dx = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$ geçerlidir. $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ fonksiyonunu tanımlayacağız.

Φ fonksiyonunun türevini alırsak $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ elde ederiz.

Buradan Φ fonksiyonunun $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğu sonucuna varırız.

Bu ise, belirsiz integralin tanımından şu sonuca varacağımız anlamına gelir:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Eğer $x = \varphi(t)$ alırsak, o zaman:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = f(x) + C.$$

Yerine koyma yöntemi kullanılarak, integral altındaki fonksiyonun bir kısmı yeni bir değişkenle değiştirilir. $x = \varphi(t)$ yerine koyma işleminin yapıldığı bir kural olmadığını vurgulamalıyız. Ayrıca, eski fonksiyonun diferansiyeli yeni değişkenin diferansiyeli cinsinden ifade edilmelidir. Amaç, kolayca çözülebilen bir veya daha fazla tablo integrali elde etmektir. İntegral çözüldükten sonra, yerine koymayı kullanarak başlangıç değişkenine geri dönmemiz gerekir.

Aşağıdaki örneği inceleyeceğiz:

Örnek 1

Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int (5-2x)^4 dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{(x-2)^3}; \quad \text{c) } \int \frac{e^x}{x^2} dx; \quad \text{d) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

a) Bu integrali çözmek için binom formülünü kullanabilir ve integral altındaki $(5-2x)^4$ fonksiyonunu genişletilmiş biçimde yazabilir ve ardından tablo integrallerini kullanarak çözebiliriz. Ancak bu yöntem daha fazla zaman alır. Bu nedenle, yerine koyma yöntemini kullanacağız.

$t = 5 - 2x$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, buradan $dt = -2dx$ veya fonksiyonun diferansiyelini yeni değişkenin diferansiyeli ile ifade edersek $dx = -\frac{dt}{2}$ elde ederiz.

$$\text{Buradan, } \int (5-2x)^4 dx = \int t^4 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{(5-2x)^5}{10} + C \quad \text{elde edilir.}$$

b) Çok benzer şekilde a) şıkında çözülen belirsiz integrale uygulanan yöntem, $t = x - 2$, $dt = dx$ yerine koyma işlemini kullanıyoruz.

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

c) Bu örnekte, önceki iki örneğe benzer şekilde, $\frac{1}{x} = t$ yerine koyma işlemini kullanıyoruz.

$$-\frac{1}{x^2} dx = dt, \text{ buradan } \int \frac{e^x}{x^2} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C \text{ elde edilir.}$$

d) $\ln(x) = t$ yerine koyma işlemini kullanarak, $\frac{1}{x} dx = dt$, den şunu elde ederiz:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

1 Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{5x+4}; \quad \text{b) } \int \sqrt[5]{(4-7x)^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx.$$

Örnek 2 Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$$

a) İntegrali çözerken $\ln \frac{1+x}{1-x} = t$ yerine koyma işlemini kullanıyoruz. Buradan $\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} dt$ elde ederiz. Sonuç olarak

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

b) Bu integrali çözmek için iki yerine koyma işlemi kullanacağız:

$$- \text{ İlk yerine koyma işlemi ile } e^{\frac{x}{2}} = t, \quad \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = dt, \quad dx = \frac{2}{t} dt, \quad e^x = \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = t^2 \text{ elde edilir.}$$

integral şu hale dönüşür:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t(t+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \\
&= 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \left(\frac{1+t}{t^2(1+t)} - \frac{t}{t^2(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t-t}{t(1+t)} \right) dt = \\
&= 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t}{t(1+t)} + \frac{t}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int \frac{1}{(1+t)} dt = (*),
\end{aligned}$$

$s = t + 1$, $ds = dt$ yerine koyma işlemini kullanarak $\int \frac{1}{(1+t)} dt$ integrali elde edilir ve onu çözersek şunu elde ederiz:

$$(*) = 2 \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \ln|t| + \ln|s| \right) + C = (**),$$

buradan, önceki yerine koyma işlemlerine geri dönerek şunu elde ederiz:

$$(**) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - \ln \left| e^{\frac{x}{2}} \right| + \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C = -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C.$$

Not: İntegrali tablo integraline indirmek için bazen yeni bir değişkenle birkaç kez yerine koyma işlemi yapmak gerekebilir.

Örnek 3 $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$ belirsiz integralini çözelim.

Önce $\ln(x) = t$ yerine koyma işlemini kullanıyoruz, buradan $\frac{1}{x} dx = dt$ elde ederiz ve ardından bir kez daha $\ln(t) = u$ yerine koyma işlemini kullanıyoruz, buradan $\frac{1}{t} dt = du$ elde ederiz.

Böylece integral için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln|t|| + C = \\
&= \ln|\ln|\ln|x||| + C.
\end{aligned}$$

Örnek 4 Bir ürünün üretiminin marjinal maliyetleri, Q üretim seviyesi olmak üzere

$C_g(Q) = \frac{e^Q}{e^Q + 3}$ fonksiyonu ile verilmiştir. Şirket 2 birim üretiyorsa, toplam maliyetler 2 para birimidir. Toplam ve sabit maliyetleri belirleyeceğiz.

Eğer toplam maliyet fonksiyonu $C(x)$ ile verilirse, burada x üretilen birim sayısıdır, o zaman marjinal maliyetler toplam maliyetlerin türevi olarak hesaplanır:

$$C_g(x) = C'(x).$$

Yani marjinal maliyetlerden toplam maliyetleri belirlemek için şunu elde ederiz:

$$C(Q) = \int C_g(Q) dQ = \int C_g(Q) dQ = \int \frac{e^Q}{e^Q + 3} dQ.$$

İntegrali yerine koyma yöntemini kullanarak çözeceğiz:

$$t = e^Q + 3 \Leftrightarrow dt = e^Q dQ \Leftrightarrow dQ = \frac{dt}{e^Q} \text{ buradan:}$$

$$C(Q) = \int C_g(Q) dQ = \int C_g(Q) dQ = \int \frac{e^Q}{e^Q + 3} dQ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^Q + 3| + C.$$

Şirket 2 birim ürettiğinde toplam maliyetlerin 2 para birimi olmasından, C sabitinin değerini bulacağız.

$$C(2) = 2, \text{ yani } 2 = \ln|e^2 + 3| + C \Rightarrow C = 2 - \ln|e^2 + 3| \approx -0.341.$$

Yani toplam maliyet fonksiyonu şu şekilde verilir:

$$C(Q) = \ln|e^Q + 3| - 0.341.$$

Sabit maliyetler, şirketin başlangıçta sahip olduğu ve üretim seviyesiyle ilişkili olmayan maliyetlerdir:

$$C(0) = \ln|e^0 + 3| - 0.341 \approx 1.046.$$



Marjinal gelir fonksiyonu $R_g(p) = e^{2p+1}$ ile verilir, burada p bir ürünün fiyatıdır. Toplam gelir fonksiyonunu belirtiniz.

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int x(x^2 - 13)^{23} dx; \quad \text{b) } \int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x - 9)^7 dx; \quad \text{c) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 3x - 10}.$$

2. Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int (x^2 - 3)\sqrt[5]{x^3 - 9x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{(1 + x^2)\sqrt{(1 + x^2)}}; \quad \text{c) } \int \frac{x^2}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

3. Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx; \quad \text{c) } \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

4. Bir ürünün üretimi için marjinal maliyetleri, Q üretim seviyesi olmak üzere $C_g(Q) = \frac{e^Q}{e^Q + 2}$ fonksiyonu ile verilmiştir. Şirket 4 birim üretiyorsa, toplam maliyetler 3 para birimidir. Toplam ve sabit maliyetleri belirtiniz.

4. Kısmi İntegral Alma Yöntemi

Değişken değiştirme yöntemi, daha geniş bir fonksiyon sınıfının belirsiz integrallerini hesaplamak için yeterli değildir. Genellikle integral altındaki fonksiyon, bir fonksiyonun çarpımı ve başka bir fonksiyonun diferansiyeli şeklinde yazılır, ancak bu durumda integrali tabloya indirgemek için değişken değiştirme yapılamaz.

Bu nedenle, belirsiz integralleri çözmek için başka bir yöntemle başvuruyoruz, bu da kısmi integral alma yöntemi veya parçalar halinde integral alma işlemi yöntemidir.

Kısmi integral alma formülü aşağıdaki teoremden verilmiştir:

Teorem 1: Eğer $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (a, b) aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ise, o zaman şu kısmi integral alma formülü geçerlidir:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx.$$

İspat: $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında $u(x)v'(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olsun. İlkel fonksiyonun tanımından, F 'nin sürekli bir fonksiyon olduğu ve $F'(x) = u(x)v'(x)$, $x \in (a, b) \setminus A$, $A \subset (a, b)$ ayrık alt kümesidir. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının türevlenebilirliği nedeniyle, $u(x)v(x)$ fonksiyonunun da (a, b) aralığında sürekli olduğu sonucuna varılır.

Buradan $G(x) = u(x)v(x) - f(x)$ fonksiyonunun da (a, b) aralığında sürekli olduğu sonucuna varılır. Türevini alırsak şunu elde ederiz:

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x).$$

Buradan $G(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında $u'(x)v(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğu ve şu ifadenin geçerli olduğu sonucu elde edilir:

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Buradan $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ formülü elde edilir.

Kısmi integral alma işlemi formülünü şu şekilde de yazabiliriz:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının seçimi belirli kurallara göre değil, sezgisel olarak yapılır.

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının seçimi yanlışsa, integrali basitleştirmek yerine, başlangıçtakine göre çözülmesi daha karmaşık hale getirir.

Örnek 1

Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int xe^{-x} dx; \quad \text{b) } \int \ln x dx.$$

a) İntegrali çözmek için aşağıdaki şekilde kısmi integral alma işlemi kullanacağız:

$u = x$ 'i seçelim. Birinci türevi hesaplayarak, yani türev olarak $du = dx$ elde ederiz. İntegral altındaki

ifadenin geri kalanı dv 'dir, yani $dv = e^{-x} dx$ 'tir. Buradan entegral alma işlemiyle $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$ elde ederiz.

Kısmi integral alma işlemi formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

b) İntegrali çözmek için aşağıdaki şekilde kısmi integral alma işlemi kullanacağız:

$u = \ln(x)$ 'i seçelim. Birinci türevi hesaplayarak, yani türev olarak $du = \frac{1}{x} dx$ elde ederiz. İntegral altındaki ifadenin geri kalanı dv 'dir, yani $dv = dx$ 'tir. Buradan entegrasyonla $v = \int dx = x$ elde ederiz.

Kısmi integral alma işlemi formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

1

Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int x^2 e^x dx; \quad \text{b) } \int x^2 \ln x dx; \quad \text{c) } \int \frac{x}{e^x} dx.$$

Örnek 2

Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int e^{x+\ln x} dx; \quad \text{b) } \int (x^2 + x) \ln(x+1) dx.$$

Her iki integrali de kısmi integrasyon yöntemiyle çözeceğiz:

a) Eğer $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$ olur, kısmi integrasyon formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

b) Başlangıç integralinde önce yerine koyma yöntemini kullanırsak. $x + 1 = t$, $dx = dt$, şunu elde ederiz: $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx = \int ((t-1)^2 + t-1) \ln(t) dt = \int (t^2 - t) \ln(t) dt.$

Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak, $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$, $dv = (t^2 - t) dt \Rightarrow v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int (t^2 - t) \ln t dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt + \frac{1}{2} \int t dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{9} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2(x+1) - 3)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2x-1)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + C. \end{aligned}$$

2

Verilen belirsiz Integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int x \ln(x^2 - 1) dx; \quad \text{b) } \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x^2 e^{-x} dx$; b) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x \ln^2 x dx$; b) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

3. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \frac{x}{e^x} dx$; b) $\int x^2 \ln x dx$.

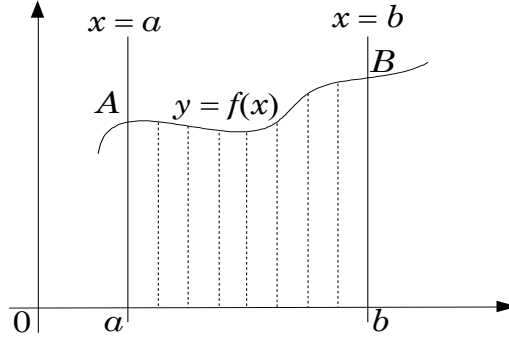
4. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \ln x dx$; b) $\int x \ln(x-1) dx$.

5. Belirli İntegral Kavramı

Belirli integral kavramı, matematikte ve diğer teknik bilimlerde temel bir kavramdır. İlk olarak hangi problemin ve hangi fikrin integral kavramına yol açtığını görelim. İntegral hesaplama yönteminin, diferansiyel hesaplama yöntemlerinden çok daha önce var olduğunu vurgulamalıyız. Antik matematikçi Arşimet'in MÖ 3. yüzyılda integral hesaplama yöntemini kullandığı bilinmektedir. Parabolün, iki köşesi parabol üzerinde ve diğer iki köşesi x ekseninde bulunan dikdörtgenin alanını 2:1 oranında iki alana böldüğünü biliyordu. Temel olarak integral kavramına, eğrisel bir yamuğun alanını belirleme problemi yol açmıştır. İlk olarak, 17. yüzyılın ikinci yarısı ve 18. yüzyılın ilk yarısında yaşamış olan büyük Alman matematikçi Leibniz ve İngiliz matematikçi Newton'un birbirinden bağımsız olarak ulaştığı fikri, yani yöntemi sunacağız. Vereceğimiz tanım 19. yüzyılda Alman matematikçi Riemann tarafından verilmiş ve kullanacağımız gösterim 19. yüzyılda Fransız matematikçi Fourier tarafından tanıtılmıştır.

Eğrisel yamuk ile, x ekseninde, $y = f(x)$ verilen negatif olmayan bir fonksiyonun grafiği, $x \in [a, b]$, y eksenine paralel $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında bulunan düzlemin kısmını kastediyoruz. Amacımız eğrisel yamuğun alanını belirlemektir (şekil 1). Fikir, $[a, b]$ aralığını birkaç alt aralığa bölmek, böylece eğrisel yamuğun alanını, yaklaşık olarak hesaplayacağımız dikdörtgenlere bölmektir.



Şekil 1

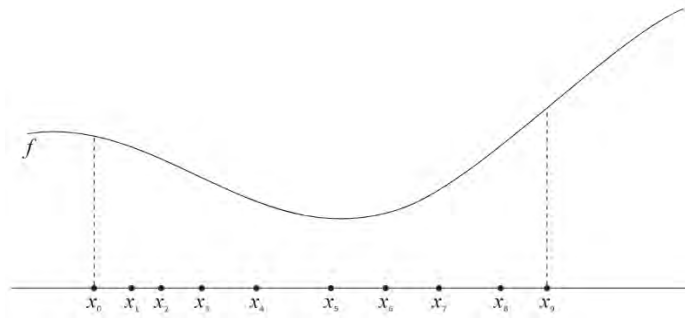
Tanım 1: $[a, b]$ doğru parçasının bir bölümü, aşağıdaki gibi $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ sonlu sayıda bir nokta kümesi olarak

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

ifade edilebilir.

Yani bu $[a, b]$ doğru parçası sonlu sayıda dikdörtgenlere bölüyoruz.

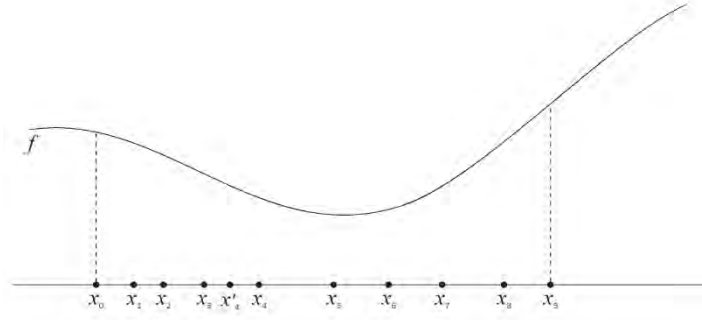
$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = b$, noktalarını inceleyelim (Şekil 2).



Şekil 2

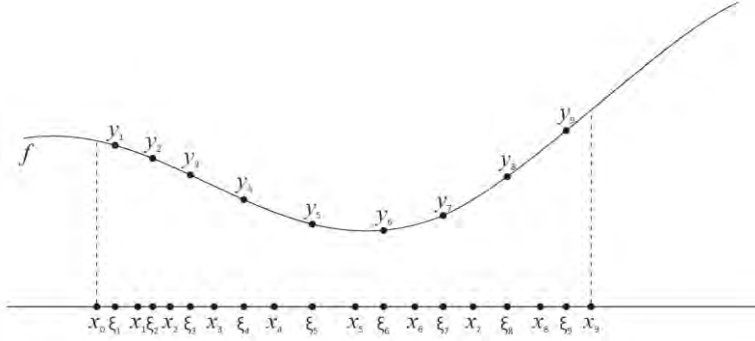
$\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ ile i'inci kısmın uzunluğunu gösteriyoruz. Yani bunlar tüm kısımların uzunluklarıdır. Ve en büyük alt kısmın uzunluğuna eşit olan bölüm çapı kavramını tanıtıyoruz, yani $d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_{x_i}$

Daha sonra, P kısmın bir bölümünün P_2 bölümünden daha ince olduğunu söyleriz, eğer $P_2 \subset P_1$ ise, yani P_1 bölümü P_2 bölümünden daha fazla nokta içeriyorsa. Bu, örneğin x_i ve x_{i+1} noktaları arasındaki noktaysa, yeni bölümün önceki bölümden daha ince olacağı anlamına gelir (Şekil 3).



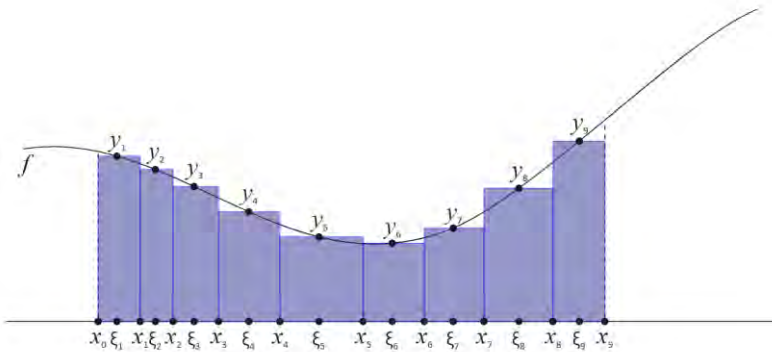
Şekil 3

Yani bir bölüm, başka bir bölümden daha fazla nokta içeriyorsa daha incedir. Şimdi bu segmentlerin her birinde bir nokta seçeceğiz: $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Örneğimizde bu noktalar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9$ 'dur (Şekil 4). Bu noktalarda $y = f(\xi_i)$ fonksiyonunun değerini hesaplayacağız. Fonksiyon $[a, b]$ aralığındaki her noktada sürekli olduğundan, $f(\xi_i)$ vardır. Yani $y_1 = f(\xi_1), \dots, y_9 = f(\xi_9)$ ve bu değerleri fonksiyonun grafiğinde işaretleyeceğiz (Şekil 4).



Şekil 4

Şimdi her aralık için kenarları Δx_i ve $f(\xi_i)$ olan bir dikdörtgen oluşturacağız. Örneğimizde bu tür



Şekil 5

dokuz dikdörtgen oluşturacağız (Şekil 5).

Dikdörtgenin uzunluğu, ilgili kısmın uzunluğuna eşit olduğunu ve dikdörtgenin genişliği fonksiyonun noktadaki değerine eşit olduğunu biliyoruz. Dikdörtgenleri Π_i ile gösterelim. Her dikdörtgenin

$$P(\Pi_i) = f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

alanını

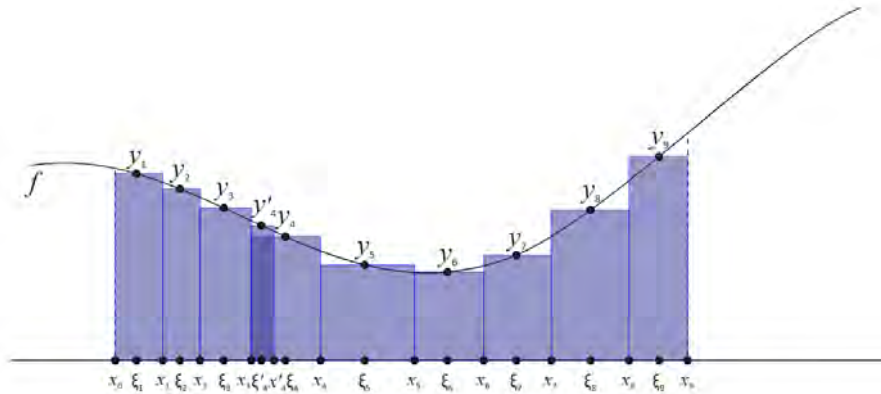
$$P(S) = f(\xi_1) \Delta_{x_1} + f(\xi_2) \Delta_{x_2} + \dots + f(\xi_9) \Delta_{x_9}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^9 f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

şeklinde ifade edebiliriz. Tüm bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamı:

olacaktır. Bu alan noktaların seçimine bağlı olduğu açıktır. Noktalardan herhangi birini hareket ettirsek, ilgili dikdörtgenin alanı da değişecektir. Ancak iddia edebileceğimiz şey, bu eğrisel yamuğun alanının dikdörtgenlerin alanlarının toplamına yaklaşık olarak eşit olduğudur.

x_3 ten x'_4 aralığına bir ξ_4 nokta daha eklersek ne olacağını görelim ve ξ_i noktasını seçip bu noktada fonksiyonun değerini belirleyelim. Şimdi x_3 ten ξ_i segmenti için bir dikdörtgen oluşturacağız. x_3 ten x_4 segmentindeki dikdörtgen yerine, x_3 ten x'_4 ve x'_4 den x_4 e kadar n iki dikdörtgen olacaktır. (Şekil 6).



Şekil 6

Mevcut bölüme bir nokta daha eklersek ne sonuca varabileceğimizi görelim. İlk olarak, tüm bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamının eğrisel yamuğun alanına daha yakın (daha doğru) bir değere sahip olduğunu fark edebiliriz. Varılabilecek bir diğer sonuç ise yeni bölümün (daha ince bölümün) çapının önceki bölümün çapından küçük veya eşit olmasıdır. Başka bir deyişle, bölüme ne kadar çok nokta eklersek, segmentlerin maksimum uzunluğu o kadar küçülür, ancak tüm dikdörtgenlerin alanı

eğrisel yamuğun alanına o kadar yaklaşır. Şimdi sezgisel olarak, bölümün çapı ne kadar küçükse, yani bölümün çapı sıfıra yaklaştıkça, bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamının eğrisel yamuğun alanına keyfi olarak yaklaşıacağı açıktır. Bu, aşağıdaki tanıma yol açar.

Tanım 2: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. P değeri $[a, b]$ segmentinin herhangi bir bölümü olsun ve ξ_i her alt segmentten birer tane olmak üzere keyfi olarak seçilmiş noktalar olsun.

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i}$$

Toplamına verilen P bölümü ve ξ_i noktalarının seçimi için f fonksiyonunun **Riemann integral toplamı** olarak adlandırılır.

Tanım 3: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ segmentinde Riemann anlamında integrallenebilir, eğer aşağıdaki gibi bir I gerçekte sayı için:

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i} = I$$

geçerli ise, yani

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P)(\forall \xi_i)(d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f) - I| < \varepsilon)$$

İfadesi geçerli ise, I sayısı

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

ile gösterilir ve $f(x)$ fonksiyonun a sınırından b sınırına kadar **belirli integralini** işaret etmektedir. a sınırına integralin **alt sınırı**, b sınırına ise integralin **üst sınırı** denir. $f(x)$ fonksiyonuna **integral altındaki fonksiyon** denir, dx ise x bilinmeyeninin diferansiyelidir, yani P bölümündeki alt kısımların uzunluğunu gösterir.

Belirli integral aslında eğrisel bir yamuğun alanını hesaplamak için kullanılır, ancak teknikte ve mühendislikte başka uygulamaları da vardır. Integralin aslında sonsuz sayıda terimin toplamı olduğunu bilmek çok önemlidir. Bu nedenle integralin gösterimi aslında toplam anlamına gelen “uzatılmış S”dir. Sonuç olarak, belirli integral sonsuz sayıda terimin toplamının limit değeridir.

Aşağıda, kanıtlamadan bir teorem vereceğiz, bu da integrallenebilir fonksiyonların ve belirli integ-rallerin özellikleriyle ilgilidir:

Teorem 1: $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $\alpha f(x) + \beta g(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir ve aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Son teorem, belirli integralin tanımının doğrudan uygulanmasıyla kolayca kanıtlanır.

Örnek 1 $\int_0^1 dx$ integralini hesaplayalım.

$f(x) = 1$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli, buradan $\int_0^1 dx$ 'in var olduğu sonucu çıkar.

İntegrali hesaplamak için verilen aralığı aşağıdaki şekilde kısımlara bölebiliriz:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ parçaların her birinin uzunluğu $\frac{1}{n}$ 'dir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ dir. ξ_i noktalarını, parçaların

sağ sınırının değerine eşit olacak şekilde seçiyoruz, örneğin i'inci parça için $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ 'i seçiyoruz ve

$\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$ 'i seçiyoruz. Karşılık gelen toplamlar için şunu elde ederiz:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = 1$, olduğundan, $\int_0^1 dx = 1$ sonucuna varabiliriz.

Örnek 2

$\int_0^1 x dx$ integralini hesaplayalım.

$f(x) = x$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli, buradan $\int_0^1 x dx$ 'in var olduğu sonucuna varılır. İntegrali hesaplamak için verilen aralığı aşağıdaki şekilde böleceğiz:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ Bölmelerden her birinin uzunluğu $\frac{1}{n}$ 'dir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 'dır. ξ_i noktalarını, kı-sımların sağ sınırının değerine eşit olacak şekilde seçiyoruz, örneğin i 'inci segment için $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ 'i seçiyoruz ve $\xi_i = \frac{i+1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 'i seçiyoruz. Karşılık gelen toplamlar için şunu elde ederiz:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Olduğuna göre: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$ elde edilir.

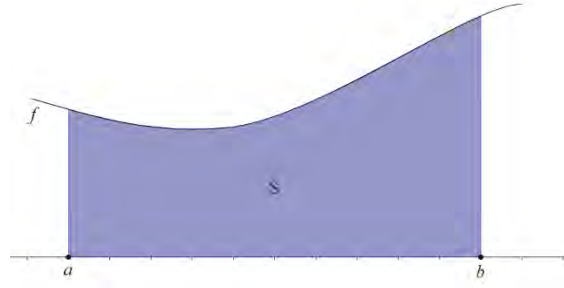
Buradan şu sonuca varabiliriz: $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Belirli integrali tanımına göre hesaplamak karmaşık olabilir. Bir sonraki derste, belirli integrali he-saplamayı kolaylaştıran Newton–Leibniz formülü verilecektir.

6. İntegral Hesabın Temel Teoremi

Burada, Newton–Leibniz formülü olarak da bilinen integral hesabın temel teoremini ele alacağız. Belirli integralin özelliklerini de ele alacağız.

Belirli integrali tanımladığımızda, $[a, b]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan bir $f(x)$ fonksiyonunun verildiğini varsaydık. Ayrıca, belirli integralin altında, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, x eksenini ve $x = a$ ve $x = b$ doğruları (Şekil 7) ile tanımlanan eğrisel yamuğun alanını anladığımızı söyledik.



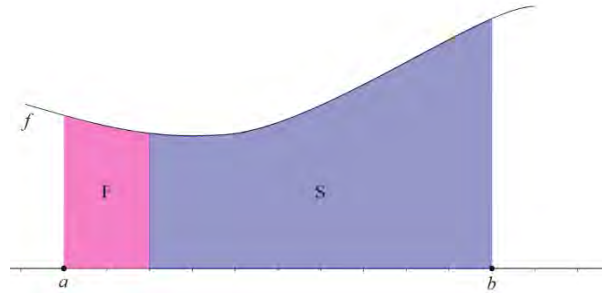
Şekil 7

Tanım gereği integral, sonsuz sayıda küçük dikdörtgenlerin alanlarının toplamını temsil eder:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

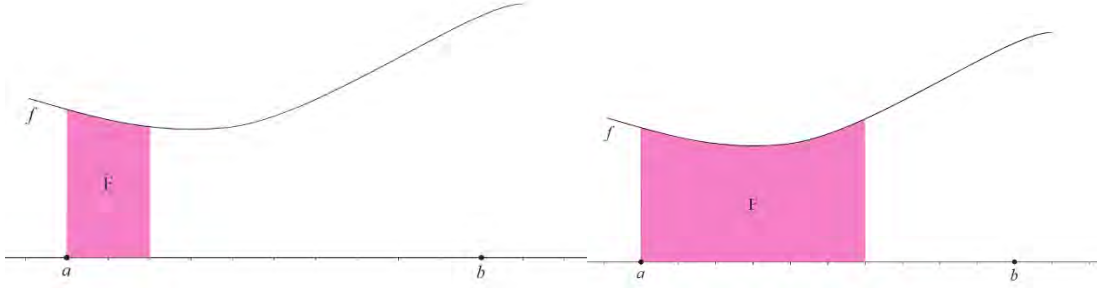
$x \in [a, b]$ için $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon için $[a, b]$ aralığında sürekli olduğu ve $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğu geçerlidir. Bu, $f(x)$ fonksiyonunun $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$ olarak da tanımlanabileceği anlamına gelir, burada C herhangi bir sabittir.

Son eşitlik, a 'dan x 'e kadar sınırları olan $f(t)$ fonksiyonunun belirli integralinin (bu fonksiyon $f(x)$ ile aynıdır, sadece değişkenin farklı bir gösterimine sahiptir), $x \in [a, b]$ olduğunda bu eğrisel yamuğun alanını ölçen bir fonksiyon olduğu anlamına gelir (Şekil 8).



Şekil 8

F ile, eğrisel yamuğun $x \in [a, b]$ aralığında bir kısmının alanı belirlenir. x 'i artırırsak F alanının da artacağı, x 'i azaltırsak F alanının da azalacağı açıkça görülmektedir (Şekil 9).

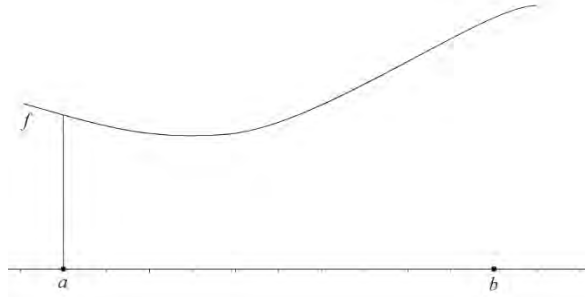


Şekil 9

Buradan $f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu sonucuna varabiliriz. C sabitinin değerini belirlemek kalır. Bunun için $x = a$ alacağız ve şunu elde edeceğiz:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C .$$

$\int_a^a f(t) dt$ integralinin 0'a eşit olacağı açıktır, çünkü eğrisel yamuk yerine şekil bir doğru parçası olacaktır (Şekil 10).



Şekil 10

Öte yandan, $x = b$ alırsak şunu elde ederiz:

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = S + C ,$$

bu da F alanı tüm eğrisel yamuğun S alanına eşit olacağı anlamına gelir (Şekil 7). Eğer $C = F(a)$ alırsak şunu elde ederiz:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Son formül **Newton–Leibniz formülü** olarak bilinir. Bununla birlikte aşağıdaki teoremi ispatlamış oluyoruz.

Teorem 1: (Newton–Leibniz Teoremi) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise ve F onun herhangi bir ilkel fonksiyonu ise, o zaman aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Bu teoreme integral hesabın temel teoremi denir ve (1) eşitliğine **integral hesabın temel kuralı** veya **Newton–Leibniz formülü** denir.

Newton–Leibniz formülü, belirsiz ve belirli integraller arasındaki ilişkiyi verir ve bu sayede belirli integralin hesaplanmasını büyük ölçüde kolaylaştırır. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli integralini hesaplamak için, onun bir ilkel fonksiyonunu bulmak ve $[a, b]$ aralığındaki artışını hesaplamak yeterlidir. Yani belirli integralin hesaplanmasını, bir ilkel fonksiyon bulmaya indirgiyoruz, bu da belirsiz integralin hesaplanmasına eşdeğerdir.

Örnek 1 $\int_a^b x^n dx, n \in \mathbb{R}, 0 \notin [a, b]$. integralini hesaplayalım.

İki durumu ele alacağız:

$n \neq -1$ olduğunda, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, dir. Bu durumda x^n fonksiyonunun ilkel fonksiyonu $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ fonksiyonudur, bu nedenle:

$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

$n = -1$ olduğunda, $\int_a^b \frac{dx}{x}$ elde ederiz. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ olduğundan, $x > 0$ için şunu elde ederiz:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

1 $\int_1^2 x^3 dx$ belirli integrali hesaplayınız.

Örnek 2 Aşağıdaki belirli integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int_0^2 (3-2x)dx \quad \text{b) } \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx .$$

Belirli integralleri çözmek için Newton–Leibniz formülünü kullanacağız.

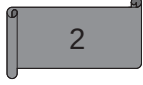
$$\text{a) } \int_0^2 (3-2x)dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2}\right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{2 \cdot 0^2}{2}\right) = 6 - 4 = 2 .$$

b) Karşılık gelen belirsiz integrali çözerek şunu elde ederiz:

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \ln |x| + e^x + C .$$

Buradan belirli integral için şunu elde edeceğiz:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \left(\ln |x| + e^x\right) \Big|_1^3 = \ln 3 + e^3 - e .$$



Verilen belirli integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)dx ; \quad \text{b) } \int_0^1 x^2 (x^3 + 1)dx .$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen belirli integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int_0^2 x dx ,$$

$$\text{b) } \int_1^3 x^2 dx ,$$

$$\text{c) } \int_0^1 e^x dx ,$$

$$\text{ç) } \int_0^1 \sqrt{x} dx ,$$

$$\text{d) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx ,$$

$$\text{e) } \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx .$$

2. Verilen belirli integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x^4 + x^{-2} + 2}{x^3} dx ;$$

$$\text{b) } \int_0^1 (x-3)^3 dx ;$$

$$\text{c) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - 3\right) dx ;$$

$$\text{ç) } \int_1^4 (e^x + \sqrt{x}) dx .$$

3. Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^7 dx ; \quad \text{b) } \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx .$$

7. Belirli İntegrallerin Yerine Koyma Yöntemi ile Çözümü

Newton–Leibniz formülüne göre belirli bir integrali hesaplamak, belirsiz bir integrali hesaplamaya eşdeğer olan bir ilkel fonksiyon bulmaya indirgenir. Belirsiz integralde, şu formüle indirgenen yerine koyma ile integrasyon yöntemini zaten ele aldık:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt .$$

Burada $x = \varphi(t)$ yerine koyma işlemini tanıttık.

Örnek 1 Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx ; \quad \text{b) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx .$$

a) $t = x + 2$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, buradan $dx = dt$ elde ederiz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = -1$ olduğunda $t = -1 + 2 = 1$ ve $x = 1$ olduğunda $t = 1 + 2 = 3$ 'tür. Tanıtılan yerine koyma ve yeni tanıtılan değişken için hesaplanan yeni sınırlar ile integral şu şekilde çözülür:

$$\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx = \int_1^3 t^3 dt = \left. \frac{1}{4} t^4 \right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20 .$$

b) $x + 1 = t$, $dx = dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = -2$ olduğunda $t = -2 + 1 = -1$ ve $x = 0$ olduğunda $t = 0 + 1 = 1$ 'dir. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_{-2}^0 e^{x+1} dx = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e} .$$

1

Verilen belirli integrali hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx ; \quad \text{b) } \int_1^2 e^{2x+1} dx .$$

Örnek 2 Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_4^5 \frac{dx}{x-3}; \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}.$$

a) $t = x - 3$, $dx = dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = 4$ olduğunda $t = 4 - 3 = 1$ ve $x = 5$ olduğunda $t = 5 - 3 = 2$ 'dir. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) $t = 2x + 1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = (1/2) dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = 0$ olduğunda $t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ ve $x = 2$ olduğunda $t = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ 'tir. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

2 Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{(4x-3)^2}.$$

Örnek 3

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_0^3 \sqrt{1+x} dx; \quad \text{b) } \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$$

a) $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 0$ olduğunda $t = 1$ ve $x = 3$ olduğunda $t = 2$ 'dir. Ve şunu elde ederiz:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = 2 \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}.$$

b) $t = \sqrt[3]{1-x}$, $t^3 = 1-x$, $dx = -3t^2 dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 1$ olduğunda $t = 0$ ve $x = 9$ olduğunda $t = -2$ 'dir. Ve şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}\int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx &= \int_0^{-2} (1-t^3) t (-3t^2) dt = \int_0^{-2} (3t^6 - 3t^3) dt = \left(\frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} \right) \Big|_0^{-2} = \frac{3(-2)^7}{7} - \frac{3(-2)^4}{4} \\ &= 3 \cdot 16 \left(-\frac{8}{7} - \frac{1}{4} \right) = \frac{48 \cdot (-39)}{28} = 66,85.\end{aligned}$$

3

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} dx$; b) $\int_2^4 \sqrt{2x-3} dx$; c) $\int_0^1 x \sqrt[5]{x+2} dx$.

Örnek 4

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

a) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$; b) $\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$.

a) $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 0$ olduğunda $t = 1$ ve $x = 1$ olduğunda $t = 2$ 'dir. Ve şunu elde ederiz:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

b) $x^2 - 5x + 6 = t$, $(2x-5) dx = dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = -1$ olduğunda $t = 12$ ve $x = 0$ olduğunda $t = 6$ 'dır. Ve şunu elde ederiz:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int_{12}^6 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{12}^6 = \ln 6 - \ln 12 = \ln \left(\frac{6}{12} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

4

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$; b) $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx$.

Örnek 5

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx.$$

a) $x-1 = t^2$, $dx = 2t dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 1$ olduğunda $t = 0$ ve $x = 2$ olduğunda $t = 1$ 'dir. O halde şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

b) $t^6 = e^x + 3$, $6t^5 dt = e^x dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 0$ olduğunda $t = \sqrt[6]{4}$ ve $x = \ln(2)$ olduğunda $t = \sqrt[6]{5}$ 'tir. O halde şunu elde ederiz:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx = 6 \int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6 dt = \frac{6}{7} e^7 \Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7} (5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}).$$

5

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+2} dx \text{ belirli integrali hesaplayınız.}$$

Aşağıda, belirli integralleri daha kolay çözmek için kullanabileceğimiz bazı özellikler vereceğiz.

1) $f(x)$ fonksiyonu bir tek fonksiyon olsun, yani $f(-x) = -f(x)$. Şimdi şu integrali hesaplayalım:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Önce $\int_{-a}^0 f(x) dx$ integralini ele alalım. $t = -x$, $dt = -dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, bu nedenle integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor: $x = -a$, $t = a$ ve $x = 0$, $t = 0$. Şunu elde ederiz:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{tek fonksiyon}}{=} \int_a^0 -f(t)(-dt) = \int_a^0 f(t) dt \underset{\text{sınırları değiştirmekle}}{=} - \int_0^a f(x) dx$$

Elde edileni ilk integrale koyarsak:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

elde edilir. Buradan, integral altındaki fonksiyon tek ise ve integral aralığı sıfıra göre simetrik ise, integralin değerinin sıfıra eşit olduğu sonucuna varabiliriz.

Örnek 6 $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ olduğunu ispatlayalım.

$f(x) = x^3$ fonksiyonu tek fonksiyondur çünkü $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. İntegral aralığı sıfıra göre simetrik olduğundan, integralin değeri sıfırdır. Bu integral için sıfıra eşit olduğu kolayca kontrol

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

edilebilir:

2) Şimdi de belirli integrallerin çözümünde bize yardımcı olacak başka bir özelliği ele alalım. $f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

bir çift fonksiyon olsun, yani $f(-x) = f(x)$. Şimdi şu integrali hesaplayalım:

Önce $\int_{-a}^0 f(x)dx$ integralini ele alalım. $t = -x$, $dt = -dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, bu nedenle

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{çift fonksiyon}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_a^0 -f(x)dx \underset{\text{sınırları değişmesiyle}}{=} \int_0^a f(x)dx.$$

integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor: $x = -a$, $t = a$ ve $x = 0$, $t = 0$.

elde edilir. Bunu ilk integrale koyarsak şunu elde ederiz:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Son formülü geometrik olarak şu şekilde yorumlayabiliriz: Fonksiyon çift ise grafiği y eksenine göre simetriktir, bu nedenle $x = a$ ve $x = 0$ doğruları arasındaki şeklin alanı, $x = 0$ ve $x = a$ doğruları arasındaki şeklin alanına eşittir, bu da yukarıdaki formülü gerektirir.

Örnek 7

$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ olduğunu ispatlayalım.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu çift fonksiyondur çünkü $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. İntegral aralığı sıfıra göre simetrik olduğundan, integralin değeri için şunu elde ederiz:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

6

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2} dx$; b) $\int_{-3}^3 2x^4 dx$.

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayın:

a) $\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx,$

b) $\int_0^1 (3x+1)^2 dx,$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+2)^2},$

ç) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3},$

d) $\int_1^4 \sqrt{x} dx,$

e) $\int_2^{10} \sqrt{2x+5} dx,$

f) $\int_0^1 \sqrt[5]{(5x+1)^2} dx,$

g) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx,$

ğ) $\int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx,$

h) $\int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx,$

ı) $\int_0^1 e^{2x+1} dx,$

i) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x+2}}{\sqrt[3]{e^x+2}} dx.$

2. Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_{-1}^1 x^7 dx$; b) $\int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$

8. Belirli İntegralin Kısmi İntegralinin Alınması

Belirli bir integrali hesaplamayı, belirsiz bir integrali hesaplamaya eşdeğer olan bir ilkel fonksiyon bulmaya indirgiyoruz. Kısmi integrasyon en çok integral altındaki fonksiyon logaritmik, üstel veya trigonometrik olduğunda kullanılır. Belirsiz integralde kısmi integrasyon yöntemini zaten ele aldık:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Bu formül belirli bir integrale uyarlanır ve şu şekli alır:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx .$$

Örnek 1 Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_0^2 x e^x dx ; \quad \text{b) } \int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx ; \quad \text{c) } \int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx .$$

a) Kısmi integrasyon kullanarak, $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, O halde:

$$\int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2e^2 - 0e^0) - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

elde edilir.

b) Kısmi integrasyon kullanarak, $u = x^2 - 5 \Rightarrow du = 2x dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, yerine koymakla:

$$\int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (x^2 - 5) e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-2x} dx = \frac{2}{e^2} - \frac{5}{2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx .$$

elde edilir. $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ integralini çözmek için tekrar kısmi integral alma kuralını uygulamamız gere-

kiyor, burada $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ O halde

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bunu ilk integralde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\
&= \frac{2}{e^2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{9}{4} + \frac{5}{4e^2}
\end{aligned}$$

c) Kısmi integrasyon kullanarak, $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3) dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ almakla:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx = (x^2 + 3x - 1) e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 3) e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3) e^x dx.$$

elde edilir. $\int_0^1 (2x + 3) e^x dx$, integralini çözmek için tekrar kısmi integral alma kuralını uygulamamız gerekiyor, burada $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ olur.

$$\int_0^1 (2x + 3) e^x dx = (2x + 3) e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1,$$

eğer bunu ilk integralde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3) e^x dx = 3e + 1 - (3e - 1) = 2.$$

1 Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{b) } \int_1^2 (x^2 + 2x + 1) e^x dx.$$

Örnek 2 Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{b) } \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$$

a) Kısmi integral alma kuralını uygularsak şunu elde ederiz: $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$, $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $v = 2\sqrt{x}$.
Buna göre:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \ln 4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 = 4 \cdot (\ln 4 - 1).$$

elde edilir.

b) Kısmi integral alma kuralını kullanarak şunu elde ederiz: $u = \ln 2x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Buna göre:

$$\begin{aligned} \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{x^4}{16} \Big|_2^4 = \frac{1}{4} (4^4 \ln 8 - 2^4 \ln 4) - \frac{1}{16} (4^4 - 2^4) = 184 \ln 2 - 15. \end{aligned}$$

elde edilir.

c) Kısmi integral alma kuralını kullanarak şunu elde ederiz: $u = \ln(x+1)$, $du = \frac{dx}{x+1}$, $dv = dx$, $v = x$.
O halde:

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = ((e-1) \ln e) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= e-1 - \left[\int_0^{e-1} \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} \right] = e-1 - \left[x \Big|_0^{e-1} - (\ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \right] = e-1 - [(e-1-0) - (\ln e - \ln 1)] = \\ &= e-1 - e+1 + \ln e = 1. \end{aligned}$$

2

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_1^e x^2 \ln x$; b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$; c) $\int_0^{e-1} (x^2 + x) \ln(x+1) dx$.

Örnek 3

$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ belirli integralini hesaplayalım.

Kısmi integrasyon kullanarak şunu elde ederiz: $u = \ln^2 x$, $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $dv = \frac{1}{x^2} dx$, $v = -\frac{1}{x}$. Şunu elde ederiz:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx,$$

$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$ integralini çözmek için tekrar kısmi integral alma kuralını uygulamamız gerekiyor, burada şunu elde ederiz:

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1,$$

eğer bunu ilk integralde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{2}{e} + 1 \right) = -\frac{5}{e} + 2.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen integralleri hesaplayın:

a) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx;$

b) $\int_1^2 (3x+5)e^{-x} dx;$

c) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx;$

ç) $\int_0^1 (x^2 - 2)e^x dx;$

d) $\int_1^e \ln x dx;$

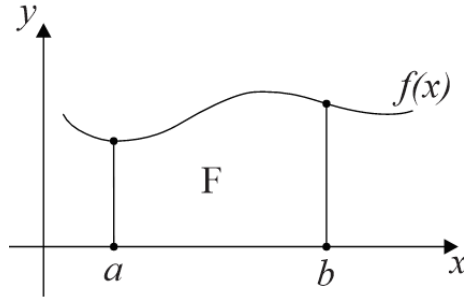
e) $\int_1^e x^2 \ln x dx;$

f) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$

g) $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx.$

9. Düzlemsel Şeklin Alanı

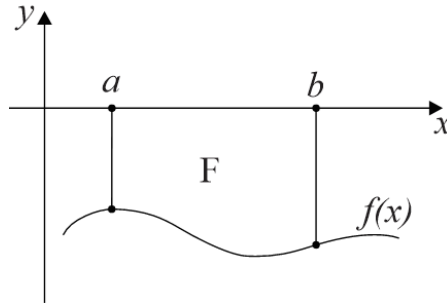
Belirli integralin tanımından, negatif olmayan $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $[a, b]$ aralığındaki x -ekseni ile tanımlanan eğrisel bir yamuğun alanını temsil ettiğini gördük (Şekil 11).



Şekil 11

Yani, şekil 11'deki eğrisel yamuğun alanı için şunu elde ederiz:

$$P(F) = \int_a^b f(x) dx.$$



$f(x)$ fonksiyonu negatif olduğunda, belirli integralin değeri negatif olacaktır (Şekil 12).

Şekil 12

$$P(F) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

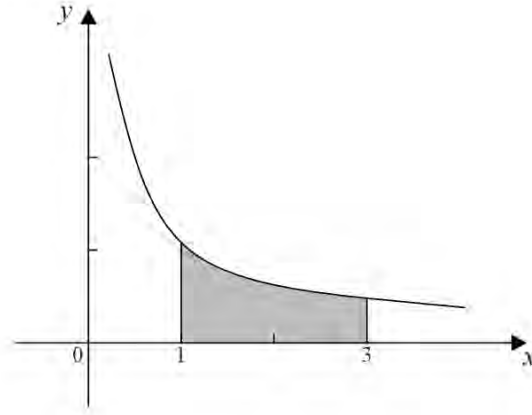
Yani $f(x)$ fonksiyonu negatif olduğunda şeklin alanını hesaplamak için, alan negatif olamayacağından, pozitif bir sayı elde etmek için belirli integralin değerini mutlak değere koyacağız.

Örnek 1

$y = \frac{1}{x}$ eğrisi, apsis eksenini ve $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile sınırlanan şeklin alanını

hesaplayalım.

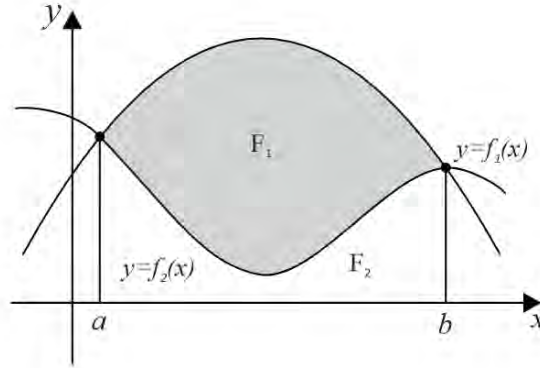
Şekil 13'te eğri ve iki doğru gösterilmiştir:



Şekil 13

$$P = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Yukarıdaki açıklamaya göre, boyalı kısmın alanını hesaplamak için şunu elde ederiz: Şimdi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının grafikleriyle sınırlanan ve $[a, b]$ aralığında bulunan bir şeklin alanını nasıl hesaplayacağımızı ele alalım (şekil 14).

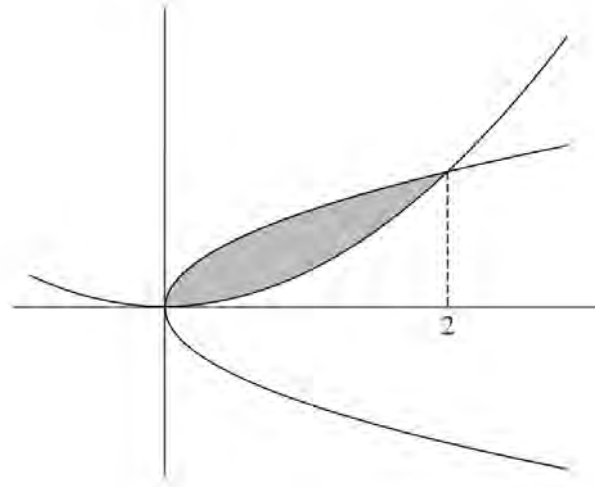


Şekil 14

F_1 ile $f_1(x)$ fonksiyonunun grafiğinin altındaki eğrisel yamuğu ve F_2 ile $f_2(x)$ fonksiyonunun grafiğinin altındaki eğrisel yamuğu gösterirsek, F şekli F_1 eğrisel yamuğu ile F_2 eğrisel yamuğunun farkı olarak temsil edilebilir. Buradan F şeklinin alanının F_1 eğrisel yamuğunun alanı ile F_2 eğrisel yamuğunun alanının farkına eşit olduğu sonucuna varabiliriz, yani:

$$P(F) = P(F_1) - P(F_2) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

Örnek 2 : $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$ parabolleri ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (şekil 15).



Şekil 15

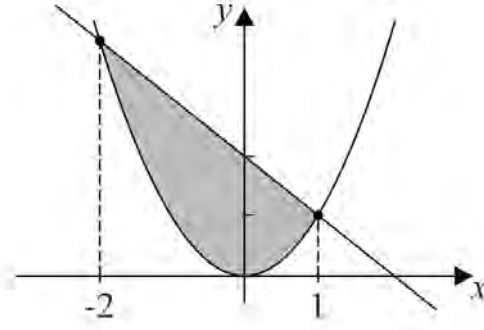
Alanı belirlenmesi gereken şekli sınırlayan paraboller şekil 15'te gösterilmiştir. İlk olarak, belirli integralin sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. $y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}, y > 0$

dan $\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2}$, $2x = \frac{x^4}{4}$ elde ederiz. $x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$. Yani kesişim noktaları $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ 'dir. $y^2 = 2x$ eğrisi ile sınırlanan eğrisel yamuğun alanı:

$F_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx$ dir, $x^2 = 2y$ eğrisi ile sınırlanan eğrisel yamuğun alanı ise: $F_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$ dir. Aradığımız şeklin alanı $F = F_1 - F_2$ 'dir, yani

$$F = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Örnek 3 $y = x^2$ parabolü ve $x + y = 2$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (Şekil 16).



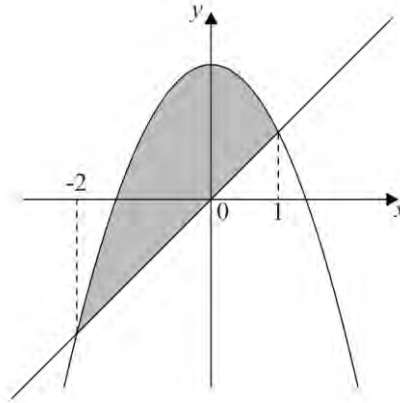
Şekil 16

İlk olarak, belirli integralin sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. $y = x^2$ 'yi $x + y = 2$ denkleminde yerine koyuyoruz ve $x + x^2 = 2$ ikinci derece denklemini elde ediyoruz. $x^2 + x - 2 = 0$ ikinci derece denklemini çözerek çözümlerin $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ olduğunu elde ederiz. Yani kesişim noktaları $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$ 'dir. Aradığımız şeklin alanı:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Örnek 4

$y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = x$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım. (Şekil 17).



Şekil 17

İlk olarak, integralin sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. $y = x$ 'i $y = 2 - x^2$ denkleminde yerine koyularak $x^2 + x - 2 = 0$ ikinci derece denklemini elde ediyoruz.

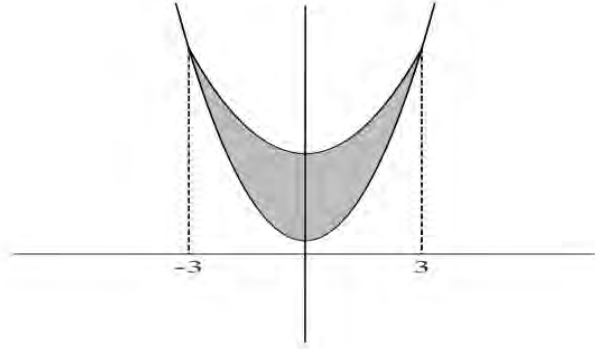
İkinci derece denklemi çözerek çözümlerin $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ olduğunu elde ederiz. Yani kesişim noktaları $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$ 'dir.

Aradığımız şeklin alanını buluyoruz:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Örnek 5

$y = 2x^2 + 1$ ve $y = x^2 + 10$ parabolleri ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım



(Şekil 18).

Şekil 18

$$F = \int_{-3}^3 (x^2 + 10 - 2x^2 - 1) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 36.$$

İlk olarak, integral alma aralığının sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz.

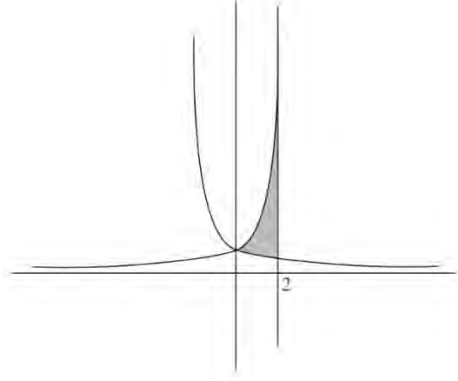
Denklemleri eşitlersek $2x^2 + 1 = x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{12} = \pm 3$ elde ederiz. Aradığımız şeklin alanı:

Çözümde, her iki fonksiyonun da çift (y - eksenine göre simetrik) olduğunu kullanıyoruz.

Örnek 6

$y = e^x$, $y = e^{-x}$ eğrileri ve $x = 2$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım

(Şekil 19).



Şekil 19

Şekil 19'dan x 'in 0'dan 2'ye kadar hareket ettiği ve üst eğrinin $y = e^x$, alt eğrinin ise $y = e^{-x}$ olduğu

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x}$$

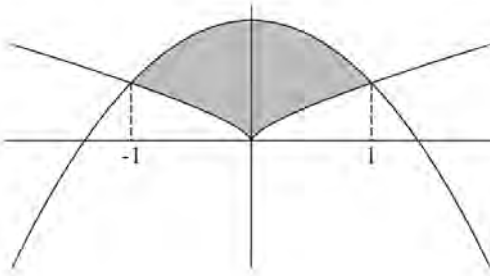
$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

görülebilir. İki eğrinin kesişim noktaları şu şekilde elde edilebilir:

$$F = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^{-0}) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2.$$

Buradan alan için şunu elde ederiz:

Örnek 7 $y = 2 - x^2$ ve $y^3 = x^2$ eğrileri ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (Şekil 20).



Şekil 20

İki eğrinin kesişimini buluyoruz ve kesişim noktalarını $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ olarak elde ediyoruz. Şekil

$$20'den \quad F = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{2}{15} . \text{ elde edilir.}$$

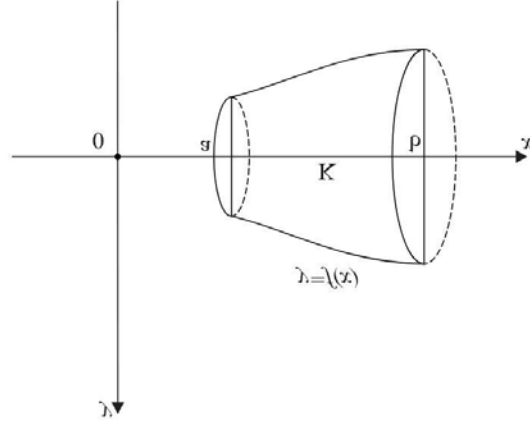
Çalışma Alıştırmaları

1. $y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
2. $y = x^2 + x + 3$ eğrileri ve $y = x + 7$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
3. $y = \ln(x)$ ve $y = \ln^2(x)$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
4. $y = \frac{1}{1+x^2}$ ve $y = \frac{x^2}{2}$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
5. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ eğrisi ve $y = 0$, $x = e$ doğruları ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
6. $y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi ve $y = x$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
7. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ eğrileri ve $x = 1$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.

10. Dönel Cisimlerin Hacmi

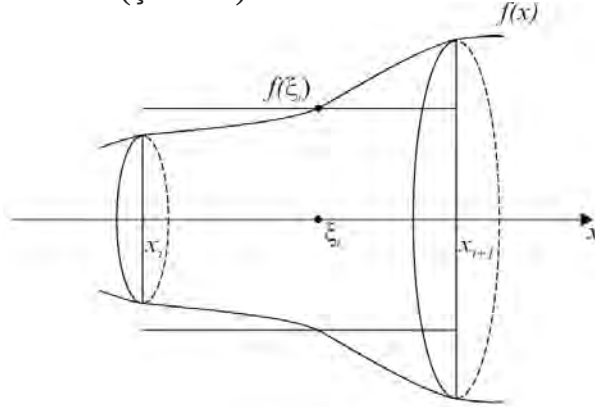
Belirli integral yardımıyla bir cismin hacmi hesaplanabilir. Devamında, belirli integral yardımıyla bir dönel cismin hacminin nasıl hesaplanabileceğini göstereceğiz. Belirli integralin tanımını kullanarak dönel cismin hacmini hesaplama formülünün nasıl elde edildiğini göstereceğiz. f , $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun.

$[a, b]$ aralığındaki $f(x)$ eğrisinin altındaki eğrisel yamuğu x eksenini etrafında döndürerek K dönel cismini elde ederiz (Şekil 21).



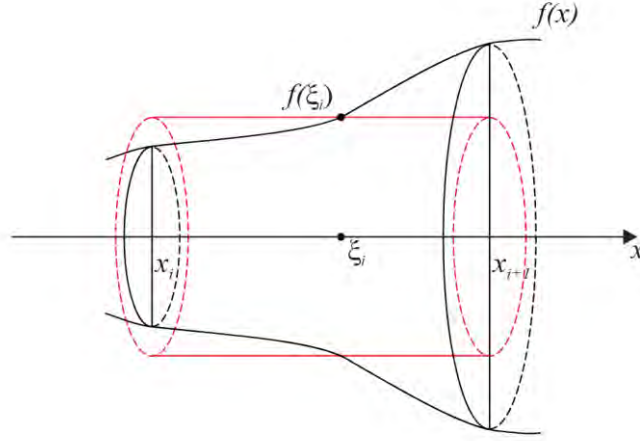
Şekil 21

Dönel cismin hacmini yaklaşık olarak hesaplamak için, belirli integralin tanımında yaptığımıza benzer şekilde, $[a, b]$ aralığını bir P bölümüyle n alt segmente böleceğiz. $[x_i, x_{i+1}]$ alt segmentine odaklanacağız. $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ noktasını seçeceğiz ve bu noktada $f(\xi)$ fonksiyonunun değerini belirleyeceğiz. $(\xi, f(\xi))$ noktasından x eksenine paralel bir doğru çizeceğiz. Bu eğrisel yamuk x eksenini etrafında döndüğünde bir dönel cisim elde ederiz (Şekil 22).



Şekil 22

Ancak $(\xi, f(\xi))$ noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğruyu da döndüreceğiz. Aslında dönel eğrisel yamuğun hacmini silindirin hacmiyle yaklaşık olarak hesaplayacağız (Şekil 23).



Şekil 23

Bu silindirin hacmi $V_i = f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i$ 'dir, burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ silindirin yüksekliği, $f(\xi_i)$ ise yarıçapıdır. Dediğimiz gibi, $[a, b]$ aralığını n alt segmente böldük ve $i = 0, \dots, n-1$ için $[x_i, x_{i+1}]$ aralıklarındaki

tüm silindirlerin hacimlerini toplarsak şunu elde ederiz: $\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i$ $[a, b]$ aralığının bölümü ne kadar küçük olursa, silindirin hacmi ile ele alınan alt segmentteki $[x_i, x_{i+1}]$ dönel silindirin parçası arasındaki fark da o kadar küçük olur, dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için son toplamın K dönel cisminin hacmi olduğunu düşünebiliriz. Bu, $f^2(x) \pi$ fonksiyonu için bir Riemann toplamıdır. Bu Riemann toplamının limit değeri var olduğunda, dönel cismin hacmi de var olacaktır. Buradan dönel cismin hacmi için şu formül geçerlidir:

$$V(K) = \int_a^b f^2(x) \pi dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

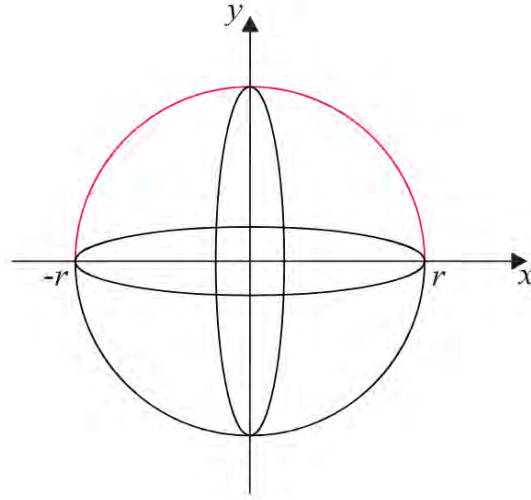
Teorem 1: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. O zaman $[a, b]$ aralığındaki eğrisel yamuğun x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen K dönel cisminin hacmi şuna eşittir:

$$V(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Örnek 1

Kürenin hacmi $\frac{4}{3} r^3 \pi$ 'ye eşit olduğunu gösterelim.

Küre, $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilir. $x^2 + y^2 = r^2$ denkleminde $y^2 = r^2 - x^2$ elde ederiz.



Şekil 24

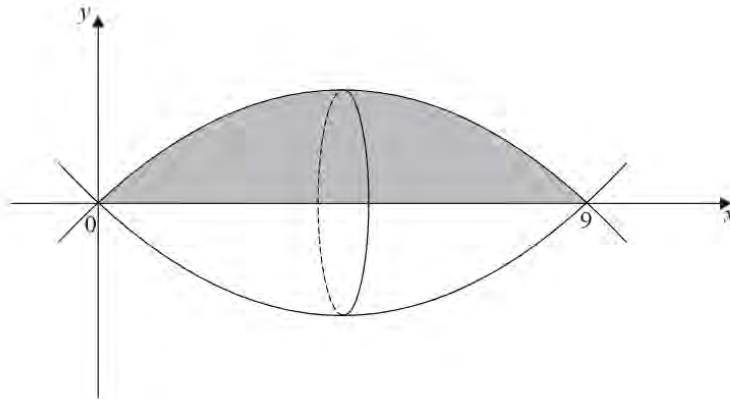
Kürenin hacmini hesaplamak için sadece üst yarım dairenin (kırmızı ile işaretlenmiş) dönüşünü ele alacağız ve şunu elde edeceğiz:

$$V(K) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x \Big|_{-r}^r - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r \right] = \pi \left[r^2 (r + r) - \frac{1}{3} (r^3 + r^3) \right] = \pi \left[2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right] = \frac{4r^3 \pi}{3}.$$

Örnek 2

$y = 9x - x^2$ eğrisinin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayalım.

$y = 9x - x^2$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenini ile kesişim noktaları 0 ve 9'dur çünkü $9x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(9 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 9$. Döndürme ile Şekil 25'te verilen şekil elde edilecektir.



Şekil 25

O halde hacim için şunu elde edeceğiz:

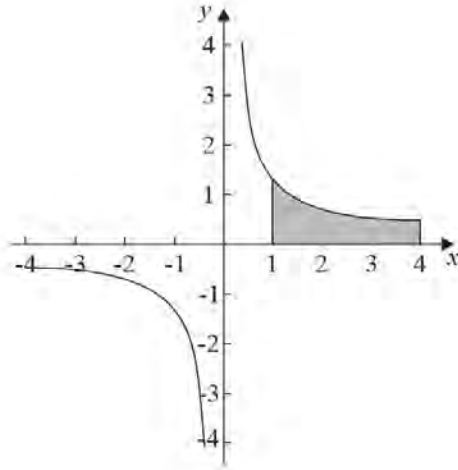
$$V = \pi \int_0^9 (9x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^9 (81x^2 - 18x^3 + x^4) dx = \pi \left[81 \frac{x^3}{3} \Big|_0^9 - 18 \frac{x^4}{4} \Big|_0^9 + \frac{x^5}{5} \Big|_0^9 \right]$$

$$= \pi \left[27 \cdot 9^3 - \frac{9}{2} \cdot 9^4 + \frac{9^5}{5} \right] = 1968,3\pi.$$

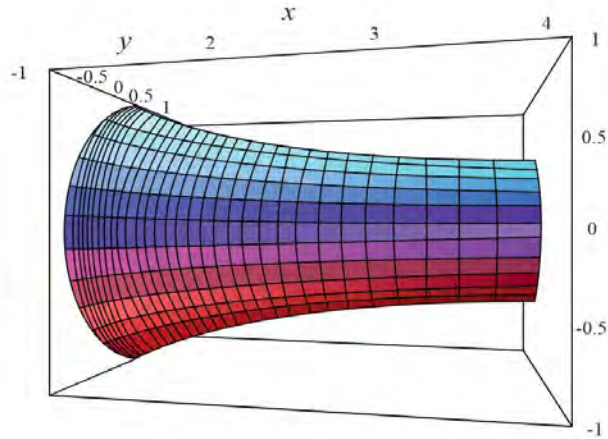
Örnek 3

$y = \frac{1}{x}$ eğrisi ve $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ doğruları ile sınırlanan düzlemin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayalım.

(Verilen eğri ve doğrularla sınırlanan ve x eksenini etrafında dönen şekil Şekil 26a'da verilmiştir. Hacmi istenen cisim ise Şekil 26b'de verilmiştir.)



Şekil 26a)



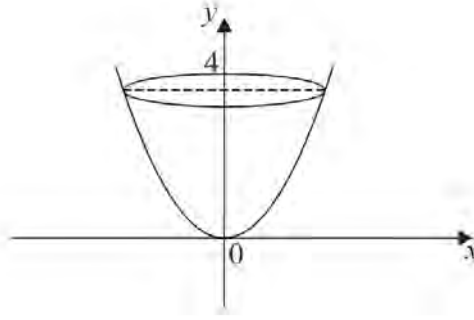
Şekil 26b)

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^4 \right) = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Örnek 4

$y = x^2$ parabolünün $0 \leq y \leq 4$ aralığında y eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayalım.

Parabolün döndürülmesiyle elde edilen cisme paraboloid denir. Verilen sınırlamalarla örneğimizdeki paraboloid Şekil 27'de gösterilmiştir.



Şekil 27

Burada dönmenin y eksenini etrafında olduğunu vurgulamalıyız, bu nedenle y eksenini etrafında dönme

yapıldığında yukarıdaki formül şu şekilde uyarlanacaktır: $V(K) = \pi \int_a^b x^2 dy$.

Yani şunu elde ederiz:

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi.$$

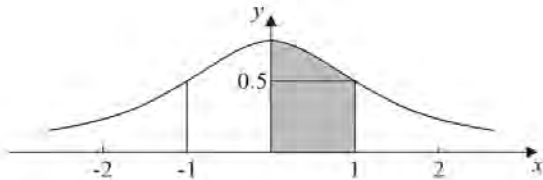
Örnek 5

$y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ve $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$ doğruları ile sınırlanan cismin y eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayalım.

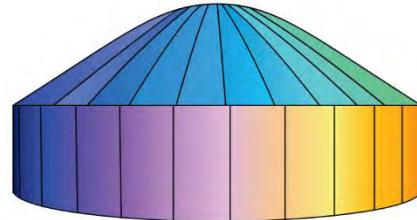
Eğrinin denkleminde $x^2 = \frac{1}{y} - 1$ elde ederiz. Dönel cismin hacmi, $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $x = 1$ doğrusunun

y eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi ile $x^2 = \frac{1}{y} - 1$, için $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ eğrisinin y eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacminin toplamı olacaktır.

Şekil 28a'da dönel cismin döndürülmesiyle elde edildiği şekil, Şekil 28b'de ise dönel cismin kendisi verilmiştir.



Şekil 28a)



Şekil 28b)

$$V = \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy \right) = \pi \left(y \Big|_0^{\frac{1}{2}} + (\ln|y| - y) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(-\ln \frac{1}{2} \right) = \pi (-\ln 2^{-1}) = \pi \ln 2.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.
2. $y^2 = x - 1$ parabolü ve $y = x - 2$ doğrusuyla sınırlanan cismin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.
3. $y^2 = 2(x - 1)$ parabolünün $1 \leq x \leq 3$ aralığında x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.
4. $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + 2y^2 = 1$ eğrileriyle sınırlanan cismin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.
5. $y = \frac{4}{x}$ eğrisi ve $y = x$, $x = 4$ doğruları ile sınırlanan cismin x eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.

11. Modül ünitesinin pekiştirme alıştırmaları

1. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int \sqrt[4]{x^3} dx & \text{b) } \int \frac{2}{x^5} dx & \text{c) } \int (3 + x^3)^3 dx & \text{ç) } \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx \\ \text{d) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx & \text{e) } \int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx & \text{f) } \int \sqrt{3x - 4} dx & \text{g) } \int \frac{dx}{(5x - 2)^{\frac{5}{2}}} \\ \text{ğ) } \int \frac{dx}{2 + 3x^2} & \text{h) } \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[4]{x + 5}} dx; & \text{ı) } \int \frac{2x - 3}{1 - x} dx; \end{array}$$

2. Newton–Leibniz formülünü kullanarak verilen integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_1^2 \sqrt[4]{x^3} dx, \quad \text{b) } \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx,$$

$$c) \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + x^3 \right) dx,$$

$$ç) \int_0^1 2x^4 + 3x^2 + 1.$$

3. Yerine koyma ile integral alma işlemi yardımıyla integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$b) \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

$$c) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$ç) \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3},$$

4. Yerine koyma ile integral alma işlemi yardımıyla integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx,$$

$$b) \int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

5. Kısmi integral alma işlemi yöntemi yardımıyla integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^1 \frac{2x + 3}{e^x} dx$$

$$b) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

6. Kısmi integral alma işlemi yöntemi yardımıyla integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_1^2 x \ln(2x^2 - 1) dx$$

$$b) \int_2^4 (2x - 1) \ln x dx$$

7. Kısmi integral alma işlemi yardımıyla integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^{e-2} \ln(x + 2) dx$$

$$b) \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

8. $y = 2x^2 + 1$ ve $y = x^2 + 10$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.

9. $y = 2x - x^2$ eğrisi ve $x + y = 0$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.

10. $y = x^3$ eğrisi ve $y = 8$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlanan cismin y ekseninde döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.

11. $y = 2 - x^2$ eğrisi ve $y = 1$ doğrusuyla sınırlanan cismin x ekseninde döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini hesaplayınız.

12. Marjinal maliyet fonksiyonu $C_g(x) = \frac{600}{\sqrt{40x + 1}}$ ile verilir, burada x üretilen birim sayısıdır. 10 birim üretilip satıldığında toplam maliyet 1000 'dir, yani $C(10) = 1000$. Toplam maliyet fonksiyonunu bulunuz.

Modül Ünite 3 – Matrisler

(Diğer tüm meslekler için)

Nispeten genç bir matematik alanı olarak kabul edilen Lineer Cebir adlı matematik disiplini-
nin başlangıcı, determinantların tanıtılması ve uygulanmasına kadar uzanır. Başlangıçta doğrusal
denklemlerini çözmek için kullanılan determinantların tanıtılması ve uygulanmasına dayanır.
1693'te Alman matematikçi Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) çalışmalarında determinant-
ları kullanmıştır ve İsviçreli matematikçi Gabriel Cramer (1704–1752) 1750'de doğrusal denklemler
sistemlerini çözmek için Cramer kuralını ortaya koymuştur. Daha sonra Alman matematikçi Johann
Carl Friedrich Gauss (1777–1855) doğrusal denklemlerini çözmek için Gauss eliminasyon
yöntemini tanıtmıştır. Matris kavramı ilk olarak İngiliz matematikçilerin çalışmalarında ortaya çık-
mıştır. Bu terim 1848'de James Joseph Sylvester (1814–1897) tarafından tanıtılmıştır. Matrislerin
çarpımı ve ters matrisin bulunması Arthur Cayley (1821–1895) tarafından tanımlanmıştır.

1. İkinci ve Üçüncü Dereceden Determinant Kavramı

Birinci sınıfta ikinci dereceden determinantlarla tanıştık. Burada onları tekrar hatırlayacağız ve üçün-
cü dereceden bir determinant tanımlayacağız.

İkinci Dereceden Determinant

Tanım 1: İkinci dereceden determinant, $a_1b_2 - a_2b_1$ ifadesinin kare biçiminde bir göste-
rim şemasıdır, yani

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1$$

burada a_1, a_2, b_1, b_2 iki satır ve iki sütuna dağıtılmış gerçekte sayılar veya ifadelerdir.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11.$$

Örnek 1

Verilen ikinci dereceden determinanı hesaplayalım:

1 Aşağıdaki ikinci dereceden determinantları hesaplayınız: a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

Örnek 2

$\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ denklemini x bilinmeyenine göre çözelim. İlk olarak, determinanı

hesaplıyoruz: $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 6x$ ve $x^2 - 6x = 0$ denklemini elde ediyoruz, çözümleri $x_1 = 0, x_2 = 6$ 'dır.

2

x bilinmeyenine göre denklemleri çözüünüz: a) $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x - 2 & 4 \\ 3 & x + 2 \end{vmatrix} = 0$.

Örnek 3

$\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} \geq 0$ eşitsizliğini x bilinmeyenine göre çözelim. Determinantı hesaplıyoruz:

$\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 6x$ ve $x^2 - 6x \geq 0$ eşitsizliğini elde ediyoruz, bu $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ için doğrudur.

3

x bilinmeyenine göre verilen eşitsizlikleri çözüünüz: a) $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} < 0$; b) $\begin{vmatrix} x - 2 & 4 \\ 3 & x + 2 \end{vmatrix} > 0$.

Üçüncü Dereceden Determinant**Tanım 2: Üçüncü dereceden determinant,**

$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ ifadesinin kare bir gösterim şemasıdır, yani

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

burada $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ üç satır ve üç sütuna dağıtılmış gerçekte sayılar veya ifadelerdir.

Gerçek sayılar $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ veya ifadeler determinantın elemanları olarak adlandırılır. a_1, b_2, c_3 elemanları **ana köşegenin** elemanlarıdır ve a_3, b_2, c_1 elemanları üçüncü dereceden determinantın **yan köşegeninin** elemanlarıdır. Determinantın hesaplanması (formülü ezberlemek için) bazı kurallar yardımıyla yapılır:

Sarrus kuralı ve **üçgenler kuralı**, aşağıda sunacağımız kurallardır:

Sarrus Kuralı: Üçüncü dereceden determinantın ilk ve ikinci sütunları şemada dördüncü ve beşinci sütunlar olarak yazılır. Ana köşegenin elemanlarının ve ana köşegene paralel iki köşegenin elemanlarının çarpımları hesaplanır ve hesaplamalara «+» işaretiyle dahil edilir. Yan köşegenin elemanlarının ve yan köşegene paralel iki köşegenin elemanlarının çarpımları hesaplanır ve «-» işaretiyle dahil edilir, yani:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Örnek 4

Üçüncü dereceden determinantı Sarrus kuralı ile hesaplayalım:

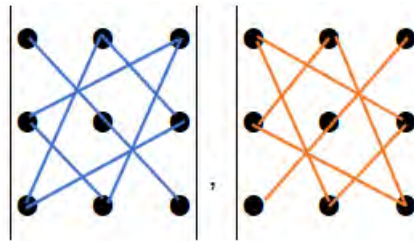
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = -3$$

4

Aşağıdaki üçüncü dereceden determinantları Sarrus kuralı ile hesaplayınız:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & -1 & b \\ -a & ab & 4 \end{vmatrix}$$

Üçgenler Kuralı: Determinantın elemanları üçgenlerin köşeleri olarak kabul edilir. Ana köşegenin elemanlarının ve bir kenarı ana köşegene paralel olan iki üçgenin köşeleri rolündeki elemanların çarpımları hesaplanır ve hesaplamalara “+” işaretiyle dahil edilir (mavi renkle gösterilmiştir). Yan köşegenin elemanlarının ve bir kenarı yan köşegene paralel olan iki üçgenin köşeleri rolündeki elemanların çarpımları hesaplanır ve hesaplamalara “-” işaretiyle dahil edilir (kırmızı renkle gösterilmiştir), aşağıdaki şemaya göre:



Örnek 5

Üçgenler kuralına göre üçüncü dereceden determinanti aşağıdaki şemaya göre hesaplayalım:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

yani, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = -3$

5

Aşağıdaki üçüncü dereceden determinantları üçgenler kuralı ile hesaplayın:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & -1 & b \\ -a & ab & 4 \end{vmatrix}.$

Elde edilen çözümleri 4. sorudaki aynı determinantların çözümleriyle karşılaştırınız!

Determinantları verilen satır veya sütunun elemanlarına göre determinanti açarak da çözebiliriz. Bu kuralı göstermeden önce minör ve cebirsel tümleyen olmak üzere iki terim tanıtacağız. Üçüncü dereceden determinanti Δ ile göstereceğiz ve elemanlarını bir a harfi ve determinanttaki satır ve sütuna göre elemanın konumunu indis olarak göstererek de temsil edebiliriz (a_{22} 'nin indisi 22'dir, bu da ikinci satır ve ikinci sütunda olduğu anlamına gelir):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tanım 3: Δ üçüncü dereceden bir determinant olsun ve rastgele seçilmiş $1 \leq i, j \leq 3$ indisleri için i–inci satır ve j–inci sütundaki elemanlar atlanır. Δ_{ij} sayısına a_{ij} elemanına karşılık gelen Δ 'nın **minörü** denir.

Tanım 4: Üçüncü dereceden bir determinanttta a_{ij} elemanının **cebirsal tümleyeni**, $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ sayısıdır.

Üçüncü dereceden determinantların hesaplanması, bir satırının (sütununun) elemanlarına ve bunların karşılık gelen minörlerine göre determinantın açılımıyla yapılabilir.

Teorem 1: Üçüncü dereceden Δ determinantının değeri, i-inci satırın (j-inci sütunun) elemanlarının karşılık gelen cebirsal tümleyenleriyle çarpımlarının toplamı olarak elde edilebilir, yani:

$$\Delta = a_{i1} \cdot a_{i1}^* + a_{i2} \cdot a_{i2}^* + a_{i3} \cdot a_{i3}^*, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (\Delta = a_{1j} \cdot a_{1j}^* + a_{2j} \cdot a_{2j}^* + a_{3j} \cdot a_{3j}^*, \quad 1 \leq j \leq 3).$$

İspat: Tamamen keyfi olarak üçüncü sütunu seçiyoruz ve $j = 3$ için $\Delta = a_{13} \cdot a_{13}^* + a_{23} \cdot a_{23}^* + a_{33} \cdot a_{33}^*$ olduğunu kanıtlayacağız. Tanım 2'den, üçüncü dereceden determinant:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \\ &\quad - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13} \cdot a_{13}^* + a_{23} \cdot a_{23}^* + a_{33} \cdot a_{33}^* \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$ ve $j = 1, 2$ için de benzer şekilde ispatlanır. ■

Örnek 6 Üçüncü sütuna göre açılan üçüncü dereceden determinantın değeri:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2 + 1) = -3$$

Örnek 5'teki determinantın değeriyle karşılaştırın. Ne sonuç çıkarırsınız?

6

Örnek 6'daki determinanti şu şekilde açarak hesaplayınız:

a) ikinci satıra göre b) birinci sütuna göre.

İkinci dereceden determinantlarda olduğu gibi, üçüncü dereceden determinantlarla da denklemleri ve eşitsizlikleri çözebiliriz.

7

x bilinmeyenine göre denklemleri çözünüz:

$$a) \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 2 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$b) \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 2 & x-2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8

x bilinmeyenine göre eşitsizlikleri çözünüz:

$$a) \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} < 5+x;$$

$$b) \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} > 3-x.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki determinantları hesaplayınız:

$$a) \begin{vmatrix} 2 \sin x & 3 \\ \sin 2x & \cos x \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} p & q \\ p^2 & q^2 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} p-q & p^2+q^2 \\ -1 & p+q \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} a & b+d & 1 \\ b & d+a & 1 \\ d & a+b & 1 \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 \\ 2 & m+2 & 2 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ \cos x & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Aşağıdaki üçüncü dereceden determinantları bir satır veya sütuna göre açarak hesaplayınız:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. x bilinmeyenine göre verilen denklemleri çözünüz:

$$a) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & (x+1)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$b) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 5x+1 & x+1 \end{vmatrix} = x-2;$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 0 & x+3 \\ 3 & 2 & (x+3)^2 \\ 3 & 3 & (x+3)^3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$c) \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ x & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3x.$$

4. x bilinmeyenine göre şu eşitsizlikleri çözünüz:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2-x; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & 1 \\ x+3 & 2 & 1 \\ 3 & x+3 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

2. İkinci ve Üçüncü Dereceden Determinantların Özellikleri

Burada ikinci ve üçüncü dereceden determinantların özellikleri verilecektir. Bazı özellikler hem ikinci dereceden hem de üçüncü dereceden determinantlar için aynıdır, bu nedenle bu özellikler yalnızca bir kez verilecektir.

1° Bir determinantta iki satır (sütun) yer değiştirirse, determinant işaret değişir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ ikinci dereceden determinant için, iki satır yer değiştirirse}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ determinantın işareti değişeceği açıktır.}$$

1 Üçüncü dereceden determinant $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ için ikinci ve üçüncü sütunlar yer değiştirdiğinde 1° özelliğini kontrol ediniz.

Örnek 1 a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+3=5$ determinantında satırlar yer değiştirirse şunu elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2 = -5. \text{ Açıkça görülüyor ki determinant işaret değiştiriyor.}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15. \text{ determinantında birinci ve üçüncü sütunlar yer değiştirirse şunu elde}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15. \text{ Açıkça görülüyor ki determinant işaret değiştiriyor.}$$

2

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ determinantında iki sütunun yerini değiştirin ve ardından iki determinanti da hesaplayın. Ne sonuç çıkarırsınız?

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

da hesaplayın. Sonuç nedir?

2° Bir determinantta iki farklı satırın (sütunun) karşılık gelen elemanları birbirine eşitse, determinantın değeri sıfırdır.

Birinci ve ikinci satırlarının karşılık gelen elemanları eşit olan üçüncü dereceden bir determinant için, bu determinantın değeri sıfırdır, yani:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{11} - a_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

3

İki sütunun karşılık gelen elemanları eşit olduğunda ikinci dereceden bir determinantta 2° özelliğini kontrol ediniz!

Örnek 2

a) İki satırın karşılıklı elemanları eşit olan $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -35 + 35 = 0$ değeri sıfıra eşittir.

b) İkinci ve üçüncü sütunların karşılık gelen elemanları eşit olan determinantın değeri sıfırdır, örnek

olarak $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 20 - 4 + 8 - 20 = 0$

4

Hesaplayınız: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. Çözümü açıklayınız.

3° Bir determinantta iki satırın (sütunun) karşılık gelen elemanları orantılıysa, determinantın değeri sıfırdır.

Birinci ve ikinci satırlarının karşılık gelen elemanları orantılı olan üçüncü dereceden bir determinant için şunu elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{11}a_{32}a_{13} + ka_{12}a_{13}a_{31} - ka_{13}a_{12}a_{31} - ka_{32}a_{13}a_{11} - ka_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

5 İki sütunun karşılık gelen elemanları orantılı olduğunda ikinci dereceden bir determinanтта 3° özelliğini kontrol ediniz!

Örnek 3 a) $\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$ dır, çünkü birinci ve ikinci satırın elemanları orantılıdır:

$$\frac{-5}{1} = \frac{-10}{2}.$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 6 - 6 = 0$, dır, çünkü birinci ve ikinci sütunun elemanları orantılıdır:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}.$$

6 Hesaplayınız: a) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. Çözümü açıklayınız!

4° Bir determinanтта bir satırdaki (sütundaki) tüm elemanlar sıfıra eşitse, determinanтın değeri sıfırdır.

İkinci satırın elemanları sıfıra eşit olan, ikinci dereceden determinanт $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ dır.

7 İkinci sütunun elemanları sıfıra eşit olan üçüncü dereceden bir determinanтта 4° özelliği kontrol ediniz.

Örnek 4 $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ determinanтlarının değeri sıfırdır, çünkü ikinci dereceden

determinanтта ikinci sütunun elemanları sıfırdır ve üçüncü dereceden determinanтта üçüncü satırın elemanları sıfırdır.

8 Hesaplayınız: a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Çözümü açıklayınız!

5° Bir determinantın, bir satırın (sütunun) tüm elemanları aynı k sayısı ile çarpılıp elde edilen çarpımlar başka bir satırın (sütunun) karşılık gelen elemanlarına eklendiğinde değeri değişmez.

İkinci satırın karşılık gelen elemanları aynı k sayısı ile çarpılıp birinci satırın karşılık gelen elemanlarına eklenen ikinci dereceden bir determinant için şunu elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{12})a_{22} - a_{12}(a_{12} + ka_{22}) = a_{11}a_{22} - ka_{12}a_{22} - a_{12}a_{12} - ka_{12}a_{22} \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

determinantın değeri değişmez.

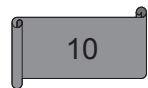


Üçüncü satırın karşılık gelen elemanları aynı k sayısı ile çarpılıp ikinci satırın karşılık gelen elemanlarına eklendiğinde üçüncü dereceden bir determinantta 5° özelliği kontrol ediniz.

Örnek 5

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$ determinantında ilk satıra ikinci satırın 3 ile çarpılmış elemanlarını eklersek: $\begin{vmatrix} 1+3 \cdot 3 & -1+2 \cdot 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$ ilk determinant ile aynı değere sahip bir determinant elde ederiz.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ determinantında ikinci sütuna üçüncü sütunun -5 ile çarpılmış elemanlarını eklersek $\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \cdot (-5) & 3 \\ 0 & -1+(-2) \cdot (-5) & -2 \\ 0 & 0+(-1) \cdot (-5) & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1$ ilk determinant ile aynı değere sahip bir determinant elde ederiz.



a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ determinantında birinci sütunun $\frac{1}{3}$ ile çarpılmış elemanlarını ikinci sütuna ekleyin ve ardından iki determinanti da hesaplayın. Ne fark ediyorsunuz?

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ determinantında üçüncü satıra birinci satırın 0,5 ile çarpılmış karşılık gelen eleman-

larını ekleyin ve ardından iki determinanti da hesaplayın. Ne fark ediyorsunuz?

6° Bir determinanti, verilen bir k sayısı ile çarparken, determinantın bir satırının (sütununun) elemanları aynı k sayısı ile çarpılır.

İkinci satırının elemanları aynı k sayısı ile çarpılmış üçüncü dereceden bir determinant için şunu elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{11}a_{32}a_{13} + ka_{12}a_{13}a_{31} - ka_{13}a_{12}a_{31} - ka_{32}a_{13}a_{11} - ka_{11}a_{12}a_{33} =$$

$$= k(a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{11} - a_{11}a_{12}a_{33}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

yani değeri ilk determinantın k sayısı ile çarpılmış değerine eşittir.

11 İkinci sütunun elemanları aynı k sayısı ile çarpıldığında ikinci dereceden bir determinantta 6° özelliği kontrol ediniz.

Örnek 6 $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 + 15) = 38$ ve $\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 30 = 38$ olduğundan

$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$ olduğu açıktır.

12 $-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ve $\begin{vmatrix} 1 & -3 \cdot 0 & 1 \\ 1 & -3 \cdot 5 & -2 \\ -3 & -3 \cdot 1 & -1 \end{vmatrix}$ determinantlarını hesaplayınız. Ne fark ediyorsunuz?

7° Bir determinantın bir satırının (sütununun) her elemanı iki toplananın toplamı ise, determinant iki determinantın toplamı olarak ifade edilebilir. Belirtilen satırdaki (sütundaki) ilk determinantın elemanları ilk toplananlar, ikinci determinantın elemanları ise ikinci toplananlardır, diğer satırlar (sütunlar) ise ilk determinant ile aynıdır.

Aslında,

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = (a+e)d - c(b+f) = (ad - bc) + (ed - fc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$$

13

İkinci sütunun elemanları iki toplanandan oluşan üçüncü derece bir determinantta özellik 7° yi kontrol ediniz.

Örnek 7

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 1+0 & 5 & -2 \\ -3-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \text{ dir. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \text{ olduğuna}$$

göre, açıktır ki $\begin{vmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 1+0 & 5 & -2 \\ -3-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

14

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 3 \\ -5+3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ determinantlarını hesaplayın. Ne fark ediyorsunuz?}$$

8° Üçüncü derece bir determinantın bir satırının (sütununun) elemanları, diğer iki satırın (sütunun) karşılık gelen elemanlarının lineer kombinasyonları ise, determinantın değeri sıfırdır.

15

3° ve 8° özelliklerini kullanarak şunu gösterin: $\begin{vmatrix} k_1 a_{12} + k_2 a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ k_1 a_{22} + k_2 a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ k_1 a_{32} + k_2 a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ şeklinde determinantlar } \mathbf{\text{üst üçgensel}}, \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ şeklindeki determinantlar}$$

ise **alt üçgensel** determinantlardır.

16

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \text{ ve } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} ! \text{ olduğunu gösteriniz!}$$

Daha sonra, üst üçgensel hale dönüştürülen determinantların özelliklerini kullanarak $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ determinantı hesaplayınız.

Cebirsel tamamlayıcılar için şu özellik doğrudur:

9° Üçüncü derece bir determinanta, herhangi bir satırın (sütunun) elemanlarının başka bir satırın (sütunun) elemanlarının karşılık gelen cebirsel tamamlayıcıları ile çarpımlarının toplamı sıfırdır.

17

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

üçüncü derece bir determinant için, üçüncü satırın elemanlarının ilk

satırın elemanlarının karşılık gelen cebirsel tamamlayıcıları ile çarpımlarının toplamı sıfır olup olmadığını kontrol ediniz, yani $a_{31}a_{11}^* + a_{32}a_{12}^* + a_{33}a_{13}^* = 0 !$

Çalışma Alıştırmaları

1. Şunları kontrol ediniz:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\text{ç) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ?$$

2. Determinantların özelliklerini kullanarak hesaplayınız:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -16 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a-b & ac-bc \\ c+1 & c+c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{ç) } \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}!$$

3. Determinantların özelliklerini kullanarak şunu kanıtlayın:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \sin(x+y) & \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \cos 2\beta & \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \\ \cos 2\gamma & \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}!$$

4. Bazı determinant özelliklerini kullanarak, aşağıdaki üçüncü dereceden determinantları üst üçgen veya alt üçgen forma dönüştürerek hesaplayınız:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{5. } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ üçüncü dereceden determinant için } a_{13}a_{11}^* + a_{23}a_{21}^* + a_{33}a_{31}^* = 0 \text{ olduğunu kanıtlayınız!}$$

3. Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözme ve çözüm kümesi hakkında tartışma

Daha önce, iki bilinmeyenli doğrusal bir denklem ve çözüm kümesi ile iki bilinmeyenli iki doğrusal denklem sistemini ve bunları çözme yöntemlerini tanıdık. İki bilinmeyenli iki doğrusal denklem sistemini çözmek için yöntemler olarak, yerine koyma yöntemini, zıt katsayılar yöntemini, grafik yöntemini ve Cramer kurallarını (ikinci dereceden determinantlar yardımıyla çözme) belirtmiştik. Burada, üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini tanıtacağız ve üçüncü dereceden determinantları bunu çözmek için kullanacağız. Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözmek için üçüncü de

receden determinantları kullanmak, aslında Cramer kurallarını kullanmaktır.

Tanım 1: Ortak çözümleri aranan üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem kümesine **üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi** denir.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Burada $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ dir. $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ sayılarına bilinmeyenlerin katsayıları, d_1, d_2, d_3 sayılarına ise sistemin serbest terimleri denir.

Bu sistem şekline üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminin **normal** veya **genel şekli** denir.

Esasen, üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemin bir bağlacından bahsediyoruz.

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminin çözümü aşağıdaki tanımda verilmiştir:

Tanım 2: **Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminin çözümü**, sistemdeki üç denklemin de doğru ifadelerle dönüştüğü her bir sıralı mümkün üçlü gerçekteki sayı (x_0, y_0, z_0) dır. Bu

üçlü için $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ sistemin her üç denklemi gerçekteki sayı ifadesine dönüşür, yani

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3 \end{cases}$$

Çözümle ilgili olarak şunlar doğrudur:

Sistem, **tek bir çözüme** sahip olabilir (sistem belirlilidir), **çözümü olmayabilir** (sistem çelişkidir) veya **sonsuz sayıda çözümü** olabilir (sistem belirsizdir).

Çoğu zaman sistemler genel biçimde verilmez, ancak izin verilen matematiksel dönüşümlerle dönüştürülmeleri gerekir.

Bu nedenle şu bilgiler önemlidir:

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemler iki sistemin, aynı tanım alanında olmak üzere bir sistemin her çözümü diğer sistemin de çözümü ise, o halde sistemler **denktirler**.

Sistemdeki herhangi bir denklem, ona denk bir denklemle değiştirildiğinde, verilen sisteme denk bir sistem elde edilir.

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi, genel biçimde değilse, verilene denk sistemler kullanılarak normal (genel) biçime indirgenebilir.

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi normal biçimde verilmiş olsun:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

x , y ve z bilinmeyenlerinin önündeki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ katsayıları ve d_1, d_2, d_3 serbest terimleri aşağıdaki determinantları oluşturur

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

x, y, z bilinmeyenlerinin önündeki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ katsayılarından oluşan Δ determinantına **sistemin determinanı** denir. Kalan üç $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarına ise sırasıyla x, y, z **bilinmeyenlerinin determinantları** denir.

Şu ifade doğrudur:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantları ile çözülebilir. **Sistemin tek çözümü** ancak **Cramer kuralları** olarak adlandırılan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad \Delta \neq 0 \quad \text{durumunda elde edilir.}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \text{ üçlüsü } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ sistemin bir çözümü olsun, yani } \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3 \end{cases} \text{ doğru}$$

ifadeler olsun. İlk denklemi a_1 elemanının a_1^* cebirsel tamamlayıcısı ile çarpıyoruz. İkinci denklemi a_2 elemanının a_2^* cebirsel tamamlayıcısı ile çarpıyoruz. Üçüncü denklemi a_3 elemanının a_3^* cebirsel tamamlayıcısı ile çarpıyoruz. Ardından onları toplamakla şunu elde ediyoruz:

$$a_1^*(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + a_2^*(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) + a_3^*(a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0) = a_1^*d_1 + a_2^*d_2 + a_3^*d_3$$

Üçüncü dereceden determinantların özelliklerinden 10. Özelliği ve ilk öğretim birimindeki Teorem 1'i kullanarak şunu elde ederiz:

$$x_0 \underbrace{(a_1^*a_1 + a_2^*a_2 + a_3^*a_3)}_{\Delta} + y_0 \underbrace{(a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + a_3^*b_3)}_0 + z_0 \underbrace{(a_1^*c_1 + a_2^*c_2 + a_3^*c_3)}_0 = \underbrace{a_1^*d_1 + a_2^*d_2 + a_3^*d_3}_{\Delta_x}$$

yani, $x_0 \cdot \Delta = \Delta_x$.

Aynı şekilde, denklemleri ikinci sütundaki elemanların cebirsel tamamlayıcıları ile çarparak $y_0 \cdot \Delta = \Delta_y$ elde edilir ve denklemleri üçüncü sütundaki elemanların cebirsel tamamlayıcıları ile çarparak $z_0 \cdot \Delta = \Delta_z$ elde edilir. Sonunda, üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminin bir çözümü

olan (x_0, y_0, z_0) sayı üçlüsünün $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ sisteminin de bir çözümü olduğu elde edilir. Buradan şu

formüleleri elde ediyoruz: $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

(x_0, y_0, z_0) sıralı üçlünün herhangi bir üçlü olduğundan, $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ sisteminin her

çözümü $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ sisteminin de çözümüdür, yani $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$ bir tek çözümdür.

Örnek 1

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi için:

$$2x + y - z = 0$$

$$x - 2z = -3$$

$$5y + z = 2$$

Determinantlar şunlardır:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

Cramer kurallarına gereğince: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$ elde edilir. Sistemin çözümü (1, 0, 2) sıralı sayı üçlüsüdür.

1

Cramer kuralları ile üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 8 \\ y - 2z = -5 \end{cases}$$

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ sistemi ile denk oldu-

ğunu gördük. Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminde $\Delta = 0$ olsun

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi için $\Delta = 0$ olsun. Bu durumda iki alt durum mümkündür:

a) $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarından en az biri sıfırdan farklıysa, örneğin $\Delta_x \neq 0$ ise, $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$

sistemde $x \cdot 0 = \Delta_x$ biçimini alır, bu ise bir çelişkidir. Buradan üç bilinmeyenli üç doğrusal

denklem sistemi çelişki olduğu sonucu elde edilir.

b) Eğer $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ise, üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi sonsuz sayıda çözüme sahip olabilir veya çelişki olabilir.

Gerçekten de, bir denklemin tüm katsayıları ve serbest terimi sıfır ise, o denklem $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ biçimini alır. Bu, her sıralı sayı üçlüsünün bu denklemin bir çözümü olacağı anlamına gelir. O zaman, sonsuz sayıda çözüme sahip olabilen veya çelişkili bir sistem olabilen, üç bilinmeyenli iki doğrusal denklemden oluşan bir sistem elde ederiz. En az bir denklemdeki katsayılardan en az biri sıfırdan farklıysa da aynı durum elde edilir.

2 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ olduğu $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ sistemde $a_1 \neq 0$ olduğunu varsayarak, sistemin sonsuz sayıda çözüme sahip olduğunu veya çelişkili olduğunu kanıtlayınız!

Şu ifade doğrudur:

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi, $\Delta = 0$ ise ya sonsuz sayıda çözümü vardır (belirsiz sistemdir) ya da çözümü yoktur (çelişkili sistemdir).

Şimdiye kadar söylenenlere göre, aşağıdaki Cramer teoremini verebiliriz:

Teorem 1 (Cramer kuralı): a) Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminin determinantı sıfırdan farklıysa, yani $\Delta \neq 0$ ise, bu sistemin bir tek çözümü vardır (sistem bellidir) $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$
b) Sistemin determinantı $\Delta = 0$ ise ve $\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0 \vee \Delta_z \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur (sistem çelişkidir).
c) Sistemin determinantı $\Delta = 0$ ise ve $\Delta_x = 0 \wedge \Delta_y = 0 \wedge \Delta_z = 0$ ise sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır veya çözümü yoktur (sistem belirsizdir).

Örnek 2

a) Şu üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi verilmiştir:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ y = -3 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

Sistemin determinanı $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ dır. Ancak $\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$ olduğuna göre,

sistem çelişki olduğu anlamına gelir. Gerçekten de, sistemin birinci ve üçüncü denkleminde $y = -3$ yerine konulduğunda, çelişkili bir sistem olan $\begin{cases} x - z = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$ sistem elde edilir.

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ y = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

b) Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi verilmiştir:

Sistemin determinanı $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ dır. Halbuki $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ determinantları da sıfırdır.

Bu, sistemin sonsuz sayıda çözüme sahip olduğu veya çelişkili olduğu anlamına gelir. Sistemdeki birinci ve üçüncü denklemlerde $y = -1$ alırsak, $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ sistemi elde edilir ve bir denkleminin gereksiz olduğu yani $z = x$ elde edilir. $x = t$ için $z = t$ elde ederiz. Buna göre, bu sistemin çözümünün $(t, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$ sıralı çifti olarak alınabileceği anlamına gelir, yani sistemin çözüm kümesi $M = \{(t, -1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ dir.

c) Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi verilmiş olsun:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ 6x + 2y - 6z = 2 \\ 9x + 3y - 9z = 2 \end{cases}$$

Sistemin determinanı: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & -6 \\ 9 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$ dır. Ancak $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ determinantları da sıfırdır.

Bu, sistemin sonsuz sayıda çözüme sahip olduğu veya çelişkili olduğu anlamına gelir. İkinci denklemi

2'ye bölersek, açıkça çelişkili olan üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan: $\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ 3x + y - 3z = 1 \\ 3(3x + y - 3z) = 2 \end{cases}$ sistemi elde ederiz.

Üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan aşağıdaki sistemleri çözünüz:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - 2y + 2z = 10; \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -3x + 3y - 3z = 2. \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Serbest terimleri sıfır olan $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemine, **üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan homojen sistem** denir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Homojen sistem aşağıdaki determinantları oluşturur:

Üçüncü dereceden determinantların özelliklerinden $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ olduğu açıktır. Cramer teoremine göre, $\Delta \neq 0$ ise sistemin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm sıfır (trivial) çözüm $(0, 0, 0)$ dır. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümleri de vardır ve bu çözümler için aşağıdaki Teorem 2 doğrudur:

Teorem 2: Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan homojen bir sistemin sıfırdan farklı çözümleri, ancak ve ancak sistemin determinanı $\Delta = 0$ ise vardır.

İspat: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan homojen sistemin sı-

fırdan farklı bir (x_0, y_0, z_0) çözümü olsun. $\Delta \neq 0$ için, Cramer kuralları üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan homojen bir sistem için yalnızca sıfır çözümü $(0, 0, 0)$ verir ve sıfırdan farklı bir çözüm olduğu varsayımına çelişki oluşturur. Bu nedenle, $\Delta = 0$.

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan homojen sistemin $\Delta = 0$ olsun.

Cramer teoremi c) bu sistemin sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösterir ya da çelişkilidir. Bu sistemin sıfır çözümüne sahip olduğu göz önüne alındığında, çelişkili bir sistem olamaz. Sistemin sonsuz sayıda çözümü olduğu elde edilir.

Örnek 3
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ y = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$
 üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemin homojen sistemin determinantı $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ dır.

Sistemin birinci ve üçüncü denkleminde $y = 0$ alırsak, $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ elde edilir. Burada denklemlerden biri gereksizdir. $z = x$ alındığında $x = t$ için $z = t$ elde ederiz. Buna göre, bu sistemin genel çözümünün $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$ sıralı çifti olarak alınabileceği anlamına gelir, yani sistemin çözüm kümesi $M = \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ dir.

4 Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan aşağıdaki homojen sistemlerin tüm çözümlerini bulunuz:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Çözüm kümesiniyle ilgili inceleme

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sisteminin çözüm kümesinin incelenmesini, determinantlar ve Cramer teoremi kullanılarak, örnek ve alıştırmalar aracılığıyla, birinci yılda iki bilinmeyenli iki doğrusal denklem sisteminin çözüm kümesinin incelenmesinde olduğu gibi yapılacaktır.

Örnek 4 Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi için:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

a parametresine göre çözümünü tartışacağız. Sistemin determinanı:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2 - 3a = (a-1)^2(a+2) \text{ dir. Diğer üç determinant ise:}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-3)(a-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1).$$

Sistem, $\Delta \neq 0$ yani $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ olduğunda tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm: $x = \frac{a-3}{(a-1)(a+2)}$

$y = \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)} = z$, yani çözümü sıralı üçlüsüdür.

$$\left(\frac{a-3}{(a-1)(a+2)}, \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)}, \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)} \right).$$

Sistem, $\Delta = 0$ yani $a = 1$ v $a = -2$ olduğunda ya çözüme yoktur ya da sonsuz sayıda çözüme vardır.

$a = 1$ için, determinantları $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ dır. Sistem $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ şeklindedir ve denklemlerden

biri gereksizdir. Yani: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ sistemini elde ederiz ve ilk denklemden $z = 1 - x - y$ elde ederiz.

Bu denklemi ikinci denklemde yerine koyarak $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ elde ederiz, bu da çelişkidir. Yani sistem çelişkili bir sistemdir, yani çözümü yoktur.

$a = -2$ için $\Delta x = 15 \neq 0$ determinanı, bu durumda sistemin çözümü yoktur.

5 a parametresine bağlı olarak, şu sistemin çözümünü inceleyiniz:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + 4y + z = 1 \\ 6x + (a+2)y + 2z = 1 \end{cases}.$$

Bazı sistemler, uygun yardımcı bilinmeyenler tanıtılarak üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemine dönüştürülebilir ve bu şekilde çözülebilir.

Örnek 5

Şu sistemde:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-z} - \frac{3}{y+2x} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x-z} + \frac{2}{y+2x} - \frac{3}{z} = -6 \\ \frac{4}{x-z} - \frac{5}{y+2x} - \frac{2}{z} = 12 \end{cases}$$

$u = \frac{1}{x-z}, v = \frac{1}{y+2x}, w = \frac{1}{z}$ yardımcı bilinmeyenleri tanıtılarak üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem-

den oluşan $\begin{cases} 2u - 3v + w = 9 \\ u + 2v - 3w = -6 \\ 4u - 5v - 2w = 12 \end{cases}$ sistem elde edilir. Cramer kuralları ile bu sistemi çözerek $(1, -2, 1)$

çözümünü elde ederiz. Yardımcı bilinmeyenlere geri dönersek, üç bilinmeyenli üç doğrusal denk-

lemden oluşan $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$ yeni sistem elde ederiz.

Bu sistemi Cramer kuralları ile çözerek $(2, -\frac{5}{2}, 1)$ çözümünü elde ederiz, bu da verilen sistemin çözümüdür.

5

Verilen sistemi çözünüz:

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y-z} - \frac{6}{y+x} - \frac{1}{x-z} = 1 \\ \frac{6}{x+y-z} - \frac{4}{y+x} + \frac{1}{x-z} = 3 \\ \frac{15}{x+y-z} + \frac{2}{y+x} + \frac{3}{x-z} = 5 \end{cases}$$

Çalışma alıştırmaları

1. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} ; & \text{b)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = -1 \end{cases} ; & \text{c)} \quad & \begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ -5x + 5y - 5z = 5 \end{cases} ; & \text{ç)} \quad & \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan aşağıdaki homojen sistemleri çözün:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0. \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

3. m parametresinin değerine bağlı olarak, aşağıdaki sistemin çözümünü tartışın:

$$a) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m; \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -4x + 5y - 2z = 1 \\ 2x + y - mz = 1 - 2m \end{cases}$$

4. Yerine koyma yaparak aşağıdaki sistemleri çözün:

$$a) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -6; \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -\frac{2}{x-2y} + \frac{3}{x+y+z} - \frac{4}{y-z+1} = 1 \\ \frac{1}{y-z+1} + \frac{3}{x-2y} - \frac{1}{x+y+z} = 2. \\ \frac{1}{x-2y} - \frac{4}{x+y+z} + \frac{5}{y-z+1} = -3 \end{cases}$$

4. Matris Kavramı

Matris kavramını tanımlayalım.

Tanım 1: $m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayılar olsun ve $m \cdot n$ gerçekte sayı o şekilde verilmiş olsun ki, $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ m satır ve n sütunlara yerleştirilmiş olsun

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Bu dikdörtgen şemaya $m \times n$ biçiminden **matris** veya $m \times n$ – **matris** denir, a_{ij} gerçekte sayılarına matrisin elemanları denir.

Matrisleri genellikle büyük basın Latin harfleriyle gösteririz ve Tanım 1’de verilen gösterim yerine, matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ olarak da yazabiliriz.

Bir matris, elemanlarının değerleri ve bu matris içindeki elemanlarının konumları biliniyorsa tamamen bellidir.

Bir matristeki a_{ij} elemanının konumundan bahsettiğimizde, i -inci satırda ve j -inci sütunda, yani i -inci satır ve j -inci sütunun kesişiminde olduğunu söyleriz.

Örnek 1 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi 2×3 boyutlu 2 satır ve 3 sütundan oluşur, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi ise biçimindedir ve 2×4 boyutlu olarak 2 satır ve 4 sütundan oluşmuştur.

1

Aşağıdaki matrislerin boyutunu belirtiniz:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Tanım 2: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ iki matris, aynı $m \times n$ boyutlu ve karşılık gelen elemanları eşitse, yani tüm $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise matrislere eşittirler denir.

Örnek 2

A ve B matrisleri aynı boyutlu ve aynı elemanlardan oluştuklarına rağmen birbiri

eşit değildir çünkü elemanların konumları aynı değildir: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$ elemanlar

karşılıklı olarak aynı konumda olmalıdır. A matrisindeki 1 sayısı 1. satır ve 1. sütun konumunda bulunurken, B matrisinde 1. satır ve 2. sütun konumunda bulunur.

2

İki matrisin eşit olması için x ve y bilinmeyenlerini belirtiniz:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y+1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tanım 3: Tüm elemanları sıfıra eşit olan $m \times n$ biçimindeki matrise $m \times n$ boyutlu **sıfır** matris denir ve $O_{m,n}$ (veya $O_{n \times m}$) olarak gösterilir.

Tanım 4: $m = 1$ olan (yani $1 \times n$ biçiminde olan ve sadece bir satırı olan)

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]$$

matrisine, **satır – matrisi** denir, sadece bir sütunu olan ($m \times 1$ biçiminde olan)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

matrise ise **sütun – matrisi** denir.

Tanım 5: A , $m \times n$ matrisi olsun. A 'nın satır ve sütunlarının yerlerini değiştirerek elde edilen matrise **transpoze matris** denir ve A^T ile gösterilir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ise $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ dir.

Örnek 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ matrisinin transpozu } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ matrisidir.}$$

Transpoz matrisi için teorem 1 doğrudur:

Teorem 1: Herhangi bir A matrisi için $(A^T)^T = A$ dır.

İspat: Özellik, Tanım 5'ten gerekir. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ise $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ dir. $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ ise $A^T = [a_{ij}]_{n \times m} = A$ dır.

3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için $(A^T)^T = A$ eşitliğini kontrol ediniz.

Tanım 6: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan, yani $m = n$ olan matrise (n – ci derece) **kare matris** denir. n –ci derece bir kare matris olan $A = [a_{ij}]$ matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanları A 'nın asal köşegenini oluşturur. $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ elemanları ise yedek köşegeni oluşturuyorlar.

Tanım 7: $e_{ij} = \begin{cases} 1: \text{eğer } i = j \\ 0: \text{eğer } i \neq j \end{cases}$ koşulunu sağlayan n –ci dereceden $E_n = [e_{ij}]$ matrisine n –ci dereceden **birim matris** denir.

Örnek 4

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 3. Derece bir kare matristir.

Asal köşegenin elemanları 2, -2, 0'dır ve yedek köşegenin elemanları 4, -2, -4'tür.

b) İkinci dereceden birim matris şu şekildedir:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4

a) 4. derece bir kare matris örneği veriniz ve asal ve yedek köşegenlerin elemanlarını yazınız.

b) Üçüncü dereceden bir birim matrisi yazın!

Bazı kare matrisler:

1. Asal köşegenin «altındaki» tüm elemanları sıfıra eşit olan bir kare matrise **üst üçgen matris** denir, veya daha doğrusu, tüm $i > j$ için $a_{ij} = 0$ olan bir matristir, yani

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Ana köşegenin “üstündeki” tüm elemanları sıfıra eşit olan bir kare matrise **alt üçgen matris** denir, yani tüm $i < j$ için $a_{ij} = 0$ olan bir matristir, yani

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Bu iki matris türü, ortak bir adla **üçgen matrisler** olarak adlandırılır.

3. Hem alt hem de üst üçgen olan bir matrise **köşegen matris** denir, yani:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Köşegen matrisin köşegenindeki tüm elemanlar birbirine eşitse, böyle bir matrise **skaler mat-**

ris denir, yani: $a_{ij} = \begin{cases} d: & \text{ako } i = j \\ 0: & \text{ako } i \neq j \end{cases}$, veya

5. $A^T = A$ ise, A'ya **simetrik matris** denir, $A^T = -A$ ise, A matrisine **ters simetrik (antisimetrik)**

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}$$

matris denir.

6. $A^T A = A A^T = E$ ise, A matrisine **ortogonal matris** denir.

Örnek 5

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi üst üçgen matristir, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi

alt üçgen matristir, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi ise köşegen matristir.

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ matrisi skaler matristir.}$$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi simetrik bir matristir, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ise ters simetrik matristir.



4 a) Üçüncü dereceden bir üst üçgen matris ve bir alt üçgen matris örneği veriniz!

b) Birim matris ve sıfır kare matrisler ne tür matrislerdir?

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi simetrik mi yoksa ters simetrik midir?

Çalışma alıştırmaları

1. $A = \begin{bmatrix} x-y & 2y \\ 1 & -z-u \\ x-z & z \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} z & u \\ z+u & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. x, y ve z nin hangi değerleri için matrisler eşittir?

2. $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için A^T 'yi belirtiniz!

3. $A = \begin{bmatrix} a & c \\ a-c & 3 \end{bmatrix}$ matrisinde $A = A^T$ olacak şekilde a ve c var mıdır?

4. Aşağıdaki kare matrisler ne tür matrislerdir:

a) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ç) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Matrislerle İşlemleri

Matrislerde belirli işlemler tanımlanabilir. Yapılan işlemler şunlardır: bir matrisi bir sayıyla çarpma, matrisleri toplama ve matrisleri çarpma.

Bir matrisi bir sayıyla çarpma

Tanım 1: $a \in \mathbb{R}$ ve $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bir **a gerçekte sayısının A matrisi ile çarpımı**, A matrisi ile aynı boyutta (yani $m \times n$ boyutlu) bir matristir, aA ile gösterilir ve elemanları $a \in \mathbb{R}$ sayısının A matrisinin karşılık gelen elemanları ile çarpımıdır, yani:

$$aA = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Örnek 1

-2 gerçekte sayısının $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ikinci derece kare matrisi ile çarpımı, A matrisi gibi

ikinci derece kare matrisi olan matristir, yani $-2 \cdot A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 & -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ dir.



Hesaplayınız: a) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 6 & 2 \end{bmatrix}$; b) $6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Bu işlem için şu teorem 1 doğrudur:

Teorem 1: A ve O matrisleri $m \times n$ sırasından ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler doğrudur:

i) $0 \cdot A = O$, ii) $a \cdot O = O$, iii) $1 \cdot A = A$, iv) $(-1) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

İspat: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $O = [0]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ herhangi bir $m \times n$ matris olsun.

(i) 0 gerçekte sayısının A matrisi ile çarpımı

$$0 \cdot A = 0 \cdot [a_{ij}] = [0 \cdot a_{ij}] = [0] = O$$

O , sıfır matristir.

$$a \cdot O_{m,n} = a \cdot [0] = [a \cdot 0] = [0] = O_{m,n}$$

(ii) Herhangi bir a gerçekte sayısının sıfır matrisi O ile çarpımı

O , sıfır matristir.

(iii) 1 gerçek sayısının A matrisi ile çarpımı A matrisidir:

$$1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

(iv) -1 gerçek sayısının A matrisi ile çarpımı

$$-1 \cdot A = -1 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [-1 \cdot a_{ij}] = [-a_{ij}]_{m \times n} \text{ dir.} \quad \blacksquare$$

Tanım 2: $(-1) \cdot A$ matrisine A matrisinin toplamaya göre tersi denir ve $-A$ ile gösterilir.

Örnek 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisinin toplamaya göre tersi } -A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \text{ matrisidir.}$$

2

Verilen matrislerin toplamaya göre tersini yazınız:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrislerin Toplamı

Matrislerde toplama işlemi aşağıdaki tanım 3'te tanımlanmıştır:

Tanım 3: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ olsun, burada $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. A ve B matrislerinin toplamı, elemanları A ve B'nin karşılık gelen elemanlarının toplamı, yani aynı konumda bulunan elemanların toplamı olan $m \times n$ matrisidir:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Tanım 3'e göre, sadece aynı boyuttaki matrislerin toplanabileceği sonucuna varabiliriz. İki matrisin çıkarılması, birinci matrisin (ilk terim) ikinci matrisin (ikinci terim) toplamaya göre tersi ile toplanmasıyla gerçekleştirilir, yani $A - B = A + (-B)$ dir.

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3 & 2+(-3) \\ -3+3 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

Örnek 3

2 satır ve 2 sütunlu olan 2. dereceden $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ kare matrislerin

toplamı

matrisidir, yani topladığımız A ve B matrisleri gibi aynı 2. dereceden kare matristir.

3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A + B$ ve $B + A$ 'yı hesaplayınız.

Ne fark ediyorsunuz?

Teorem 2: A, B, C ve O matrisleri $m \times n$ boyutlu ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler doğrudur:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| 1) $A + B = B + A$; | 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$; | 3) $A + O = A$; |
| 4) $A + (-A) = O$; | 5) $(a + b)A = aA + bA$; | 6) $(ab)A = a(bA)$; |
| 7) $a(A + B) = aA + aB$; | 8) $(aA)^T = aA^T$; | 9) $(A + B)^T = A^T + B^T$. |

İspat: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, $m \times n$ boyutlu matrisler ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun.

1) Gerçek sayıların toplamı için değişme özelliği uygulanmasıyla, matrislerin toplamı için değişme özelliği doğru olduğu gösterilir,

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = B + A.$$

2) Gerçek sayıların toplamı için birleşme özelliğinin kullanılmasıyla, matrislerin toplamı için birleşme özelliği doğru olduğu gösterilir,

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} + ([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}) = A + (B + C). \end{aligned}$$

3) A matrisi ile sıfır matris O 'nun toplamı bize tekrar A matrisini verir, yani:

$$A + O = [a_{ij}]_{m \times n} + [0]_{m \times n} = [a_{ij} + 0]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A.$$

4) A matrisi ile toplamaya göre ters olan matrisinin toplamı sıfır matris tir, yani:

$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = O.$$

5) Herhangi a, b gerçek sayıları ve herhangi A matrisi için, gerçek sayılarda toplama üzerinde çarpma işleminin dağılma özelliğini uygulanarak şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} (a + b)A &= (a + b) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [(a + b) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij} + b \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [b \cdot a_{ij}]_{m \times n} = \\ &= a \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + b \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = a \cdot A + b \cdot A. \end{aligned}$$

6) Herhangi a, b gerçek sayıları ve herhangi A matrisi için, gerçek sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliğini uygulanarak şunu elde ediyoruz:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot A &= (a \cdot b) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [(a \cdot b) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot (b \cdot a_{ij})]_{m \times n} = a \cdot [b \cdot a_{ij}]_{m \times n} \\ &= a \cdot (b \cdot [a_{ij}]_{m \times n}) = a \cdot (b \cdot A) \end{aligned}$$

7) Herhangi a gerçek sayısı ve herhangi A ve B matrisleri için, gerçek sayılarda toplama üzerinde çarpma işleminin dağılma özelliği uygulanarak şunu elde ediyoruz:

$$a \cdot (A + B) = a \cdot ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) = a \cdot [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [a \cdot b_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= a \cdot \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} + a \cdot \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = a \cdot A + a \cdot B.$$

8) Herhangi bir a gerçekte sayı ve herhangi A matrisi için, $aA = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ ifadesinden şunu elde ederiz: $(aA)^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$, ancak $aA^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$ de doğrudur. Buradan $(aA)^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m} = aA^T$ sonucu elde edilir..

9) Herhangi A ve B matrisleri için, matrislerin toplanması ve transpoze matris tanımlarına göre, şunlar doğrudur: $A^T = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$, $B^T = \begin{bmatrix} b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} + \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}, A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Buna göre, $(A + B)^T = A^T + B^T$ sonucu elde edilir.

Örnek 4

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ matrisler için, $3A - 2B$ matrisi için şunu elde ediyoruz:

$$3A - 2B = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ matrisleri ve reel sayılar 2 ve -5 için, teorem 2'deki özellikleri kontrol ediniz.

Matrislerin Çarpımı

İki matrisin çarpımı için aşağıdaki tanım 4'ü veriyoruz:

Tanım 4: $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ ve $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{n \times k}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, k$ olsun. A ve B matrislerinin çarpımı, $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{m \times k}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, k$ ve

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$$

olmak üzere $A \cdot B = C$ matrisi olarak anlaşılacaktır.

Tanımdan, matrislerin çarpımı yapılması için, ilk matrisin (ilk çarpanın) sütun sayısının ikinci matrisin (ikinci çarpanın) satır sayısına eşit olması gerekir ve her c_{ij} elemanının (yani konumu ij olan elemanın) şu şekilde olduğu matrislerin çarpılabileceği açıktır: i -inci satır ve j -inci sütunun kesişimi (yani

matris-çarpımının ij -inci elemanı), birinci matrisin i -inci satırındaki elemanların ikinci matrisin j -inci sütunundaki karşılık gelen elemanlarla çarpılması ve ardından çarpımların toplanmasıyla elde edilir.

Örnek 5

2satırlı ve 2 sütunlu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ kare matrisi ve 2×3 boyutlu 2 satırlı ve 3

sütunlu $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ matrisinin çarpma işlemi, aşağıda verilen kurala göre yapılır:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -9 & 13 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = C$$

- 1. satır ile 1. sütun: $1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$, C matrisindeki a_{11} elemanı;
- 1. satır ile 2. sütun: $1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 2$, C matrisindeki a_{12} elemanı;
- 1. satır ile 3. sütun: $1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$, C matrisindeki a_{13} elemanı;
- 2. satır ile 1. sütun: $2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 = -9$, C matrisindeki a_{21} elemanı;
- 2. satır ile 2. sütun: $2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) = 13$, C matrisindeki a_{22} elemanı;
- 2. satır ile 3. sütun: $2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -2$, C matrisindeki a_{23} elemanı.

5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $C = A \cdot B$ matrisini belirtiniz.

Matrislerin çarpımı için aşağıdaki teorem 3'ü kanıtsız olarak vereceğiz:

Teorem 3: $a \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler doğrudur:

- 1) $m \times n$ matris A ve $n \times k$ matris B için, $a(AB) = (aa)B = A(ab)$,
- 2) $m \times n$ matris A , $n \times k$ matris B ve $k \times l$ matris C için, $A(Bc) = (Ab)C$, (birleşme özelliği);
- 3) $m \times n$ matris A , $n \times k$ matris B ve C için, $A(B + c) = AB + AC$, (sol dağılma özelliği);
 $m \times n$ matris A ve B , $n \times k$ matris C için, $(A + b)C = AC + BC$, (sağ dağılma özelliği);
- 4) $m \times n$ matris A , $n \times k$ matris B için, $(AB)^T = B^T A^T$.

İspatı, matris çarpımının tanımının ve gerçekte sayı işlemleri özelliklerinin kullanılmasıyla kolay gösterilebilir.

6

AB ve BA 'yı hesaplayınız: a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. $AB = BA$ mıdır?

b)

Genel olarak, matrislerin çarpımı için değişme özelliği geçerli değildir, yani $AB \neq BA$ 'dır.

7

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ve 6 gerçekte sayı için, teorem

3'teki özellikleri kontrol ediniz.

Matrisin Kuvveti

Matrislerin çarpımı işlemini kullanarak, bir matrisin kuvvetini tanımlayacağız.

Bir kare matris A için, $A \cdot A$ çarpımını A^2 ile, yani $A \cdot A = A^2$ ile kısaca gösteriyoruz.

$A \cdot A \cdot A = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$ çarpımını A^3 ile, yani $A \cdot A \cdot A = A^3$ vb. kısaca yazıyoruz.

Tanım 5: Her A kare matris için, A nın **kuvveti** diye adlandırılan A^n tanımlanabilir (burada n negatif olmayan bir tam sayıdır) $A^0 = E$, $A^1 = A$ ve tümevarım ile $A^n = A^{n-1} \cdot A$, $n > 1$ için tanımlanabilir.

$A^0 = E$ kuvvetinde E , A matrisi ile aynı dereceden birim matristir.

8

Verilen $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için, A^2 ve A^3 , ü hesaplayınız.

Tanım 6: $A^2 = E$ ise, A 'ya **involütif matris** denir.

Tanım 7: $A^2 = A$ ise, A 'ya **idempotent matris** denir.

9

A ve B matrislerinin involütif veya idempotent veya ikisi de olup olmadığını kontrol ediniz.

Çalışma alıştırmaları

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için, şunları hesaplayınız:

a) $5A - 3B + 4C$; b) $(-2A)^T + (3B - 4C)^T$; c) $5C^T - 3A^T + 4B^T$.

2. 1. alıştırmada verilen matrisler için aşağıdakilerin doğru olup olmadığını kontrol ediniz:

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$; b) $A + C = C + A$!

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için şunları hesaplayınız:

niz:

a) $5A - 3BC$; b) $A^T \cdot (3B - 4C)$; c) $(AC)^T - (3BC)^T$.

4. 3. alıştırmada verilen matrisler için aşağıdakilerin doğru olup olmadığını kontrol ediniz:

a) $BC = CB$; b) $A \cdot (C + B) = AC + AB$; c) $(AC)B = A(CB)$!

5. Verilen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinden hangileri çarpılabilir? Mevcut çarpımları hesaplayın! Ardından B^2 ve D^3 ü bulunuz!

6. Şu matrislerden hangilerinin involütif ve hangilerinin idempotent olduğunu kontrol ediniz:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Tersinir ve Ters Matris

Bu bölümde kare matrisleri inceleyeceğiz.

İlk olarak bir kare matrisin determinantı kavramını tanıtacağız.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ kare matrisi için determinantın tanımını şudur:

$$\det A = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

İki kare matris A ve B'nin determinantları için şunu söyleyebiliriz: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Singüler (tekil) olmayan (ters çevrilebilir, invertibl) matris kavramını tanıtmadan önce aşağıdaki alıştırmayı çözmeye çalışınız.

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için, AB ve BA'yı hesaplayınız.

Tanım 1: A kare matrisi için, A ile aynı boyutlu bir B kare matrisi varsa, öyle ki $AB = BA = E$ ise, A'ya **tersinir (singüler (tekil) olmayan, invertibl) matris** denir.

Aşağıdaki Teorem 1 doğrudur:

Teorem 1: Tersinil (tekil olmayan, invertibl) bir A matrisi için, ters matrisi A^{-1} bir tek olarak tanımlıdır.

İspat: A singüler olmayan (tersinil) bir matris olsun. O zaman onun bir tek ters matrisi vardır. A matrisi için iki ters matris B ve C olduğunu varsayalım. $AB = BA = E$ ve $AC = CA = E$ sonucu çıkar. Yani $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$.

Matris singüler olmayan değilse, onu **singüler matris** olarak adlandırıyoruz.

Örnek 1

a) Sıfır matrisi singüler matristir.

b) Birim matris singüler olmayandır (kendinin tersidir), yani $EE = E$ olduğundan $E = E^{-1}$ 'dir. Kontrol

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z & y+2u \\ x+3z & y+3u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

ediniz!

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için, $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ ters matrisini

eşitliği ile bulacağız.

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2u=0 \\ x+3z=0 \\ y+3u=1 \end{cases} \text{ oradan da } \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=-1 \\ u=1 \end{cases} \text{ elde edilir.}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \quad A^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$$

demek ki, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu elde ederiz.

İkinci dereceden bir matrisin ters matrisi. İkinci dereceden bir matrisin ters matrisini Örnek 1 c)'de olduğu gibi buluruz. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için, $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ ters matrisini $AA^{-1} = E$ eşitliği ile bulacağız.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bu=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+du=1 \end{cases} \text{ elde edilir, oradan da } \begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc} \\ y = -\frac{b}{ad-bc} \\ z = -\frac{c}{ad-bc} \\ u = \frac{a}{ad-bc} \end{cases} \text{ elde edilir. Diğer taraftan } A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0 \text{ dır.}$$

Buna göre $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin A^{-1} ters matrisi şu şekilde olacaktır:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

A^{-1} 'in var olması için $\det A \neq 0$ 'ın gerekli ve yeterli olduğu sonucuna varabiliriz.

Örnek 2 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı $\det B = 2 \neq 0$ 'dır. Bu ise, B matrisinin ters matrisinin var olduğu anlamına gelir. O halde, ters matris için:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

elde edilir.

2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin ters matrisini bulunuz.

Üçüncü dereceden bir matrisin ters matrisi. Elemanları A matrisinin karşılıklı kofaktörleri-

ne eşit olan matrisi oluşturalım. Yani, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ üç boyutlu kare matrisi olsun ve

$A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}$ olsun. Bu şekilde A matrisinin a_{ij} elemanlarına karşılıklı kofaktörlerden

$a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ elde edilen matrise A matrisinin **kofaktör matrisi** denir. Transpozesine, **ek matrisi** diyeceğiz ve $adjA = (A^*)^T$ ile göstereceğiz.

Devamında, bir kare matrisin tekil olmaması için bir kriter ve ters matrisi hesaplamak için bir formül verecek iki teorem ifade edilecektir.

Teorem 1: Her kare matris A için, $A \cdot adjA = adjA \cdot A = (\det A) \cdot E$ doğrudur.

Teorem 2: A kare matrisi, ancak ve ancak $\det A \neq 0$ ise tekil olmayan bir matristir. Bu durumda, ters matrisi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$$

ile buluruz.

Yani, bir A kare matrisi verildiğinde, A^{-1} 'i hesaplamak için önce $\det A$ 'yı hesaplarız ve sıfırdan farklıysa, bir tersi vardır demektir ve elemanları ek matrisinin uygun elemanlarına eşit olan, A determinant değerine bölünmüş matristir.

3

$A \cdot adjA = adjA \cdot A = (\det A) \cdot E$! eşitliğini kanıtlayınız!

Örnek 3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için $\det A = 2 \neq 0$ dır. Yani, ters matrisi vardır. Karşılıklı

kofaktörler için şunları elde ederiz:

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & a_{12}^* &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & a_{13}^* &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\ a_{21}^* &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, & a_{22}^* &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & a_{23}^* &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ a_{31}^* &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, & a_{32}^* &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, & a_{33}^* &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Karşılıklı gelen ek matris $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olacaktır.

Buna göre ters matris $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olur.

4 $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin ters matrisini varsa bulunuz.

Teorem 3: A ve B aynı boyutlu iki tekil olmayan (tersibilir) matris olsun. O zaman aşağıdaki özellikler doğrudur:

1) $A = (A^{-1})^{-1}$

2) $(Ab)^{-1}$ vardır ve $(Ab)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

İspat: A ve B aynı mertebeden iki tekil olmayan (tersibilir) matris olsun.

1) $A = AE = A(A^{-1}(A^{-1})^{-1}) = (AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = E(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

2) A ve B matrisleri tekil olmayan ve $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ doğrudur. Normal olarak, AB matrisi vardır ve $\det AB = \det A \cdot \det B \neq 0$ (AB matrisi tersibildir), yani $(Ab)^{-1}$ vardır. Buna göre

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

elde edilir. Buradan da $(Ab)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ sonucu elde edilir.

5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilmiş olsun. Matrislerin tekil olup

olmadığını kontrol edin! Ardından Teorem 3'teki 1) ve 2) özelliklerini kontrol edin.

Çalışma alıştırmaları

1. Aşağıdaki matrisler için ters matrisleri bulunuz:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2. Aşağıdaki matrisler için ters matrisleri bulunuz:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ matrisleri için } (Ab)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ eşitliğini kontrol ediniz.}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisi için } A = (A^{-1})^{-1} \text{ eşitliğini kontrol ediniz!}$$

7. Matris Denklemlerinin Çözümü

Şimdiye kadar farklı cebirsel denklemleri çözdünüz. Burada matris denklemleri olarak bilinenlerle tanışacağız. Matris denklemleri, bilinmeyen bir matris olduğu denklemlerdir. İlk adımda, genellikle x ile gösterilen bilinmeyen matris ifade edilerek matris denklemleri çözülür ve ikinci adımda, özelliklerine dikkat edilerek matrislerle işlem yapılır. Aşağıda, $A, B, C...$ matrislerinin ikinci veya üçüncü dereceden kare matrisler olduğu ve bilinen matrisler rolünü oynadığı ve x matrisinin bilinmeyen kare matris olduğu matris denklemleri örnekleri vereceğiz. İki keyfi A, B kare matrisinin çarpımı için değişme özelliği geçerli olmadığından, matrisli bir eşitliği çarptığımızda soldan mı yoksa sağdan mı çarptığımızı vurgulayacağız.

Örnek 1

Aşağıdaki matris denklemlerinde x matrisini ifade edeceğiz.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A \cdot X = B / \cdot A^{-1} \text{ soldan} & \text{b) } X \cdot A = B / \cdot A^{-1} \text{ sağdan} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B & X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \\ EX = A^{-1}B & XE = B \cdot A^{-1} \\ X = A^{-1}B & X = B \cdot A^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } A \cdot X \cdot B = C / \cdot A^{-1} \text{ soldan} \\ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \\ EX \cdot B = A^{-1} \cdot C \\ X \cdot B = A^{-1} \cdot C / \cdot B^{-1} \text{ sağdan} \\ X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \\ XE = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \\ X = A^{-1}CB^{-1} \end{array}$$

Bir matris denklemini çözerken, bir ters matrisin de hesaplanması gerektiği açıktır.

Örnek 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisleri için } BX = A + E \text{ matris denklemini}$$

aşağıdaki şekilde çözeceğiz:

$$BX = A + E \cdot B^{-1} \text{ soldan}$$

$$B^{-1} \cdot BX = B^{-1} (A + E)$$

$$EX = B^{-1} (A + E)$$

$$X = B^{-1} (A + E).$$

Ardından, B matrisinin B^{-1} ters matrisini buluyoruz, yani:

$$B^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix}$$

Buradan:

$$X = B^{-1} (A + E) = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$X = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 6 & -15 & 25 \\ -10 & -23 & -45 \\ 38 & 1 & 99 \end{bmatrix}$$

1 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, verilen matris denklemleri x

bilinmeyenine göre çözünüz:

a) $A \cdot X = B$; b) $X \cdot A = B$; c) $A \cdot X \cdot B = C$; ç) $CX = A - B$;

2 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere, verilen mat-

ris denklemleri x bilinmeyenine göre çözünüz:

a) $A \cdot X = B$; b) $X \cdot A = B$; c) $A \cdot X \cdot B = C$; ç) $CX = A - B$;

Yerine koyma kullanarak daha karmaşık matris denklemlerine daha birkaç örnek verelim.

Örnek 3

a) $A \cdot x - B = x + E$ matris denkleminde x matrisini ifade edelim.

$$A \cdot X - X = B + E$$

$$\underbrace{(A - E)}_C X = B + E$$

$$CX = B + E \quad / \cdot C^{-1} \text{ soldan}$$

$$X = C^{-1}(B + E)$$

$$X = (A - E)^{-1}(B + E)$$

b) $XB + C = x + A$ matris denkleminde x matrisini ifade edelim:

$$XB - X = A - C$$

$$X \underbrace{(B - E)}_D = A - C$$

$$XD = A - C \quad / \cdot D^{-1} \text{ sağdan}$$

$$X = (A - C)D^{-1}$$

$$X = (A - C)(B - E)^{-1}$$

c) $X^{-1}A(B + E)^{-1} = B^{-1}$ matris denkleminde x matrisini ifade edelim:

$$X^{-1}A(B + E)^{-1} = B^{-1} \quad / \cdot X \text{ soldan}$$

$$XX^{-1}A(B + E)^{-1} = XB^{-1}$$

$$A(B + E)^{-1} = XB^{-1} \quad / \cdot B \text{ sağdan}$$

$$A(B + E)^{-1}B = X$$

$$X = A(B + E)^{-1}B$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ matrisleri için a), b) ve c) matris denklemlerindeki } x \text{ mat}$$

risini Örnek 3 'te olduğu gibi hesaplayınız.

3

Verilen matris denklemlerini x e göre çözünüz:

$$\text{a) } (A - 2E)(X + E) = A \text{ eğer } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } (XA^{-1})^{-1} = X^{-1} + B \text{ eğer } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}.$$

Çalışma alıştırılmaları

1. Verilen iki boyutlu kare matrisler için, matris denklemlerini X bilinmeyenine göre çözünüz:

a) $X^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}$ eğer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix};$

b) $AX^{-1} + B = CX^{-1}$ eğer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

2. Verilen üç boyutlu kare matrisler için, matris denklemlerini x bilinmeyenine göre çözünüz:

a) $(B + E)^{-1}AX^{-1} = A^{-1}$ eğer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$

b) $(B + 3E)(X - E) = A$ eğer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

8. Üç Bilinmeyenli Üç Doğrusal Denklem Sisteminin Çözümü

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini Cramer kuralları yardımıyla çözebileceğimizi zaten gördük. Böyle bir sistemi matris denklemi yardımıyla ve Gauss eliminasyon yöntemi yardımıyla da çözebiliriz. Aşağıda matris denklemi ile çözümü açıklayacağız ve Gauss eliminasyon yöntemi ile çözümü bir sonraki öğretim birimine bırakacağız.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Şu üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi verilmiş olsun:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Bu sisteme dayanarak, aşağıdaki matrisleri oluşturuyoruz:

Buna göre verilen denklem sistemini matris biçiminde şöyle yazabiliriz:

$$AX = B.$$

Evet, bu şekilde oluşturulan matrislerin AX çarpımını hesaplayıp B matrisi ile eşitlediğimizde verilen denklem sistemini elde ederiz.

A matrisine sistemin matrisi diyoruz. Bu matrisin tekil olmadığını varsayalım ($\det A \neq 0$). O zaman $AX = B$ matris denkleminin $x = A^{-1}B$ 'ye indirgendiğini zaten gördük, yani ters matris bulma formülünü kullanarak bilinmeyen matrisi

$$X = \frac{1}{\det A} \text{adj}A \cdot B.$$

elde ediyoruz.

Not: Sistemleri çözmek için, matris denklemi sadece sistemin matrisi tekil olmayan bir matris olduğunda kullanılır.

Örnek 1

Verilen üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini $AX = B$ matris denklemiyle

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

çözelim

Sistemin matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ve satır matrisleri $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dir. A matrisinin tersi

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -6 & -2 & -4 \\ -7 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ elde edilir. O halde, sistemin çözümü $(1, -1, 1)$ sıralı üçlü sayılarıdır.

1

Matris denklemi yardımıyla verilen üç bilinmeyenli üç denklem sistemini çözünüz:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2; \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2z = -3 \\ 5y + z = 2 \end{cases}$$

Çalışma alıştırmaları

Matris denklemi ile aşağıdaki sistemleri çözünüz:

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} ; \quad 2. \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases} ; \quad 3. \begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases} ; \quad 4. \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases} .$$

9. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Birinci yılda öğrenilen iki değişkenli iki doğrusal denklem sistemine uygulanan temel dönüşümler, denk sistemler elde etmek için üç değişkenli üç doğrusal denklem sistemlerine de uygulanır. Bunlar:

- a) Denklemlerin yerlerini değiştirmek;
- b) Denklemlerden birini sıfır olmayan bir sayıyla çarpmak;
- c) Bir denkleme, sıfır olmayan bir sayıyla çarpılmış başka bir denklemi eklemek.

Genel biçimde üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi verilmiş olsun:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözmek için Gauss yönteminin özü, denklemleri belirli sayılarla çarparak ve diğer denklemlere ekleyerek belirli bilinmeyenleri ortadan kaldırmak ve bir bilinmeyen için bir çözüm elde etmektir. Daha sonra, diğer bilinmeyenlerin değerlerini bulmak için geriye doğru ilerleriz. Sistemdeki bu işlemler, temel dönüşümlerle yapılır.

Örnek 1 Verilen $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemini çözmek için

Gauss yöntemini sunalım:

1) İlk denklemi -2 ile çarpıp ikinci denkleme ekliyoruz ve ilk denklemi -1 ile çarpıp üçüncü denkleme ekliyoruz.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 / R_1(-2) + R_2 \\ x - y + z = 3 / R_1(-1) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - 7z = -4 \\ -2y = 2 \end{cases}$$

İlk ve üçüncü denklemlerden x bilinmeyenini eledik. Ancak üçüncü denklemden z 'yi de eledik.

2) Üçüncü denklemi -2 'ye bölerek y için çözümü elde ediyoruz:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - 7z = -4 \\ -2y = 2 / : (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y - 7z = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

3) y 'nin değerini birinci ve ikinci denklemlere yerine koyuyoruz ve ikinci denklemi -7 'ye bölerek z bilinmeyeninin değerini elde ediyoruz:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ -7z = -7 / : (-7) \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

4) z bilinmeyeninin değerini birinci denklemde yerine koyarak x bilinmeyeninin değerini elde ediyoruz:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

yoruz:

Sistemin çözümü $(1, -1, 1)$ 'dir.

Üç bilinmeyenli üç doğrusal denklem sistemi normal (genel) biçimde değilse, Gauss yöntemini uygulamak için sistemi normal biçime getirmemiz gerekir.



Üç bilinmeyenli aşağıdaki üç doğrusal denklem sistemini Gauss yöntemiyle çözünüz:

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases}$$

Gauss eliminasyon yöntemiyle, verilen bir sistemin sonsuz sayıda çözüme sahip olup olmadığını veya tutarsız olup olmadığını belirlemek de mümkündür.

Örnek 2

a)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 16 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases}$$
 sistemini Gauss eliminasyon yöntemiyle çözelim:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 16 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 5x + y + z = 16 / R_1(-5) + R_2 \\ 3x - y + z = 2 / R_1(-3) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 16y - 4z = 76 / : 4 \\ 8y - 2z = 38 / : 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 19 \\ 4y - z = 19 \end{cases}$$

Son sistemde, üçüncü denklemin gereksiz olduğu ve sistemin sonsuz sayıda çözümü olduğu açıktır, yani $y = t, t \in \mathbb{R}$ için $z = 4t - 19, x = 7 - t$ elde edilir. Çözüm kümesi $M = \{(7 - t, t, 4t - 19) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

b)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 8 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases}$$
 sistemini Gauss eliminasyon yöntemiyle çözelim:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 8 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 5x + y + z = 8 / R_1(-5) + R_2 \\ 3x - y + z = 2 / R_1(-3) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 16y - 4z = 68 / : 4 \\ 8y - 2z = 38 / : 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 17 \\ 4y - z = 19 / R_2(-1) + R_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 17 \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \end{cases}$$

Sistemin son denklemi çelişkili bir denklemdir. Yani bu denklem sistemi aykırıdır.

a)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x - 2y + 2z = 6 \\ 6x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x - 4y + 10z = 8 \\ 3x + 6y - 4z = 8 \end{cases}$$

2

Gauss yöntemiyle üç bilinmeyenli aşağıdaki üç doğrusal denklem sistemini çözünüz:

Çalışma alıştırmaları

Gauss yöntemiyle üç bilinmeyenli aşağıdaki üç doğrusal denklem sistemini çözünüz:

1.
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases}; \quad 5. \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 3x-5y+2z=-1 \end{cases}; \quad 6. \begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+y-z=2 \\ -5x+5y-5z=5 \end{cases}.$$

10. Modül ünitesinin tekrarı için alıştırmalar

1. Aşağıdaki determinantları hesaplayınız:

$$a) \begin{vmatrix} a & a+b \\ a-b & a \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Determinantların özelliklerini kullanarak şunu ispatlayınız:

$$a) \begin{vmatrix} a+bx & a+bx & c \\ d+ex & d+ex & f \\ g+hx & g+hx & m \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 1 & p & qw \\ 1 & q & wp \\ 1 & w & pq \end{vmatrix} = (q-p)(w-p)(w-q).$$

3. Cramer kurallarını kullanarak aşağıdaki sistemi çözünüz:

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ -2x+y-3z=0 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ matrisleri verilmiş olsun.}$$

Hesaplayınız: a) $3C-4B$; b) A^3 ; c) $-2BC$; ç) A^{-1} ; d) C^{-1}

5. Aşağıdaki denklemlerden bilinmeyen x matrisini belirtiniz:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. A ve B aynı boyutlu iki tekil olmayan matris olsun ve $AB = BA$ olsun. $AB^{-1} = B^{-1}A$ ve $A^{-1}B = BA^{-1}$ olduğunu ispatlayınız.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ matrisler için, $XA^{-1}B = A^{-1} + E$ matris denkleminde bilinmeyen x matrisini bulunuz.

$$8. \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 4y - 2z = 1 \\ 5x + y + 4z = -3 \end{cases} \text{ sistemini:}$$

a) Matris denklemi ile b) Gauss eliminasyon yöntemiyle çözünüz

9. Parametrelere bağlı olarak aşağıdaki sistemlerin çözümünü inceleyiniz:

$$a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1; \\ x + y + az = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} ax + ay + (a+1)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases} .$$

10. Aşağıdaki sistemleri çözünüz:

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 5; \\ 6x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 4x + 4y + 4z = 16; \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0; \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$ç) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0; \\ -x - z = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} \frac{2}{x-2y} - \frac{3}{y+2z} + \frac{1}{2x-z+y} = 0 \\ -\frac{3}{x-2y} + \frac{4}{y+2z} - \frac{2}{2x-z+y} = 1; \\ \frac{5}{x-2y} + \frac{1}{y+2z} + \frac{4}{2x-z+y} = -3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2. \\ -x - z = 3 \end{cases}$$

Modül Ünitesi 4 – Uzay Analitik Geometrisi

(Tüm diğer meslekler için)

Analitik geometri, geometrinin cebir kullanılarak incelendiği matematik alanıdır. Analitik geometride geometrik şekiller, analitik olarak yani cebirsel denklemlerle temsil edilerek iki boyutlu ve üç boyutlu Kartezyen dik koordinat sisteminde ele alınır. Analitik geometrinin kurucusu, “Geometri” adlı eseriyle Fransız matematikçi René Descartes (1596–1650) olarak kabul edilir. “Yöntem Üzerine Söylem” (1637) adlı eserinin üç ekinden birinde, geometri ve cebir arasında sentez için genel yönteminin uygulamasını sunar. Ancak, Fransız matematikçi Pierre de Fermat’ın (1601–1665) mektuplarından, analitik geometri fikrinin Descartes’ın eserinin yayınlanmasından önce de var olduğu görülmektedir. Her halükarda, analitik geometrinin ortaya çıkışı modern matematiğin başlangıcı olarak kabul edilir. Bu modül ünitesinde, üçüncü yılda zaten öğrenilmiş olan vektörler arasındaki çarpımları (skaler, vektörel ve karma çarpım) hatırlayacağız. Daha sonra, düzlemde zaten öğrenilmiş olan Analitik Geometri’yi uzay Analitik Geometrisine genişleteceğiz.

1. Vektörlerin Skaler Çarpımı

Bu bölümde, iki vektör arasındaki skaler çarpımı hatırlayacağız. Ancak, vektörlerin skaler çarpımından önce, dik üç boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde vektör, vektör koordinatları ve nokta kavramlarıyla ilgili bazı temel tanımları hatırlayalım.

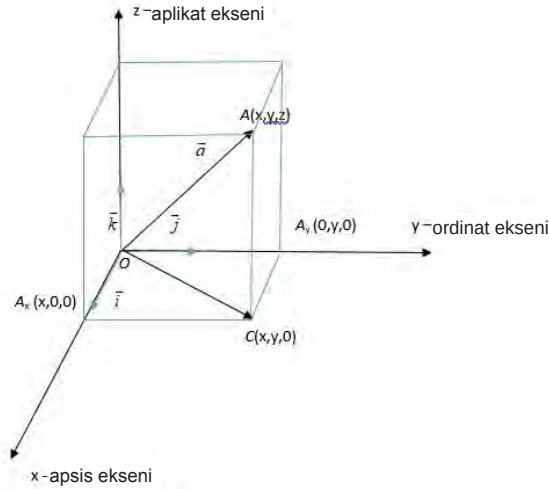
Tanım 1: Vektör, uç noktalarından hangisinin başlangıç, hangisinin bitiş (uc) olduğunu bildiğimiz bir doğru parçasıdır. Her vektör üç elemanla tanımlanır: uzunluk, yön ve doğrultu.

Tanım 2: Aynı doğru üzerinde veya paralel doğrular üzerinde bulunan vektörlere kolineer (doğrudaş) vektörler denir.

Tanım 3: Bir noktaya yerleştirildiğinde aynı düzlemde bulunan vektörlere komplanar (düzlemsel) vektörler denir.

Dik koordinat sistemi (uzaysal), sabit bir O noktası ve ona bağlı üç karşılıklı dik ve eşit uzunluktaki $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektörü ile tanımlanır. Uzunlukları birim ölçü olarak seçilir $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektörleri **ort** veya **taban vektörleri (birim vektörleri)** olarak adlandırılıyorlar.

Yarıçap vektör $\vec{a}$, başlangıcı dik koordinat sisteminin O koordinat başlangıcında ve bitimi herhangi bir A noktası olan bir vektördür. $\vec{a}$ yarıçap vektörünün koordinatları ve bitiş noktası A 'nın koordinatları ile aynıdır, Şekil 1.



Şekil 1

Herhangi bir a yarıçap vektörü (tek olarak belli) şu şekilde temsil edilebilir:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

$\vec{a} = (x, y, z)$ yarıçap vektörünün koordinat biçimi, her vektöre sıralı bir gerçekte sayı üçlüsünün eşlik ettiği anlamına gelir. Bitiş noktası $A(x, y, z)$ de aynı koordinat biçimine sahiptir. Yani, bir noktanın koordinatları, yarıçap vektörünün koordinatlarıdır.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ koordinat biçimlerinde verilen vektörler ve $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerleri için, koordinat biçiminde vektörlerin toplamı ve koordinat biçiminde bir vektörün bir gerçekte sayı ile çarpımı işlemleri şu şekilde tanımlanır:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad \lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Başlangıç noktası $A(a_1, a_2, a_3)$ ve bitiş noktası $B(b_1, b_2, b_3)$ olan herhangi bir $\overrightarrow{AB}$ vektörünün koordinat biçimi $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ dir.

$A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktalarıyla tanımlanan AB doğrusu üzerinde bulunan ve AB doğru parçasını λ oranında bölen $M(x, y, z)$ noktasının koordinatları şu formüllerle bulunur:

$$x = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda}, y = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}, z = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}.$$

Özel olarak, AB doğru parçasının orta noktası olan $M(x, y, z)$ noktasının koordinatları şu formüllerle hesaplanır:

$$x = \frac{a_1 + b_1}{2}, y = \frac{a_2 + b_2}{2}, z = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

İki vektörün skaler çarpımını tanımlamaya geçelim:

Tanım 4: İki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörünün **skaler çarpımı**, $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ sayısıdır; burada α , $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri arasındaki açıdır ve $|\vec{a}|$ ve $|\vec{b}|$ sırasıyla $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin uzunluklarıdır.

Örnek 1 $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4$ şiddetlerine (modüllerine) sahip iki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörü ve aralarındaki açısı $\alpha = 30^\circ$ için skaler çarpım şudur:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$



1 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6$ şiddetlerine sahip $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin skaler çarpımını ve aralarındaki $\alpha = 150^\circ$ açısını hesaplayın!

Tanım 4'ten, iki vektör arasındaki skaler çarpımın aşağıdaki gibi olabileceği açıktır:

- vektörler arasındaki açı dar ise skaler çarpım pozitif sayıdır;
- vektörler arasındaki açı geniş ise skaler çarpım negatif sayıdır.

Skaler çarpımın özelliklerini ve uygulamalarını hatırlayalım.

Teorem 1: Herhangi $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri için aşağıdakiler doğrudur:

$$1^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}; \quad \text{yani t.e. } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

$$2^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Teorem 2: Herhangi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin skaler çarpımı ve herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri için, aşağıdaki özellikler doğrudur:

$$1^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$2^0 \quad \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b});$$

$$3^0 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Teorem 3: İki sıfır olmayan $\vec{a}, \vec{b}$ vektörü için, $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ doğrudur; burada α , vektörler arasındaki açıdır.

Örnek 2

$|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 2$ ve aralarındaki açı $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ olan

$\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ vektörlerinin skaler çarpımını hesaplamak için, skaler çarpımın özelliklerinden yararlanıyoruz:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (4\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (5\vec{p} + 2\vec{q}) = 20|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{q} \cdot \vec{p} - 6|\vec{q}|^2 \\ &= 20|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 = 20|\vec{p}|^2 - 7\vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 \\ &= 20 \cdot 4^2 - 7|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \alpha - 6 \cdot 2^2 = 320 - 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 24 \\ &= 320 - 28 - 24 = 268 \end{aligned}$$

2

$|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ ve aralarındaki açı $\alpha = 120^\circ$ ise, $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ vektörlerinin skaler çarpımını hesaplayınız!

Örnek 3

Örnek 2'deki $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri arasındaki β açısını bulmak için Teorem 3'teki

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$
 formülünü kullanacağız.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 268$ skaler çarpımı zaten hesaplandı, ancak Teorem 1 ve 2'yi kullanarak vektörlerin modüllerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = (4\vec{p} - 3\vec{q})^2 = 16|\vec{p}|^2 - 24\vec{p} \cdot \vec{q} + 9|\vec{q}|^2 = 16 \cdot 4^2 - 24|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \alpha + 9 \cdot 2^2 \\
&= 256 - 24 \cdot 4 + 36 = 232 \\
|\vec{b}|^2 &= \vec{b} \cdot \vec{b} = (5\vec{p} + 2\vec{q})^2 = 25|\vec{p}|^2 + 20\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 25 \cdot 4^2 + 20|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \alpha + 4 \cdot 2^2 \\
&= 400 + 20 \cdot 4 + 16 = 496
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$\cos \beta = \frac{268}{\sqrt{232} \cdot \sqrt{496}} = \frac{268}{2\sqrt{58} \cdot 4\sqrt{31}} \approx 0,79 \Rightarrow \beta \approx 37,81^\circ.$$



$|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ ve açı $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$ ise $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ vektörleri arasındaki β açısını hesaplayınız!

Şekil 1'deki ortlar (birim vektörleri) için şunlar doğrudur:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

Skaler çarpımın koordinat biçimi için aşağıdaki özelliklerin doğru olduğunu zaten biliyoruz:

Teorem 4: Koordinat biçiminde verilen $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörlerinin skaler çarpımı $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ sayısıdır.

Teorem 5: Herhangi $\vec{a}, \vec{b}$ vektörü için şunlar doğrudur:

(1) Vektörün uzunluğu: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

(2) İki vektör arasındaki açı: $\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

(3) İki $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ vektörün dik olma (ortogonallık) koşulu: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$.

Skaler çarpımın koordinat biçimi yardımıyla, iki nokta $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$ arasındaki d mesafesini de bulabiliriz. $\overrightarrow{AB}$ vektörünün koordinat biçiminin $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ olduğunu zaten biliyoruz. Bu iki nokta arasındaki uzaklık şu formülle hesaplanır:

$$d = \overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Örnek 4

a) Koordinatları ile verilen $\vec{a} = (3, 2, -3)$, $\vec{b} = (7, 0, -5)$ vektörleri için skaler çarpım $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-5) = 21 + 15 = 36$ dır. Aralarındaki açı α' yı da hesaplayalım:

$$\cos \alpha = \frac{36}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + (-5)^2}} = \frac{36}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{74}} = 0,89 \Rightarrow \alpha = 27,13^\circ.$$

b) Koordinat biçiminde verilen $\vec{a} = (0, -3, 2)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayalım:

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

c) $A(2, -3, 1)$, $B(-2, 3, -4)$ noktaları aralarındaki uzaklığı hesaplayalım:

$$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+3)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{122}.$$

4

a) Koordinatları ile verilen $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-4, 2, -3)$ vektörlerin skaler çarpımını ve aralarındaki α açısını hesaplayınız!

b) $\vec{a} = (-1, 5, -2)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız!

c) $A(1, -2, -1)$, $B(5, -6, 0)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

5

$a = (5, -2, 3)$, $b = (-1, 0, 2)$ vektörleri bir karenin kenarları olup olmadığını kontrol ediniz.

Çalışma alıştırmaları

1. Hesaplayınız: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ ve aralarındaki açı $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ise, a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

b) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; c) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot 5\vec{b}$.

2. $|\vec{p}| = 8$, $|\vec{q}| = 1$ ve $\vec{p}, \vec{q}$ vektörleri arasındaki açı $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ise $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ vektörlerinin skaler çarpımını hesaplayınız. Ardından, $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz!

3. Herhangi $\vec{a}, \vec{b}$ vektörü için şunu kanıtlayın:

$$\text{a) } (2\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \quad \text{b) } (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

4. Kanıtlayın: Bir eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirine diktir!

5. $\vec{a} = (1, -2, -3)$, $\vec{b} = (2, 0, -5)$ vektörleri için şunu hesaplayın:

a) $\vec{a}, \vec{b}$ b) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ c) Aralarındaki α açısını

$\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri ortogonal midir?

6. $\triangle ABC$ üçgeninin köşelerinin koordinatları $A(3, -2, 1)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(-4, -2, 0)$ verilmiştir. Şunları bulunuz:

a) Üçgenin C köşesine ait iç açısını,

b) Üçgenin $\overline{AB}$ kenarına karşılık gelen kenar ortayın uzunluğunu.

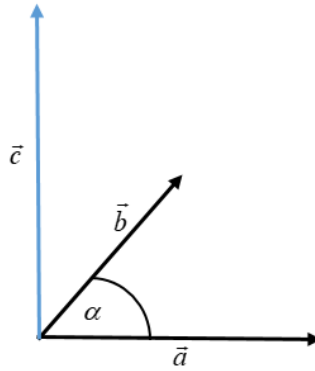
7. $\vec{a} = (3, -2, 1)$ vektörü verildiğinde, yz –düzlemi üzerinde bulunan $\vec{a} \perp \vec{x}$, $|\vec{x}| = 3\sqrt{5}$ olmak üzere $\vec{x}$ vektörünün koordinatlarını bulunuz.

2. Vektörlerin Vektörel Çarpımı

İki vektörün vektörel çarpımının tanımını hatırlayalım.

Tanım 1: Doğrudaş olmayan $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımı, aşağıdaki özellikleri sağlayan $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektörüdür (şekil 2);

- (i) $\vec{c}$ vektörünün doğrultusu, $\vec{a}, \vec{b}$ 'nin bulunduğu düzleme diktir;
- (ii) $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri ve $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektörü sağ el üçlüsü oluşturur;
- (iii) $\vec{c}$ vektörünün şiddeti (modülü) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$ 'dır; burada α açısı $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri arasındaki açıdır.



Şekil 2

$\vec{a} \times \vec{b}$ dışında vektörel çarpımı işaretlemek için kullanılan bir diğer gösterim de $[\vec{a}, \vec{b}]$ 'dir.

Örnek 1

Büyüklikleri $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$, aralarındaki açı $\alpha = \frac{\pi}{3}$ olan $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri için $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektörünün modülünü hesaplayalım:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 1 \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

1

$|a| = 1, |b| = 6$ modüllerine sahip $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımının modülünü ve aralarındaki $\alpha = 120^\circ$ açısını hesaplayınız!

Vektörel çarpımın özelliklerini ve uygulamalarını hatırlayalım.

Teorem 1: Herhangi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin vektörel çarpımı ve herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerleri için aşağıdaki özellikler doğrudur:

$$1^0 \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$$

$$2^0 \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a}, \vec{b} \text{ doğrudadır}$$

$$3^0 \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

$$4^0 \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b});$$

$$5^0 \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Teorem 2: $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri üzerinde çizilen paralelkenarın alanı

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ dir.}$$

Sonuç: $\vec{a}, \vec{b}$ vektörleri üzerinde çizilen üçgenin alanı

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ dir.}$$

Teorem 3: İki vektörün vektörel çarpımının koordinat biçimi

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ e } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek 2

$|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 2$ ve aralarındaki açı $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ olan $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ vektörlerinin vektörel çarpımının modülü aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (4\vec{p} - 3\vec{q}) \times (5\vec{p} + 2\vec{q}) = 20\vec{p} \times \vec{p} + 8\vec{p} \times \vec{q} - 15\vec{q} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{q} \\ &= 8\vec{p} \times \vec{q} + 15\vec{p} \times \vec{q} = 25\vec{p} \times \vec{q}\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 25 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \sin \alpha = 25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{3}.$$

2

$|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ ve $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$ ise $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, vektörlerinin vektörel çarpımının modülünü hesaplayınız!

Örnek 3

a) Koordinat biçiminde verilen $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$ vektörlerin vektörel çarpımı:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} = (0, 0, -1) \text{ dir.}$$

b) $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -1, 0)$ vektörleri üzerinde çizilen paralelkenarın alanı

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2} = 1 \text{ birim karedir.}$$

3

Köşelerinin koordinatları $A(3, 2, -5)$, $B(1, -4, 3)$, $C(-3, 1, 0)$ olan $\triangle ABC$ üçgeninin alanını hesaplayınız. Ardından, üçgenin $\overline{BC}$ kenarına karşılık gelen yüksekliğinin uzunluğunu hesaplayınız.

Çalışma alıştırmaları

1. Hesaplayınız: $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ ve aralarındaki açı $\alpha = 45^\circ$ ise, a) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$; c) $2\vec{a} - 3\vec{b}) \times 5\vec{b}$.

2. $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ ve $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$ ise $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 'sini hesaplayınız.

3. $\vec{p}, \vec{q}$ vektörlerinin $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 3$ ve $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 30^\circ$ açıları için $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$ vektörleri üzerinde çizilen üçgenin alanını hesaplayınız!

4. Herhangi $\vec{a}, \vec{b}$ vektörü için şunu kanıtlayınız:

$$\text{a) } (2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} \times \vec{b}; \quad \text{b) } 2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}.$$

5. $\vec{a} = (2, -3, 5), \vec{b} = (-1, 0, 3)$ vektörleri için şunu hesaplayınız:

$$\text{a) } \vec{a} \times \vec{b}; \quad \text{b) } (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}); \quad \text{c) } (2\vec{a} - 3\vec{b}) \times 5\vec{b}!$$

6. Köşelerinin koordinatları $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, 5, -6)$, $D(4, 2, -3)$ olan $ABCD$ paralelkenarının yüksekliğini hesaplayınız.

7. $\vec{a} = (2, 3, -5)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$ vektörleri arasındaki açı için, $\sin \alpha$ 'yı hesaplayınız.

3. Vektörlerin Karma Çarpımı

Üç vektör arasındaki bir diğer çarpımı hatırlayalım.

Tanım 1: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç vektörün **karma çarpımı** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ skalerine diyoruz.

Karma çarpım $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ile gösterilir.

Vektörlerin karma çarpımı ve uygulamasıyla ilgili birkaç teoremi hatırlayalım.

Teorem 1: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri tarafından oluşturulan paralel yüzünün hacmi

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| \text{ dir.}$$

Karma çarpımın işareti, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri sağ el üçlü oluşturuyorsa pozitifdir. Vektörler $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sol üçlü oluşturuyorsa karma çarpımın işareti negatiftir.

Sonuç: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri tarafından oluşturulan tetrahedronun hacmi

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| \text{ dir.}$$

Teorem 2: Herhangi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörü için $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ancak ve ancak $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri komplanar ise doğrudur.

Teorem 3: Herhangi $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektörü için karma çarpımın koordinat biçimi aşağıdaki formülle verilir:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Örnek 1

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sağ el üçlü vektörünün karma çarpımı, burada $\vec{c}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine diktir ve $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 1$ için 30° 'lik bir açı yaparlar:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})) \cdot |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 6 \cdot 5 \sin 30^\circ \cdot 1 \cdot 1 = 15$$

Sağ el vektör üçlüsü, $\vec{a} \times \vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörlerinin aynı yönde olduğu anlamına gelir.

1

a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri karşılıklı olarak birbirine göre dik ve $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2$ modülleriyle bir sağ el vektör üçlüsü oluşturuyorsa, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin karma çarpımını hesaplayınız.

b) $a = 7, b = 3, c = 5$ temel kenarlarına sahip bir küpün hacmini hesaplayınız!

Örnek 2

a) $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$ vektörleri için karma çarpım şudur:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 2 = -6.$$

b) a) $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$ vektörleri için bu üç vektör üzerinde inşa edilen paralel yüzünün hacmi $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ 'dir. Karma çarpım $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -6$ 'dır.

Buradan $V = |-6| = 6$ birim küp olduğu sonucu çıkar.

c) Aynı üç $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$ vektörü üzerinde inşa edilen tetrahedronun hacmi

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 \text{ birim küptür.}$$

2

a) $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (3, 4, -2), \vec{c} = (-2, 0, 4)$ vektörleri üzerinde inşa edilen düzgün dörtyüzlünün hacmini hesaplayınız.

b) $A(1, 2, 1), B(3, 4, -2), C(-2, 0, 4), S(1, 2, 3)$ köşe noktalarına sahip düzgün dörtyüzlünün hacmini hesaplayınız.

Örnek 3

$\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$ vektörleri komplanardır çünkü karma çarpımları sıfırdır, yani:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 - 9 + 9 - 1 - 54 + 33 = 55 - 55 = 0.$$

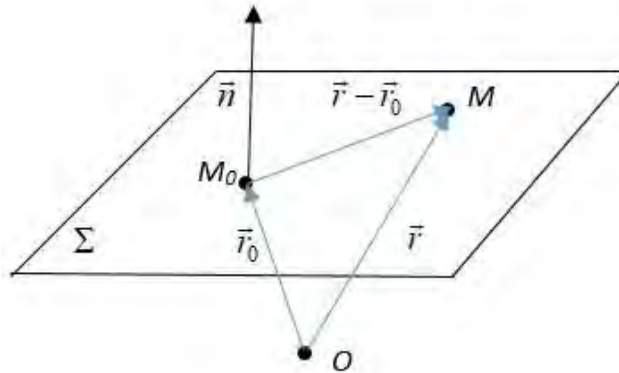
$\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$, $\vec{c} = (-2, 1, -1)$ vektörleri üzerinde bir paralel yüz inşa edilip edilemeyeceğini kontrol ediniz!

Çalışma alıştırmaları

- Herhangi $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektörü için,
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$ eşitliklerin doğru olduğunu kanıtlayınız.
- $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ olduğunu kanıtlayın.
- $\vec{c}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine dikse ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri aralarında 45° 'lik bir açı yapıyorsa, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 2$ modülleri için sağ el $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektör üçlüsünün karma çarpımını hesaplayınız.
- $|\vec{a}| = 7$ temel kenarına sahip bir küpün hacmini vektörleri kullanarak hesaplayın.
- $\vec{a} = (-1, 0, 1)$, $\vec{b} = (-3, 4, -2)$, $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ vektörleri üzerinde inşa edilen paralel yüzün yüksekliğini hesaplayınız.
- Taban köşeleri $A(1, 2, 1)$, $B(3, 4, -2)$, $C(-2, 0, 4)$ olan bir düzgün dörtyüzlünün hacmi 15 birim küp olsun. Tepe noktasının x ekseninde olduğu biliniyorsa, tepe noktasının koordinatlarını bulunuz!
- $\vec{a} = (m, 0, 1)$, $\vec{b} = (-2, 4, 1)$, $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ vektörleri komplanar ise m parametresinin değerini hesaplayınız.

4. Düzlemin Genel Denklem Biçimi

Oxyz, uzay Kartezyen dik koordinat sistemi olsun. İlk olarak, bir noktası ve düzleme dik olan sıfır olmayan bir vektörle tanımlanan Σ düzleminin denklemini belirleyeceğiz.



Şekil 3

M_0 noktası ve sıfır olmayan $\vec{n}$ vektörü verildiğinde, verilen M_0 noktasından geçen ve verilen $\vec{n}$ vektörüne dik olan benzersiz bir düzlem vardır. M_0 noktası $\vec{r}_0$ yarıçap vektörü ile tanımlansın, şekil 3. Σ düzleminin keyfi bir M noktası r yarıçap vektörü ile tanımlansın. M noktasının Σ düzleminde hareket ettirilmesiyle $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ vektörü değişir, ancak yine de her zaman $\vec{n}$ 'ye dik kalır (çünkü $\overline{M_0M}$ Σ düzlemi üzerindedir), yani $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$ İki karşılıklı dik vektörün skaler çarpımı 0'dır, yani $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ veya $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Bu koşul, Σ düzleminin her M noktası tarafından karşılanır ve eğer M noktası Σ düzleminde değilse, bu koşul ihlal edilir. Bu nedenle, noktaların düzleme ait olma özelliği ile ifade edilir.

Bu nedenle, bu koşulu Σ düzleminin vektörel formda denklemi olarak almak doğaldır.

Tanım 1: r_0 vektörü M_0 noktasının yarıçap vektörü ve $\vec{r}$ vektörü M noktasının yarıçap vektörü olduğunda,

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

denklemi Σ **düzleminin vektörel denklemi** olarak adlandırılır.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ noktaları, $\vec{n} = (A, B, C), A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ vektörü, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ yarıçap vektörleri ve $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektörü kendi koordinat biçimlerine sahiptir.

Σ düzleminin $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ vektörel denklemi analitik bir ifadeye, yani $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ **koordinat biçimine** de sahiptir.

Tanım 2:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

biçimindeki düzlem denklemine, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **noktasından geçen ve verilen $\vec{n} = (A, B, c)$ vektörüne dik olan düzlemin skaler denklemi** denir.

Örnek 1

$M_0(1, 3, -5)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = (-2, 5, 1)$ vektörüne dik olan Σ düzleminin denklemini yazalım. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ denklemine göre, $-2(x - 1) + 5(y - 3) + 1(z + 5) = 0$ 'dır. Son eşitlik $2x - 5y - z + 8 = 0$ biçimine dönüştürülebilir ve bu Σ düzleminin denklemi olarak kabul edilebilir.

1

$A(5, -3, 7)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = (7, -8, 10)$ vektörüne dik olan Σ düzleminin denklemini bulunuz.

Düzlem denkleminin koordinat biçimi aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

burada $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ 'dır.

Tanım 3:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

denklemini, kendisine dik olan $n = (A, B, C)$ vektörüne sahip bir **düzlemin genel denklem biçimi** olarak adlandırılır.

Düzlemin genel denkleminde A, B, C ve D katsayıları gerçel sayılardır. Yani, bunlardan herhangi biri sıfıra eşit olabilir ve dik Kartezyen koordinat sistemindeki konumuna göre düzlemin özel durumlarını elde ederiz:

1. $D = 0$ ise, düzlemin genel denklemini $Ax + By + Cz = 0$ biçimini alır. Bu, $x = 0, y = 0, z = 0$ 'ın bir çözümünü olduğu anlamına gelir, bu nedenle bu durumda düzlem koordinat başlangıcından geçer.

2. $A = 0$ ise, düzlemin genel denklemini $By + Cz + D = 0$ biçimini alır. Bu, $\vec{n} = (0, B, C)$ vektörüne dik olan bir düzlemdir. Ancak $\vec{n} = (0, B, C)$ vektörü $i = (1, 0, 0)$ ortuna diktir, bu nedenle bu düzlem x eksenine paraleldir. Ek olarak $D = 0$ ise, düzlemin genel denklemini $By + Cz = 0$ biçimini alır. Bu düzlem x eksenine paraleldir ve koordinat başlangıcını içerir. Başka bir deyişle, bu tam olarak x eksenini içeren düzlemdir.

3. $A = B = 0$ ise, düzlemin genel denklemini $Cz + D = 0$ biçimini alır. Bu, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ortuyla kolinear olan $n = (0, 0, C)$ vektörüne dik olan bir düzlemdir. Yani, bu, x eksenini ve y eksenini tarafından oluşturulan düzleme paralel bir düzlemdir. Özel olarak, bu durumda $D = 0$ ise, Oxy koordinat düzleminin denklemini temsil eden $z = 0$ biçimindeki denklemini elde ederiz.

2

$Ax + Cz + D = 0, Ax + D = 0, Ax + By + D = 0$ veya $x = 0, y = 0$ durumlarını inceleyiniz. Şimdiye dek yapılan incelemelerden şu sonuca varabiliriz:

A , B veya C katsayılarından herhangi biri sıfır olduğu durumda, düzlem bu katsayıya “karşılık gelen” koordinat eksenine paraleldir.

Bu katsayılardan tam olarak biri sıfır değilse, düzlem karşılık gelen eksene diktir, yani diğer iki eksen tarafından tanımlanan koordinat düzlemine paraleldir.

Örnek 2

$2x - z + 5 = 0$ denklemlı düzlem y eksenine paraleldir ve $6z - 7 = 0$ denklemlı düzlem z - eksenine diktir, yani Oxy düzlemine paraleldir.

3

Aşağıdaki denklemlerle verilen düzlemlerin konumu nedir?

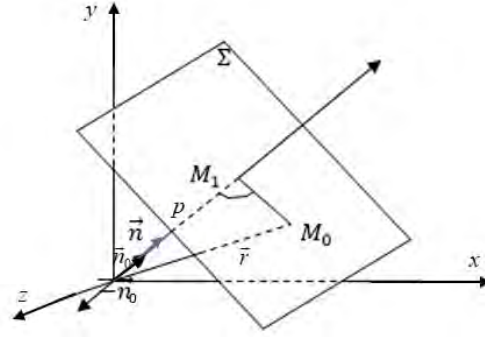
- a) $x + y = 0$ b) $2x + y - z = 0$ c) $-2y + 3z = 4$

Çalışma alıştırmaları

1. $B(8, 3, -4)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = (5, 2, -3)$ vektörüne dik olan Σ düzleminin denklemini bulunuz. Ardından, $P(7, 5, 4)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(0, 29, 0)$ noktalarının Σ üzerinde olup olmadığını kontrol ediniz.
2. Uzayda $A(-2, -1, -3)$, $B(0, 3, -5)$ olmak üzere iki nokta verilsin. AB doğru parçasının orta noktasından geçen ve $\vec{n} = (1, 0, -3)$ vektörüne dik olan Σ düzleminin denklemini bulunuz.
3. Aşağıdaki denklemlerle verilen düzlemlerin durumu nedir?
a) $x - 2y + z = 0$; b) $3x + y = 2$; c) $3x - 4z = 0$; ç) $x = 0$;
d) $y - z - 2 = 0$?
4. $A(5, 0, -3)$ noktasından geçen ve Oyz düzlemine paralel olan Σ düzleminin genel denklemini bulunuz.
5. $B(-1, 3, -3)$ noktasından ve y ekseninden geçen Σ düzleminin genel denklemini bulunuz.

5. Düzlem Denkleminin Normal Şekli

$\vec{n} \perp \Sigma$ vektörüyle bir Σ düzlemi ve r yarıçap vektörüne karşılık gelen keyfi bir M_0 noktası verilmiş olsun (dik vektör koordinat başlangıcından düzleme doğru yönlendirilir). M_0 noktası şekil 4'te görüldüğü gibi uzayda dik bir Kartezyen koordinat sisteminde O koordinat başlangıcından $p > 0$ mesafesinde bulunur. O zaman $\vec{n}$ vektörüne karşılık gelen birim vektör $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ 'dir. O koordinat başlangıcından Σ düzlemine olan p uzaklığı, açıkça $\vec{r}$ yarıçap vektörünün $\vec{n}_0$ birim vektörü üzerindeki izdüşümüdür, yani $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} = p$. t.e. $p = \text{pr}_{\vec{n}_0} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}_0|} = \vec{r} \cdot \vec{n}_0$. Oradan da $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$ denklemi elde edilir.



Şekil 4

Tanım 1:

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$$

denkleminin Σ **düzleminin normal vektör denklemi** olarak adlandırılır. Burada $\vec{n} \perp \Sigma$ birim vektörü ve p koordinat başlangıcından düzleme olan uzaklığıdır.

Koordinat başlangıcından geçen Σ düzlemi için $p = 0$ olduğu açıktır.

$\vec{r} = (x, y, z)$ ve $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ vektörlerinin koordinat biçimleri için, burada α , β ve γ sırasıyla Ox , Oy ve Oz koordinat eksenleriyle $\vec{n}_0$ vektörünün açılarıdır, $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$ düzlem denkleminin normal vektör biçimi biçimine dönüştürülür.

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

Tanım 2:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

denklemi, n_0 birim vektörünün Ox , Oy ve Oz koordinat eksenleriyle sırasıyla α , β ve γ açıları yaptığı ve p 'nin koordinat başlangıcından düzleme olan uzaklığı olduğu Σ **düzleminin normal denklem biçimi** olarak adlandırılır.

Örnek 1

$x - y + 3z - 5 = 0$ düzlemine paralel olan ve koordinat başlangıcından 7 birim uzaklıkta bulunan düzlemin normal vektör biçimini yazalım. Verilen $x - y + 3z - 5 = 0$ düzlemine dik olan vektör, istenen düzleme de diktir ve $\vec{n} = (1, -1, 3)$ 'tür. Birim vektör

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11} \right) \text{ ve } p = 7 \text{ dir. O zaman normal vektör biçimindeki denklem}$$

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11} \right) - 7 = 0 \text{ olduğunu buluyoruz.}$$

1

$\vec{n} = (1, 2, 3)$ vektörüne dik olan ve koordinat başlangıcından geçen bir düzlemin normal vektör biçimini yazınız.

Bir düzlemin normalinin iki zıt ortu olduğu düşünüldüğünde, $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ve

$-\vec{n}_0 = (\cos(\pi - \alpha), \cos(\pi - \beta), \cos(\pi - \gamma))$, Şekil 4'e göre, Σ düzleminin iki normal denklem biçiminin olduğunu elde ederiz, öyle ki (-1) ile çarparak bir denklemden diğerine geçilir.

Bu nedenle, $Ax + By + Cz + D = 0$ genel denklemi ile belirli olan bir Σ düzleminin **normal şekli**

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

olacaktır. Burada büyüklüğü $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ olan $\vec{n} = (A, B, C)$ normal vektörüdür. Paydadaki karekökün önündeki işaret, serbest terim D 'nin genel denklemdeki işaretinin tersi olarak seçilir, böylece birim vektörün yönü düzlemden koordinat başlangıcı O 'ya yönlendirilmesi sağlanır.

Örnek 2

a) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 5 = 0$ düzlem denkleminin normal biçiminde, düzleme dik olan birim vektörü $\vec{n}_0 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ve koordinat başlangıcından uzaklık $p = 5$ 'tir.

b) $4x - 5y - z - 1 = 0$ genel biçiminde verilen düzlem, normal biçimde

$$\frac{2\sqrt{42}}{21}x - \frac{5\sqrt{42}}{42}y - \frac{\sqrt{42}}{42}z - \frac{\sqrt{42}}{42} = 0 \text{ dır, burada düzleme dik birim vektör}$$

$$\vec{n}_0 = (\frac{2\sqrt{42}}{21}, -\frac{5\sqrt{42}}{42}, -\frac{\sqrt{42}}{42}) \text{ ve koordinat başlangıcından uzaklık } p = \frac{\sqrt{42}}{42} \text{ dir.}$$

2

Genel biçimde verilen aşağıdaki düzlem denklemlerini normal biçimde ifade ediniz:

a) $2x + 3y - 2z + 3 = 0$

b) $x - y + 3z - 5 = 0$

Çalışma alıştırmaları

- Aşağıdaki özelliklere sahip bir düzlemin normal vektör denklemini yazınız:
 - $\vec{n} = (1, 2, -2)$ vektörüne dik ve koordinat başlangıcından 10 birim uzaklıkta.
 - $\vec{n} = (-4, -4, 2)$ vektörüne dik ve koordinat başlangıcından 4 birim uzaklıkta.
- $x - 2y + 2z - 15 = 0$ düzlemine paralel ve koordinat başlangıcından 5 birim uzaklıkta olan bir düzlemin normal vektör denklemini yazınız.
- $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 5, -4)$, $C(0, -1, 5)$ doğrusal olmayan üç noktadan geçen ve koordinat başlangıcından geçen bir düzleme paralel olan bir düzlemin normal vektör denklemini yazınız.
- Genel biçimde verilen aşağıdaki düzlem denklemlerini normal biçimde ifade edin:
 - $2x + y - 2z + 6 = 0$
 - $x - 2y + 3z - 2 = 0$
- Aşağıdaki normal biçimde ifade edilen düzlemlerden hangisi doğrudur?
 - $5x + y - z + 3 = 0$;
 - $\frac{2}{3}x + 3y - \frac{2}{5}z - 4 = 0$;
 - $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{2} = 0$.
- Normal biçimde verilen aşağıdaki düzlem denklemlerinde koordinat başlangıcından uzaklığı ve normal vektörlerini bulunuz:
 - $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{6} = 0$;
 - $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 3 = 0$.

6. Düzlemin Eksen Parçaları Cinsinden Denklemi

Tüm katsayıların sıfırdan farklı olduğu, yani $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ olan $\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminin genel denklem biçimi verilmiş olsun. Bu durumda denklemi şu şekilde de yazabiliriz:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

yani

$$\frac{\frac{x}{-D}}{-\frac{A}{D}} + \frac{\frac{y}{-D}}{-\frac{B}{D}} + \frac{\frac{z}{-D}}{-\frac{C}{D}} = 1.$$

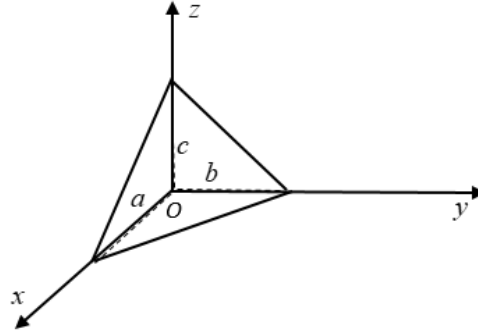
$a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ alırsak, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ denklemi elde edilir.

Tanım 1:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

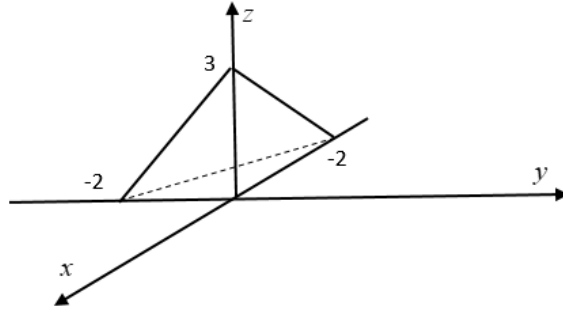
denklemi, **düzlemin eksen parçaları cinsinden denklemi** diye adlandırılır.

“Eksen parçaları” terimi, geometrik olarak verilen düzlemin Ox , Oy ve Oz koordinat eksenlerinde kestiği doğru parçalarını temsil eden sıfır olmayan a , b ve c doğru parçalarından gelir, Şekil 5.



Şekil 5

Bu parçalar negatif de olabilir. Şekil 6'da apsis ve ordinat eksenindeki parçaların negatif sayı olduğu bir durum verilmiştir, yani $a = b = -2$.



Şekil 6

Düzlemin eksen parçaları şeklinde dönüşümü, düzlemin genel denklem biçiminin dönüştürülmesiyle elde edildiğini zaten gördük ve aynı şeyi aşağıdaki Örnek 1 ile sunacağız.

Örnek 1

Genel biçimde verilen

$$5x - 3y + z - 15 = 0,$$

Düzleminde, $A = 5 \neq 0$, $B = -3 \neq 0$, $C = 1 \neq 0$, $D = -15 \neq 0$ 'dır. Eksen parçaları biçimine dönüştürme işlemi aşağıdaki şekilde yapılır:

$$5x - 3y + z - 15 = 0$$

$$5x - 3y + z = 15 \quad / :15$$

$$\frac{5x}{15} - \frac{3y}{15} + \frac{z}{15} = 1$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{15} = 1.$$

1

Aşağıdaki düzlem denklemlerini eksen parçaları biçiminde ifade ediniz:

a) $3x - 4y + 3z + 7 = 0$

b) $4x - 3y - 6z + 12 = 0$

Σ düzleminin eksen parçaları biçimindeki denklemi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ olsun. Σ düzleminin eksen parçaları biçiminden genel biçime dönüştürülmesi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \cdot abc$$

$$bcx + acy + abz = abc$$

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$\text{yani } Ax + By + Cz + D = 0,$$

burada $A = bc$, $B = ac$, $C = ab$, $D = -abc$ 'dir.

2

Verilen düzlem denklemlerini genel biçimde ifade ediniz:

$$\text{a) } \frac{x}{4} - \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1; \quad \text{b) } \frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{4} - \frac{z}{\frac{3}{4}} = 1.$$

Örnek 2

Eksen parçaları cinsinden $\Sigma: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1$ düzlemi verilmiş olsun. Burada eksen parçaları $a = 2, b = 3, c = -1$ dir. Denklemi genel biçime dönüştürelim.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z &= 1 \cdot 6 \\ 3x + 2y - 6z &= 6 \\ 3x + 2y - 6z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

burada $A = 3, B = 2, C = -6, D = -6$ 'dır.

Örnek 3

$A(2, 1, -5)$ ve $B(-2, 0, 3)$ noktalarından geçen ve x ve z koordinat eksenlerinde eşit parçalar kesen Σ düzleminin denklemini oluşturalım. Yani, $a = c$. Bu durumda denklemin eksen parçaları cinsinden denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$$

$A \in \Sigma$ olduğuna göre, koordinatları eksen parçaları cinsinden olan denklemi sağlamaktadır:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{5}{a} &= 1 \cdot ab \\ 2b + a - 5b &= ab \\ a - 3b &= ab. \\ \frac{-2}{a} + \frac{0}{b} + \frac{3}{a} &= 1 \cdot a \\ a &= 1. \end{aligned}$$

$B \in \Sigma$ olduğuna göre, koordinatları eksen parçaları cinsinden olan denklemi sağlamaktadır:

$$\begin{cases} a - 3b = ab \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3b = b \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = 1 \end{cases}.$$

Şu sistemi çözeriz:

Buna göre, Σ düzleminin eksen parçaları cinsinden denklemi $e: \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{4}} + \frac{z}{1} = 1$ dir.

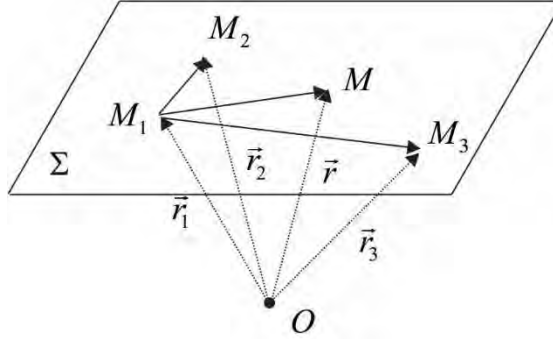
2 $A(8, -3, 2)$ noktasından geçen ve koordinat eksenlerinde eşit parçalar kesen düzlemin denklemini yazınız.

Çalışma alıştırmaları

1. Aşağıdaki düzlemlerin koordinat eksenlerinde kestiği parçaları belirleyin:
a) $2x - 3y - 5z - 20 = 0$ b) $7x + 5y + 4z + 15 = 0$
2. Koordinat eksenlerinde $a = -2, b = c = 1$ parçaları kesen bir düzlemin denklemini yazınız.
3. a) $A(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve koordinat eksenlerinde eşit parçalar kesen düzlemin denklemini yazınız.
b) $A(1, 2, 3)$ ve $B(-1, -2, 4)$ noktalarından geçen ve y ve z koordinat eksenlerinde eşit parçalar kesen düzlemin denklemini yazınız.
4. $(2 - m)x - 3y - 5z - 15 = 0$ düzleminin denklemindeki m parametresini, düzlemin koordinat eksenlerinde kestiği parçaların toplamı 7 olacak şekilde belirleyiniz.
5. $(2m - 3)x - 3my + 2z - 10 = 0$ düzleminin denklemindeki m parametresini o şekilde belirtiniz ki, düzlemin x ve z koordinat eksenlerinde kestiği parçaların çarpımı 2 olsun.
6. $(1 - m)x + 2y + 5z - 20 = 0$ düzleminin denklemindeki m parametresini o şekilde belirtiniz ki, düzlemin koordinat eksenlerinde kestiği parçaların çarpımı 100 olsun.
7. $2x - 10y + 5z - 30 = 0$ düzlemi ve koordinat düzlemleri tarafından oluşturulan düzgün dörtyüzlünün hacmini hesaplayınız.

7. Üç Noktadan Geçen Düzlemin Denklemi

M_1, M_2 ve M_3 doğrusal olmayan üç nokta verilsin. Düzlem üzerinde olan M_1, M_2 ve M_3 noktalarının yarıçap vektörlerini sırasıyla $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ olarak gösterelim ve keyfi bir M noktasının yarıçap vektörünü $\vec{r}$ olarak gösterelim, Şekil 7. $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ vektörleri Σ düzlemi üzerinde bulunuyorlar, yani bunlar komplanar vektörlerdir, bu nedenle onların karma çarpımı sıfırdır, $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$.



Şekil 7

Tanım 1:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

eşitliği, doğrusal olmayan üç noktadan geçen bir **düzlemin vektörel denklem biçimini** temsil eder.

Düzlemde bulunan doğrusal olmayan noktaları $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ ve $M_3(x_3, y_3, z_3)$ koordinatları ile ifade edersek, yarıçap vektörleri de aynı koordinatlara sahip olacaktır, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$

Düzlemin keyfi bir noktasının koordinat biçimi $M(x, y, z)$ ve yarıçap vektörü $\vec{r} = (x, y, z)$ 'dir. $\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ vektörleri koordinatlarla verilir:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1 &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) . \end{aligned}$$

Buna göre, doğrusal olmayan üç noktadan geçen düzlemin vektörel denklemi koordinat biçiminde şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

burada $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ tür.

Tanım 2:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

denklemini, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ve $M_3(x_3, y_3, z_3)$ **doğrusal olmayan üç noktadan geçen bir düzlemin denklemi** olarak adlandırılır.

Örnek 1

$M_1(0, -1, 2)$, $M_2(1, -2, -1)$ ve $M_3(3, 1, 0)$ doğrusal olmayan üç noktadan geçen düzlemin denklemi:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-2 \\ 1-0 & -2+1 & -1-2 \\ 3-0 & 1+1 & 0-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ dir.}$$

Üçüncü dereceden determinanı çözmekle

$$2x - 9(y+1) + 2(z-2) + 3(z-2) + 6x + 2(y+1) = 0$$

$$8x - 7(y-2) + 5(z-3) = 0$$

$$8x - 7y + 5z - 1 = 0.$$

Elde edilir. Dolayısıyla bu düzlemin genel denklemi:

$$8x - 7y + 5z - 1 = 0$$

olarak elde edilir.

1

$M_1(1, -1, -3)$, $M_2(-1, 2, 0)$ ve $M_3(-5, -2, 1)$ doğrusal olmayan üç noktadan geçen düzlemin denklemini yazınız.

Çalışma alıştırmaları

1. Aşağıdaki üç noktadan geçen düzlemin denklemini yazınız:

a) $M_1(0, 1, -3)$, $M_2(1, 2, 0)$, $M_3(-1, -2, 1)$;

b) $M_1(-2, 4, -10)$, $M_2(1, 4, 5)$, $M_3(0, 2, 0)$.

2. Verilen noktalar komplanar olup olmadığını yoklayınız:

a) $A(1, 2, -3)$, $B(3, 2, 2)$, $C(4, 5, 1)$, $D(-4, -3, 1)$

b) $A(0, 1, -2), B(1, 0, -1), C(1, 1, 0), D(2, -1, 0)$

Cevap evet ise, bu düzlemin denklemini belirtiniz.

3. $\triangle ABC / A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6) /$ düzleminin denklemini yazınız. Ondan sonra $M(-1, 2, 3), N(2, 1, -3), S(0, -2, 1)$ noktalarından herhangi biri bu düzleme ait olup olmadığını belirtiniz

8. İki Düzlemin Karşılıklı Durumu

İki düzlemin karşılıklı durumları şu şekilde olabilir: iki düzlem birbirine paralel olabilir, (çakışabilir veya ortak noktaları olmayabilir) veya kesişiyorlar.

$$\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

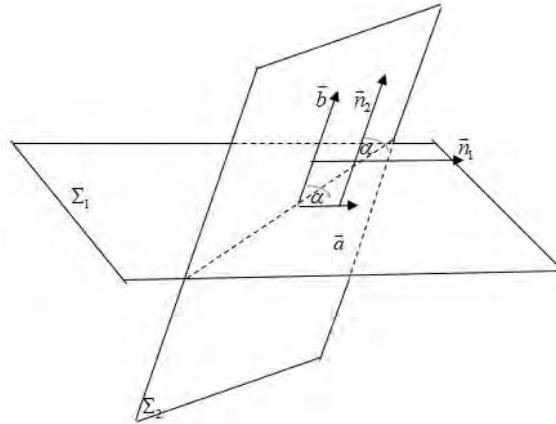
$$\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Genel biçimde verilen iki düzlem alalım:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_1 \perp \Sigma_1 \text{ ve } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2), \vec{n}_2 \perp \Sigma_2.$$

Bu düzlemlere dik olan vektörler şunlardır:

Düzlemler Arasındaki Açı. İki düzlem kesiştiğinde, $\alpha = \angle(\Sigma_1, \Sigma_2)$ açısını oluştururlar. Bu açı aslında normal vektörleri arasındaki açıdır, $\alpha = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. İki düzlem arasındaki açı olarak α ve $\pi - \alpha$ iki açıdan küçüğünü kabul ederiz. Küçük açı olarak $\vec{n}_1$ ve $\vec{n}_2$ arasındaki α açısını alalım, Şekil 8.



Şekil 8

α açısını $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ vektörlerinin skaler çarpımı ile hesaplayabiliriz, yani:

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha$ Buradan $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ olarak α açısını elde ederiz. Dik durumda $\vec{n}_1$ ve $\vec{n}_2$ vektörlerin koordinat biçimini kullanırsak, şu formül elde edilir:

$$\cos \alpha = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

İki düzlemin kesişimi bir doğrudur, bu şekil 8'de açıkça görülmektedir.

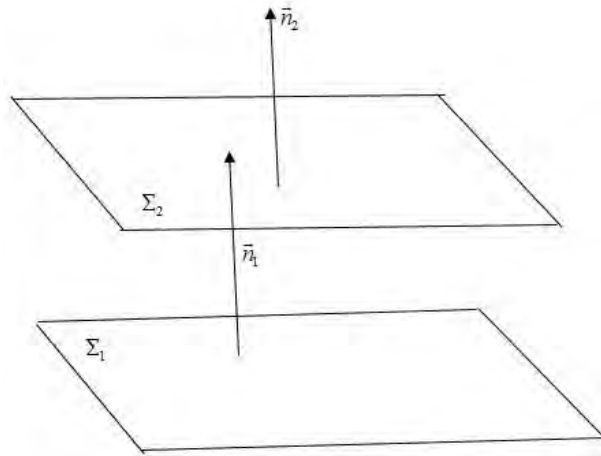
İki düzlemin dik olma koşulu. İki düzlem kesişsin ve aralarındaki açı $\alpha = 90^\circ$ olsun. O zaman $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ dik vektörlerin skaler çarpımı sıfırdır, yani $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Dik vektörlerin skaler çarpımının koordinat biçimini kullanarak $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ elde ederiz.

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_1 \perp \Sigma_1 \text{ ve } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2), \quad \vec{n}_2 \perp \Sigma_2 \text{ için,}$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

eşitliği, iki Σ_1 ve Σ_2 düzlemlerinin **dik olma (ortogonalite) koşulunu** temsil eder.

İki düzlemin paralellik koşulu. İki düzlem paralel olduğunda, $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$, normal vektörleri de paraleldir, $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, Şekil 9.



Şekil 9

Şekil 9'dan açıkça görülebilir ki, $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ normal vektörleri kolineer vektörlerdir. O halde λ olmak üzere öyle bir gerçekte sayı var ki, $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$. Koordinatlarını kullanarak $A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2$ elde edilir. Buradan $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$ sonucu çıkar.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

eşitliği, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ ve $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$ olan iki Σ_1 ve Σ_2 düzleminin **paralellik koşulunu** temsil eder.

Paralellik koşulu sağlanırsa ve $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$ ise, iki düzlem çakışır, $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Paralellik koşulu sağlanırsa, ancak $\frac{D_1}{D_2} \neq \lambda$ ise, iki düzlemin ortak noktası yoktur, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.

Örnek 1

$\Sigma_1: 3x - 3y + 9z - 2 = 0$ ve $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ düzlemleri paraleldir, $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$, çünkü $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} \neq 1$ Ancak, $\Sigma_1: 3x - 3y + 9z - 6 = 0$ ve $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ düzlemleri çakışiktır, $\Sigma_1 = \Sigma_2$, çünkü $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$. Öte yandan, $\Sigma_1: 4x + 2y + z - 2 = 0$ ve $\Sigma_2: x + y + 2z - 1 = 0$ düzlemleri kesişir, çünkü $\frac{4}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$ dir.

1

Aşağıdaki düzlemlerin karşılıklı durumlarını belirtelim.

- a) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ b) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + z - 2 = 0$
c) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + z - 1 = 0$

Örnek 2

$\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$ ve $\Sigma_2: x + y + 2z - 1 = 0$ düzlemlerinin kesişim açısı α 'yı belirleyelim. Normal vektörleri $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ ve $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$ 'dir. Yukarıdaki formüle göre şunları elde ederiz:

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha \approx 62^\circ.$$

2

$2x - 3y + z - 2 = 0$ ve $x + y + z + 3 = 0$ düzlemleri arasındaki α açısını belirtiniz.

Örnek 3

$M(1, -1, 0)$ ve $N(2, -3, 1)$ noktalarından geçen ve $\Sigma_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$ düzlemine dik olan Σ_1 düzleminin denklemini bulalım. $M \in \Sigma_1: A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0$

$N \in \Sigma_1: A(2-1) + B(-3+1) + C \cdot 1 = 0$ dır. Dik olma koşulundan $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$ için

$2A - B + 3C = 0$ 'dır. Şunları elde ederiz:

$$\begin{cases} A - 2B + C = 0 \\ 2A - B + 3C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2B - A \\ 2A - B + 6B - 3A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2B - A \\ -A + 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -3B \\ A = 5B \end{cases}$$

$B = 1$ alırsak, $C = -3$ ve $A = 5$ elde ederiz. Düzlemin denklemi şöyle olacaktır:

$$\Sigma_1: 5x + y - 3z - 4 = 0$$

3

$M(1, -1, 0)$ noktasından geçen ve $\Sigma_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$ düzlemine paralel olan Σ_1 düzleminin denklemini yazınız.

Çalışma alıştırımları

1. Aşağıdaki iki düzlemin karşılıklı durumunu belirleyin:

a) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: 6x - 8y + 2z - 2 = 0;$

b) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: 6x - 8y + 2z - 5 = 0;$

c) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: x - 2y + z - 1 = 0.$

Kesişen düzlemler için kesişim açısı α 'yı bulunuz.

2. Koordinat başlangıcından geçen ve $\Sigma_1: x - y + z - 1 = 0, \Sigma_2: x + y - 2z - 3 = 0$ düzlemlerine dik olan Σ düzleminin denklemini yazınız.

3. $M(1, -1, 0)$ ve $N(2, 3, -2)$ noktalarından geçen ve $\Sigma_1: 2x + 3y - z - 2 = 0$ düzlemine dik olan Σ_1 düzleminin denklemini yazınız.

4. $N(2, 3, -2)$ noktasından geçen ve $\Sigma_2: x - y + z = 0$ düzlemine paralel olan Σ_1 düzleminin denklemini yazınız.

9. Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı

Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığını belirlemek için, bir düzlem denkleminin normal vektör biçimini elde etme yaklaşımını kullanacağız.

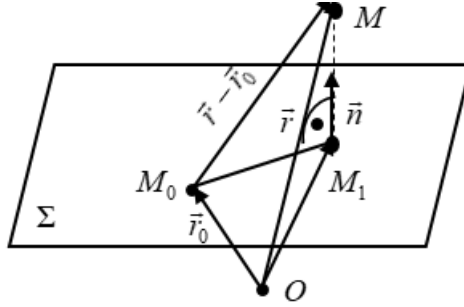
- Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığı nedir?

Bu sorunun cevabı, noktanın düzleme olan en kısa uzaklığıdır. $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ yarıçap vektörüne sahip Σ düzleminde keyfi bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası ve $\vec{n} \perp \Sigma$, $\vec{n} = (A, B, C)$ vektörü olsun. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasına ve M_1 noktasının Σ düzlemine olan uzaklığını hesaplamak istiyoruz. $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)$ yarıçap vektörüne sahip $M_1(x_1, y_1, z_1)$ noktası için, Σ düzlemi üzerindeki M_1 izdüşümünü buluyoruz. O halde

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \text{ dir.}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasının Σ düzlemine olan uzaklığı, $\vec{r} - \vec{r}_0$ vektörünün $\vec{n}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür.

$$\begin{aligned} d = \overline{MM_1} &= |\text{pr}_{\vec{n}}(\vec{r} - \vec{r}_0)| = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$



Şekil 10

Tanım 1: $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n} \perp \Sigma$ olmak üzere $M(x_1, y_1, z_1)$ noktasının Σ düzlemine uzaklığı

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

formülüyle hesaplanır.

Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığının $d \geq 0$ olduğu açıktır. Nokta düzlem üzerinde bulunuyorsa, uzaklık $d = 0$ dir.

Örnek 1

Verilen $A(-1, 2, -3)$, $B(0, 5, -2)$ ve $C(-1, -1, 1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini belirtelim:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12(x+1) - 3(z+3) + 3(x+1) - 4(y-2) = 15x - 4y - 3z + 14,$$

yani $15x - 4y - 3z + 14 = 0$. O halde $M(1, 1, -1)$ noktasının düzleme uzaklığı:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|15 - 4 + 3 + 14|}{\sqrt{225 + 16 + 9}} = \frac{28}{5\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{25} \text{ dir.}$$

1

$M(1, 0, -2)$ noktasının $A(-1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $x - 2y + z - 4 = 0$ düzlemine paralel olan düzleme uzaklığını hesaplayınız.

Örnek 2

$2x - y - 2z - 2 = 0$ düzlemine paralel ve bu düzlemden 4 birim uzaklıkta olan bir düzlemin denklemini oluşturalım.

Verilen $2x - y - 2z - 2 = 0$ düzlemi ile paralel olan ve belirlenmesi gereken düzlem arasındaki uzaklığı bulmak için, verilen düzlemden keyfi bir nokta alacağız. $M(1, 1, 0)$ noktası $2x - y - 2z - 2 = 0$ düzleminden bir nokta olduğunu varsayalım. Verilen uzaklıktan şunları elde ederiz:

$$d = \frac{|A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|A + B + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 4.$$

Düzlemlerin paralellikinden $\frac{A}{2} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{-2} = k$ elde ederiz, buradan $A = 2k$, $B = -k$, $C = -2k$.

$k = 1$ ise, $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$ elde ederiz.

Verilen uzaklıktan şunları elde ederiz: $\frac{|2 - 1 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 4 \Leftrightarrow |1 + D| = 12 \Leftrightarrow D_1 = 11; D_2 = -11$ Buradan, verilen koşulları sağlayan iki düzlem denklemi $2x - y - 2z + 11 = 0$ ve $2x - y - 2z - 11 = 0$ elde ederiz.

2

$2x - 3y + z - 4 = 0$ ve $4x - 6y + 2z - 5 = 0$ iki paralel düzlem arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çalışma alıştırılmaları

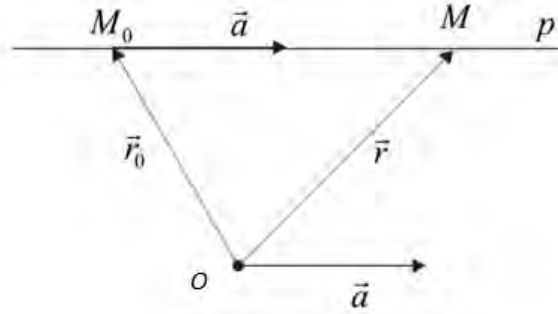
1. $A(-1, 2, 3)$ noktasının $x - 2y - 3z - 3 = 0$ düzlemine olan uzaklığını hesaplayın.
2. $x - 2y - 3z - 3 = 0$ ve $3x + y - z + 6 = 0$ düzlemlerinden eşit uzaklıkta bulunan z eksenindeki bir noktayı belirleyiniz.
3. $A(-1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$ doğrusuna dik olan düzlemden koordinat başlangıcına olan uzaklığı hesaplayınız.
4. $ABCD / A(1, 2, -3), B(0, 1, 2), C(-3, 0, -1), D(1, -1, -2) /$ düzgün dörtyüzlünün A köşesinden indirilen yüksekliğin uzunluğunu hesaplayınız.
5. $x + 2y - 2z + 2 = 0$ düzleminden 5 birim uzaklıkta bulunan y eksenindeki bir noktayı belirleyin.

10. Uzayda Doğrunun Denklemleri

Burada uzayda doğru denklemleri verilecektir: bir doğrunun denkleminin parametrik biçimi, bir doğrunun denkleminin kanonik biçimi, iki noktadan geçen bir doğrunun denklemi ve kapalı olarak verilen bir doğru (iki düzlemin kesişimi olarak).

Bir doğru denkleminin vektörel biçimi

Uzayda bir p doğrusu, sıfır olmayan $\vec{a}$ vektörüne $\vec{a} \neq \vec{0}$ paralel ve r_0 yarıçap vektörüne sahip keyfi bir M_0 noktasından geçsin. p doğrusunun denklemini elde etmek için, p doğrusundan r yarıçap vektörüne sahip bir M noktası seçiyoruz, Şekil 11.



Şekil 11

Şekil 11'e göre, $\vec{a}$ vektörünün $\overrightarrow{M_0M}$ vektörüyle kolinear olduğunu görüyoruz, yani öyle bir t skaleri var ki, $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$. Buna göre, M noktasının yarıçap vektörü için,

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}.$$

Tanım 1:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$$

eşitliği, $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektörüne paralel ve $\vec{r}_0$ yarıçap vektörüne sahip keyfi bir M_0 noktasından geçen bir doğrunun vektörel denklem biçimidir; burada t bir skalerdir. $\vec{a}$ vektörüne **doğrunun taşıyıcı vektörü** (taşıyıcı) denir.

Bir doğru denkleminin parametrik biçimi

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$ doğrusunun vektörel denklemi ve $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve $\vec{r} = (x, y, z)$ vektörlerinin koordinat biçimlerini kullanarak şunları elde ederiz:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a_1, a_2, a_3).$$

Elde edilen $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$, $z = z_0 + a_3 t$ denklemleri, p doğrusunun koordinat biçimindeki denklemlerdir.

Tanım 2:

$$x = x_0 + a_1 t$$

$$y = y_0 + a_2 t$$

$$z = z_0 + a_3 t$$

denklemlerine, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörüne paralel ve $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen bir doğrunun parametrik denklem biçimi denir; burada t bir skalerdir.

Örnek 1

: $\vec{a} = (-1, 1, 2)$ vektörüne paralel ve $M_0(2, 0, -3)$ noktasından geçen bir doğrunun

$$x = 2 - t$$

$$y = t$$

$$z = -3 + 2t.$$

parametrik denklem biçimi şu denklemlerle verilir:



$\vec{a} = (1, -2, -3)$ vektörüne paralel ve koordinat başlangıcından geçen bir doğrunun parametrik denklemini yazınız.

Bir Doğru Denkleminin Kanonik Biçimi

$a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ için bir doğrunun parametrik denklem biçimi olan denklemlerin küçük bir dönüşümüyle, doğrunun yeni bir denklem biçimi elde edilir. Küçük dönüşüm, t skalerini üç denklemden de ifade etmek ve sağ taraflarını eşitlemektir:

$$t = \frac{x-x_0}{a_1}, t = \frac{y-y_0}{a_2}, t = \frac{z-z_0}{a_3},$$

Tanım 3:

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

eşitliğine, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörüne paralel ve $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen **doğrunun kanonik denklem biçimi** denir; burada t bir skalerdir.

Bir doğrunun kanonik denklem biçiminde, doğrunun taşıyıcı vektörü $\vec{a}$ 'nın koordinatları olan a_1, a_2, a_3 ile bölüldüğü görülmektedir.

Aşağıdaki soru ortaya çıkmaktadır:

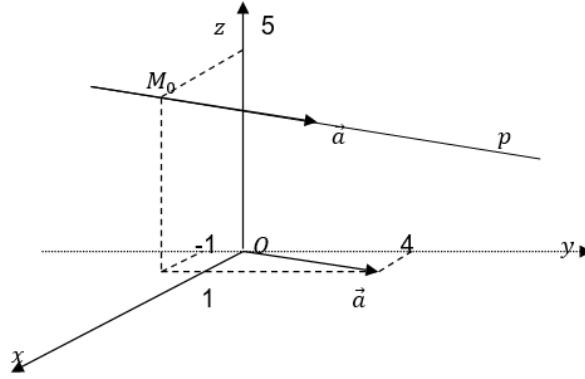
- $\vec{a}$ vektörünün koordinatlarından biri sıfır olduğunda bir doğrunun kanonik denklem biçimi ne olur?

Taşıyıcı vektör $\vec{a}$ 'nın koordinatlarından biri sıfırsa, yani a_1, a_2, a_3 'ten biri sıfırsa, örneğin $a_1 = 0$,

$$x-x_0=0, \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}.$$

$a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ ise, doğrunun kanonik denklem biçimi şudur:

Örnek 2 : $M_0(1, -1, 5)$ noktasından geçen ve $\vec{a} = (1, 4, 0)$ vektörüne paralel olan p doğrusunu Kartezyen dik koordinat sisteminde gösterelim, Şekil 12.



Şekil 12

Denklemin parametrik biçimi $x = t + 1, y = 4t - 1, z = 5$ 'tir.

Denklemin kanonik biçimi $x - 1 = \frac{y + 1}{4}, z - 5 = 0$ 'dır.

b) $\vec{a} = (-4, 3, -1)$ vektörüne paralel ve $M_0(-2, -3, 1)$ noktasından geçen bir doğrunun parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x &= -2 - 4t \\ y &= -3 + 3t \\ z &= 1 - t \end{aligned} \quad \text{dir.}$$

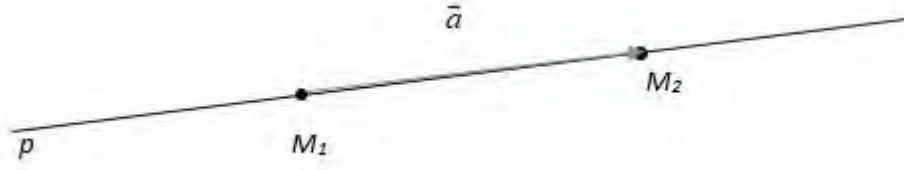
Doğrunun kanonik denklem biçimi ise $\frac{x + 2}{-4} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-1}$ 'dir.

2 $\vec{a} = (1, -2, -3)$ vektörüne paralel ve koordinat başlangıcından geçen bir doğrunun kanonik denklem biçimini yazınız.

İki noktadan geçen doğru denklemi

t doğrusu $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçsin, Şekil 13. O zaman t doğrusu $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ vektörüne paraleldir ve $M_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçer. Bu doğrunun kanonik biçimi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{dir.}$$



Şekil 13

Tanım 4:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

denklemini, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemidir.

Örnek 3 : $M_1(2, -1, 2)$ ve $M_2(1, -2, 0)$ noktalarından geçen doğrunun kanonik denklemi

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2} \text{ dir.}$$

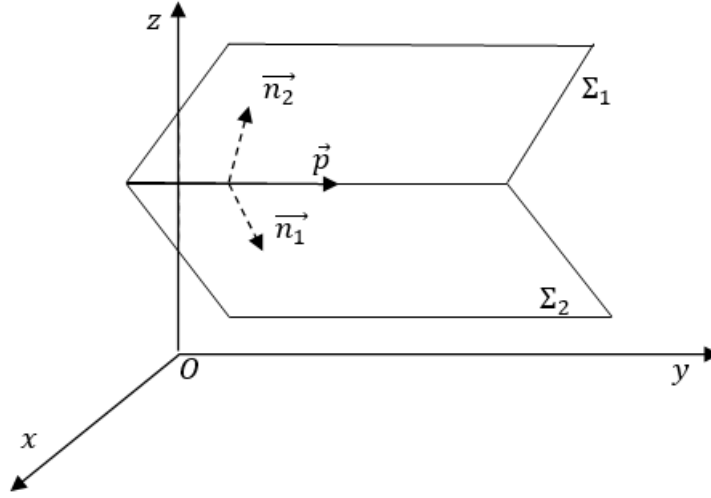
3

$ABCD / A(1, -2, -3), B(2, 3, -6), C(-3, 5, 4), D(-5, -6, 4)$ / dörtgeninin B köşesinden geçen ve $ABCD$ dörtgeninin AC köşegenine paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

Kapalı şekilde verilen doğru (iki düzlemin kesişimi biçiminde)

Paralel olmayan iki düzlemin karşılıklı durumunu incelerken, bu düzlemlerin bir açı oluşturduğunu ve kesişimlerinin bir doğru olduğunu söylemiştik. İki paralel olmayan düzlemin kesişimi bir doğru olduğundan (Şekil 14), bu biçimi bir doğru denklemi olarak kabul edebiliriz:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



Şekil 14

Tanım 5:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

biçimindeki doğru denklemini **kapalı doğru denklemi (bir doğrunun genel şekli)** denir. Burada $\Sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $\Sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ paralel olmayan iki düzlemdir.

Kapalı biçimde verilen herhangi bir doğru denklemini, doğrunun iki düzlemin dikey vektörlerine dik olduğunu bilerek, bir doğrunun kanonik denklem biçimine dönüştürebiliriz. Bu nedenle, iki dikey vektörün vektörel çarpımını, aynı zamanda onlara dik olan taşıyıcı vektörü olarak alabiliriz. İşlem aşağıdaki gibidir:

Doğruya paralel olan vektör şudur:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq 0,$$

Burada $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp \Sigma_1$ ve $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp \Sigma_2$ iki düzlemin dikeyl vektörleridir. Sistemdeki iki denklemi de sağlayan bir $M_o(x_o, y_o, z_o)$ noktası bulunabilir, yani M_o doğru üzerinde bir noktadır, bu nedenle doğrunun kanonik denklem biçimi şudur:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Örnek 4 Kapalı şekilde verilmiş olan

$$p: \begin{cases} x-2y+3z+4=0 \\ 5x+4y-z+2=0 \end{cases}$$

p doğrusunun kanonik şeklini belirtelim.

Bu doğruya paralel olan vektörü belirtelim.

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-10, 16, 14).$$

Doğru üzerinde bulunan $M_0(0, y, z)$ noktası iki düzlemin de denklemini sağlar:

$$\begin{cases} -2y+3z+4=0 \\ 4y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+12y+6+4=0 \\ z=4y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=-2. \end{cases}$$

yani $M_0(0, -1, -2)$ noktasıdır. O halde bu doğru denkleminin kanonik şekli

$$\frac{x}{-10} = \frac{y+1}{16} = \frac{z+2}{14} \text{ dir.}$$



4 kapalı şekilde verilen p doğrusu kanonik denklem biçiminde yazınız:

$$p: \begin{cases} -3x-2y+z+1=0 \\ x+4y-z-3=0 \end{cases}$$

Ardından, $M(0, 1, 1)$ noktasının p doğrusu üzerinde olup olmadığını kontrol ediniz!

Çalışma alıştırmaları

1. $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ vektörüne paralel ve $A(1, 2, -2)$ noktasından geçen doğrunun parametrik ve kanonik denklem biçimini yazınız.
2. $\Sigma: -3x - 2y + z + 1 = 0$ düzlemine dik ve $B(3, -5, -7)$ noktasından geçen doğrunun parametrik ve kanonik denklem biçimini yazınız.

3. $p: \begin{cases} 2x+3y-z-1=0 \\ x-2y+4z+5=0 \end{cases}$ doğrusundan geçen ve y - eksenine paralel olan düzlemin denklemini yazınız.
4. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = z-5$ doğrusundan ve koordinat başlangıcından geçen düzlemin denklemini yazınız.
5. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{4}$ doğrusuna paralel ve $C(0, -1, -2)$ noktasından geçen bir doğrunun denklemini yazınız.
6. $A(-1, 2, -3), B(1, 3, -5), C(0, 4, 6)$ koordinatlarıyla verilen $\triangle ABC$ üçgeninin her köşesinden geçen ve karşıt kenarlara paralel olan doğruların denklemlerini yazınız.
7. $A(-1, 2, 5), B(-2, -3, -6), C(-3, 5, 4), D(5, -6, 4)$ koordinatlarıyla verilen $ABCD$ dörtgeninin her köşesinden geçen ve $ABCD$ dörtgeninin komşu köşelerini birleştiren köşegenine paralel olan bir doğrunun denklemini yazınız.

11. Bir Doğru ve Düzlemin Karşılıklı Durumları

Karşılıklı durumlarına göre, bir p doğrusu ve bir Σ düzlemi paralel olabilir ($p \parallel \Sigma$ işaretiyle, p doğrusu ve Σ düzleminin ortak noktası yoktur, $p \cap \Sigma = \emptyset$, veya p doğrusu Σ düzlemi üzerinde bulunur) veya bir ortak noktaları olabilir, yani p doğrusu Σ düzlemini keser (özellikle, p doğrusu Σ düzlemine dik olabilir, $p \perp \Sigma$).

Bir p doğrusu ve bir Σ düzlemi verilmiş olsun:

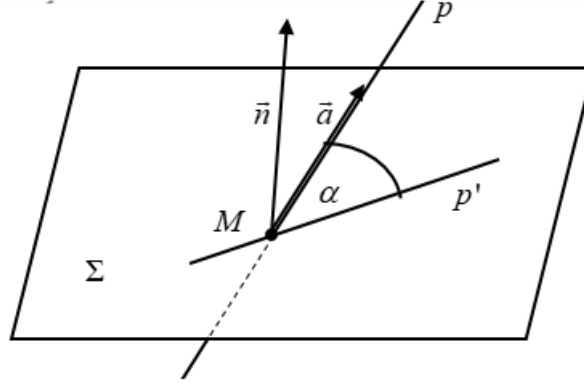
$$p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

$$\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$$

burada p doğrusunun taşıyıcı vektörü $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in p$ noktası ve Σ düzlemine dik olan vektör $\vec{n} = (A, B, C)$ 'dir.

Doğru düzlemi keser

p doğrusu ve Σ düzlemin bir ortak noktası M olsun, yani $M \in p \cap \Sigma = \{M\}$, şekil 15.



Şekil 15

p doğrusu ve Σ düzlemi arasındaki α açısı, p doğrusunun Σ düzlemi üzerindeki dik izdüşümü p' ile oluşturduğu iki komşu açıdan küçüğüdür, yani bu iki açı, $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ koşulunu sağlayan bütünler açılardır. Küçük açı alındığından, $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ olduğunu varsayabiliriz. p doğrusu ve $\vec{n}$ arasındaki

açı $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 'dır. Herhangi bir açı için trigonometrik formülden $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ geçerlidir. Buradan $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{n} = (A, B, C)$ arasındaki açı için skaler çarpım tanımından şunları elde ederiz:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}, \text{ yeni}$$

$$\sin \alpha = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Doğrunun düzlemi kestiği noktaya **kesişim noktası** denir.

Örnek 1

$p: \frac{x-8}{-3} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-7}{-1}$ doğrusu $\Sigma: 5x + 3y - 4z + 16 = 0$ düzlemini keser ve kesişim noktasını elde etmek için, p doğrusunun kanonik denklem biçimini parametrik biçime dönüştürmekle M noktası bulunur,

$$\begin{aligned} x &= 8 - 3t \\ y &= -6 + 2t \\ z &= 7 - t. \end{aligned}$$

Bunu düzlemin denkleminde yerine koyarak

$$5(8 - 3t) + 3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 16 = 0 \Rightarrow 5t = 10 \Rightarrow t = 2$$

elde edilir.

Doğrunun ve düzlemin kesişim noktası $M(2, -2, 5)$ dir.

p doğrusu ve Σ düzlemi arasındaki α açısını aşağıdaki formülle hesaplayacağız:

$$\sin \alpha = \frac{|(-3) \cdot 5 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4)|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \alpha \approx 11^\circ.$$

1 $p: x-1=2y=\frac{4-z}{2}$ doğrusunun ve $\Sigma: 2x+3y-z+1=0$ düzleminin kesişim noktasını belirtiniz.

Özel durum, $p \perp \Sigma$, yani p doğrusu ve Σ düzlemi arasındaki açı $\alpha = 90^\circ$ dir. O zaman p doğrusunun taşıyıcı vektörü $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve Σ düzlemine dik olan $\vec{n} = (A, B, C)$ vektörü doğrudur. Yani öyle

bir λ skaleri var ki $\vec{a} = \lambda \vec{n}$ dir. Onların koordinat biçimlerini kullanarak $\lambda = \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$ elde edilir.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ doğrunun taşıyıcı vektörü ve $\vec{n} = (A, B, C)$ düzlemin dik vektörü olmak üzere ,

$$\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$$

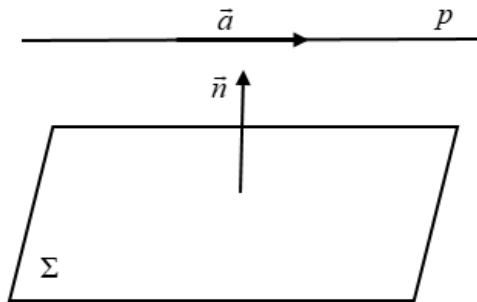
formülü, bir **doğru ve düzlemin dik olma şartıdır**.

Örnek 2 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{5}$ doğrusu $2x-3y+5z-1=0$ düzlemine diktir, çünkü

$$\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = \frac{5}{5} \text{ 'tir.}$$

Doğru düzleme paraleldir

p doğrusu Σ düzlemine paralel olsun, yani $p \parallel \Sigma$, şekil 16.



Şekil 16

$p \parallel \Sigma$ olduğu durumda, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \perp \vec{n} = (A, B, C)$ 'dir. Bu durumda, p doğrusunun taşıyıcı vektörünün ve düzleme $\vec{a}$ dik olan $\vec{n}$ vektörünün skaler çarpımı sıfırdır, yani $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ 'dır. Koordinat biçimlerini kullanarak $a_1A + a_2B + a_3C = 0$ elde ederiz.

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0$$

eşitliğine, taşıyıcısı $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olan doğru ve dik vektörü $\vec{n} = (A, B, C)$ olan düzlem arasında **paralel olma şartı** denir.

Özel olarak, $p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ doğrusu $\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi üzerinde olmak için, paralellik koşulunu $a_1A + a_2B + a_3C = 0$ sağlaması ve aynı zamanda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası düzlem denklemini $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ sağlaması gerekir.

Örnek 3

a) $p: \frac{x-1}{2} = 2-y = z+1$ doğrusu $\Sigma: x + y - z - 4 = 0$ düzlemine paraleldir, çünkü paralellik koşulu $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$ sağlanır. $1 + 2 + 1 - 4 = 0$ 'dan bu p doğrusunun Σ düzlemi üzerinde olduğu sonucu elde edilir.

b) $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z+1$ doğrusu $\Sigma: x + y - z - 1 = 0$ düzlemine paraleldir, fakat Σ düzlemi üzerinde değildir, çünkü paralellik koşulu $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$ sağlanır, ancak $1 + 2 + 1 - 1 = 3 \neq 0$ 'dır, yani $p \cap \Sigma = \emptyset$ elde edilir.

2

Verilen doğrunun düzlemle karşılıklı durumunu belirtiniz:

a) $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = z-4, \Sigma: 2x-y+z-6=0;$

b) $p: \frac{x+2}{-2} = y-1 = \frac{z+1}{-1}, \Sigma: 2x-y+z-6=0.$

Çalışma alıştırmaları

- 1 $p: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ doğrusunun $\Sigma: x + 2y + 3z + 4 = 0$ düzlemiyle kesişim noktasını belirtiniz. p doğrusu ve Σ düzlemi arasındaki açı ne kadardır?

2. $p: x = y = 6 - z$ doğrusunun $\Sigma: 2x - y + z - 6 = 0$ düzlemiyle karşılıklı durumunu belirtiniz.
3. $p: x - 1 = \frac{y}{2} = z + 2$ doğrusuna dik olan ve $A(-1, 2, -3)$ noktasından geçen Σ düzleminin denklemini yazınız. Ardından, kesişim noktasını bulunuz!
4. Koordinat başlangıcından geçen ve üzerinde $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ doğrusu olan Σ düzleminin denklemini yazınız.
5. $B(-1, -4, 4)$ noktasından geçen ve $\Sigma: 2x + 5y - 3z - 4 = 0$ düzlemine dik olan p doğrusunun denklemini yazınız. Ardından, kesişim noktasını belirtiniz!

12. İki Doğrunun Karşılıklı Durumları

Uzayda iki doğrunun karşılıklı durumuyla ilgili şunu diyebiliriz: Doğrular kesişebilir, paralel olabilir ya da ayrık olabilirler. Her durumu ayrı ayrı ele alalım.

İki doğru verilmiş olsun:

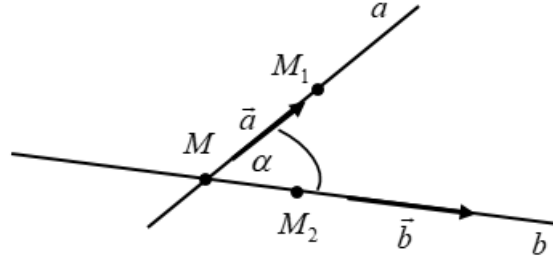
$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

$$b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

burada $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ taşıyıcı vektörler ve $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sırasıyla a ve b doğrularına ait noktalardır.

Doğrular kesişir

a ve b doğruları $M(x, y, z)$ noktasında kesişiyor, şekil 17. a ve b iki doğru arasındaki α açısı, taşıyıcı vektörleri $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ arasındaki açıdır. İki düzlemin kesişiminde olduğu gibi, a ve b iki doğru arasındaki α açısını da taşıyıcı $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörlerin skaler çarpımını kullanarak bulabiliriz.



Şekil 17

Tanım 1: a ve b doğruları arasındaki α açısı

$$\cos \alpha = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

ile verilir, burada $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ taşıyıcı vektörleri ve $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sırasıyla a ve b doğrularının noktalarıdır.

a ve b doğrularının $M(x, y, z)$ kesişim noktasını, parametrik biçimde verilen denklemlerinin bir sisteminin çözülmesiyle elde edilir.

Örnek 1

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6}$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

doğruları için, taşıyıcı vektörler $\vec{a} = (-2, 3, 6), \vec{b} = (1, -2, 2)$ ve $M_1(0, 5, -15)$ ve $M_2(2, 0, -1)$ noktaları sırasıyla a ve b doğruları üzerinde bulunan noktalardır. Bu iki doğrunun oluşturduğu α açısı aşağıdaki formülle elde edilir:

$$\cos \alpha = \frac{|(-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{21} \Rightarrow \alpha \approx 79^\circ.$$

a ve b doğrularının $M(x, y, z)$ kesişim noktasını ($a \cap b = \{M\}$) aşağıdaki işlemle bulacağız. İlk olarak, verilen denklemleri parametrik biçime dönüştürelim:

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6} = t$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2} = k$$

$$\begin{aligned} a : x &= -2t, y = 3t + 5, z = 6t - 15 \\ b : x &= k + 2, y = -2k, z = 2k - 1 \end{aligned}$$

İki bilinmeyenli üç doğrusal denklemden oluşan bir sistem elde ederiz:

$$\begin{cases} k + 2 = -2t \\ -2k = 3t + 5 \\ 2k - 1 = 6t - 15 \end{cases}$$

Çözümü $t = 1, k = -4$ 'tür. O halde $x = -2, y = 8, z = -9$, yani $M(-2, 8, -9)$ elde edilir.

İki doğrunun kesiştiği özel bir durum, a ve b doğrularının dik olduğu durumdur, yani $a \perp b$. O zaman taşıyıcı vektörler diktir, yani $\vec{a} \perp \vec{b}$. Skaler çarpımları sıfırdır, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Koordinat biçimlerini kullanarak $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$ elde ederiz.

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

eşitliğine, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ taşıyıcılarına sahip **doğruların dik olma şartı** denir.

Örnek 2

$$\begin{aligned} a : \frac{x-2}{-1} &= \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1} \\ b : \frac{x-3}{-1} &= z, y-3=0 \end{aligned}$$

doğruları için, taşıyıcı vektörleri $\vec{a} = (-1, -1, -1), \vec{b} = (-1, 0, 1)$ ve diklik şartı $(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0$ sağlanır. Yani a ve b doğruları diktir, $a \perp b$.

1

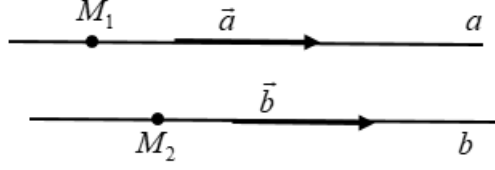
Aşağıdaki doğruların oluşturduğu α açısını belirtiniz:

$$\begin{aligned} a : \frac{x-1}{2} &= y-2 = \frac{z+3}{4} \\ b : \frac{x-6}{5} &= \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-2} \end{aligned}$$

Doğrular birbirine göre dik midir? Ondan sonra kesişim noktalarını belirtiniz.

Doğrular paraleldir

a ve b doğruları paralel olsun ($a \parallel b$), Şekil 18.



Şekil 18

Taşıyıcı vektörler $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ birbirine paraleldir, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, yani bu iki vektör doğru-
daştır. O halde öyle bir skaler λ var ki $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ 'dir. Koordinat biçimlerini kullanarak $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
elde ederiz.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

eşitliğine, taşıyıcıları $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olan **doğruların paralellik şartı** denir.

Örnek 3

doğruları paraleldir ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) ve doğruların paralellik şartı sağlanır:

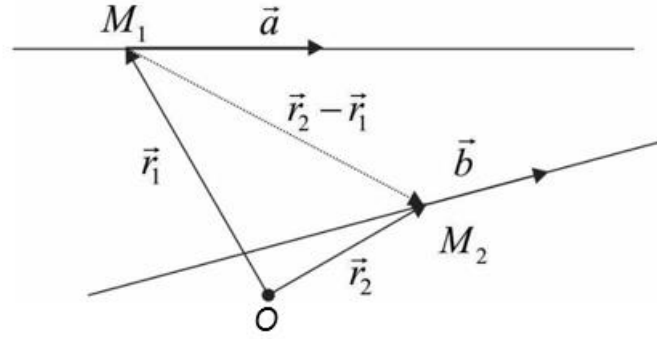
$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

Kesişen iki doğru veya paralel iki doğru aynı düzlem üzerinde bulundukları durumunda, taşıyıcı

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{-4}{-8}$$

vektörler $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektörü aynı düzlem üzerinde bulunuyorlar, yani
komplanar oldukları anlamına gelir; burada $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarının her biri birer
doğru üzerindedir, şekil 19.



Şekil 19

Üç komplanar vektörün karma çarpımının sıfır olduğunu bildiğimizden, yani $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, vektörlerin koordinat biçimlerini kullanarak şunları elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Taşıyıcı vektörleri $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olan ve $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarından geçen **iki doğrunun komplanar (düzlemsel) olma şartı** şu eşitlik ile veriliyor:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Komplanar olma koşulu aynı zamanda **iki doğrunun kesişme şartıdır**.

Örnek 4 a) Kesişen örnek 1'deki doğrular için:

$$a : \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6}$$

$$b : x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

$\vec{a} = (2, 3, 6)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$ taşıyıcı vektörleri ve $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 2, 1)$ vektörü için komplanarlık koşulu geçerlidir.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 14 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 56 - 30 - 42 + 24 - 20 = 0 .$$

b) Paralel olan Örnek 2'deki doğrular için:

$$a: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$b: \frac{x-3}{-1} = z, y-3=0$$

$\vec{a} = (-1, -1, -1), \vec{b} = (-1, 0, 1)$ taşıyıcı vektörleri ve $\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 0, -1)$ vektörü için komplanarlık koşulu sağlanır:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 .$$

c) Örnek 3'teki paralel doğrular için:

$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

$\vec{a} = (3, 1, -4), \vec{b} = (6, 2, -8)$ taşıyıcı vektörleri ve $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 2, 1)$ vektörü için komplanarlık koşulu sağlanır:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 48 - 6 - 8 + 48 = 0 .$$



2 Aşağıdaki doğrular verilmiştir:

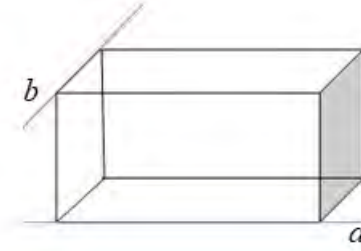
$$a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$b: x-2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

a ve b doğruları aynı düzleme ait midirler?

Ayrık Doğrular

İki doğru kesişmiyorsa ve paralel değilse, ayrık doğrular olarak adlandırılırlar. Şekil 20’de iki ayrık a ve b doğrusu verilmiştir. Kesişen veya paralel olan iki doğru bir düzlem oluşturduğundan, daha önce de bahsettiğimiz gibi komplanarlık koşulu onlar için geçerlidir. Bu nedenle, iki doğru ayrık ise, komplanarlık koşulu onlar için geçerli değildir.



Şekil 20

Tanım 2: Taşıyıcıları $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri olan ve $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ noktaları sırasıyla

$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$
$$b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

doğrularına ait olan doğrular için,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

koşulu sağlandığı durumda, doğrular **aykırıdır**.

Örnek 5

$$a: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$
$$b: -x = \frac{y+1}{-4} = z$$

doğruları için

taşıyıcı vektörleri $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, -4, 1)$ ve $\overrightarrow{M_1M_2} = (0, -2, 0)$ vektörü için komplanarlık koşulu sağlanmaz:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 + 4 = 6 \neq 0.$$

a ve b ayrık doğrudur.

3 Aşağıdaki doğrular verilmiştir

$$a: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$$

$$b: x-2 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Bir düzlem oluşturup oluşturmadıklarını veya ayrık olup olmadıklarını kontrol ediniz!

Çalışma alıştırmaları

1. Aşağıdaki doğruların karşılıklı durumunu inceleyiniz:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ ve $\frac{x+3}{-4} = y-4 = \frac{z}{3};$

b) $\frac{x-4}{2} = y = \frac{z+1}{2}$ ve $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{5}.$

2. $A(1, 2, -1)$ noktasından geçen ve $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

3. $\frac{x-1}{2} = y-7 = \frac{z-3}{4}$ ve $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{\lambda} = z+2$ doğruları veriliyor. Doğruların bir düzlem oluşturması için λ parametresini belirtiniz! Kesişiyorlarsa, aralarındaki açıyı ve kesişim noktasının koordinatlarını belirtiniz!

4. $x = \frac{y-2}{-1}, z+1=0$ ve $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$ doğrularının kesişiminden geçen ve $B(-1, 0, 1)$ noktasından geçen bir doğrunun denklemini yazınız.

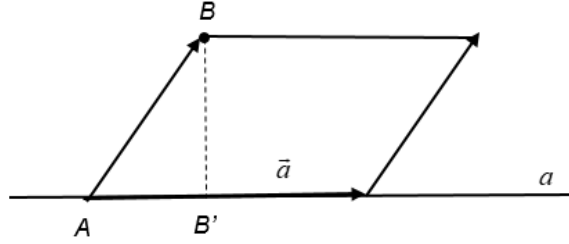
5. $\frac{x-3}{-2} = y+1 = \frac{z}{2}$ ve $x+1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}$ doğrularına dik olan ve $C(2, 3, 4)$ noktasından geçen bir doğrunun denklemini yazınız.

13. İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Daha önce, uzaydaki iki doğrunun karşılıklı durumuyla ilgili şunlar olduğunu söylemiştik: doğruların kesişmesi, paralel olması veya ayrık olması. İki doğru kesiştiğinde, aralarındaki mesafenin sıfır olduğu açıktır. Ancak paralel veya ayrık olduklarında, aralarındaki mesafe sıfır değildir. İki durumu ayrı ayrı ele alalım.

İki paralel doğru arasındaki uzaklık

İki paralel doğru arasındaki uzaklık, aralarındaki en kısa mesafedir ve bu, bir doğrudan diğerine indirilen dikmenin uzunluğudur. Bu, iki paralel doğru arasındaki uzaklığın, bir doğrudan diğerine herhangi bir noktadan olan mesafeye indirildiği anlamına gelir. Şekil 21'deki a doğrusundan B noktasına olan d uzaklığının formülünü çıkaralım.



Şekil 21

Nokta $B \notin a$ dir. $\vec{AB}$ ve $\vec{a}$ vektörleri üzerinde, alanı $P = |\vec{a} \times \vec{AB}|$ olan bir paralelkenar oluşturuyoruz. Paralelkenarın alanı $P = |\vec{a}| \cdot h$ formülüyle de hesaplanabilir, burada $h = \overline{BB'}$ 'dir. Paralelkenarın alanını hesaplamak için bu iki formülü kullanarak $\overline{BB'} = \frac{|\vec{a} \times \vec{AB}|}{|\vec{a}|}$ elde ederiz.

Tanım 1: B noktasından a doğrusuna olan d uzaklığı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{AB}|}{|\vec{a}|}$$

burada $\vec{a}$, a doğrusunun taşıyıcı vektörüdür ve $A \in a$ 'dır.

$B \in a$ olduğunda, B noktasından a doğrusuna olan mesafenin $d = 0$ olduğu açıktır. Taşıyıcı vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ için koordinat biçimleri ve $A(x_1, y_1, z_1) \in a$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarının koordinatları verildiğinde, uzaklığı vektörel biçim dışında koordinat biçiminde de elde edebiliriz. Bunu aşağıdaki örneklerle göstereceğiz.

Örnek 1

$B(1, -1, 0)$ noktasından $a: \frac{x-2}{3} = y-3 = \frac{z+1}{-1}$ doğrusuna olan uzaklığı aşağıdaki şekilde bulacağız:

1. Doğrunun taşıyıcı vektörü, $|\vec{a}| = \sqrt{11}$ modülü $\vec{a} = (3, 1, -1)$ ve nokta $A(2, 3, -1) \in a$ 'dır.
2. a ve AB vektörlerinin vektörel çarpımını buluyoruz:

$$\vec{a} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, -11);$$

3. Vektörün modülü $|\vec{a} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{134};$

4. Uzaklık $d = \frac{\sqrt{134}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{1474}}{11}$ olacaktır.

1

$B(2, 1, -2)$ noktasından $a: \frac{x-5}{-1} = y+3 = \frac{z+1}{-2}$ doğrusuna olan uzaklığı hesaplayınız.

Kanonik biçimde verilen a ve b , ($a \parallel b$) paralel doğrular arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}, \quad b: \frac{x-x_2}{a_1} = \frac{y-y_2}{a_2} = \frac{z-z_2}{a_3} \text{ yukarıda verilen şekilde } B(x_2, y_2, z_2) \in b$$

noktasından a doğrusuna olan uzaklığı bularak hesaplayacağız.

$a \equiv b$ olduğunda, iki doğru arasındaki uzaklık $d = 0$ olduğu açıktır.

2

Verilen paralel doğruları arasındaki mesafeyi hesaplayınız:

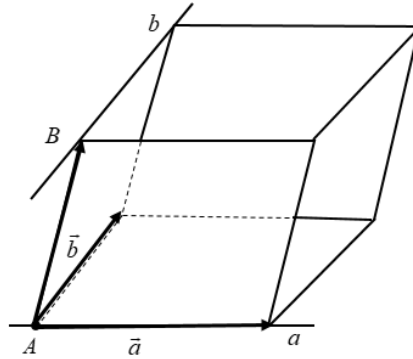
$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}.$$

İki ayrık doğru arasındaki uzaklık

İki ayrık doğru arasındaki uzaklık birçok şekilde hesaplanabilir. Burada paralel yüzün çizimini kullanarak sunulacaktır.

Sırasıyla $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ taşıyıcı vektörleriyle ve $A \in a$ ve $B \in b$ noktalarına sahip iki ayrık doğru a ve b verilmiş olsun. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\overrightarrow{AB}$ vektörleri üzerinde, Şekil 22'deki gibi bir paralel yüz oluşturalım.



Şekil 22

Ayrık a ve b doğruları arasındaki d uzaklığı, paralel yüzünün yüksekliği olacaktır. Paralel yüzün hacmi karma çarpım $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|$ ile hesaplanabilir. Hacim ayrıca $V = H \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$ formülüyle de hesaplanır, burada $H = |\vec{a} \times \vec{b}|$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerinde oluşturulan ve paralel yüzün tabanı olarak rol oynayan paralelkenarın alanıdır. Bu iki formülden şunları elde ederiz:

$$V = H \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$
$$d = H = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Tanım 2: Ayrık a ve b doğruları arasındaki d uzaklığı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

burada $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sırasıyla a ve b doğrularının taşıyıcı vektörleridir ve $A \in a$ ve $B \in b$ karşılıklı noktalarıdır.

Taşıyıcı vektörler $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ için koordinat biçimleri ve $A(x_1, y_1, z_1) \in a$ ve $B(x_2, y_2, z_2) \in b$ noktalarının koordinatları verildiğinde, uzaklığı vektörel biçim dışında koordinat biçiminde de elde edebiliriz. Bunu aşağıdaki örnekle göstereceğiz.

Örnek 2

Verilen a ve b ayırık doğruları arasındaki uzaklığı hesaplayalım:

$$a: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

$$b: -x = \frac{y+1}{-4} = z$$

$\vec{a} = (2, 3, 1), \vec{b} = (-1, -4, 1)$ taşıyıcı vektörleriyle ve $A(0, 1, 0) \in a$ ve $B(0, -1, 0) \in b$ karşılıklı noktalarıyla.

1. $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ vektörlerinin karma çarpımını aşağıdaki formülle buluyoruz:

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, 0) \text{ ve } (\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

2. $\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımını aşağıdaki formülle buluyoruz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 11).$$

3. Ayırık a ve b doğruları arasındaki uzaklığı hesaplıyoruz:

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{6\sqrt{131}}{131}.$$

3

Aşağıdaki ayırık doğrular arasındaki uzaklığı hesaplayınız:

$$a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$b: x-2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Çalışma alıştırmaları

1. Köşe noktaları $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6)$ olan bir $\triangle ABC$ üçgeni verilmiş olsun. Üçgenin her köşesinden karşı kenara olan uzaklığı hesaplayınız.

2. Verilen paralel doğrular arasındaki mesafeyi hesaplayınız:

$$a: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{2}$$

$$b: \frac{x-5}{8} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{4}.$$

3. Köşe noktaları $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, 5, -6)$, $D(4, 2, -3)$ olan bir $ABCD$ paralelkenarı verilmiş olsun. Paralelkenarın kenarlarının üzerinde bulunduğu iki çift paralel doğru arasındaki uzaklıkları hesaplayınız.

4. Verilen ayık doğrular arasındaki mesafeyi hesaplayınız:

$$a: \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$$

$$b: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = z-2.$$

5. Verilen doğrular arasındaki uzaklığı hesaplayın:

$$a) a: x = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}, b: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{6};$$

$$b) a: \begin{cases} x+2y-2z-8=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}, b: \begin{cases} 3x-2y-2z-15=0 \\ 3x+y+4z-21=0 \end{cases};$$

$$c) a: \begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}, b: \frac{x-1}{2} = y-7 = \frac{z-3}{4}.$$

14. Modül Ünitesine Ait Tekrarlama Alıştırmaları

1. Köşe noktaları $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $B(4, 3, 2)$, $C(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, $D(2, -3, -4)$. olan bir $ABCD$ düzgün dörtyüzlünün hacmini ve yüksekliğini hesaplayınız.
2. $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, -3, 3)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini yazınız. $M(1, -1, 1)$ noktası düzlem üzerinde midir?
3. $3x + 2y - 5z + 10 = 0$ ve $x + 3y + z - 2 = 0$ düzlemlerinin kesişiminden geçen ve koordinat başlangıcından geçen düzlemin denklemini yazınız.
4. $A(-1, 1, \frac{5}{6})$ noktasından geçen ve koordinat eksenlerinde 3:2:1 oranında kesenler oluşturan düzlemin denklemini yazınız.

5. $A(0, 0, 2)$ ve $B(6, 0, 0)$ noktalarından geçen ve Oxy düzlemi ile $\frac{\pi}{6}$ açısı yapan düzlemin denklemini yazınız.
6. $2x - 3y + az - 3 = 0$ ve $8x - 12y + 20 + b = 0$ düzlemlerinin çakışması için a ve b parametrelerinin hangi değerleri için geçerlidir?
7. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ ve $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ doğrularının karşılıklı durumunu inceleyiniz. Doğrular kesişiyorsa, koordinat başlangıcından kesişim noktasına olan uzaklığı hesaplayınız.
8. Uç noktalarının koordinatları $A(1, -3, -2)$, $B(-3, 5, -6)$ ve $C(0, 0, 2)$ olan AB doğru parçasının orta noktasından geçen bir doğrunun denklemini yazın. İki doğru arasındaki açı nedir?
9. $A(1, 3, 2)$ noktasından geçen ve $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ doğrusuna dik olan bir doğrunun denklemini yazınız.
10. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = z-3$ ve $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = z$ doğruları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Modül Ünitesi 5 – Belirsiz İntegral

(diğer tüm meslekler için)

1. Belirsiz İntegral

Diferansiyel hesabın görevi, verilen bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevlerini bulmakla ilgilenmektir. İntegral hesap, türev bulma probleminin tersi olan bir problemi çözer. Bu problem aslında türevi bilinen fonksiyonu belirlemektir. Tam da bu nedenle, integral hesap diferansiyel hesabın ters işlemi olarak kabul edilir.

Tanım 1: (a, b) aralığında tanımlı bir f fonksiyonu verilmiş olsun. (a, b) aralığında tanımlı,

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b)$$

koşulunu sağlayan her diferansiyellenebilir F fonksiyonuna f fonksiyonunun **ilkel fonksiyonu** denir.

Örnek 1 $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için, ilkel fonksiyon $F(x) = \frac{x^4}{4}, x \in \mathbb{R}$ 'dir, çünkü $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}$ 'dir.

Ancak $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonunu da göz önünde bulundurursak, onun için de

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R} \text{ geçerlidir.}$$

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 1: $f(x), (a, b)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olsun. O zaman $C \in \mathbb{R}$ herhangi bir sabit olmak üzere $f(x) + C$ fonksiyonu da $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonudur.

İspat: Teoremdeki ifade, $f(x)$ ve $f(x) + C$ 'nin $f(x)$ fonksiyonuna eşit olan aynı birinci türeve sahip olmasından kaynaklanmaktadır.

$$(f(x) + c)' = (f(x))' = f(x). \quad \blacksquare$$

Teorem 2: $f(x)$ ve $G(x), (a, b)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun farklı ilkel fonksiyonları olsun. O zaman $G(x)$ fonksiyonu için $G(x) = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$ geçerlidir.

İspat: $f(x)$ ve $G(x)$, (a, b) aralığında $f(x)$ fonksiyonunun farklı ilkel fonksiyonları olduğu durumda, şunlar geçerlidir:

$$f'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

$H(x) = G(x) - f(x)$ olsun. Buradan şu sonuç elde edilir:

$$H'(x) = G'(x) - f'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$H'(x) = 0$ olduğundan $H(x) = C$ elde edilir.

Buna göre $C = G(x) - f(x)$, yani $G(x) = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. ■

Verilen bir fonksiyonun ilkel fonksiyonunu bulma işlemine **integral alma işlemi** denir. Bu işlem, bir fonksiyonun türevini bulma veya türevini alma işleminin tersidir.

Ancak, türev almada fonksiyonun tek olarak belli bir şekilde tanımlandığını gözlemledik, oysa integral almada böyle değildir. Bunu Örnek 1'de de gördük.

Teorem 1'den her fonksiyonun sonsuz sayıda ilkel fonksiyona sahip olduğu sonucuna varabiliriz.

Ayrıca, teorem 2'den verilen bir fonksiyonun tüm ilkel fonksiyonlarını bulmak yerine, bunlardan herhangi birini bulmanın yeterli olduğu sonucuna varabiliriz. Yalnızca bir ilkel fonksiyon bulunursa, diğerlerinin tümü C sabiti eklenerek elde edilir.

Fonksiyonun tüm ilkel fonksiyonlarının kümesini $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ olarak gösterebiliriz.

Tanım 2: Verilen bir f fonksiyonunun tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine **belirsiz integral** denir.

f fonksiyonunun belirsiz integrali şu şekilde gösterilir:

$$\int f(x) dx.$$

Buna göre, $\int f(x) dx = \{f(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ veya kısaca $\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$ yazabiliriz.

Tanım 2'de f 'ye **integrand** veya **integral altı fonksiyonu**, $f(x) dx$ 'e ise **integrant ifadesi** denir.

$\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$ 'deki C sabitine **integral sabiti** denir.

Örnek 2 $(a^x)' = a^x \ln a$ olduğundan, $\frac{a^x}{\ln a}$, fonksiyonu $a^x, a > 0, a \neq 1$ 'in ilkel fonksiyonudur.

Bu nedenle, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$ yazabiliriz.

1 Aşağıdaki fonksiyonun ilkel fonksiyonunu bulunuz:

a) $f(x) = e^x;$ b) $f(x) = x^n.$

Verilen bir fonksiyonun sonsuz sayıda ilkel fonksiyona sahip olabileceğini gördük. Ancak, her fonksiyonun ilkel fonksiyonu yoktur. Her sürekli fonksiyonun ilkel fonksiyona sahip olduğunu belirtebiliriz.

(a, b) aralığında tanımlı verilen bir f fonksiyonu için bir ilkel fonksiyon varsa, fonksiyonun (a, b) aralığında **integrallenebilir** olduğunu söyleriz.

İlkel fonksiyonların belirlenmesi, yani integrallerin hesaplanması ve bunların uygulamaları ile ilgilenen matematik dalına **integral hesabı** denir.

Belirsiz integral kavramını geometrik olarak açıklamak istersek, onu ilkel fonksiyonların bir kümesi olarak tanımladığımız için, belirsiz integralin düzlemde ilkel fonksiyonların grafikleri olan bir eğri kümesini temsil ettiğini ve integral eğrileri olarak adlandırıldıklarını söyleyebiliriz.

Verilen bir $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen integral eğrisini bulmak için, noktanın koordinatlarını $y = f(x) + C$ 'de yerine koyarak integral sabitini elde ederiz, yani

$$y_0 = F(x_0) + C, \text{ buradan } C = y_0 - F(x_0).$$

O zaman $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen istenen integral eğrisi $y = f(x) + y_0 - F(x_0)$ denklemine sahiptir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyeceğiz:

Örnek 3 $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ fonksiyonunun $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu göstereceğiz.

$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ fonksiyonunun türevini alırsak, şunu elde ederiz:

$$(F(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Örnek 4 Grafiği $A(1,2)$ noktasından geçen $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu F 'yi bulacağız.

$f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$ 'tir, çünkü:

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

dir. $A(1,2)$ noktasının koordinatlarını $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$ 'te yerine koyarak, $F(1) = \frac{1^4}{4} + 2\sqrt{1} = \frac{9}{4}$ elde edilir.

Yani, $A(1,2)$ noktasından geçen istenen integral eğrisinin denklemi:

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0), \text{ yani } y = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4} \text{ dir.}$$

Çalışma alıştırmaları

1. Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bir ilkel fonksiyon belirtiniz:

- a) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$ b) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
c) $f(x) = \sin x;$ ç) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

2. $F(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|$ fonksiyonunun $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

3. Aşağıdakilerin doğru olup olmadığını kontrol ediniz:

a) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2 \ln^2 x} + C$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx$.

c) $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$;

ç) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \tan x - \cot x + C$.

4. Grafiği $A(0,2)$ noktasından geçen f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu F 'yi belirleyiniz:

a) $f(x) = 3x^2$; b) $f(x) = \ln x, x > 0$; c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Belirsiz integralin temel özellikleri ve temel integraller tablosu

Belirsiz integralin tanımından aşağıdaki özellikler elde edilebilir:

Teorem 1: f fonksiyonu (a,b) aralığında integrallenebilir olduğu durumda, şu özellikler geçerlidir:

1. Belirsiz integralin türevi, integral altındaki fonksiyona eşittir, yani eğer $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ ise, o zaman

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in (a, b)$$

2. Belirsiz integralin diferansiyeli, integral altındaki ifadeye eşittir, yani eğer $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ ise, o zaman

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx, x \in (a, b)$$

3. $f(x)$ ilkel fonksiyonunun diferansiyelinin belirsiz integrali, $f(x) + C, C \in \mathbb{R}$ 'ye eşittir, yani şunlar geçerlidir:

$$\int df(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b)$$

İspat: 1. F fonksiyonunun (a,b) aralığında f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu varsayalım, yani $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ olsun.

O halde $(\int f(x)dx)' = (f(x)+c)' = F'(x) = f(x)$ elde edilir.

2. F fonksiyonu (a,b) aralığında f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu varsayalım, yani $\int f(x)dx = f(x)+C, C \in \mathbb{R}$.

Bu durumda : $d(\int f(x)dx) = d(f(x)+c) = F'(x)dx = f(x)dx, x \in (a,b)$ elde edilir.

3. F fonksiyonunun (a,b) aralığında f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu varsayalım, yani $\int f(x)dx = f(x)+C, C \in \mathbb{R}$.

Bu durumda : $\int df(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = f(x)+C, x \in (a,b)$ elde edilir. ■

Teorem 1, türev ve integralin ters işlemler olduğunu gösterir. Belirsiz integrali hesaplarken, aşağıdaki teoremden verilen özellikler geçerlidir:

Teorem 2:

1. Eğer f ve g fonksiyonları (a,b) aralığında integrallenebilir olduğu durumda, $f+g$ toplamı ve $f-g$ farkı da (a,b) aralığında integrallenebilir fonksiyonlardır ve şunlar geçerlidir:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, x \in (a,b)$$

2. Eğer f fonksiyonu (a,b) aralığında integrallenebilir ve $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise, o zaman $k \cdot f$ fonksiyonu da (a,b) aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, x \in (a,b)$$

geçerlidir.

İspat: 1. Diferansiyel hesaplamada: $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$ geçerlidir. Bu eşitliğin her iki tarafının da integralinin alırsak,

$$\int d(f(x) \pm g(x)) = \int (df(x) \pm dg(x))$$

elde ederiz.

Teorem 1'in 3. özelliğini kullanarak,

$$\int (df(x) \pm dg(x)) = \int d(f(x) \pm g(x)) = \int f(x) \pm g(x) = \int df(x) \pm \int dg(x)$$

elde edilir.

4. $d(k \cdot \int f(x)dx) = kd(\int f(x)dx)$ geçerli olduğuna göre ve Teorem 1'in 2. özelliğini kullanmakla

$$d(\int k \cdot f(x)dx) = k \int f(x)dx \text{ elde ederiz.} \quad \blacksquare$$

Teorem 2’de kanıtlanan özellikler, **temel integral alma kuralları** olarak da bilinir.

Belirsiz integralin tanımına ve temel türevler tablosuna dayanarak, şu **temel integraller tablosunu** yazabiliriz.

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	14. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C$	

Belirsiz integralin temel özelliklerini ve temel integraller tablosunu kullanarak, birkaç örnek çözelim:

Örnek 1 : Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int x^6 dx; \quad \text{b) } \int (x^2 + 3x - 1) dx; \quad \text{c) } \int x^3 \sqrt{x} dx; \quad \text{ç) } \int (2^x + 5^x)^2 dx.$$

a) Temel integraller tablosunu, yani ikinci temel integrali kullanarak, şunu elde ederiz:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

b) Temel integraller tablosunu ve fonksiyonların toplamı ve farkının integral alma kuralını kullanarak, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + 3 \frac{x^2}{2} + 3C_2 - x - C_3 = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + (C_1 + 3C_2 - C_3) = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

c) Önce integrellenecek fonksiyonu dönüştüreceğiz, ardından ikinci tablo integralini kullanacağız:

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{1+\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + C = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + C .$$

c) İntegrali alınacak fonksiyonu farklı bir şekilde yazarsak, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C \end{aligned}$$

Daha basit yazmak için sonuçta birden fazla sabit yazmayacağız, doğrudan sonunda sadece bir sabit yazacağız.

1 Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int (1 + 2x + 4x^2) dx; \quad \text{b) } \int (1 - 3x) \cdot (x^2 + 1) dx; \quad \text{c) } \int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x - 4}{x} \right) dx.$$

Örnek 2 Aşağıdaki belirsiz integralleri çözeceğiz:

$$\text{a) } \int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3 \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

Temel integraller tablosunu ve integral alma kurallarını kullanarak, şunu elde ederiz:

a)

$$\begin{aligned} \int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3 \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{x^3} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

c)

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx =$$

$$= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C.$$



2 Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad \text{b) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

Örnek 3

Verilen belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx; \quad \text{b) } \int \text{tg}^2 x dx; \quad \text{c) } \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$$

a) Temel integraller tablosunu kullanarak verilen integrali çözüyoruz:

$$\int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx = 2 \int x dx - 3 \int \sin x dx + \int \cos x dx = 2 \frac{x^2}{2} - 3(-\cos x) + \sin x + C =$$

$$= x^2 + 3 \cos x + \sin x + C.$$

b) Temel integraller tablosunu kullanarak integrali çözüyoruz:

$$\int \text{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \text{tg} x - \int dx = \text{tg} x - x + C.$$

c) Temel integraller tablosunu kullanarak verilen integrali çözüyoruz:

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.\end{aligned}$$

3

Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$; b) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Çalışma alıştırmaları

1. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int (x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^x) dx$; b) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx$; c) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$; ç) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$;
d) $\int a^x \left(2 - \frac{a^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$; e) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$; f) $\int (2 + x^2)^3 dx$.

2. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$; b) $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$; c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
ç) $\int \left(\frac{x}{3} - 4 \sin x + 5 \cos x \right) dx$; d) $\int \frac{1}{\sin^2 x + \cos 2x} dx$;

3. Yerine Koyma Yöntemi

Belirsiz integralleri çözmek için belirli yöntemler (integral alma teknikleri) uygulamak gerekir. En basit integraller tablo ve temel özellikler uygulanarak çözülür, ki bunları zaten inceledik, ancak bu integral alma yöntemi tüm durumlarda uygulanamaz. Daha karmaşık belirsiz integralleri çözmek için kullanılan temel yöntemlerden biri, değişkeni yeni bir değişkenle değiştirme veya yerine koyma yöntemidir.

Bu yöntem, başlangıç integralini tablo integraline indirgeyerek basitleştirecek yeni bir t değişkeniyle x değişkenini değiştirmeyi içerir.

Yerine koyma yöntemi aşağıdaki teoremden verilmiştir:

Teorem 1: $f, (a, b)$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun ve $\varphi, (\alpha, \beta)$ aralığını (a, b) aralığına eşleyen türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman şu geçerlidir:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, x = \varphi(t) \text{ için.}$$

İspat: F fonksiyonu, f fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu varsayalım. O halde tanıma göre $\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}, x \in (a, b)$ geçerli olacaktır. $\Phi(t) = F(\varphi(t)), t \in (\alpha, \beta)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Φ fonksiyonunun türevini alırsak, $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), t \in (\alpha, \beta)$ elde ederiz.

Buradan Φ fonksiyonunun $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğunu elde ederiz.

Bu ise, belirsiz integralin tanımından şu anlama gelir:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = f(x) + C$$

$x = \varphi(t)$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = f(x) + C$$

elde edilir. ■

Yerine koyma yöntemini kullanarak, integrali alınacak fonksiyonun bir kısmı yeni bir değişkenle değiştirilir. $x = \varphi(t)$ değişiminin nasıl yapıldığına dair bir kural olmadığını vurgulamalıyız. Ayrıca, eski fonksiyonun diferansiyeli yeni değişkenin diferansiyeli cinsinden ifade edilmelidir. Amaç, kolayca çözülebilen bir veya daha fazla tablo integrali elde etmektir. İntegral çözüldükten sonra, değişimi kullanarak başlangıç değişkenine geri dönmek gerekir.

Aşağıdaki örneği inceleyeceğiz:

Örnek 1 : Verilen belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int (5-2x)^4 dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{(x-2)^3}; \quad \text{c) } \int \frac{e^x}{x^2} dx; \quad \text{ç) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

a) Bu integrali çözmek için binom formülü kullanabilir ve integrali alınacak $(5-2x)^4$ fonksiyonu genişletilmiş biçimde yazdıktan sonra çözüme tablo integrallerini kullanarak devam edebiliriz.

Ancak, bu yöntem daha fazla zaman alır. Bu nedenle, yerine koyma yöntemini kullanacağız.

$t = 5 - 2x$ değişimini kullanacağız. Buradan $dt = -2dx$ veya fonksiyonun diferansiyelini yeni değişkenin diferansiyeli cinsinden ifade edersek: $dx = -\frac{dt}{2}$ elde ederiz.

$$\text{Buna göre, } \int (5-2x)^4 dx = \int t^4 \left(\frac{-dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{(5-2x)^5}{10} + C.$$

b) a) şıkkındaki belirsiz integrale benzer şekilde, $t = x - 2$, $dt = dx$ değişken değiştirmesini kullanıyoruz.

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

c) Bu örnekte, önceki iki örneğe benzer şekilde, $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{1}{x^2} dx$, dolayısıyla $dx = -x^2 dt$ değiş-

ken değiştirmesini kullanıyoruz. Bu şekilde $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$ elde edilir.

c) $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$ değişken değiştirmesini kullanarak şunu elde ederiz:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

1 Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{5x+4}; \quad \text{b) } \int \sqrt[5]{(4-7x)^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx; \quad \text{ç) } \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad \text{d) } \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$$

Örnek 2 Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \sin ax dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}; \quad \text{c) } \int \sin^5 x \cos x dx.$$

a) $t = ax$, $dt = a dx$ değişken değiştirmesini kullanarak şunu elde ederiz:

$$\int \sin ax dx = \frac{1}{a} \int \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos t + C = -\frac{\cos ax}{a} + C.$$

b) $t = 3x + 2$, $dt = 3 dx$ değişken değiştirmesinden şunu elde ederiz:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x+2) + C.$$

c) $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x) dx$ değişken değiştirmesinden şunu elde ederiz:

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

2

Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \sin^3 6x \cdot \cos 6x dx$; b) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$; c) $\int \operatorname{tg} x dx$; ç) $\int 2e^x \cos(e^x) dx$.

Örnek 3

Aşağıdaki belirsiz integralleri çözelim:

a) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$; b) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

a) İntegrali çözerken $\ln \frac{1+x}{1-x} = t$ değişken değiştirmesini kullanıyoruz, buradan $\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} dt$ elde ederiz, dolayısıyla:

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C$$

b) Bu integrali çözmek için iki değişken değiştirme kullanacağız:

– İlk değişken değiştirme: $e^{\frac{x}{2}} = t$, $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = dt$, $dx = \frac{2}{t} dt$, $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = t^2$ olduğundan integral şu şekilde dönüşür:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t(t+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \\ &= 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \left(\frac{1+t}{t^2(1+t)} - \frac{t}{t^2(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t-t}{t(1+t)} \right) dt = \\ &= 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t}{t(1+t)} + \frac{t}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int \frac{1}{(1+t)} dt = (*), \end{aligned}$$

ondan sonra $s = t + 1$, $ds = dt$ değişimini kullanarak $\int \frac{1}{(1+t)} dt$ için şunu elde ediyoruz:

$$(*) = 2 \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \ln|t| + \ln|s| \right) + C = (**),$$

buradan geri dönerek yapılan değişikliklere bakarsak, şunu elde ederiz:

$$(**) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - \ln \left| e^{\frac{x}{2}} \right| + \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C = -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C.$$

Not: Bazen, integralin tablo integrali haline gelmesi için yeni bir değişkenle birkaç kez değişiklik yapmak gerekebilir.

Örnek 4 $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$ belirsiz integralini çözelim.

Önce $\ln x = t$ değişken değiştirmesini kullanıyoruz, buradan $\frac{1}{x} dx = dt$ elde ederiz ve ardından bir

kez daha $t = \ln t$ değişken değiştirmesini kullanıyoruz, buradan $\frac{1}{t} dt = du$ elde ederiz.

Böylece integral için şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln|t|| + C = \\ &= \ln|\ln|\ln|x|| + C. \end{aligned}$$

Çalışma alıştırmaları

1. Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int x(x^2 - 13)^{23} dx; \quad \text{b) } \int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x - 9)^7 dx; \quad \text{c) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 3x - 10}.$$

2. Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int (x^2 - 3)^5 \sqrt{x^3 - 9x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{(1+x^2) \sqrt{(1+x^2)}}; \quad \text{c) } \int \frac{x^2}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

3. Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx; \quad \text{c) } \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

4. Belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int \sin^3 x \cos^3 x dx; \quad \text{b) } \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx; \quad \text{c) } \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx; \quad \text{ç) } \int \frac{1}{\sin x} dx.$$

4. Kısmi İntegral Alma Yöntemi

Değişken değiştirme yöntemi, daha geniş bir fonksiyon sınıfının belirsiz integrallerini hesaplamak için yeterli değildir. Genellikle integrali alınacak fonksiyon, bir fonksiyonun ve başka bir fonksiyonun diferansiyelinin çarpımı şeklinde yazılır, ancak bu durumda integrali tablo integraline indirgemek için değişken değiştirme uygulanamaz.

Bu nedenle, belirsiz integralleri çözmek için başka bir yöntem, yani kısmi integral alma yöntemine veya parçalı integrasyon yöntemine başvuruyoruz. Kısmi integral alma formülü şu teorem ile ifade edilir:

Teorem 1. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (a, b) aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ise, o zaman kısmi integral alma formülü geçerlidir:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

İspat. $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında $u(x)v'(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olsun. İkel fonksiyonun tanımından, F fonksiyonunun sürekli olduğu ve $f'(x) = u(x)v'(x)$, $x \in (a, b) \setminus A$ olduğu sonucu çıkar, burada $A \subset (a, b)$ ayrık bir alt kümedir. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının türevlenebilirliğinden, $u(x)v(x)$ fonksiyonunun da (a, b) aralığında sürekli olduğu sonucu çıkar.

Buradan $G(x) = u(x)v(x) - f(x)$ fonksiyonunun da (a, b) aralığında sürekli olduğu sonucu çıkar. Türevini alırsak, şunu elde ederiz:

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x).$$

Buradan $G(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında $u'(x)v(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olduğu ve şu eşitlik elde edilir:

$$f(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Buradan $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ formülünü elde ederiz. ■

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Kısmi integral alma formülünü şu şekilde de yazabiliriz:

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının seçimi belirli kurallara göre yapılmaz, sezgisel olarak yapılır.

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının seçimi yanlışsa, integrali basitleştirmek yerine, başlangıç integraline göre çözümü daha karmaşık hale getirecektir.

Örnek 1 Verilen belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int x e^{-x} dx; \quad \text{b) } \int \ln x dx.$$

a) Birinci integrali çözmek için aşağıdaki şekilde kısmi integral alma yöntemini kullanacağız:

u olarak x 'i seçeceğiz. İlk türevi, yani diferansiyeli hesaplayarak $du = dx$ elde ederiz. Integrali alınacak ifadenin geri kalanı $e^{-x} dx$ 'tir, yani $dv = e^{-x} dx$. Buradan integral alarak $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$ elde ederiz.

Kısmi integral alma formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

b) Integrali çözmek için, şu şekilde kısmi integral alma kuralını kullanacağız:

u olarak $\ln(x)$ 'i seçeceğiz. İlk türevi, yani diferansiyeli hesaplayarak $du = \frac{1}{x} dx$ elde ederiz. Integrali alınacak ifadenin geri kalanı dx 'tir, yani $dv = dx$. Buradan integral alarak $v = \int dx = x$ elde ederiz.

Kısmi integral alma formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

1

Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int x^2 e^x dx; \quad \text{b) } \int x^2 \ln x dx; \quad \text{c) } \int \frac{x}{e^x} dx.$$

Örnek 2 Verilen belirsiz integralleri çözelim:

$$\text{a) } \int e^{x+\ln x} dx \quad \text{b) } \int (x^2 + x) \ln(x+1) dx.$$

Her iki integrali de kısmi integral alma yöntemini kullanarak çözeceğiz:

a) $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x dx$ ise $v = \int e^x dx = e^x$ olduğundan, kısmi integral alma formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

b) Eğer başlangıç integralinde ilk olarak değişken değiştirme yöntemini kullanırsak $x + 1 = t$ dönüşümüyle, $dx = dt$ elde ederiz ve şu sonucu buluruz: $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx = \int ((t-1)^2 + t-1) \ln t dt = \int (t^2 - t) \ln t dt$.

Daha sonra kısmi integrasyon yöntemini kullanarak, $u = \ln t$ ve $du = \frac{1}{t} dt$, ve $dv = (t^2 - t) dt \Rightarrow v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$ elde ederiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} \int (t^2 - t) \ln t dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt + \frac{1}{2} \int t dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{9} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2(x+1) - 3)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2x-1)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + C. \end{aligned}$$

elde edilir.

2 Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x \ln(x^2 - 1) dx$; b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Örnek 3 Aşağıdaki belirsiz integralleri çözeceğiz:

a) $\int x \sin x dx$; b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; c) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

Kısmi integral alma yöntemini kullanıyoruz.

a) Eğer $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$ ise, kısmi integral alma formülüne yerleştirerek şu sonucu elde ederiz:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

b) Eğer $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ ise, kısmi integral alma formülüne yerleştirerek şu sonucu elde ederiz:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Son integral, değişken değiştirme yöntemiyle çözülür. $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ elde edilir. Buna göre:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \int \frac{1}{t} dt = x \operatorname{tg} x + \ln|t| + C = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

c) Önceki iki integralde olduğu gibi aynı prosedürü uyguluyoruz. Yani

$u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \Rightarrow v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$. Son integrali değişken değiştirme ile çözüldüğünü belirtiyoruz. $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ dönüşümüyle:

$v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2\sin^2 x}$ elde edilir. Bunu kısmi integral alma formülüne yerleştirerek şunu elde ederiz:

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C.$$

3

Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x^2 \sin x dx$; b) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; c) $\int (x^2 + 5x + 6) \cos x dx$.

Not: İntegral tablo integraline indirgenene kadar, kısmi integral alma yöntemini birkaç kez kullanmak gerekebilir.

Aşağıdaki örnek böyledir:

Örnek 4

$\int e^{-x} \sin x dx$ belirsiz integralini çözelim.

Eğer $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$, $dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$ ise, kısmi integrasyon formülüne yerleştirerek elde ederiz:

$$\int e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} \cos(x) - \int (-e^{-x} \cos(x)) dx.$$

Tekrar kısmi integrasyon uygulamamız gerektiğini görüyoruz.

Eğer $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$, $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$ ise, kısmi integral alma formülüne yerleştirerek elde şunu elde ederiz:

Bu integralde, aynı başlangıç integralinin sağ tarafta ters işaretli görüldüğü bir durum var. Yani:

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = \\ &= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \right) = \\ &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx.$$

Eğer denklemde sağ taraftaki belirsiz integrali sol tarafa geçirirsek, şu sonucu elde ederiz:

$$2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x + C$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

4

Aşağıdaki belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int e^x \cos x dx$; b) $\int \cos(\ln x) dx$; c) $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

Çalışma Alistirmaları

1. Aşağıdaki belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x^2 e^{-x} dx$; b) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Aşağıdaki belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x \ln^2 x dx$ b) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

3. Aşağıdaki belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x^4 \cos x dx$; b) $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

4. Aşağıdaki belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int e^{2x} \cos 2x dx$; b) $\int e^x \cos x dx$.

5. Modülün Tekrarlanmasına Ait Alıştırmalar

1. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \sqrt[4]{x^3} dx$

b) $\int \frac{2}{x^5} dx$

c) $\int (3+x^3)^3 dx$

ç) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

d) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

e) $\int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx$.

2. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \sqrt{3x-4} dx$

b) $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$

c) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$

ç) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[4]{x+5}} dx$

d) $\int \frac{2x-3}{1-x} dx$

e) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

3. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$

b) $\int (x^2-3)\sqrt[5]{x^3-9x} dx$

c) $\int \frac{x}{5+x^4} dx$

ç) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$

d) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

e) $\int \operatorname{ctg} x dx$

f) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$

g) $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

4. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int \frac{x^3}{x+3} dx$

b) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$

c) $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 3x dx$

ç) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

5. Verilen belirsiz integralleri çözünüz:

a) $\int x \ln^2 x dx$

b) $\int x \ln(x^2-1) dx$

c) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

ç) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

d) $\int x^4 \cos x dx$.

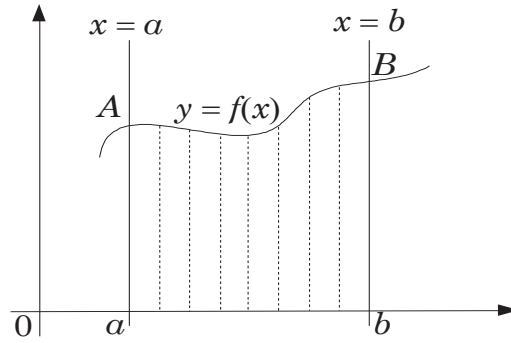
Modüler birim 6 – Belirli İntegral

(diğer tüm meslekler için)

1. Belirli İntegral Kavramı

Belirli integral kavramı, matematikte ve diğer teknik bilimlerde temel bir kavramdır. İlk olarak integral kavramına hangi problemin ve hangi fikrin yol açtığını görelim. İntegral hesaplama yönteminin, diferansiyel hesaplama yöntemlerinden çok daha önce var olduğunu vurgulamamız gerekiyor. Antik matematikçi Arşimet'in MÖ 3. yüzyılda integral hesaplama yöntemini kullandığı bilinmektedir. Parabolün, iki köşesi parabol üzerinde ve diğer iki köşesi x ekseninde bulunan dikdörtgenin alanını 2:1 oranında iki alana böldüğünü biliyordu. İntegral kavramına esasen, eğrisel bir yamuğun alanını belirleme problemi yol açmıştır. İlk olarak, 17. yüzyılın ikinci yarısında ve 18. yüzyılın ilk yarısında yaşayan büyük Alman matematikçi Leibniz ve İngiliz matematikçi Newton'un birbirinden bağımsız olarak ulaştıkları fikri, yani yöntemi sunacağız. Vereceğimiz tanım, 19. yüzyılda Alman matematikçi Riemann tarafından verilmiş olup, kullanacağımız gösterim ise 19. yüzyılda Fransız matematikçi Fourier tarafından tanıtılmıştır.

Eğrisel bir yamuktan, x eksenine, verilen negatif olmayan bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x \in [a, b]$ ve y eksenine paralel olan $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan düzlem parçasını kastediyoruz. Amacımız, eğrisel yamuğun alanını belirlemektir (Şekil 1). Fikir, $[a, b]$ aralığını birkaç alt aralığa bölerek, eğrisel yamuğun alanını yaklaşık olarak hesaplayacağımız dikdörtgenlere bölmektir.



Şekil 1

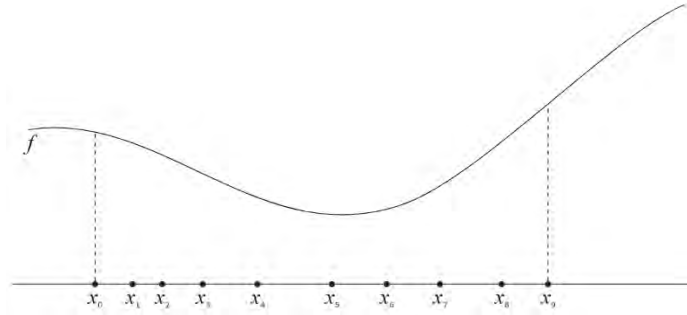
Tanım 1: $[a, b]$ doğru parçasının bir aralığı, aşağıdaki gibi $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ sonlu sayıda bir nokta kümesi olarak

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

ifade edilebilir.

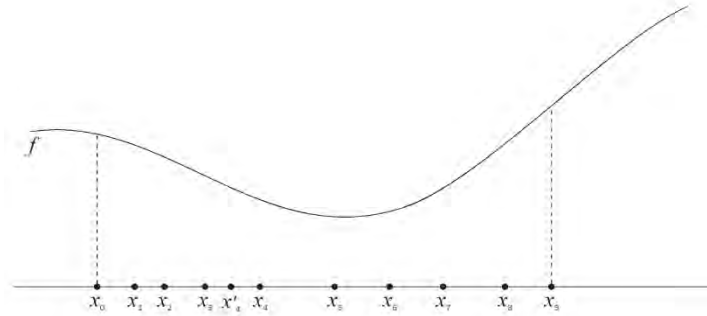
Yani bu $[a, b]$ doğru parçası sonlu sayıda dikdörtgenlere bölüyoruz.

$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = b$ noktalarını inceleyelim (Şekil 2).



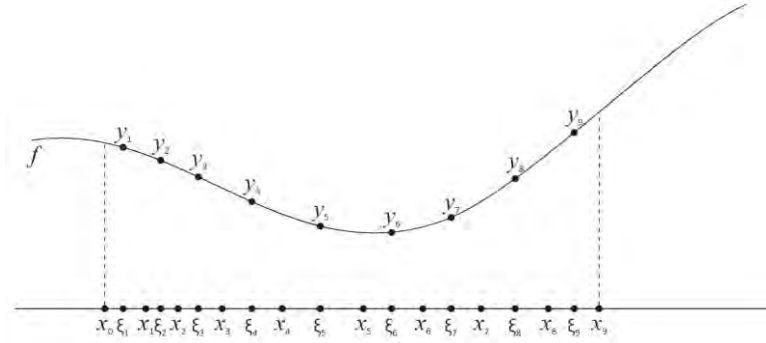
Şekil 2

$\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ ile i'inci kısmın uzunluğunu gösteriyoruz. Yani bunlar tüm kısımların uzunluklarıdır. Ve en büyük alt kısmın uzunluğuna eşit olan bölüm çapı kavramını tanıtıyoruz, yani $d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_{x_i}$. Daha sonra, P kısmın bir bölümünün P_2 bölümünden daha ince olduğunu söyleriz, eğer $P_2 \subset P_1$ ise, yani P_1 bölümü P_2 bölümünden daha fazla nokta içeriyorsa. Bu, örneğin x_i ve x_{i+1} noktaları arasındaki noktaysa, yeni bölümün önceki bölümden daha ince olacağı anlamına gelir (Şekil 3)



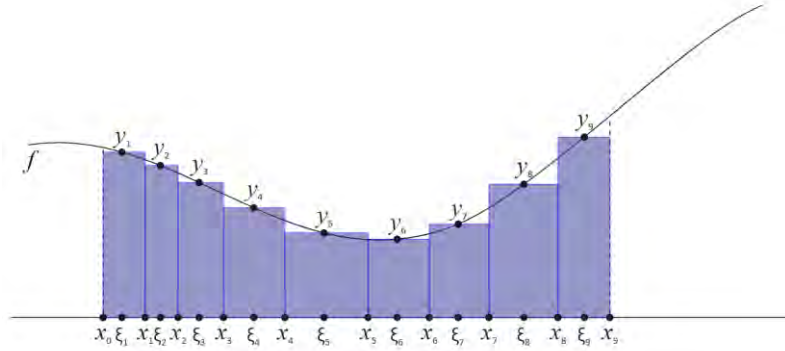
Şekil 3

Yani bir aralık, başka bir aralıktan daha fazla nokta içeriyorsa o aralık daha hassastır. Şimdi bu segmentlerin her birinde bir nokta seçeceğiz: $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Örneğimizde bu noktalar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9$ 'dur (Şekil 4). Bu noktalarda $y = f(\xi_i)$ fonksiyonunun değerini hesaplayacağız. Fonksiyon $[a, b]$ aralığındaki her noktada sürekli olduğundan, $f(\xi_i)$ vardır. Yani $y_1 = f(\xi_1), \dots, y_9 = f(\xi_9)$ ve bu değerleri fonksiyonun grafiğinde işaretleyeceğiz (Şekil 4).



Şekil 4

Şimdi her aralık için kenarları ξ_i ve $f(\xi_i)$ olan bir dikdörtgen oluşturacağız. Örneğimizde bu türden dokuz dikdörtgen oluşturacağız (Şekil 5).



Şekil 5

Dikdörtgenin uzunluğu, ilgili kısmın uzunluğuna eşit olduğunu, dikdörtgenin genişliği ise fonksiyonun ξ_i noktalarındaki değerine eşit olduğunu biliyoruz. Dikdörtgenleri Π_i ile gösterelim. Her dikdörtgenin alanını

$$P(\Pi_i) = f(\xi_i) \Delta_{x_i} .$$

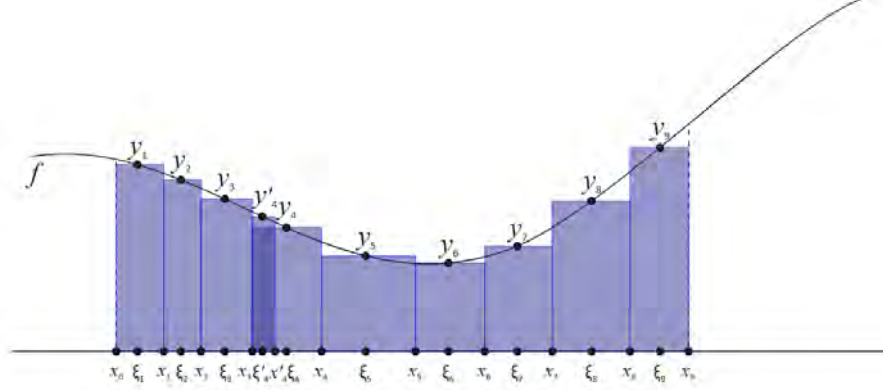
şeklinde ifade edebiliriz. Tüm bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamı:

$$P(S) = f(\xi_1) \Delta_{x_1} + f(\xi_2) \Delta_{x_2} + \dots + f(\xi_n) \Delta_{x_n}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^9 f(\xi_i) \Delta_{x_i} .$$

olacaktır. Bu alan noktaların ξ_i seçimine bağlı olduğu açıktır. ξ_i noktalarından herhangi birini hareket ettirirsek, ilgili dikdörtgenin alanı da değişecektir. Ancak iddia edebileceğimiz şey, bu eğrisel yamunun alanının dikdörtgenlerin alanlarının toplamına yaklaşık olarak eşit olduğudur.

x_3 ten x'_4 aralığına bir ξ_4 nokta daha eklersek ne olacağını görelim ve ξ_i noktasını seçip bu noktada fonksiyonun değerini belirleyelim. Şimdi x_3 ten ξ'_i segmenti için bir dikdörtgen oluşturacağız. x_3 ten x_4 segmentindeki bir dikdörtgen yerine, x_3 ten x'_4 ve x'_4 den x_4 e kadar iki dikdörtgen olacaktır. (Şekil 6).



Şekil 6

Mevcut bölüme bir nokta daha eklersek ne sonuç çıkarabileceğimize bakalım. İlk olarak, tüm bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamının eğrisel yamuğun alanına daha yakın (daha doğru) bir değere sahip olduğunu gözlemleyebiliriz. Çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise yeni bölümün (daha ince bölüm) çapının önceki bölümün çapından daha küçük veya ona eşit olduğudur. Başka bir deyişle, bölüme ne kadar çok nokta eklersek, segmentlerin maksimum uzunluğu o kadar küçülür ve tüm dikdörtgenlerin alanlarının toplamı eğrisel yamuğun alanına o kadar yaklaşır. Şimdi sezgisel olarak açıktır ki, bölümün çapı ne kadar küçük olursa, yani bölümün çapı sıfıra yaklaşırsa, bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamı eğrisel yamuğun alanına keyfi olarak yaklaşıacaktır. Bu bizi aşağıdaki tanıma götürür.

Tanım 2: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. P değeri $[a, b]$ segmentinin herhangi bir bölümü olsun ve ξ_i her alt segmentten birer tane olmak üzere keyfi olarak seçilmiş noktalar olsun.

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Toplamına verilen P bölümü ve ξ_i noktalarının seçimi için f fonksiyonunun **Riemann integral toplamı** olarak adlandırılır.

Tanım 3: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b]$ segmentinde Riemann anlamında integrallenebilirdir, eğer aşağıdaki gibi bir I gerçekte sayı için:

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i} = I$$

geçerli ise, yani

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P)(\forall \xi_i)(d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f) - I| < \varepsilon)$$

İfadesi geçerli ise, I sayısı

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

ile gösterilir ve $f(x)$ fonksiyonun a sınırından b sınırına kadar **belirli integralini** işaret etmektedir. a sınırına integralin **alt sınırı**, b sınırına ise integralin **üst sınırı** denir. $f(x)$ fonksiyonuna **integral altındaki fonksiyon** denir, dx ise x bilinmeyeninin diferansiyelidir, yani P bölümündeki alt kısımların uzunluğunu gösterir.

Belirli integral aslında eğrisel bir yamuğun alanını hesaplamak için kullanılır, ancak teknikte ve mühendislikte başka uygulamaları da vardır. İntegralin aslında sonsuz sayıda terimin toplamı olduğunu bilmek çok önemlidir. Bu nedenle integralin gösterimi aslında toplam anlamına gelen “uzatılmış S”dir. Sonuç olarak, belirli integral sonsuz sayıda terimin toplamının limit değeridir.

Aşağıda, kanıtlamadan bir teorem vereceğiz, bu da integrallenebilir fonksiyonların ve belirli integralin özellikleriyle ilgilidir:

Teorem 1: $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $\alpha f(x) + \beta g(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir ve aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

Son teorem, belirli integralin tanımının doğrudan uygulanmasıyla kolayca kanıtlanır.

Örnek 1 $\int_0^1 dx$ integralini hesaplayalım.

$f(x) = 1$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli, buradan $\int_0^1 dx$ 'in var olduğu sonucu çıkar.

İntegrali hesaplamak için verilen aralığı aşağıdaki şekilde kısımlara bölebiliriz:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ parçaların her birinin uzunluğu $\frac{1}{n}$ 'dır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 'dır. ξ_i noktalarını, parçaların sağ sınırının değerine eşit olacak şekilde seçiyoruz, örneğin i 'inci parça için $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ 'i seçiyoruz ve $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$ 'i seçiyoruz. Karşılık gelen toplamlar için şunu elde ederiz:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = 1$, olduğundan, $\int_0^1 dx = 1$ sonucuna varabiliriz.

Örnek 2 $\int_0^1 x dx$ integralini hesaplayalım.

$f(x) = x$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli, buradan $\int_0^1 x dx$ 'in var olduğu sonucuna varılır. İntegrali hesaplamak için verilen aralığı aşağıdaki şekilde böleceğiz:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Bölmelerden her birinin uzunluğu $\frac{1}{n}$ 'dır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 'dır. ξ_i noktalarını, kısımların sağ sınırının değerine eşit olacak şekilde seçiyoruz, örneğin i 'inci segment için $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ 'i seçiyoruz ve $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$ 'i seçiyoruz. Karşılık gelen toplamlar için şunu elde ederiz:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Olduğuna göre: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ elde edilir.

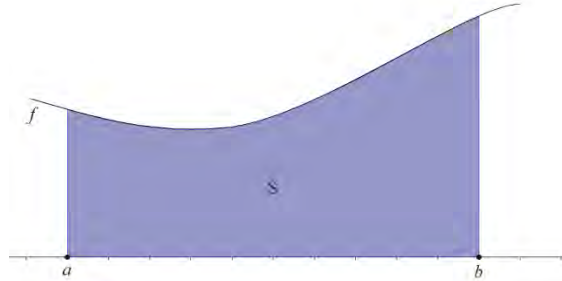
Buradan şu sonuca varabiliriz: $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Belirli integrali tanımına göre hesaplamak karmaşık olabilir. Bir sonraki derste, belirli integrali hesaplamayı kolaylaştıran Newton–Leibniz formşlş verilecektir.

2. İntegral Hesabın Temel Teoremi

Burada, Newton–Leibniz formşlş olarak da bilinen integral hesabın temel teoremini ele alacağız. Belirli integralin özelliklerini de ele alacağız.

Belirli integrali tanımladığımızda, $[a, b]$ aralığında sşrekli ve negatif olmayan bir $f(x)$ fonksiyonunun verildiğini varsaydığ. Ayrıca, belirli integralin altında, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, x eksenini ve $x = a$ ve $x = b$ doğruları (şekil 7) ile tanımlanan eğrisel yamuğun alanını anladığımızı sşyledik.



şekil 7

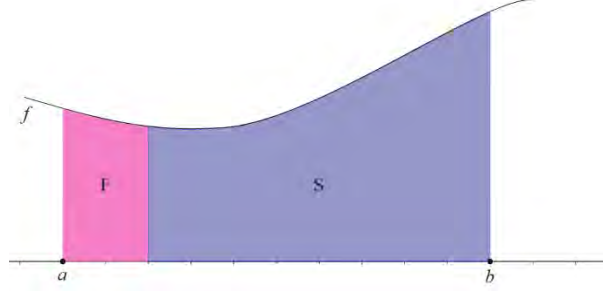
Tanım gereği integral, sonsuz sayıda kşçük dikdşrtgen alanının toplamını temsil eder:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

$x \in [a, b]$ için $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon için $[a, b]$ aralığında sşrekli olduğu ve $[a, b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu

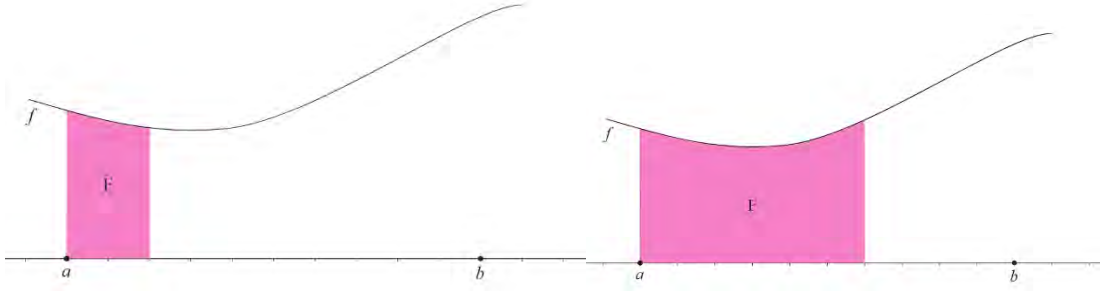
olduğu geçerlidir. Bu, $f(x)$ fonksiyonunun $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ olarak da tanımlanabileceği anlamına gelir, burada C herhangi bir sabittir.

Son eşitlik, a 'dan x 'e kadar sınırları olan $f(t)$ fonksiyonunun belirli integralinin (bu fonksiyon $f(x)$ ile aynıdır, sadece değişkenin farklı bir gösterimine sahiptir), $x \in [a, b]$ olduğunda bu eğrisel yamuğun alanını ölçen bir fonksiyon olduğu anlamına gelir (Şekil 8).



Şekil 8

F ile, eğrisel yamuğun $x \in [a, b]$ aralığında bir kısmının alanı belirlenir. x 'i artırırsak F alanının da artacağı, x 'i azaltırsak F alanının da azalacağı açıkça görülmektedir (Şekil 9).



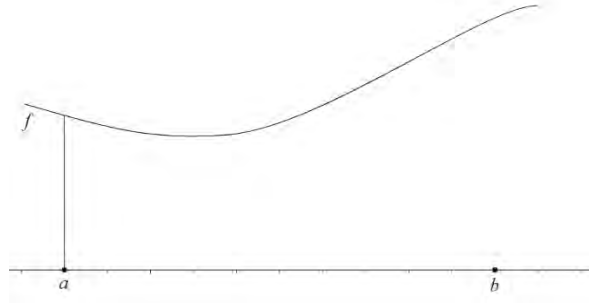
Şekil 9

Buradan $f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu sonucuna varabiliriz. C sabitinin değerini belirlemek kalır.

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C.$$

Bunun için $x = a$ alacağız ve şunu elde edeceğiz:

$\int_a^a f(t)dt$ integralinin 0'a eşit olacağı açıktır, çünkü eğrisel yamuk yerine şekil bir doğru parçası olacaktır (Şekil 10).



Şekil 10

Öte yandan, $x = b$ alırsak şunu elde ederiz:

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C = S + C ,$$

bu da F alanı tüm eğrisel yamuğun S alanına eşit olacağı anlamına gelir (Şekil 7). Eğer $C = F(a)$ alırsak şunu elde ederiz:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Son formül **Newton–Leibniz formülü** olarak bilinir. Bununla birlikte aşağıdaki teoremi ispatlamış oluyoruz.

Teorem 1: (Newton–Leibniz Teoremi) Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise ve F onun herhangi bir ilkel fonksiyonu ise, o zaman aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Bu teoreme integral hesabın temel teoremi denir ve (1) eşitliğine integral hesabın temel kuralı veya **Newton–Leibniz formülü** denir.

Newton–Leibniz formülü, belirsiz ve belirli integraller arasındaki ilişkiyi verir ve bu sayede belirli integralin hesaplanmasını büyük ölçüde kolaylaştırır. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli integralini hesaplamak için, onun bir ilkel fonksiyonunu bulmak ve $[a, b]$ aralığındaki artışını hesaplamak yeterlidir. Yani belirli integralin hesaplanmasını, bir ilkel fonksiyon bulmaya indirgiyoruz, bu da belirsiz integralin hesaplanmasına eşdeğerdir.

Örnek 1

$$\int_a^b x^n dx, n \in \mathbb{R}, 0 \notin [a, b] \text{ integralini hesaplayalım.}$$

İki durumu ele alacağız:

$n \neq -1$ olduğunda, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ dir. Bu durumda x^n fonksiyonunun ilkel fonksiyonu $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ fonksiyonudur, bu nedenle:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

$n = -1$ olduğunda, $\int_a^b \frac{dx}{x}$ elde ederiz. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ olduğundan, $x > 0$ için şunu elde ederiz:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

1 $\int_1^2 x^3 dx$. belirli integrali hesaplayınız.

Örnek 2 Aşağıdaki belirli integralleri çözelim:

a) $\int_0^2 (3 - 2x) dx$ b) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$.

Belirli integralleri çözmek için Newton–Leibniz formülünü kullanacağız.

a) $\int_0^2 (3 - 2x) dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{2 \cdot 0^2}{2} \right) = 6 - 4 = 2.$

b) Karşılık gelen belirsiz integrali çözerek şunu elde ederiz:

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \ln |x| + e^x + C.$$

Buradan belirli integral için şunu elde edeceğiz:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \left(\ln |x| + e^x \right) \Big|_1^3 = \ln 3 + e^3 - e.$$

c) Önce karşılığı olan belirsiz integrali çözüyoruz:

$$\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C.$$

O halde, belirli integral için şunu elde ediyoruz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

2

Verilen belirli integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x} \right) dx; \quad \text{b) } \int_0^1 x^2 (x^3 + 1) dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \cos x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen belirli integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{1}{2}} x dx, \quad \text{b) } \int_1^2 x^2 dx, \quad \text{c) } \int_0^1 e^x dx,$$

$$\text{ç) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx, \quad \text{d) } \int_0^{\pi} \sin x dx, \quad \text{e) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\text{f) } \int_0^1 \sqrt{x} dx, \quad \text{g) } \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx.$$

2. Verilen belirli integralleri çözünüz:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x^4 + x^{-2} + 2}{x^3} dx; \quad \text{b) } \int_0^1 (x-3)^3 dx; \quad \text{c) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - 3 \right) dx; \quad \text{ç) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx.$$

3. Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^7 dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$$

3. Belirli İntegrallerin Yerine Koyma Yöntemi ile Çözümü

Newton–Leibniz formülüne göre belirli bir integrali hesaplamak, belirsiz bir integrali hesaplamaya eşdeğer olan bir ilkel fonksiyon bulmaya indirgenir. Belirsiz integralde, şu formüle indirgenen yerine koyma ile integrasyon yöntemini zaten ele aldık:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt .$$

Burada $x = \varphi(t)$ yerine koyma işlemini uyguladık.

Örnek 1

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx .$$

a) $t = x + 2$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, buradan $dx = dt$ elde ederiz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = -1$ olduğunda $t = -1 + 2 = 1$ ve $x = 1$ olduğunda $t = 1 + 2 = 3$ 'tür. Tanıtılan yerine koyma ve yeni tanıtılan değişken için hesaplanan yeni sınırlar ile integral şu şekilde çözülür:

$$\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx = \int_1^3 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20 .$$

b) $x + 1 = t$, $dx = dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = -2$ olduğunda $t = -2 + 1 = -1$ ve $x = 0$ olduğunda $t = 0 + 1 = 1$ 'dir. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_{-2}^0 e^{x+1} dx = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e} .$$

c) $2x = t$, $dx = 2dt$ kaydırmasını tanıtıyoruz. Yapılan kaydırma, belirli integralin değişkene ilişkin limitlerinde de değişikliğe sebep olacaktır. Yeni sınırlar, $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 = 0$ olduğunda ve $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ olduğunda olur. Buradan şu sonuca varıyoruz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = 2 .$$

1

Verilen belirli integrali hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx; \quad \text{b) } \int_1^2 e^{2x+1} dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx .$$

Örnek 2

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_4^5 \frac{dx}{x-3}; \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx.$$

a) $t = x - 3$, $dx = dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Tanıtılan yerine koyma ile, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = 4$ olduğunda $t = 4 - 3 = 1$ ve $x = 5$ olduğunda $t = 5 - 3 = 2$ 'dir. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) $t = 2x + 1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ yerine koyma işlemini uyguluyoruz. Bu durumda, yerine koyma işlemiyle, değişkenle ilgili olan belirli integralin sınırlarında da bir değişiklik meydana gelecektir. Yeni sınırlar, $x = 0$ olduğunda $t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ ve $x = 2$ olduğunda $t = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ 'tir. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$ integralini çözmek için, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ özelliğinden yararlanarak integrali çözüm için daha

uygun şekle dönüştürüyoruz. Bu durumda $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-\sin x} dt$ değişimini

uyguluyoruz. Bu değişimi yapmakla integralin sınırları da değişecektir. Yeni sınırlar $x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$

ve $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğunu buluyoruz. O halde:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = - \ln |t| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

elde edilir.

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{(4x-3)^2}; \quad \text{c) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ctg} x \, dx.$$

Örnek 3

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx; \quad \text{b) } \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} \, dx.$$

a) $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t \, dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 0$ olduğunda $t = 1$ ve $x = 3$ olduğunda $t = 2$ 'dir. Ve şunu elde ederiz:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = 2 \int_1^2 t^2 \, dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}.$$

b) $t = \sqrt[3]{1-x}$, $t^3 = 1-x$, $dx = -3t^2 \, dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 1$ olduğunda $t = 0$ ve $x = 9$ olduğunda $t = -2$ 'dir. Ve şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} \, dx &= \int_0^{-2} (1-t^3) t (-3t^2) \, dt = \int_0^{-2} (3t^6 - 3t^3) \, dt = \left(\frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} \right) \Big|_0^{-2} = \frac{3(-2)^7}{7} - \frac{3(-2)^4}{4} \\ &= 3 \cdot 16 \left(-\frac{8}{7} - \frac{1}{4} \right) = \frac{48 \cdot (-39)}{28} = 66,85. \end{aligned}$$

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} \, dx; \quad \text{b) } \int_2^4 \sqrt{2x-3} \, dx; \quad \text{c) } \int_0^1 x \sqrt[5]{x+2} \, dx; \quad \text{ç) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\cos x} \, dx.$$

Örnek 4

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx; \quad \text{b) } \int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx.$$

a) $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 0$ olduğunda $t = 1$ ve $x = 1$ olduğunda $t = 2$ 'dir. Ve şunu elde ederiz:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

b) $x^2 - 5x + 6 = t$, $(2x - 5) dx = dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = -1$ olduğunda $t = 12$ ve $x = 0$ olduğunda $t = 6$ 'dır. Ve şunu elde ederiz:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int_{12}^6 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{12}^6 = \ln 6 - \ln 12 = \ln \left(\frac{6}{12} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

4

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx.$$

Örnek 5

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx.$$

a) $x - 1 = t^2$, $dx = 2t dt$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 1$ olduğunda $t = 0$ ve $x = 2$ olduğunda $t = 1$ 'dir. O halde şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

b) $t^6 = e^x + 3$, $6t^5 dt = e^x dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz. Ayrıca belirli integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor. Yeni sınırlar $x = 0$ olduğunda $t = \sqrt[6]{4}$ ve $x = \ln(2)$ olduğunda $t = \sqrt[6]{5}$ 'tir. O halde şunu elde ederiz:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3}}{\sqrt[3]{e^x + 3}} dx = 6 \int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6 dt = \frac{6}{7} e^7 \Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7} (5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}).$$

5 $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 2} dx$ belirli integrali hesaplayınız.

Aşağıda, belirli integralleri daha kolay çözmek için kullanabileceğimiz bazı özellikler vereceğiz.

1) $f(x)$ fonksiyonu bir tek fonksiyon olsun, yani $f(-x) = -f(x)$. Şimdi şu integrali hesaplayalım:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Önce $\int_{-a}^0 f(x) dx$ integralini ele alalım. $t = -x$, $dt = -dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, bu nedenle

le integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor: $x = -a$, $t = a$ ve $x = 0$, $t = 0$. Şunu elde ederiz:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{tek fonksiyon}}{=} \int_a^0 -f(t)(-dt) = \int_a^0 f(t) dt \underset{\text{sınırları değiştirmekle}}{=} - \int_0^a f(x) dx$$

elde edileni ilk integrale koyarsak

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

elde edilir. Buradan, integral altındaki fonksiyon tek ise ve integral aralığı sıfıra göre simetrik ise, integralin değerinin sıfıra eşit olduğu sonucuna varabiliriz.

Örnek 6 $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ olduğunu ispatlayalım.

$f(x) = x^3$ fonksiyonu tek fonksiyondur çünkü $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. İntegral aralığı sıfıra göre simetrik olduğundan, integralin değeri sıfırdır. Bu integral için sıfıra eşit olduğu kolayca kontrol edilebilir:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

2) Şimdi de belirli integrallerin çözümünde bize yardımcı olacak başka bir özelliği ele alalım. $f(x)$ bir çift fonksiyon olsun, yani $f(-x) = f(x)$. Şimdi şu integrali hesaplayalım:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Önce $\int_{-a}^0 f(x) dx$ integralini ele alalım. $t = -x$, $dt = -dx$ yerine koyma işlemini yapıyoruz, bu nedenle integralin sınırlarını da değiştirmemiz gerekiyor: $x = -a$, $t = a$ ve $x = 0$, $t = 0$.

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{çift fonksiyon}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_a^0 -f(x) dx \underset{\text{sınırların değişmesiyle}}{=} \int_0^a f(x) dx.$$

elde edilir. Bunu ilk integrale koyarsak şunu elde ederiz:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Son formülü geometrik olarak şu şekilde yorumlayabiliriz: Fonksiyon çift ise grafiği y eksenine göre simetriktir, bu nedenle $x = a$ ve $x = 0$ doğruları arasındaki şeklin alanı, $x = 0$ ve $x = a$ doğruları arasındaki şeklin alanına eşittir, bu da yukarıdaki formülü gerektirir.

Örnek 7 $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ olduğunu ispatlayalım.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu çift fonksiyondur çünkü $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. İntegral aralığı sıfıra göre simetrik olduğundan, integralin değeri için şunu elde ederiz:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

6

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2} dx$; b) $\int_{-3}^3 2x^4 dx$.

Çalışma Alıştırmaları

1. Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayın:

a) $\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx,$

b) $\int_0^1 (3x+1)^2 dx,$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+2)^2},$

ç) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3},$

d) $\int_1^4 \sqrt{x} dx,$

e) $\int_2^{10} \sqrt{2x+5} dx,$

f) $\int_0^1 \sqrt[5]{(5x+1)^2} dx,$

g) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx,$

ğ) $\int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx,$

h) $\int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx,$

ı) $\int_0^1 e^{2x+1} dx,$

ï) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x+2}}{\sqrt[3]{e^x+2}} dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x ;$

k) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx ;$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx .$

2. Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

a) $\int_{-1}^1 x^7 dx ;$ b) $\int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx .$

4. Belirli İntegralin Kısmi İntegralinin Alınması

Belirli bir integrali hesaplamayı, belirsiz bir integrali hesaplamaya eşdeğer olan bir ilkel fonksiyon bulmaya indirgiyoruz. Kısmi integrasyon en çok integral altındaki fonksiyon logaritmik, üstel veya trigonometrik olduğunda kullanılır. Belirsiz integralde kısmi integrasyon yöntemini zaten ele aldık:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Bu formül belirli bir integrale uyarlanır ve şu şekli alır:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx .$$

Örnek 1

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_0^2 x e^x dx; \quad \text{b) } \int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx; \quad \text{c) } \int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx .$$

a) Kısmi integral alma yöntemini kullanarak, $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ elde edilir .
O halde:

$$\int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2e^2 - 0e^0) - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

elde edilir.

b) Kısmi integral alma yöntemi ile $u = x^2 - 5 \Rightarrow du = 2x dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$ elde edilir ve yerine koymakla:

$$\int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (x^2 - 5) e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx .$$

elde edilir. $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ integralini çözmek için tekrar kısmi integral alma kuralını uygulamamız gere-

kiyor, burada $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$. O halde

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bunu ilk integralde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) - \frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} \end{aligned}$$

c) Kısmi integrasyon kullanarak, $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3)dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ almakla:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = (x^2 + 3x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx.$$

elde edilir. $\int_0^1 (2x + 3)e^x dx$, integralini çözmek için tekrar kısmi integral alma kuralını uygulamamız

gerekıyor, burada $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ olur.

$$\int_0^1 (2x + 3)e^x dx = (2x + 3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1,$$

eğer bunu ilk integralde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - (3e - 1) = 2.$$

1 Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{b) } \int_1^2 (x^2 + 2x + 1)e^x dx.$$

Örnek 2

Aşağıdaki belirli integralleri hesaplayalım:

$$\text{a) } \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{b) } \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx; \quad \text{ç) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

a) Kısmi integral alma kuralını uygularsak şunu elde ederiz: $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$, dx ,

$$dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx, v = 2\sqrt{x}. \text{ Buna göre:}$$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \ln 4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 = 4 \cdot (\ln 4 - 1).$$

elde edilir.

b) Kısmi integral alma kuralını kullanarak şunu elde ederiz: $u = \ln 2x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$
Buna göre:

$$\begin{aligned}\int_2^4 x^3 \ln(2x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{x^4}{16} \Big|_2^4 = \frac{1}{4} (4^4 \ln 8 - 2^4 \ln 4) - \frac{1}{16} (4^4 - 2^4) = 184 \ln 2 - 15.\end{aligned}$$

elde edilir.

c) Kısmi integral alma kuralını kullanarak şunu elde ederiz: $u = \ln(x+1)$, $du = \frac{dx}{x+1}$, $dv = dx$, $v = x$.

O halde:

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = ((e-1) \ln e) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= e-1 - \left[\int_0^{e-1} \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} \right] = e-1 - \left[x \Big|_0^{e-1} - (\ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \right] = e-1 - [(e-1-0) - (\ln e - \ln 1)] = \\ &= e-1-e+1+\ln e = 1.\end{aligned}$$

c) Kısmi integral alma kuralını kullanarak şunu elde ederiz: $u = x \Leftrightarrow du = dx$

$dv = \sin x dx \Leftrightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$. O halde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2

Verilen belirli integralleri hesaplayınız:

$$\text{a) } \int_1^e x^2 \ln x; \quad \text{b) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} (x^2 + x) \ln(x+1) dx; \quad \text{ç) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Örnek 3

$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ belirli integralini hesaplayalım.

Kısmi integrasyon kullanarak şunu elde ederiz: $u = \ln^2 x$, $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $dv = \frac{1}{x^2} dx$, $v = -\frac{1}{x}$.

O halde:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx,$$

$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$ integralini çözmek için tekrar kısmi integral alma kuralını uygulamamız gerekiyor, burada şunu elde ederiz:

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1,$$

eğer bunu ilk integralde yerine koyarsak:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{2}{e} + 1 \right) = -\frac{5}{e} + 2.$$

elde ederiz.

Çalışma Alıştırmaları

1. Verilen integralleri hesaplayın:

a) $\int_0^1 (2x+1) e^x dx;$

b) $\int_1^2 (3x+5) e^{-x} dx;$

c) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx;$

ç) $\int_0^1 (x^2 - 2) e^x dx;$

d) $\int_1^e \ln x dx;$

e) $\int_1^e x^2 \ln x dx;$

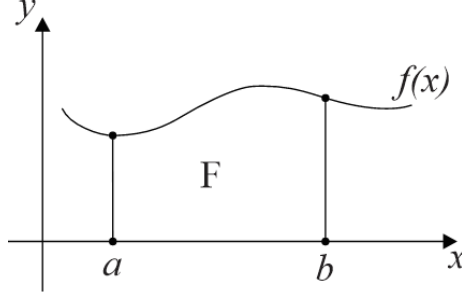
f) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$

g) $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx ;$

ğ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx .$

5. Düzlemsel Şeklin Alanı

Belirli integralin tanımından, negatif olmayan $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $[a, b]$ aralığındaki x -ekseni ile tanımlanan eğrisel bir yamuğun alanını temsil ettiğini gördük (Şekil 11).

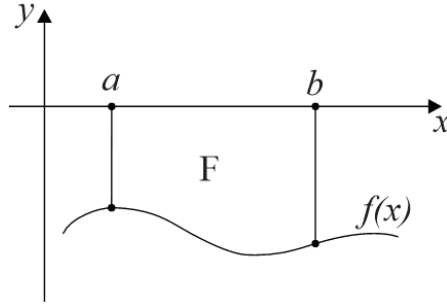


Şekil 11

Yani, şekil 11'deki eğrisel yamuğun alanı için şunu elde ederiz:

$$P(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

$f(x)$ fonksiyonu negatif olduğunda, belirli integralin değeri negatif olacaktır (Şekil 12).



Şekil 12

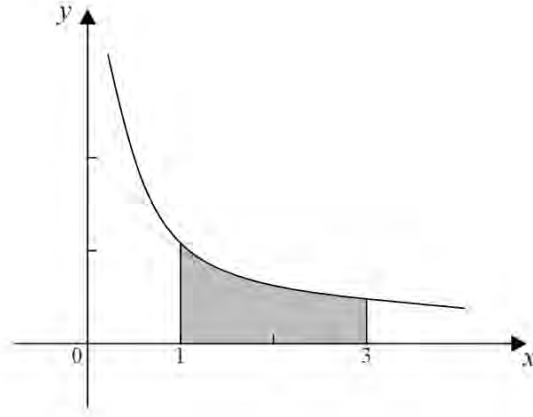
Yani $f(x)$ fonksiyonu negatif olduğunda şeklin alanını hesaplamak için, alan negatif olamayacağından, pozitif bir sayı elde etmek için belirli integralin değerini mutlak değere işaretine koyacağız.

$$P(F) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Örnek 1 $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, apsis eksen ve $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile sınırlanan şeklin alanını

hesaplayalım.

Şekil 13'te eğri ve iki doğru gösterilmiştir:

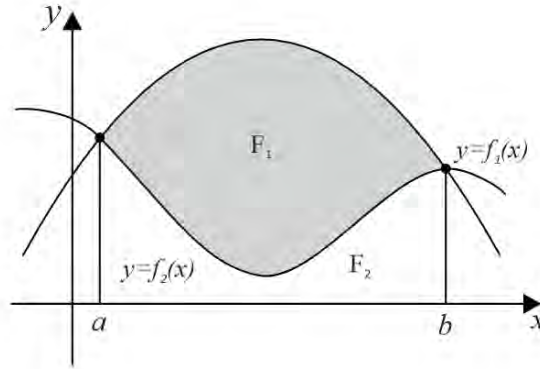


Şekil 13

Yukarıdaki açıklamaya göre, boyalı kısmın alanını hesaplamak için şunu elde ederiz:

$$P = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Şimdi $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının grafikleriyle sınırlanan ve $[a, b]$ aralığında bulunan bir şeklin alanını nasıl hesaplayacağımızı ele alalım (şekil 14).



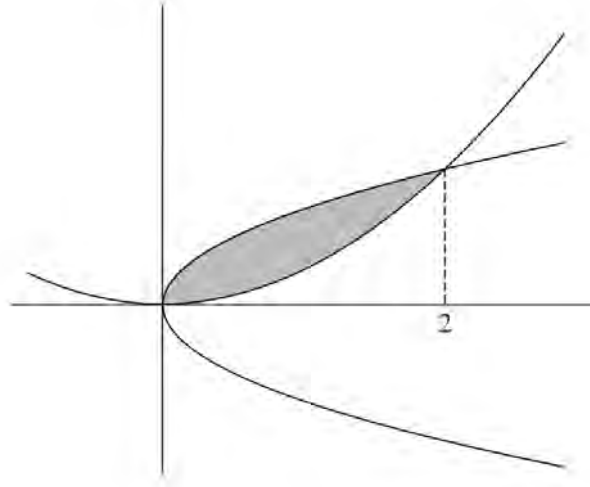
Şekil 14

F_1 ile $f_1(x)$ fonksiyonunun grafiğinin altındaki eğrisel yamuğu ve F_2 ile $f_2(x)$ fonksiyonunun grafiğinin altındaki eğrisel yamuğu gösterirsek, F şekli F_1 eğrisel yamuğu ile F_2 eğrisel yamuğunun farkı olarak temsil edilebilir. Buradan F şeklinin alanının F_1 eğrisel yamuğunun alanı ile F_2 eğrisel yamuğunun alanının farkına eşit olduğu sonucuna varabiliriz, yani:

$$P(F) = P(F_1) - P(F_2) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

Örnek 2

$y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$ parabolleri ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (şekil 15).

**Şekil 15**

Alanı belirlenmesi gereken şekli sınırlayan paraboller şekil 15'te gösterilmiştir. İlk olarak, belirli integralin sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. $y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}, y > 0$

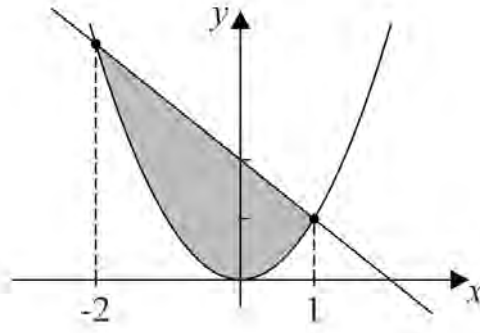
dan $\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2}$, $2x = \frac{x^4}{4}$ elde ederiz. $x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$. Yani kesişim noktaları $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ 'dir. $y^2 = 2x$ eğrisi ile sınırlanan eğrisel yamuğun alanı:

$F_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx$ dir, $x^2 = 2y$ eğrisi ile sınırlanan eğrisel yamuğun alanı ise: $F_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$ dir. Aradığımız şeklin alanı $F = F_1 - F_2$ 'dir, yani

$$F = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} \right) \bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Örnek 3

$y = x^2$ parabolü ve $x + y = 2$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (Şekil 16).



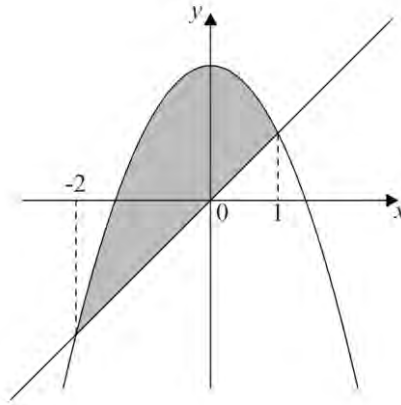
Şekil 16

İlk olarak, belirli integralin sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. $y = x^2$ 'yi $x + y = 2$ denkleminde yerine koyuyoruz ve $x + x^2 = 2$ ikinci derece denklemini elde ediyoruz. $x^2 + x - 2 = 0$ ikinci derece denklemini çözerek çözümlerin $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ olduğunu elde ederiz. Yani kesişim noktaları $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$ 'dir. Aradığımız şeklin alanı:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Örnek 4

$y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = x$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım. (Şekil 17).



Şekil 17

İlk olarak, integralin sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. $y = x$ 'i $y = 2 - x^2$ denkleminde yerine koyularak $x^2 + x - 2 = 0$ ikinci derece

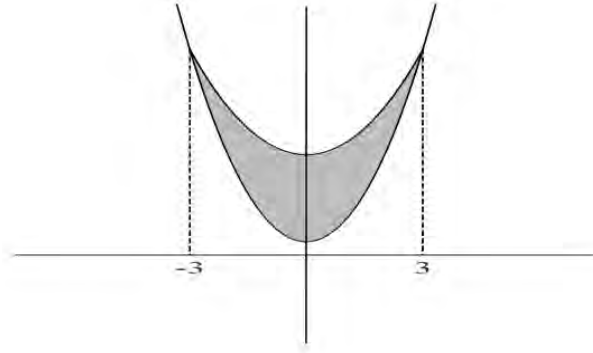
denklemini elde ediyoruz. İkinci derece denklemi çözerek çözümlerin $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ olduğunu elde ederiz. Yani kesişim noktaları $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$ 'dir.

Aradığımız şeklin alanını buluyoruz:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Örnek 5

$y = 2x^2 + 1$ ve $y = x^2 + 10$ parabolleri ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (Şekil 18).



Şekil 18

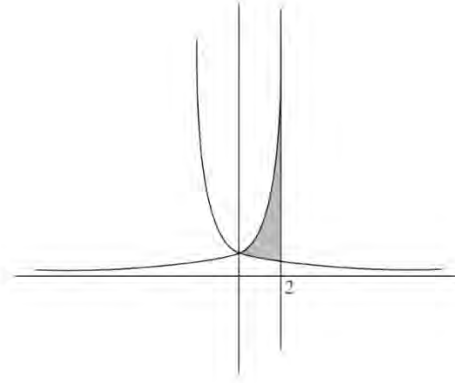
İlk olarak, integral alma aralığının sınırlarını belirleyen kesişim noktalarının koordinatlarını buluyoruz. Denklemleri eşitlesek $2x^2 + 1 = x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 3$ elde ederiz. Aradığımız şeklin alanı:

$$F = \int_{-3}^3 (x^2 + 10 - 2x^2 - 1) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 36.$$

Çözümde, her iki fonksiyonun da çift (y - eksenine göre simetrik) olduğunu kullanıyoruz.

Örnek 6

$y = e^x$, $y = e^{-x}$ eğrileri ve $x = 2$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (Şekil 19).



Şekil 19

Şekil 19'dan x 'in 0'dan 2'ye kadar hareket ettiği ve üst eğrinin $y = e^x$, alt eğrinin ise $y = e^{-x}$ olduğu görülebilir. İki eğrinin kesişim noktaları şu şekilde elde edilebilir:

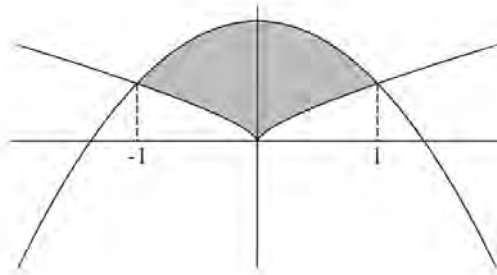
$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Buradan alan için şunu elde ederiz:

$$F = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^{-0}) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2.$$

Örnek 7 $y = 2 - x^2$ ve $y^3 = x^2$ eğrileri ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayalım (şekil 20).



Şekil 20

İki eğrinin kesişimini buluyoruz ve kesişim noktalarını $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ olarak elde ediyoruz. Şekil

$$20'den \quad F = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{2}{15}. \quad \text{elde edilir.}$$

Çalışma Alıştırmaları

1. $y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
2. $y = x^2 + x + 3$ eğrileri ve $y = x + 7$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
3. $y = \ln(x)$ ve $y = \ln^2(x)$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
4. $y = \frac{1}{1+x^2}$ ve $y = \frac{x^2}{2}$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
5. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ eğrisi ve $y = 0$, $x = e$ doğruları ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
6. $y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi ve $y = x$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.
7. $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ eğrisi ve $x = 1$ doğrusuyla sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.

6. Modüler birime ait tekrarlar alıştırmaları

1. Nyutn–Laybnic formülünü uygulayarak verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_1^2 \sqrt[4]{x^3} dx,$$

$$b) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx,$$

$$c) \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + x^3 \right) dx,$$

$$ç) \int_0^1 (2x^4 + 3x^2 + 1) dx$$

2. Yerine koyma kuralı yardımıyla verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$b) \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

$$c) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$ç) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx.$$

3. Yerine koyma kuralı yardımıyla verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx;$$

$$b) \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

4. Kısmi integral alma kuralına göre, verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^1 \frac{2x+3}{e^x} dx;$$

$$b) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

5. Kısmi integral alma kuralına göre, verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_1^2 x \ln(2x^2 - 1) dx;$$

$$b) \int_1^2 (2x-1) \ln x dx .$$

6. Kısmi integral alma kuralına göre, verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_0^{e-2} \ln(x+2) dx$$

$$b) \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

7. Verilen integralleri hesaplayınız:

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx .$$

8. $y = 2x^2 + 1$ ve $y = x^2 + 10$ eğrileriyle sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.

9. $y = 2x - x^2$ eğrisi ve $x + y = 0$ doğrusu ile sınırlanan şeklin alanını hesaplayınız.

Çözümler:

Modüler birim 1 – Diferansiyel hesaplama

1.

1. a) $\Delta L = 2m, \Delta P = 10m^2$,
b) $\Delta L = 1m, \Delta P = 10m^2$.
2. a) $\Delta f = \frac{1}{11}$,
b) $\Delta f = 2$,
c) $\Delta f = 3$,
ç) $\Delta f = 2$.
3. a) $y' = 4$,
b) $y' = 2x$ 3a $x_0 = 2, y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$,
c) $y' = 2(x - 2)$ 3a $x_0 = 5, y'(5) = 2 \cdot (5 - 2) = 6$,
ç) $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ 3a $x_0 = 1, y'(1) = 2$.
4. a) $y'_+(3) = 1, y'_-(3) = -1$
b) $y'_+(-2) = 1, y'_-(-2) = -1$,
c) $y'_+(0) = 0, y'_-(0)$ Yoktur çünkü $x < 0$ fonksiyon tanımlı değildir
ç) $y'_+(5) = \infty, y'_-(5) = -\infty$

2.

1. a) $y' = 5x^4$, b) $y' = \frac{7}{3}x^3\sqrt{x}$, c) $y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, ç) $y' = -\frac{5}{x^6}$,
2. a) $y' = \frac{11}{2}x^4\sqrt{x}$, b) $y' = -\frac{7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$, c) $y' = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$, ç) $y' = -\frac{1}{5x^5\sqrt{x}}$.

3.

1. a) $f'(x) = 4x$, b) $f'(x) = -\frac{1}{8\sqrt[4]{x^3}}$, c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, c)2
2. a) $f'(x) = 4x + 5$, b) $f'(x) = x^2 - x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}$,
c) $f'(x) = 1 + x + x^2$, ç) $f'(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$3. \quad \text{a) } f'(x) = 14x^2\sqrt{x} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}; \quad \text{b) } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4. \quad \text{a) } f'(x) = \frac{1}{x} + e^x - 5, \quad \text{b) } f'(x) = 2^x \ln 2 + 5 \cdot 4^x \ln 4,$$

$$5. \quad \text{a) } f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad \text{b) } f'(x) = x^2 e^x (3 + x)$$

$$6. \quad \text{a) } f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}, \quad \text{b) } f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 1)^2},$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}, \quad \text{ç) } f'(x) = \frac{x(2 - x)}{x^2}.$$

4.

$$1. \quad \text{a) } y' = 5(2x^2 + 5x - 6)^4(4x + 5), \quad \text{b) } y' = 8(x^5 + 2x)^7(5x^4 + 2),$$

$$\text{c) } y' = 5(5x^5 + 3x^3 + 1)^4(25x^4 + 9x^2), \quad \text{ç) } y' = 6m(mx + n)^5.$$

$$2. \quad \text{a) } y' = 12x^2 - 16x - 35, \quad \text{b) } y' = (x + 2)(x^2 - 3x + 1)^2(8x^2 - 3x - 16).$$

$$3. \quad \text{a) } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{b) } y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 1)^2}}.$$

$$4. \quad \text{a) } y' = 2e^{2x+5}, \quad \text{b) } y' = xe^{\sqrt{x}}\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right).$$

5.

$$1. \quad \text{a) } y' = -\frac{2xy}{x^2 + 2y}, \quad \text{b) } y' = -\frac{x + 2y}{2x + y}, \quad \text{c) } y' = -\frac{2 + y^2}{1 + 2xy}, \quad \text{ç) } y' = -\frac{3x^2 + y^3}{3xy^2}.$$

$$2. \quad \text{a) } y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right), \quad \text{b) } y' = 2x^{2x}(\ln x + 1),$$

$$\text{c) } y' = \left(\frac{1 + x^2}{x}\right)^x \left[\ln\left(\frac{1 + x^2}{x}\right) + \frac{x^2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^3} \right], \quad \text{ç) } y' = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right).$$

6.

$$1. \quad \text{a) } dy = (1 - x) \cdot e^{-x} dx \quad \text{b) } dy = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$2. \quad \text{a) } 1,0001; \quad \text{b) } 0,001; \quad \text{c) } 3,00005.$$

7.

1. a) $y' = 2t^2$; b) $y' = \frac{t+5}{t}$.

2. a) $y' = \frac{3(e^t + e^{-t})}{5(e^t - e^{-t})}$; b) $y' = \frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[6]{t}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$.

8.

1.

a) teğet denklemi $2x - y + 1 = 0$

normalin denklemi $x + 2y - 7 = 0$

b) teğet denklemi $24x - y + 33 = 0$

normalin denklemi $x + 24y + 362 = 0$

2. Kesişim noktaları $A(2, 0)$ ve $B(-2, 0)$

$A(2, 0)$

teğet denklemi $4x + y - 8 = 0$

normalin denklemi $x - 4y - 2 = 0$

$B(-2, 0)$

teğet denklemi $4x - y + 8 = 0$

normalin denklemi $x + 4y + 2 = 0$

3. Kesişim noktaları $A(3, 8)$

teğet denklemi $6x - y - 10 = 0$

normalin denklemi $x + 6y - 51 = 0$

4. Kesişim noktaları $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ve $B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{27}\right)$

$A\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

teğet denklemi $x - 2y + 9 = 0$

normalin denklemi $8x + 4y + 9 = 0$

$B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{27}\right)$

teğet denklemi $27x - 54y + 10 = 0$

normalin denklemi $108x + 54y + 5 = 0$

9.

1. a) $y'' = 4e^{2x-3}$, b) $y'' = \frac{2(x^2 + 2x) - (2x+2)^2}{(x^2 + 2x)^2}$, c) $y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$,

ç) $y'' = 4$, d) $y'' = -\frac{3}{16x^4\sqrt{x}}$,

e) $y'' = 3x^2 - 2x + 2$, f) $y'' = x(6\ln x + 5)$.

2. a) $y'' = 6(1-x)$, b) $y'' = \frac{2(2x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 10x + 3)}{(x+1)^3}$.

10.

2. a) $x \in \mathbb{R}$ için artandır, ekstremum değerleri yoktur.

b) $x = \frac{5}{2}$, $y_{\min} = -3\frac{1}{4}$, için minimumu vardır.

c) $x = 1$, $y_{\max} = \frac{1}{5}$ için maksimum, $x = 3$, $y_{\min} = -5\frac{2}{5}$, minimum.

ç) $y' = 3(x-2)^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ için artandır, ekstremum değerleri yoktur.

d) $x = \frac{3}{4}$, $y_{\min} = -\frac{27}{256}$ için minimum.

e) iki minim vardır: $x = 1$, $y_{\min} = 2$ ve $x = -1$, $y_{\min} = 2$,

f) $x = -2$, $y_{\max} = 4e^{-2}$ için maksimum, $x = 0$, $y_{\min} = 0$ için minimum.

g) $x = 1$, $y_{\min} = 1$ için minimum.

ğ) $x = 1$, $y_{\max} = \frac{1}{3}$ için maksimum, $x = -1$, $y_{\min} = -1$, minimum.

h) $x = -7$, $y_{\max} = -14$ için maksimum, $x = -1$, $y_{\min} = -2$ minimum.

ı) $x = \frac{\pi}{4}$, $y_{\max} = \sqrt{2}$ için maksimum, $x = \frac{5\pi}{4}$, $y_{\min} = -\sqrt{2}$ minimum.

3. a) $a = 1$; b) $a = \frac{1}{2}$

4. $a = 2$, $b = -3$.

11.

1.

a) $x \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$ aralığında fonksiyon konkavdır, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ aralığında fonksiyon konvektir.

b) $(-\infty, 0)$ ve $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ aralıklarında fonksiyon konkavdır, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ aralığında fonksiyon konvektir.

c) $(-\infty, 0)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında fonksiyon konkavdır, $(0, 1)$ aralığında fonksiyon konvektir.

ç) Fonksiyon $(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında konkav, $(-1, 1)$ aralığında ise konvektir.

2. (a şıkkı $y = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$ ödevinde $x \neq -1$ 'i ekleyin)

a) Dönüm noktası yok.

b) Dönüm noktaları $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$ ve $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 'tür.

3.

a) Fonksiyon $(-1, 0)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında konkav, $(-\infty, -1)$ ve $(1, 0)$ aralıklarında ise konvektir. Dönüm noktası $(0, 0)$ 'dır.

b) Fonksiyon $(-1, 0)$ aralığında konkav, $(-\infty, -1)$ aralığında ise konvektir. Dönüm noktası yok.

c) Fonksiyon $(-\infty, -3.41)$ ve $(-0.58, \infty)$ aralıklarında konkav, $(-3.41, -0.58)$ aralığında ise konvektir. Dönüm noktaları $(-3.41, 0.38)$ ve $(-0.58, 0.19)$ 'dur.

ç) Fonksiyon $(2, \infty)$ aralığında konkav, $(-\infty, 2)$ aralığında konvektir. Dönüm noktası $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

d) Fonksiyon $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \infty\right)$ aralığında konkav, $\left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ aralığında ise konvektir. Dönüm noktası $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ 'tür.

e) ($y = x \ln^2 x$, $x > 0$ alıştırmalarında) Fonksiyon $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ aralığında konkav, $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ aralığında ise konvektir. Dönüm noktası $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ 'dir."

13.

1. $a = 7.5, b = 7.5, a \cdot b = 56.25$

2. $a = 108, b = 72, 2a^2 + 3b^2 = 38880$

3. $a = 5, b = 2, P = 10$

4. $a = 7.06, b = 5.06, h = 1.47, V = 58.12$

5. Eşkenar üçgen $a = 5, P = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

6. Kenari ile küp $a = 7.94, P = 378$

7. $P = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

8. $r = 6\sqrt{2}, H = 24, s = 18\sqrt{2}, P = 288\pi$

Modüler birim 2 – İntegral hesabı

1.	1. a) $F(x) = \ln x$ b) $F(x) = \sqrt{x} + 3$
4.	a) $F(x) = x^3 + 2$ b) $F(x) = e^x + 1$
2.	1. a) $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}^x}{\ln \sqrt{3}} + C$; b) $x + \ln x + C$; c) $\sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C$; ç) $\frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C$; d) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3} + C$; d) $8x + 4x^3 + 6\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C$.
3.	1. a) $\frac{(x^2 - 13)^{24}}{48} + C$; b) $\frac{(x^3 - x^2 + x - 9)^8}{8} + C$; c) $\ln x^2 + 3x - 10 + C$. 2. a) $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3 - 9x)^6} + C$; b) $-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + C$; c) $\frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3 + 27} + C$. 3. a) $\ln e^x + x + C$; b) $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C$; c) $\frac{2}{3} \sqrt{\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3} + C$.
4.	1. a) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$; b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + C$. 2. a) $\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; b) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + C$.
6.	1. a) 2 b) $8\frac{2}{3}$ c) $e - 1$ ç) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$ 2. a) $\ln 2 - \frac{5}{4}$; b) $-\frac{65}{4}$; c) $\ln \frac{3}{2} - 3$; ç) $e^4 - e + \frac{14}{3}$. 3. a) 0; b) $\frac{256}{21}$.
7.	a) 20 b) 7 c) $\frac{1}{10}$ ç) $\frac{3}{8}$

$$d) \frac{14}{3}$$

$$e) 32\frac{2}{3}$$

$$f) 1.61$$

$$g) 13\frac{1}{3}$$

$$ğ) \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$h) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$i) \frac{1}{2}e(e^2 - 1)$$

$$j) 6\sqrt[6]{7} - \frac{18\sqrt[6]{3}}{7}$$

8.

$$a) 1 + e$$

$$b) \frac{11e - 14}{e^2}$$

$$c) 2$$

$$ç) -\frac{3}{e}$$

$$d) 1$$

$$e) \frac{1}{9}(1 + 2e^3)$$

$$f) \frac{2e\sqrt{e}}{9}$$

$$g) \ln 2 - \frac{1}{2}$$

9.

$$1. \frac{1}{3}$$

$$2. \frac{32}{3}$$

$$3. 3 - e$$

$$4. \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

$$5. \frac{1}{3}$$

$$6. \frac{7}{6}$$

$$7. e + \frac{1}{e} - 2.$$

10.

$$1. \frac{4ab^2\pi}{3}$$

2. $\frac{\pi}{3}$

3. π

4. $\frac{2\pi}{3}$

5. $\frac{44\pi}{3}$

Modüler birim 3 – Matrisler (her mesleğe ait)

1.

1. a) $-2\sin 2x$; b) $pq(q-p)$; c) $2p^2$; ç) **0**; d) $nmp+2nm+2mp+2np$; e) 0.

2. a) 6; b) -127; c) 15.

3. a) $x_1 = -1, x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$; b) $x_1 = 0, x_2 = 6$; c) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2\frac{1}{2}$; ç) $x = 0$.

4. a) $[-2, 2]$; b) $(-\infty, -6] \cup [-3, +\infty)$.

2.

2.a) 0, b) 0, c) 0, ç) 0.

4.a) 5; b) 4; c) -7.

3.

1. a) (1,3,-2); b) çözüm yok c) sonsuz sayıda çözüm ç) (1,5,1).

2. a) (0,0,0); b) $M = \{(-t, 10t, 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3. a) $m \neq 1$ ve $m \neq -2$ ise tek çözüm, $m = 1$ ise sonsuz sayıda çözüm ve $m = -2$ ise çözüm yok;
b) $m \neq -8$ ise tek çözüm ve $m = -8$ ise sonsuz sayıda çözümü vardır.

4. a) $(1, -\frac{1}{2}, 1)$; b) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

4.

1. $x = -1, y = 2, z = -3, u = 4$;

2. $A^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

3. $a = 2c$ için, herhangi bir c .

4. a) A, üst ve alt üçgensel, skaler ve simetrik bir matristir;
b) B, üst ve alt üçgensel, köşegen ve simetrik bir matristir;
c) C, üst üçgensel bir matristir.

ç) A, üst ve alt üçgensel, skaler ve simetrik bir matristir, yani 3. dereceden birim matristir.

5.

$$1.a) \begin{bmatrix} 28 & -9 & 12 & -6 \\ 4 & -12 & 15 & 6 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} -25 & 2 \\ 9 & 6 \\ -12 & -6 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}; \quad c) \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & -12 \\ 15 & 22 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$3.a) \begin{bmatrix} -4 & -98 & 135 \\ 12 & 7 & -38 \\ -21 & -54 & 92 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 18 & 44 & -66 \\ -4 & 183 & -159 \end{bmatrix}; \quad c) \begin{bmatrix} -283 & 52 & 38 \\ 196 & -124 & -206 \\ 240 & 32 & 112 \end{bmatrix}.$$

5. DA, BC, CD, CA.

6.

$$1.a) A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}; \quad b) B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad c) C^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$2.a) A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad b) B^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix}; \quad c)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{43} \begin{bmatrix} 10 & 13 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -47 & 31 & 27 \end{bmatrix}.$$

7.

$$1.a) X = \begin{bmatrix} 70 & 63 \\ 42 & 847 \end{bmatrix}; \quad b) X = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 15 & -19 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}.$$

$$2.a) X = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 37 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad b) X = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 30 & 25 & 91 \\ 0 & 50 & -40 \\ 0 & 25 & 25 \end{bmatrix}.$$

8.

1. (1, 3, -2); 2. (2, -1, 3); 3. (3, -2, 1); 4. (1, 5, 1).

9.

1. (1, 3, -2); 2. (2, -1, 3); 3. (3, -2, 1); 4. (1, 5, 1);
5. çözümü yoktur; 6. Sonsuz çok çözümü vardır.

10.

1. a) b^2 ; b) 40;

3. $(\frac{3}{2}, \frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$.

4. a) $\begin{bmatrix} -10 & -11 & -30 \\ -3 & -2 & 27 \\ 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; ç) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; d)
- $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.
5. a) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 22 & 14 \\ -29 & 18 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
7. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.
8. (1,0,-2).
9. a) $a \neq 1$ ve $a \neq -2$ için belirli, $a = 1$ için belirsiz ve $a = -2$ için çelişki.
b) $a \neq 0$ için $(1 - a, a, 0)$ çözümü ile belirli; b) $a = 0$ için belirsizdir.
10. a) çelişki; b) belirsiz; c) belirsiz; ç) $(0, 0, 0)$; d) $(\frac{-5}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-4}{11})$;
e) $(1, 0, -4)$.

Modüler birim 4 – Uzayda analitik geometrisi

- 1.
- 1.a) $5\sqrt{3}$; b) 21; c) $10(5\sqrt{3} - 6)$.
2. 110, 89° .
- 5.a) 17; b) $\sqrt{14}, \sqrt{29}$; c) 33° .
- 6.a) 45° ; b) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
7. (0,3,6), (0,-3,-6).

- 2.
- 1.a) 8; b) 16; c) 80.
2. $4\sqrt{2}$.
3. 15 birim kare
5. a) $(-9, -11, -3)$; b) $(-18, -22, -6)$; c) $(-90, -110, -30)$.
6. $\sqrt{13}$.
7. 0,8689.

- 3.
3. $12\sqrt{2}$;
4. 343 kübik birim
5. $\frac{3\sqrt{41}}{41}$ birim

6. $S_1(\frac{35}{12}, 0, 0), S_2(\frac{5}{12}, 0, 0)$.

7. $m_1 = 2, m_2 = -4$.

4.

1. $5x + 2y - 3z - 58 = 0$; $P, Q \notin \Sigma, R \in \Sigma$.

2. $x - 3z - 11 = 0$.

3. a) Koordinat başlangıcından geçer; b) z - eksenine paraleldir; c) y ekseninden geçer;
ç) Oyz - düzleminin denklemi; d) x - eksenine paraleldir.

4. $x = 5$.

5. $3x - z = 0$.

5.

1. a) $\vec{r} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) - 10 = 0$; b) $\vec{r} \cdot (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) - 4 = 0$.

2. $\vec{r} \cdot (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - 5 = 0$.

3. $\vec{r} \cdot (-\frac{15\sqrt{538}}{538}, \frac{13\sqrt{538}}{538}, \frac{12\sqrt{538}}{538}) = 0$.

4. a) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 = 0$; b) $\frac{\sqrt{14}}{14}x - \frac{\sqrt{14}}{7}y + \frac{3\sqrt{14}}{14}z - \frac{\sqrt{14}}{7} = 0$.

5. a) hayır; b) hayır; c) evet

6. a) $p = \frac{5}{6}, \vec{n}_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; b) $p = 3, \vec{n}_0 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

6.

1. a) $a = 10, b = -\frac{20}{3}, c = -4$; b) $a = -\frac{15}{7}, b = -3, c = -\frac{15}{4}$.

2. $x - 6y - 2z + 2 = 0$;

3. a) $x + y + z - 6 = 0$; b) $15x + 4y + 4z + 35 = 0$.

4. $m = 1$.

5. $m = 14$.

6. $m = -7$.

7. $V = 45$.

7.

1. a) $13x - 7y - 2z + 1 = 0$; b) $15x - 3z - 19 = 0$.

2 a) noktalar komplanar değildir; b) $2x + y - z - 3 = 0$.

3. $3x + 6y - 2z - 15 = 0$; hiçbir

8.

1. a) çakışık durumda; b) paraleldirler; c) açılı olarak kesilir $\alpha \approx 16^\circ$

2. $x+3y+2z=0$.

3. $2x-3y-5z-5=0$.

4. $x-y+z-11=0$.

9.

1. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. $A(0,0,-\frac{1}{3}), B(0,0,\frac{5}{9})$.

3. $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

4. $\frac{26\sqrt{278}}{139}$.

5. $A(0,8,0), B(0,-10,0)$.

10.

1. $\frac{x-1}{-1} = \frac{z+2}{2}, y-2=0; x=1-t, y=2, z=2t-2$.

2. $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+5}{-2} = z+7; x=3-3t, y=-5-2t, z=t-7$.

3. $110x+10z+7=0$.

4. $3x-y-2z=0$.

5. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4}$.

6. $\frac{x+1}{-1} = y-2 = \frac{z+3}{11}, \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{9}, \frac{x}{2} = y-4 = \frac{z-6}{2}$.

7. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{10}, \frac{x+2}{6} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+6}{-1}, \frac{x+3}{7} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{10}, \frac{x-5}{6} = \frac{y+6}{-8} = \frac{z-4}{-1}$.

11.

1. $M(\frac{16}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{20}{9}), \alpha \approx 22^\circ$.

2. Doğru düzleme üzerindedir

3. $\Sigma: x+2y+z=0, M(\frac{6}{7}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{6})$.

4. $\Sigma: x-2y+z=0$.

5. $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-4}{-3}, M(1,1,1)$.

12.

1.a) paralel; b) aykırıdırlar

2. $x-1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$.

3. $\lambda = -2, \alpha \approx 60^\circ, M(-3,5,-5)$.

$$4. \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

$$5. \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{-7}.$$

13.

$$1. \frac{28\sqrt{17}}{17}, \frac{14\sqrt{13}}{13}, \frac{28\sqrt{89}}{89}.$$

$$2. \frac{2\sqrt{30}}{3}.$$

$$3. \sqrt{13}, \frac{\sqrt{10010}}{35}.$$

$$4. \frac{37\sqrt{166}}{166}.$$

$$5. a) \frac{3\sqrt{35}}{7}.$$

14.

$$1. \frac{85}{12}.$$

$$2. x - z = 0.$$

$$3. 8x - 17y = 0.$$

$$4. 2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

$$5. x \pm \sqrt{2}y + 3z - 6 = 0.$$

$$6. a = 5, b = -12.$$

$$7. \sqrt{42}.$$

$$8. x + 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{6}, \alpha \approx 53^\circ.$$

$$10. \frac{13\sqrt{2}}{6}.$$

Modüler birim 5 – Belirsiz integral

2.

$$1. a) \frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}^x}{\ln \sqrt{3}} + C; \quad b) x + \ln|x| + C; \quad c) \sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C; \quad \text{ç) } \frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C;$$

3.

$$1. a) \frac{(x^2 - 13)^{24}}{48} + C; \\ b) \frac{(x^3 - x^2 + x - 9)^8}{8} + C;$$

d) $\frac{2a^x}{\ln a} + \operatorname{ctgx} + C;$ $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3} + C;$ $8x + 4x^3 + 6\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C.$ 2.a) $-\cos x - \sin x + C;$ b) $-\operatorname{ctgx} + \cos x + C;$ c) $\operatorname{tgx} - \operatorname{ctgx} + C;$ ç) $\frac{x^2}{6} + 4\cos x + 5\sin x + C;$ d) $-\operatorname{ctgx} + C.$	e) b) $\ln x^2 + 3x - 10 + C.$ f) 2. a) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3 - 9x)^6} + C;$ b) $-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + C;$ c) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3 + 27} + C.$ 3. a) $\ln e^x + x + C;$ b) $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C;$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{\left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]^3} + C.$ 4. a) $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C;$ b) $\ln \sin^2 x + 3 + C;$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{4}{7}\sqrt{\sin^7 x} + \frac{2}{11}\sqrt{\sin^{11} x} + C;$ r) $\ln\left \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right + C$
4. 1. a) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C;$ b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + C.$ 2. a) $\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C;$ b) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + C.$ 3. a) $\sin x(x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x(4x^3 - 24x) + C;$ b) $\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\ln 1-x^2 + C.$ 4. a) $\frac{\cos 2x + \sin 2x}{4}e^{2x} + C;$	
5. 1. a) $\frac{4x^4\sqrt{x^3}}{7} + C$ b) $-\frac{1}{2x^4} + C$ c) $27x + \frac{27x^4}{4} + \frac{9x^7}{7} + \frac{x^{10}}{10} + C$ ç) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{24}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$ d) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$ e) $\frac{x^2}{2} - 2\operatorname{arctgx} + C$ f) $-\operatorname{ctgx} - x + C$ 2. a) $\frac{2\sqrt{(3x-4)^3}}{9} + C$ b) $-\frac{2}{15\sqrt{(5x-2)^3}} + C$ c) $\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan x\sqrt{\frac{2}{3}} + C$	

$$\zeta) \frac{4}{11} \sqrt[4]{(x+5)^{11}} - \frac{40}{7} \sqrt[4]{(x+5)^7} + 32 \sqrt[4]{(x+5)^3} + C \quad d) * -2x + \ln|x-1| + C$$

$$3. a) -\frac{1}{2(1+x^2)} + C \quad b) \frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3-9x)^6} + C \quad c) \frac{1}{2\sqrt{5}} \arctg \frac{x^2}{\sqrt{5}} + C$$

$$\zeta) -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C \quad d) \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C \quad f) \ln |\sin x| + C$$

$$e) \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C \quad f) \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$4. a) \frac{(x+3)^3}{3} - \frac{3(x+3)^2}{2} + 3(x+3) + \ln|x+3| + C$$

$$b) \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C \quad c) -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C$$

$$\zeta) \frac{1}{2 \sin^2 x} + \ln |\cos x| + C$$

$$5. a) \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C \quad b) \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$c) -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C \quad \zeta) -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C$$

$$d) \sin x (x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x (4x^3 - 24x) + C$$

Modüler birim 6 – Belirli integral

1. 1. a) 2 b) $8\frac{2}{3}$ c) $e-1$ $\zeta) 1$ d) 2 e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{2}{3}$ g) $\frac{3}{5}$	2. 1. a) 20 b) 7 c) $\frac{1}{10}$ $\zeta) \frac{3}{8}$ d) $\frac{14}{3}$ e) $32\frac{2}{3}$
--	---

	f) 1.61 g) $13\frac{1}{3}$ 2. a) $\ln 2 - \frac{5}{4}$; b) $-\frac{65}{4}$; c) $\ln \frac{3}{2} - 3$; ç) $e^4 - e + \frac{14}{3}$. 3. a) 0; b) $\frac{256}{21}$.
3. 1. a) $1+e$ b) $\frac{11e-14}{e^2}$ c) 2 ç) $-\frac{3}{e}$ d) 1 e) $\frac{1}{9}(1+2e^3)$ f) $\frac{2e\sqrt{e}}{9}$ g) $\ln 2 - \frac{1}{2}$ 2. a) 0; b) $\frac{256}{21}$.	4. 1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{32}{3}$ 3. $3-e$ 4. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $\frac{7}{6}$ 7. $e + \frac{1}{e} - 2$.

