

MATEMATIKA

PËR VITIN E KATËRT

(lëndë zgjedhore)

ARSIMI I MESËM
PROFESIONAL

4

Gjeologjike-minierë dhe metalurgjike /Gjeologjia, miniera dhe metalurgjia, Ndërtimore-gjeodezike/Ndërtimtari dhe gjeodezi, Grafike/Grafikë, Mbrojtja ekonomike-juridike dhe sociale/Ekonomia, drejtësia dhe tregtia, Elektroteknike/Elektroteknika, Shëndetësore/Mbrojtja shëndetësore dhe sociale, Bujqësore-veterinare/Bujqësia, peshkimi dhe veterinaria, Shërbimet personale/Shërbimet personale, Makineri-Makineria, Rugor/Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil-lëkurëtari/Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme, Hotelierike-turistike/Hotelieria dhe turizmi, Profesioni kimik-teknologjik/Kimia dhe teknologjia dhe Pyllëtaria-përpunimi i drurit/Pyllëtaria dhe përpunimi i drurit

MATEMATIKA PËR VITIN E KATËRT

(lëndë zgjedhore)

ARSIMI I MESËM PROFESIONAL

Gjeologjike-minierë dhe metalurgjike /Gjeologjia, miniera dhe metalurgjia, Ndërtimore-gjeodezike/Ndërtimtari dhe gjeodezi, Grafike/Grafikë, Mbrojtja ekonomike-juridike dhe sociale/Ekonomia, drejtësia dhe tregtia, Elektroteknike/Elektroteknika, Shëndetësore/Mbrojtja shëndetësore dhe sociale, Bujqësore-veterinare/Bujqësia, peshkimi dhe veterinaria, Shërbimet personale/Shërbimet personale, Makineri-Makineria, Rrugor/Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil-lëkurëtari/Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme, Hotelierike-turistike/Hotelieria dhe turizmi, Profesioni kimik-teknologjik/Kimia dhe teknologjia dhe Pyllëtaria-përpunimi i drurit/Pyllëtaria dhe përpunimi i drurit.

MATEMATIKA PËR VITIN E KATËRT (lëndë zgjedhore)
ARSIMI I MESËM KATËRVJEÇAR

Gjeologjike-minierë dhe metalurgjike /Gjeologjia, miniera dhe metalurgjia, Ndërtimore-gjeodezike/Ndërtimtari dhe gjeodezi, Grafike/Grafikë, Mbrojtja ekonomike-juridike dhe sociale/Ekonomia, drejtësia dhe tregtia, Elektroteknike/Elektroteknika, Shëndetësore/Mbrojtja shëndetësore dhe sociale, Bujqësore-veterinare/Bujqësia, peshkimi dhe veterinaria, Shërbimet personale/Shërbimet personale, Makineri-Makineria, Rrugor/Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil-lëkurëtari/Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ngjashme, Hotelierike-turistike/Hoteliera dhe turizmi, Profesionimi kimik-teknologjik/Kimia dhe teknologjia dhe Pyllëtaria-përpunimi i drurit/Pyllëtaria dhe përpunimi i drurit

Autore:

Limonka Koceva Llazarova
Biljana Zlatanovska

Recensentë:

Marinja Miteva
Jagoda Tanushoska
Ismail Ameti

Titulli original:

МАТЕМАТИКА ЗА ЧЕТВРТА ГОДИНА (изборен)
СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Графичка/Графичарство, Економско-правна и трговска/Економија, право и трговија, Електротехничка/Електротехника, Здравствена/Здравство и социјална заштита, Земјоделска-ветеринарна/Земјоделство, рибарство и ветеринарство, Лични услуги/Лични услуги, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка/Угостителство и туризам, Хемиско-технолошка струка/Хемија и технологија и Шумарско-дрвопреработувачка/Шумарство и обработка на дрво

Лимонка Коцева Лазарова
Билјана Златановска

Përkthyer nga gjuha maqedonase: Muzafer Beqiri

Redaktore profesionale në gjuhën shqipe: Xhevair Beqiri

Lektor: Refail Sulejmani

Redaktor: Refail Sulejmani

Botues: Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut rr. "Shën Kirili dhe Metodi" nr. 54 1000 Shkup.

Ilustrimet: Limonka Koceva Llazarova, Biljana Zlatanovska

Rregullimi grafik-teknik: Todor Trajkovski – ARS STUDIO

Vendi dhe viti i botimit: Shkup, 2025

Me dhendim për lejimin e tekstit shkollor nga lënda e Matematikës, lëndë zgjedhore, viti i katërt, arsimit i mesëm profesional, drejtimi: Gjeologji, xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari dhe gjeodezi, Grafikë, Ekonomi, drejtësi dhe tregti, Elektroteknikë, Shëndetësi dhe mbrojtje sociale, Bujqësi, peshkatari dhe dheterinari, Shërbime personale, Makineri, Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ndryshme, Gastronomi dhe turizëm, Kimi dhe teknologji dhe Pylltari dhe përpunimi i drurit, numër 26-316/1 të datës 14.03.2024, të miratuar nga Komisioni nacional për tekste shkollore.

PARATHËNIE

Teksti shkollor është dedikuar para së gjithash për nxënësi të vitit IV në shkollat e mesme profesionale në Republikën e Maqedonisë së Veriut ku janë përfshirë drejtime: Gjeologji, xehetari dhe metalurgji, Ndërtimtari dhe gjeodezi, Grafikë, Ekonomi, drejtësi dhe tregti, Elektroteknikë, Shëndetësi dhe mbrojtje sociale, Bujqësi, peshkatari dhe dheterinari, Shërbime personale, Makineri, Komunikacion, transport dhe deponim, Tekstil, lëkurë dhe prodhime të ndryshme, Gastronomi dhe turizëm, Kimi dhe teknologji dhe Pylltari dhe përpunimi i druri si teksti themelor nga lënda e matematikës (lëndë zgjedhore). Por, ai mund të shfrytëzohet edhe si literaturë për çdonjërin që dëshiron ta mësojë matematikën që përfshihet tek ai.

Te teksti shkollor janë përfshirë këto njësi modulare:

1. Njehsimi diferencial (për drejtimin/sektorin ekonomi);
2. Njehsimi integral (për drejtimin/sektorin ekonomi);
3. Matrica (për të gjitha drejtimet/sektorët e tjerë);
4. Gjeometria analitike në hapësirë (për të gjitha drejtimet/sektorët e tjerë);
5. Integrali i pacaktuar (për të gjitha drejtimet/sektorët e tjerë);
6. Integrali i caktuar dhe zbatimi (për të gjitha drejtimet/sektorët e tjerë).

Njësitë modulare janë përpunuar në pajtim me programin mësimor, i cili është parashikuar të realizohet në orët e matematikës për drejtimet e përmendura të vitit IV në shkollat e mesme profesionale.

Çdo njësi modulare si një tërësi është ndarë në njësi mësimore. Njësitë mësimore përpunojnë përmbajtje, të cilat nuk janë dedikuar për përpunimin të dhetëm një ore mësimore: Arsimtari sipas parashikimit të tij mund të përpunojë në më shumë orë mësimore. Te çdo njësi mësimore si pjesë e njësisë modulare përpunohet përmbajtje mësimore konkrete tek e cila qartë dhe pa mëdyshje janë futur koncepte të reja, lidhja ndërmjet atyre, si edhe lidhja me koncepte paraprakisht të mësuara. Ato janë të mbështetura me shembuj të zgjidhur dhe detyra për zgjidhje nëpërmjet të ciladhe nxënësi do t'i përdhetësojë konceptet e reja. Në fund të çdo njësie mësimore janë dhënë Detyra për punë të pavarur, të cilat do t'i ndihmojnë nxënësit t'i kontrollojë njohuritë e dheta për atë që është mësuar. Në fund të çdo njësie mësimore janë dhënë detyra për përsëritje dhe përforsim të njohuridhe të përdhetësuar prej njësisë modulare. Zgjidhja e suksesshme e këtyre detyradhe nga ana e nxënësit do t'i mundësojnë për thellimin e njohuridhe të përdhetësuar. Në fund të tekstit shkollor janë dhënë përgjigje të shkurtëra të detyradhe për punë të pavarur prej çdo njësie mësimore dhe detyradhe për përsëritje dhe përforsim të çdo njësie modulare, të cilat i shërbejnë nxënësit për të vërtetuar saktësinë dhe zgjidhjen e suksesshme të detyrës. Në fund sinqerisht shpresojmë se ky tekst shkollor do t'i ndihmojë çdo nxënësi për përdhetësimin e suksesshëm të materialit të nevojshëm nga lënda e matematikës të parashikuar të mësojë në vitin IV prej drejtmedhe të lartpërmendura në shkollat e mesme profesionale. Ne si autor do të jemi krenarë dhe të kënaqur, nëse ky tekst në mënyrë plotësuese e mban dhe zgjon dashurinë e çdo nxënësi ndaj matematikës.

Nga autoret

PËRMBAJTJA

Njësia modulare 1 – Njehsimi diferencial.....	7
1. Koncepti për derivatin e funksionit	8
2. Tabela e derivatedhe të funksionedhe elementare.....	14
3. Rregullat për diferencim	18
3.1. Derivati i prodhimit i konstantes dhe funksionit	18
3.2. Derivati i shumës së funksionit.....	19
3.3. Derivati i prodhimit të funksionedhe	20
3.4. Derivati i herësit të funksionedhe	22
4. Derivati i funksionit të përbërë.....	24
5. Derivati i funksionit implicit dhe derivati logaritmik	27
6. Koncepti për diferencialin	29
7. Derivati prej funksionedhe të dhëna parametrike	31
8. Barazimi i tangjentës dhe barazim i normales.....	32
9. Derivati i rendit më të lartë	39
10. Monotonia dhe ekstremet lokale të funksionit	40
11. Kondheksiteti/konkaviteti dhe pika e lakimit të funksionit.....	51
12. Shqyrtimi i vijimit dhe skicimi i grafikut të funksionit	56
13. Zbatimi i derivatit për zgjidhjen e probleme dhe të ekstremedhe.....	69
14. Detyra për përsëritje të njësisë modulare	79
Njësia modulare 2 – Njehsimi integral.....	81
1. Integrali i pacaktuar.....	82
2. Vetitë themelore të integralit të pacaktuar dhe tabela e integraledhe themelore.....	86
3. Metoda e zëdhendësimit.....	90
4. Metoda e integrimit parcial	95
5. Koncepti për integrali e caktuar.....	98
6. Teorema themelore e njehsimit integral.....	104
7. Integrimi me zëdhendësimin tek integrali i caktuar	109
8. Integrimi parcial i integralit të caktuar.....	114
9. Syprina e figurës rrafshore.....	118
10. Vëllimi i trupadhe rrotullues	125
11. Detyra për përsëritje të njësisë modulare	131

Njësia modulare 3 – Matricat	133
1. Koncepti për detrerminantat e rendit të dytë.....	134
2. Vetitë e determinantës së rendit të dytë dhe të tretë	140
3. Zgjidhja e sistemit prej tre barazimedhe lineare me tri të panjohura dhe diskutimi për bashkësinë e zgjidhjedhe	147
4. Koncepti për matricën.....	158
5. Operacionet me matricat	164
6. Matrica indhersibile dhe indherse	170
7. Zgjidhja e barazimedhe të matricadhe	175
8. Zgjidhja e sistemit prej tre barazimedhe lineare me tri të panjohura	178
9. Metoda e Gausit të eliminimit.....	180
10. Detyra për përsëritje të njësisë modulare	183
Njësia modulare 4 – Gjeometria analitike në hapësirë	185
1. Prodhimi skalar i dhektorëdhe	186
2. Prodhimi dhektoral i dhektorëdhe	192
3. Prodhimi i përzier i dhektorëdhe.....	195
4. Forma e përgjithshme e barazimit të rrafshit.....	197
5. Forma normale e barazimit të rrafshit	201
6. Forma segmentale e barazimit të rrafshit	204
7. Barazimi i rrafshit nëpër tri pika.....	208
8. Pozita reciproke e dy rrafshedhe	210
9. Largësia prej pikës deri te rrafshi	214
10. Barazimet e drejtëzës në hapësirë.....	216
11. Pozita reciproke e drejtëzës dhe rrafshit.....	223
12. Pozita reciproke e dy drejtëzadhe.....	227
13. Largësia ndërmjet dy drejtëzadhe	235
14. Detyra për përsëritje të njësisë modulare	239
Njësia modulare 5 – Integrali i pacaktuar	241
1. Integrali i pacaktuar.....	242
2. Vetitë themelore të integralit të pacaktuar dhe tabela e integraledhe themelor.....	246
3. Metoda e zëdhendësimit.....	251
4. Metoda e integrimit parcial.....	256
5. Detyra për përsëritje të njësisë modulare	261

Njësia modulare 6 – Integrali i caktuar	262
1. Koncepti për integralin e caktuar.....	263
2. Teoremat themelore të njehsimit integral	269
3. Integrimi parcial të integralit të caktuar	273
4. Integrimi parcial të integralit të caktuar	280
5. Syprina e figurës së rrafshët.....	285
6. Detyra për përsëritje të njësisë modulare	291
Zgjidhje.....	293

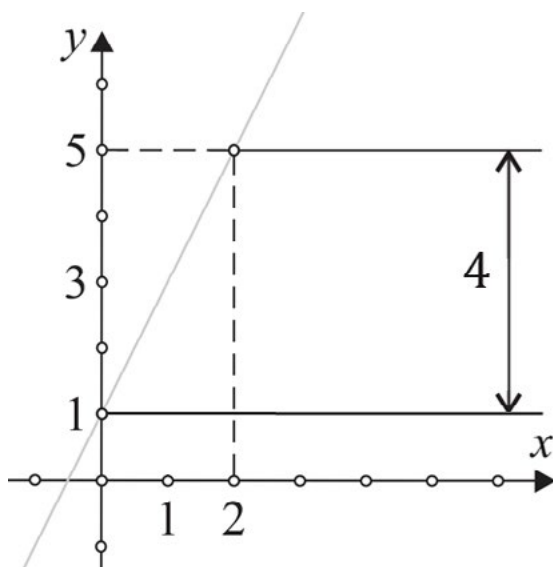
Njësia modulare 1 – Njehsimi diferencial (për drejtimin ekonomik)

Shumë fenomene në fizikë përfshijnë madhësi të ndryshueshme – shpejtësia e raketës, inflacioni monetar, ndryshimi i fitimit i realizuar gjatë shitjes së prodhimit të caktuar, numri i baktereve në kulturë, tension i sinjalit elektrik dhe shumë të tjera. Në këtë kapitull do ta zhvillojmë konceptin “derivati i funksionit”, i cili është vegël matematikore me ndihmën e të cilës studiohen hapat e ndryshimit të madhësive fizike.

1. Koncepti për derivatin e funksionit

Shembulli 1 Ta shqyrtojmë funksionin $y = 2x + 1$. Nëse argumenti x i funksionit është 0, atëherë vlera e funksionit është $(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Parashtrohet pyetja, për sa do të ndryshojë vlera e funksionit nëse argumenti x ndryshon prej 0 në 2 (figura 1)?

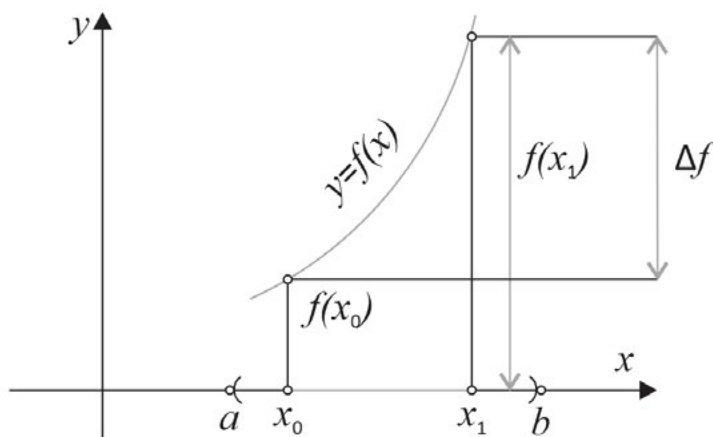
$$y(2) - y(0) = (2 \cdot 2 + 1) - (2 \cdot 0 + 1) = 5 - 1 = 4.$$



Funksioni $y = f(x)$ është përkufizuar në intervalin (a, b) dhe le të jenë x_0 dhe x_1 vlerat e argumentit x prej intervalit (a, b) . Vlerat e funksionit f në pikat 0 dhe 1 janë $y_0 = f(x_0)$ dhe $y_1 = f(x_1)$

Ndryshimi i argumentit x , d.m.th., rritja e argumentit në intervalin $[x_0, x_1]$ përkufizohet me $\Delta x = x_1 - x_0$, ndërsa ndryshimi i vlerës së funksionit $y = f(x)$, (rritja e funksionit) përkufizohet me

$$\Delta y = \Delta f = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0).$$



Pasi, $\Delta x = x_1 - x_0$ vijon se. $x_1 = x_0 + \Delta x$ Prej këtu ndryshimi i funksionit mund të shkruhet në këtë mënyrë: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ndryshimin e vlerës së funksionit mund ta shënojmë edhe me Δf :

Shembulli 2 I caktojmë Δx dhe Δf të funksionit $f(x) = x^2 + 2x + 1$ nëse $x_0 = 0$ dhe $x_1 = 2$. Për rritjen e argumentit dhe rritjen e vlerës së funksionit do të marrim:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2 - 0 = 2,$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + 2) - f(0) = f(2) - f(0) = (2 \cdot 2^2 + 1) - (2 \cdot 0^2 + 1) = 9 - 1 = 8.$$

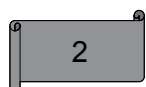
1

Përcaktoni Δx dhe Δf të funksionit $f(x) = x^2 + 2x + 3$ nëse $x_0 = 1$ dhe $x_1 = 2$.

Shembulli 3 Ta caktojmë Δf për funksionin $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ për çfarëdo pikë x .

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 6 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6 \\
&= x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x
\end{aligned}$$

Nëse zëvendësojmë $x = x_0 = 3$ dhe $\Delta x = 1$ kemi $\Delta f = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.



Cakto Δf për funksionet:

a) $f(x) = x^2 + 2$ në çfarëdo pikë x_0 ;

b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ nëse $x_0 = 4$ dhe $\Delta x = 2$

Shembulli 4

Për funksionin $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ te shembulli 3 e caktuam Δf për çfarëdo pikë x_0 . Për funksionin e njëjtë do ta caktojmë:

a) Herësin prej ndryshimit të vlerës së funksionit dhe ndryshimit të argumentit,

b) vlera kufitare prej herësit kur $\Delta x \rightarrow 0$

Do ta caktojmë vlerën kufitare nëse $x = 3,5$.

a) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = x + \frac{1}{2}\Delta x - 3.$

b) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{2}\Delta x - 3 \right) = x - 3.$

Për $x = 3,5$ kemi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = x - 3 = 3,5 - 3 = 0,5.$

Përkufizimi 1: Nëse ekziston vlera kufitare e fundshme të herësit prej ndryshimit të vlerës së funksionit $y = f(x)$ dhe ndryshimit të argumentit $x_0 \in D_f$, kur ndryshimi i argumentit tenton kah 0 d.m.th.,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

atëherë themi se vlera kufitare është **derivate (i parë) i funksionit** $y = f(x)$ në pikën x_0 dhe shënohet me $f'(x_0)$. Operacioni për gjetjen e derivatit të funksionit quhet **diferencim**, ndërsa për funksionin që në pikën e dhënë x_0 ka derivate të parë themi se është **diferenciabil** në atë pikë.

Nëse funksioni është dhënë në formën $y=f(x)$ atëherë derivatin e shënojmë me y' ose $f'(x)$

Shembulli 5

a) Ta caktojmë derivatin e funksionit $y = 2x^2 + 5x$ në pikat $x = -1$ dhe $x = 1$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (2(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x)) - (2x^2 + 5x) = \Delta x(4x + 5 + 2\Delta x)$$

E caktojmë herësin:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 5 + 2\Delta x)}{\Delta x} = 4x + 5 + 2\Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 5 + 2\Delta x) = 4x + 5.$$

$$y'(-1) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1$$

$$y'(1) = 4 \cdot 1 + 5 = 9.$$

b) Ta caktojmë derivatin e funksionit $y = x^3$ në çfarëdo pikë $x \in \mathbb{R}$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

3

Cakto derivatin e funksionit a) $y=x^2+1$; b) $y=x^2+x$ **Shembulli 6**a) Ta caktojmë derivatin e funksionit $y = \frac{x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x + 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x((x + \Delta x + 1)(x + 1))} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

b) Për funksionin $y = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$ marrim:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} - \sqrt{x + 1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} - \sqrt{x + 1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 1 - (x + 1)}{\Delta x (\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}. \end{aligned}$$

Derivati te pika $x = -1$ nuk ekziston pasi për atë vlerë kemi shprehje të pacaktuar.

4

Cakto derivatin e funksionit $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **Përkufizimi 2:** Nëse ekzistojnë vlera kufitare të fundshme

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

atëherë ato quhen **derivati përkatësisht i majtë dhe i djathtë i funksionit** $y = f(x)$ te pika x_0 .
 Derivati i $y = f(x)$ në pikën x_0 ekziston nëse dhe vetëm nëse ekzistojnë derivati i majtë dhe i djathtë në atë pikë dhe janë të barabartë $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

Shembulli 6

Për funksionin $f(x) = \sqrt{x}$ është përkufizuar në bashkësinë $D_f = [0, \infty)$ dhe ka derivate në çdo pikë $x \neq 0$ prej fushës së përkufizimit

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Nëse $x = 0$, atëherë në pajtim me Përkufizimin 2 dhe fushën e përkufizimit të funksionit mund të ekzistojë vetëm derivati i djathtë i funksionit në pikën $x = 0$. Ta njehsojmë

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty.$$

Pasi vlera kufitare është e pafundshme, derivati i djathtë në $x = 0$ nuk ekziston.

Teorema 1: Nëse funksioni $y = f(x)$ ka derivate në pikën x_0 , atëherë funksioni $y = f(x)$ është i pavijueshëm në pikën x_0 .

Vërtetim: Funksioni $y = f(x)$ le të ketë derivate te pika x_0 , atëherë $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

ekziston. Për të treguar se funksioni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ është i vijueshëm në pikën x_0 duhet të

tregojmë se $x - x_0 = \Delta x$ dhe me shfrytëzimin e zëvendësimit $x = x_0 + \Delta x$ kemi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Prej asaj që $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, vijon se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Domethënë se

funksioni është i vijueshëm në pikën x_0 .

Gjykimi i anasjelltë i Teoremës 1 në rastin e përgjithshëm nuk vlen. Si shembull do ta theksojmë funksionin $y = \sqrt{x}$ prej shembullit 7. Ky funksion është i vijueshëm në gjithë domenin e tij $[0, \infty)$, ndërsa nuk ka derivate te pika $x_0 = 0$.

Detyra për punë të pavarur

1. Brinjët e drejtkëndëshit janë 10 m dhe 20 m. Cakto ndryshimin e perimetrit dhe syprinës së drejtkëndëshit nëse:

- a) brinja më e madhe zmadhohet për 1 m;
- b) brinja më e vogël zmadhohet për 0,5 m.

2. Njehso Δy nëse:

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$; b) $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 1$;

c) $f(x) = x^2 + 5$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 1$; ç) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 8$.

3. Njehso derivatin e funksionit:

a) $y = 4x - 3$ në pikën $x = 1$; b) $y = x^2 - 3$, në pikën $x_0 = 2$;

c) $y = (x - 2)^3$ në pikën $x_0 = 5$; ç) $y = (x^2 - 1) / x$, në pikën $x_0 = 1$.

4. Cakto derivatin e majtë dhe të djathtë të funksionit

a) $y = |x - 3|$ në pikën $x_0 = 3$; b) $y = |x + 2|$, në pikën $x_0 = -2$;

c) $y = x^{\frac{3}{2}}$ në pikën $x = 0$; ç) $y = \sqrt{x-5}$ në pikën $x_0 = 5$.

2. Tabela e derivate të funksioneve themelore elementare

Përcaktimi i derivatit sipas përkufizimit shpesh kërkon shumë kohë dhe mund që të jetë shumë i ndërlikuar. Për këtë qëllim, në këtë njësi mësimore, do të sjellim listën e derivate të disa funksioneve elementare, të njohura si tabela e derivate ose derivate tabelare. Rregullat për diferencim të cilat do t'i shqyrtojmë në këtë njësi vijuese dhe derivatet tabelare na japin vegël për gjetjen e derivatit të funksioneve të cilat dalin nga funksionet elementare të përfituara me operacionet mbledhje, shumëzim dhe pjesëtim.

Do ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 1

Ta gjejmë sipas përkufizimit derivatin e funksioneve $f(x) = x^2$ dhe $f(x) = x^3$ ndërsa pastaj të përfundojmë me çka është i barabartë derivati i funksionit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x. \end{aligned}$$

Domethënë fitojmë se $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

$$f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2. \end{aligned}$$

fitojmë se $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$

Tani mund të përfundojmë se edhe në rastin e përgjithshëm për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen.

Nëse $f(x) = x^n$ atëherë $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$.

Nëse tani është dhënë funksioni konstant $f(x) = c$ $c =$ konstanta, atëherë për derivatin e parë

$$\text{kemi: } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Domethënë: $f'(x) = c' = 0$

Shembulli 2

Me ndihmën e formulës paraprahe do ta përcaktojmë derivatin e këtyre funksioneve

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x^7$ c) $f(x) = x^{10}$ Për derivatin e funksioneve të dhëna kemi:

$$\text{a) } f'(x) = x' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1,$$

$$\text{b) } f'(x) = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6,$$

$$\text{c) } f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9.$$

1

Cakto derivatin e funksionit:

$$\text{a) } f(x) = x^4;$$

$$\text{b) } f(x) = x^6;$$

$$\text{c) } f(x) = x^9.$$

Për funksionin $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$ formula për njehsimin e derivatit është $n \in \mathbb{R}$ për çdo $(x^n)' = nx^{n-1}$

Shembulli 3 Ta caktojmë derivatin e funksioneve:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; b) $f(x) = x(\sqrt[3]{x})$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; ç) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Ta caktojmë derivatin e funksioneve: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$

$$a) f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$b) f(x) = x(\sqrt[3]{x}) = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}},$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$$

$$c) f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\text{ç) } f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

2

Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

$$a) f(x) = \sqrt{x^3}, \quad x \geq 0;$$

$$c) f(x) = x^2\sqrt{x}, \quad x \geq 0;$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0;$$

$$\text{ç) } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0.$$

Shembulli 4

Ta caktojmë sipa përkufizimit derivatin e funksionit $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Për shkak se $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ kemi se $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$. Nëse $a = e$ atëherë $(e^x)' = e^x$.

Shembulli 1 Ta caktojmë sipas përkufizimit derivatin e funksionit $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\Delta x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right). \end{aligned}$$

Pasi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \log_a e$, vijon se $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$

Domethënë kemi $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Në rastin kur $a = e$ fitohet $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Në vazhdim është dhënë tabela e derivative të funksioneve elementare të ashtuquajtura **derivate tabelare**:

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$	2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$	4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$	6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$	

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto derivatin e këtyre funksioneve me zbatimin e formulës përkatëse:

a) $y = x^5$; b) $y = x^2 \sqrt[3]{x}$; c) $y = \sqrt[3]{x^5}$; ç) $y = \frac{1}{x^5}$, $x \neq 0$.

2. Cakto derivatin e këtyre funksioneve me zbatimin e formulës përkatëse:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^5 \sqrt{x}, \quad x \geq 0; & \text{b) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}, \quad x \neq 0; & \text{c) } y = x\sqrt{x^5}, \quad x \geq 0; \\ \text{ç) } y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}, \quad x \neq 0; & \text{d) } y = 3^x; & \text{e) } y = \log_2 x, \quad x > 0. \end{array}$$

3. Rregullat për diferencim

Gjetja e derivatit në bazë të përkufizimit shpesh mund të jetë shumë e komplikuar. Ne deri tani caktuam derivate prej disa funksioneve elementare. Në vend të funksioneve elementare, shpesh ballafaqohemi me funksione të cilat fitohen me operacione aritmetike të funksioneve elementare. Me zbatimin e vetive të caktuara të derivatit të funksionit, në bazë të derivatit të funksioneve elementare, derivati i shumë funksioneve të përbëra mund të njehsohet në mënyrë relative të thjeshtë.

3.1. Derivati i prodhimit të konstantes dhe funksionit

Do ta japim këtë teoremë

Teorema 1: Funksioni $y = f(x)$ le të jetë diferenciable në pikën x dhe c është konstante. Atëherë edhe funksioni f është diferenciable në pikën x dhe është e saktë:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Vërtetim: Prej përkufizimit të derivatit kemi:

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x). \quad \blacksquare$$

Shembulli 1 Ta caktojmë derivatin e këtyre funksioneve:

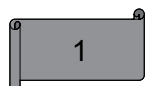
$$\text{a) } f(x) = 2x^3; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2} \ln x, \quad x > 0; \quad \text{c) } f(x) = 5 \cdot 2^x.$$

Prej derivate përkatëse tabelare dhe zbatimi i teoremës 1 kemi:

$$\text{a) } f'(x) = (2x^3)' = 2(x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2;$$

$$\text{a) } f'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x \right)' = \frac{1}{2} (\ln x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x};$$

$$\text{b) } f'(x) = (5 \cdot 2^x)' = 5(2^x)' = 5 \cdot 2^x \ln 2.$$



Cakto derivatin e funksionit:

$$\text{a) } f(x) = 3x^4; \quad \text{b) } f(x) = 4 \ln x, \quad x > 0; \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{2} e^x.$$

3.2. Derivati prej shumës së funksioneve

Teorema vijuese është për diferencimin e shumës së dy funksioneve

Teorema 2: Funksionet $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$ le të jenë funksione diferenciable në pikën x . Atëherë edhe funksioni $u + v$ është diferenciable në pikën x dhe është e saktë

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Vërtetim: Le të jenë $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$ funksione diferenciable në pikën x . Prej përkufizimit për derivate kemi,

$$\begin{aligned} (u+v)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u+v)(x+\Delta x) - (u+v)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Vërejtje: Pasi ndryshimi i dy funksioneve përkufizohet nëpërmjet shumës së dy funksioneve, d.m.th., $(u-v)(x) = u(x) - v(x) = u(x) + (-1) \cdot v(x)$, rregulla për diferencimin e ndryshimit të dy funksioneve diferenciable $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$

$$(u-v)'(x) = u'(x) - v'(x).$$

Shembulli 2

Ta caktojmë derivatin e këtyre funksioneve:

Prej teoremës 2 kemi:

$$\text{a) } f(x) = 2x^3 + 5x^2; \quad \text{b) } f(x) = 3 \ln x + \sqrt{x}, \quad x > 0; \quad \text{c) } f(x) = 5e^x + \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{a) } f'(x) = (2x^3 + 5x^2)' = (2x^3)' + (5x^2)' = 6x^2 + 10x;$$

$$\text{b) } f'(x) = (3 \ln x + \sqrt{x})' = (3 \ln x)' + (\sqrt{x})' = \frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6 + \sqrt{x}}{2x};$$

$$\text{c) } f'(x) = (5e^x + \sqrt[3]{x})' = (5e^x)' + (\sqrt[3]{x})' = 5e^x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Të përmendim se rregulla për shumën vlen edhe për tre edhe për më shumë funksione diferenciable në çfarëdo pikë x .

Shembulli 3 Ta caktojmë derivatin e funksionit $f(x) = 2x^3 + 3x + \ln x$, $x > 0$.

$$f'(x) = (2x^3 + 3x + \ln x)' = (2x^3)' + (3x)' + (\ln x)' = 6x^2 + 3 + \frac{1}{x}.$$

3 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

$$\text{a) } f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x; \quad \text{b) } f(x) = \ln x + 2x - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

3.3. Derivati prej prodhimit të funksioneve

Do ta vërtetojmë këtë teoremë e cila është për derivatin e prodhimit të dy funksioneve:

Teorema 3: Funksionet $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$ le të jenë diferenciable në pikën x . Atëherë edhe prodhimi i tyre uv është funksion diferenciable në x dhe është e saktë:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Vërtetim: Funksionet $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$ le të jenë diferenciable në pikën x . Për ndryshimin e funksionit uv në pikën x kemi,

$$\begin{aligned} \Delta(u(x)v(x)) &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) \\ &\quad + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = v(x + \Delta x)[u(x + \Delta x) - u(x)] \\ &\quad + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] = v(x + \Delta x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x). \end{aligned}$$

Prej përkufizimit për derivat kemi,

$$\begin{aligned}(u(x)v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u(x)v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

Shembulli 4 Ta caktojme; derivatin prej këtyre funksioneve:

a) $f(x) = (2x+5)(x^2-3x+2)$; b) $f(x) = 5x^2 \cdot e^x$; c) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x, x > 0$.

a) Për funksionin $f(x) = (2x+5)(x^2-3x+2)$ le të jetë $u(x) = 2x+5$ dhe $v(x) = x^2-3x+2$. Me shfrytëzimin e formulës për prodhim të funksioneve kemi

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = (2x+5)'(x^2-3x+2) + (2x+5)(x^2-3x+2)'$$

$$f'(x) = 2(x^2-3x+2) + (2x+5)(2x-3)$$

$$f'(x) = 2x^2 - 6x + 4 + 4x^2 - 6x + 10x - 15$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 11.$$

b) Për funksionin $f(x) = 5x^2 \cdot e^x$ duke shfrytëzuar formulën për derivate të prodhimit të dy funksioneve kemi:

$$f'(x) = (5x^2)'e^x + 5x^2(e^x)'$$

$$f'(x) = 10x \cdot e^x + 5x^2 \cdot e^x = 5xe^x \cdot (2+x).$$

c) Për funksionin $f(x) = (x+1) \cdot \ln x, x > 0$, duke shfrytëzuar formulën për derivate të prodhimit të dy funksioneve kemi:

$$f'(x) = (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)'$$

$$f'(x) = \ln x + (x+1) \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}.$$

3 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = (x^2+2)(x^3-1)$; b) $f(x) = 3x\sqrt{x}, x \geq 0$; c) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$.

3.4. Derivati prej herësit të funksioneve

Do ta japim këtë teoremë

Teorema 4: Funksionet $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$ le të jenë diferenciable te pika x , ku $v(x) \neq 0$.

Atëherë edhe heresy $\frac{u}{v}$ është funksion diferenciable te pika x dhe është e saktë

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Vërtetim: Le të jenë $u = u(x)$ dhe $v = v(x)$ funksione diferenciable te pika x , ku $v(x) \neq 0$. Për ndryshimin e funksioneve $\frac{u}{v}$ te pika x kemi

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \\ &= \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}. \end{aligned}$$

Prej përkufizimit për derivate kemi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \end{aligned}$$

Shembulli 5

Ta caktojmë derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}, x \neq -1;$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, x \neq 0.$

a) Për funksionin $f(x) = \frac{x}{x+1}$, le të jenë $u(x) = x$ dhe $v(x) = x + 1$. Me shfrytëzimin e formulës për derivat prej herësit të funksioneve kemi:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

b) Për funksionin $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ sipas formulës për derivat prej herësit të funksioneve kemi:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)' x^2 - (x^2-1)(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - x^2 \cdot 2x + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$



Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

Detyra për punë të pavarur

a) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, x \neq \pm 1;$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1.$

1. Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 2x^2;$

b) $f(x) = -\frac{2}{4}\sqrt[4]{x}, x \geq 0;$

c) $f(x) = 3\sqrt[3]{x};$

ç) $f(x) = 2x+3.$

2. Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 6;$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}, x \neq 0;$

c) $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3};$

ç) $f(x) = 3x + \sqrt{x}, x \geq 0.$

3. Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = 4x^3\sqrt{x} - x\sqrt{x\sqrt{x}}, x \geq 0$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, x \geq 0$

4 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \ln x + e^x - 5x, x > 0$;

b) $f(x) = 2^x + 5 \cdot 4^x$.

5. Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$

b) $f(x) = x^3 e^x$.

6. Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$;

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}, x > 0$;

ç) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

4. Derivati i funksionit të përbërë

Funksioni i formës $f(g(x))$ quhet **funksion i përbërë** ose **kompozicion** prej funksioneve $f(x)$ dhe $g(x)$.

Kështu, funksioni i formës $y = \sqrt{x^2 - 1}$ është funksion i përbërë. Me shfrytëzimin e zëvendësimit $u(x) = x^2 - 1$, funksioni i përbërë do ta fitojë formën $y = \sqrt{u}$.

Nëse kemi funksion të përbërë të formës $y = (2x + 1)^4$, atëherë me futjen e $u(x) = 2x + 1$, funksioni i përbërë do ta fitojë formën $y = u^4$

Shembulli 1 Këto funksione, duke shfrytëzuar zëvendësimin do t'i shënojmë në formë të veçantë:

a) Funksioni $y = (x - 3)^3$, me zëvendësimin $u(x) = x - 3$ mund ta shënojmë në formën $y = u^3$.

b) Funksionin $y = \ln(x^2 - 3)$, me zëvendësimin $u(x) = x^2 - 3$ mund ta shënojmë në formën $y = \ln u$.

c) Funksionin $y = e^{(3x + 5)}$, me zëvendësimin $u(x) = 3x + 5$ mund ta shënojmë në formën $y = e^u$

1

Për çdonjërin prej funksioneve të përbërë:

a) $y = e^{\sqrt{x}}, x \geq 0$;

b) $y = \sqrt[3]{3x + 1}$,

cakto $u(x)$ dhe shkruaje funksionin në formën $y = f(u)$

Rregulla për derivat prej funksionit të përbërë do jepet me këtë teoremë

Teorema 1: Funksioni $u(x)$ le të jetë diferenciable në pikën x_0 , ndërsa funksioni f është diferenciable në pikën $u_0 = u(x_0)$. Atëherë edhe kompozicioni i tyre si funksion i përbërë $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ është funksion diferenciable te pika x_0 ku vlen

$$(f(u(x_0)))' = f'(u(x_0))u'(x_0).$$

Vërtetim: Prej përkufizimit të derivat kemi:

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ vijon $u(x_0 + \Delta x) = \Delta u + u_0$. Pasi u është i vijueshëm $\Delta x \rightarrow 0$ kur $\Delta u \rightarrow 0$. Atëherë $(f \circ u)(x) = f(u(x))$

$$\begin{aligned} (f(u(x_0)))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = f'(u_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

Domethënë. Funksioni $(f(u(x_0)))' = f'(u_0)u'(x_0)$. është diferenciable në pikën x_0 dhe saktë është

$$(f(u(x_0)))' = f'(u_0)u'(x_0). \quad \blacksquare$$

Shembulli 1 Ta njehsojmë derivatin e këtyre funksioneve:

a) $y = (3x - 4)^4$ b) $y = \sqrt{x-1}$ c) $y = \sqrt[3]{x^2-4}$ ç) $y = e^{-2x}$ d) $y = e^{x^2-3x}$.

a) $y = (3x - 4)^4$

$$u(x) = 3x - 4, \quad y = u^4$$

$$y' = 4u^3 \cdot u'(x)$$

$$y' = 4(3x - 4)^3 \cdot (3x - 4)'$$

$$y' = 4(3x - 4)^3 \cdot 3 = 12(3x - 4)^3.$$

b) $y = \sqrt{x-1}$

$$u(x) = x - 1, \quad y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{b)} \quad y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$$

$$u(x) = x^2 - 4, \quad y = \sqrt[3]{u}$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot (x^2 - 4)'$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}.$$

$$\text{ç)} \quad y = e^{-2x}$$

$$u(x) = -2x, \quad y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u'(x)$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2x)'$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}.$$

$$\text{d)} \quad y = e^{x^2 - 3x}$$

$$u(x) = x^2 - 3x, \quad y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u'(x)$$

$$y' = e^{x^2 - 3x} \cdot (x^2 - 3x)'$$

$$y' = e^{x^2 - 3x} \cdot (2x - 3) = 2xe^{x^2 - 3x} - 3e^{x^2 - 3x}.$$

2

Përcaktoni derivatin e funksioneve të mëposhtme:

$$\text{a)} \quad y = (4x - 3)^6; \quad \text{b)} \quad y = e^{-x^3}.$$

3

Përcaktoni derivatin e funksioneve të mëposhtme:

$$\text{a)} \quad y = (2x^2 + 3x + 1)e^x; \quad \text{b)} \quad y = (x + 1)\sqrt{x^2 + 1}; \quad \text{c)} \quad y = 3xe^{x^2 + 1}.$$

Detyra për punë të pavarur

1 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

$$\text{a)} \quad y = (2x^2 + 5x - 6)^5;$$

$$\text{b)} \quad y = (x^5 + 2x)^8;$$

$$\text{c)} \quad y = (5x^5 + 3x^3 + 1)^5;$$

$$\text{ç)} \quad y = (mx + n)^6.$$

2 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

$$\text{a)} \quad y = (x + 3)(2x - 5)^2;$$

$$\text{b)} \quad y = (x + 2)^2 (x^2 - 3x + 1)^3.$$

3 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

b) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$.

4 Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $y = e^{2x+5}$;

b) $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$.

5. Derivati prej funksionit implicit dhe derivati logaritmik

Në këtë njësi mësimore së pari do ta shqyrtojmë njehsimin e derivatit kur funksioni është dhënë në formën implicite. Mënyra për gjetjen e derivatit e funksionit të dhënë në formën implicite mund ta shfrytëzojmë për njehsimin e të ashtuquajtur **derivat logaritmik**.

Funksioni implicit është funksion ku ndryshorja y nuk është shprehur nëpërmjet ndryshores x . Le të jetë dhënë funksioni në formën implicite $F(x, y) = 0$, ku $y = y(x)$ është përkufizuar në intervalin $x \in (a, b)$, ku x është ndryshore e pavarur. Ndonjëherë është shumë vështirë kur funksioni është dhënë në formën implicite y ta shprehim nëpërmjet x . Shumë më lehtë do të jetë nëse për funksionin do të përcaktohem me metodën implicite.

Funksioni $y = y(x)$ është diferenciable në intervalin $x \in (a, b)$. Formën implicite mund ta shkruajmë si $x \in (a, b)$ për çdo $F(x, y(x)) = 0$. Atëherë me shfrytëzimin e derivatit të funksionit të përbërë kemi

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \cdot y' = 0,$$

ku $F'_x(x, y(x))$ është derivati sipas x , ndërsa $F'_y(x, y(x))$ është derivati sipas y që përsëri varet prej x . Nëse e shprehim derivatin y' fitojmë se funksioni i dhënë implicit mund të gjendet sipas kësaj formule.

$$y' = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}.$$

Njehsimi i drejtpërdrejtë i derivatit është me njehsimin e derivatit të çdo anëtari të funksionit të dhënë, ku patjetër të mbahet llogari se x është ndryshore e pavarur, ndërsa y është funksion që varet prej ndryshores x .

Mënyra e përshkruar për njehsimin e derivatit të funksionit implicit më së miri mund të shqyrtohet nëpërmjet shembujve.

Shembulli 1 Ta caktojmë derivatin e funksionit të dhënë në formën implicite

$$x^2 + 4x + y^2 = 5.$$

Me njehsimin e drejtpërdrejt kemi

$$2x + 4 + 2yy' = 0.$$

Gjatë njehsimit të derivatit prej funksionit të dhënë implicit $F(x, y) = 0$ është e nevojshme të kemi kujdes të ekzistimit të funksionit $y = y(x)$. Me fjalë të tjera, y është ndryshore e varur prej ndryshores së pavarur x , pra njehsimi i derivatit të y është në realitet njehsimi i derivatit të funksionit të përbërë.

Tani ngel edhe vetëm ta shprehim y' . Domethënë kemi

$$2yy' = -2x - 4,$$

$$y' = \frac{-x-2}{y},$$

$$y' = -\frac{x+2}{y}.$$

Shembulli 2 Ta caktojmë derivatin e funksionit të dhënë në formën implicite

$$x^2 + xy + y^2 = 2.$$

Të vërejmë se këtu për ta gjetur derivatin e xy do ta shfrytëzojmë rregullën për derivate të prodhimit të dy funksioneve. Domethënë do të kemi:

$$2x + (y + xy') + 2yy' = 0,$$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$

$$y'(x + 2y) = -2x - y$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

1

Cakto derivatin e funksionit të dhënë në formën implicite:

a) $x^2 + 4x + y^2 = 5$

b) $x^3 + 2x + 2y^2 = 5,$

c) $xy^2 + 2xy + y = 1,$

ç) $x^3 + y^3 + 2 = 0.$

Siç përmendëm në fillim të njësisë mësimore, derivati prej funksionit të dhënë në formë implicite mund ta shfrytëzojmë për njehsim të ashtuquajturit **derivat logaritmik**. Derivati logaritmik zbatohet kur ndryshorja e pavarur është edhe te baza edhe te eksponenti i ndonjë fuqie.

Shembulli 3

Ta njehsojmë derivatin e funksionit $y = x^x$, $x > 0$. Për ta caktuar derivatin e këtij funksioni patjetër të lirohemi prej x që gjendet te eksponenti. Për këtë qëllim e logaritmizojmë funksionin

$$\ln y = \ln x^x, \text{ d.m.th., } \ln y = x \ln x.$$

Pastaj, diferencojmë

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{y'}{y} &= 1 + \ln x \end{aligned} \quad \text{d.m.th.,} \quad \begin{aligned} y' &= y(1 + \ln x) \\ y' &= x^x(1 + \ln x) \end{aligned}$$

2

Cakto derivatin e këtyre funksioneve:

a) $y = x^{1-x^2}$;

b) $y = x^{x^3}$.

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto derivatin e këtyre funksioneve të dhëna në formën implicite:

a) $x^2 y + 2x + y^2 = 1$;

b) $x^2 + 4xy + y^2 = 0$;

c) $xy^2 + 2x + y = 4$;

ç) $x^3 + xy^3 - 5 = 0$.

2. Cakto derivatin logaritmik të këtyre funksioneve:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$;

b) $y = x^{2x}$;

c) $y = \left(\frac{1+x^2}{x} \right)^x$;

ç) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

6. Koncepti për diferencial

Koncept i rëndësishëm i lidhur me ekzistimin e derivatit të funksionit është koncepti **diferencial i funksionit**. Ai mund të jetë i shfrytëzuar edhe për njehsime të përafërta.

Përkufizimi 1: Funksioni $y = f(x)$ është diferenciable në pikën x_0 d.m.th., ekziston derivate $(x_0) = f'(x_0)$. Prodhimi $y'(x_0)\Delta x$ quhet **diferenciali i funksionit** $y = f(x)$ te pika x_0 dhe shënohet me $dy(x_0)$ ose shkurtimisht dy

Domethënë, diferenciali i funksionit $y = f(x)$, te pika x_0 është $dy(x_0) = y'(x_0)\Delta x$, ndërsa e çfarëdo pikë x është

Shembulli 1

a) Diferenciali i funksionit $f(x) = x^4$ për çfarëdo pikë x prej domenit $dy = 4x^3 \Delta x$, pasi $f'(x) = 4x^3$.

b) Duke shfrytëzuar faktin se derivati i funksionit linear $y' = 1$, për diferencialin e funksionit linear kemi se $dy = dx = y' \Delta x = \Delta x$, prej ku $dx = \Delta x$. Prandaj, diferencialin e funksionit $y = f(x)$ mund ta shkruajmë në formën $dy = y' dx$. Prej këtu kemi $y' = \frac{dy}{dx}$, pra $y' = \frac{dy}{dx}$ (lexohet “de ipsillon për de iks”) është edhe shënimi për derivate të future nga Lajbnici, për dallim nga paraprakishtja që vijon prej Lagranzhit.

1

Cakto diferencialin e këtyre funksioneve:

$$a) y = xe^x; \quad b) y = \ln(x^2 + 1).$$

Nëse $y = f(x)$ është diferenciable në x_0 , atëherë rritja $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ dhe diferenciali dy te pika x_0 janë ekuivalente madhësi të vogla të pafundshme kur $\Delta x \rightarrow 0$. Për shkak të kësaj vetie thuhet se dy është vlera kryesore e Δy , pasi për $\Delta y \approx dy$ shumë të vogël mund të llogarisim se $|\Delta x|$.

Këtë veti mund ta shfrytëzojmë për njehsim të përafërt për vlera të funksioneve, duke shfrytëzuar formulën $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$ d.m.th., $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ për vlera të vogla të $|\Delta x|$.

Shembulli 2

Për funksionin $y = x^2$ me domen $D = \mathbb{R}$ diferenciali i tij në çfarëdo pikë x prej domenit të tij është $dy = 2x dx$ pasi $y' = 2x$. Diferenciali i funksionit në pikën $x_0 = 1$ është $dy = 2dx$. Me shfrytëzimin e diferencialit të funksionit mund përafërsisht ta njehsojmë sa është $1,2^2$ në këtë mënyrë:

Së pari do ta shfrytëzojmë formulën $dy = 2x \Delta x$, ku $x = 1$ dhe $\Delta x = 1.2 - 1 = 0.2$. Kemi $dy = 2x \Delta x = 0.4$. Pastaj do ta shfrytëzojmë formulën $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ për $x_0 = 1$ dhe $\Delta x = 1.2 - 1 = 0.2$. kemi $f(x + \Delta x) = f(1.2) = f(x_0) + dy = 1 + 0.4 = 1.4$. Domethënë $1,2^2 \approx 1,4$

2

Njehso përafërsisht:

$$a) \sqrt{4,0002}; \quad b) \ln 2.003.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto diferencialin e këtyre funksioneve:

$$a) y = xe^{-x}; \quad b) y = xe^{\frac{x^2}{2}}; \quad c) y = x^2 \ln x; \quad d) y = \frac{x^3 + 2x}{x+1}.$$

2. Njehso përafërsisht:

$$a) \sqrt[3]{1,0003}; \quad b) \ln 1,001; \quad c) \sqrt{9,0003}.$$

7. Derivati prej funksionit të dhënë në formë parametrike

Le të jetë $y = y(x)$ funksion i vijueshëm ku $x = x(t)$, $y = y(t)$ janë funksione të vijueshme në intervalin $t \in (a, b)$. Në këtë rast themi se funksioni $y = y(x)$ është përcaktuar me barazimet parametrike $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (a, b)$.

Teorema 1: Nëse $x = x(t)$, $y = y(t)$ janë funksione diferenciable në intervalin $t \in (a, b)$ dhe $y'(t) \neq 0$ atëherë funksioni $y = y(x)$ është diferenciable dhe poashtu vlen:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Vërtetim: Parametri t le të ketë ndryshim Δt . Atëherë funksionet x dhe y fitojnë ndryshime Δx dhe Δy d.m.th., $x + \Delta x = x(t + \Delta t)$, $y + \Delta y = y(t + \Delta t)$, $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$ kemi $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{x(t + \Delta t) - x(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \end{aligned}$$

Shembulli 1 Për funksionin $x = x(t)$, $y = y(t)$, të dhënë me barazimet parametrike $y = y(x)$, e njehsojmë $y'(x)$

a) $x(t) = t^3 + 3t + 1$, $y(t) = t^3 - 3t + 1$; b) $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

a) Sipas formulës së dhënë te teorema 1, derivati i parë $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

b) $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$

Për funksionin $y = y(x)$, të dhënë me barazime parametrike $x = x(t)$, $y = y(t)$, njehso $y'(x)$.

$$\text{a) } x = 3t^2 + 2t - 3, \quad y = 2t^2 + 2t - 1; \quad \text{b) } x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt[3]{t}.$$

$$\text{c) } x = 2 \ln t, \quad y = \frac{1}{t} + 8; \quad \text{ç) } x = 2e^{t^2+3t}, \quad y = 2t^2 + 6t.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Për funksionin $y = y(x)$ të dhënë me barazime parametrike $x = x(t)$, $y = y(t)$ njehso

$$\text{a) } x = \ln(t) + 4, \quad y = t^2 + 2; \quad \text{b) } x = \ln(t + 5), \quad y = \ln(-t).$$

2. Për funksionin $y = y(x)$ të dhënë me barazime parametrike $x = x(t)$, $y = y(t)$ njehso

$$\text{a) } x = 5(e^t + e^{-t}), \quad y = 3(e^t - e^{-t}); \quad \text{b) } x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \quad y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$$

8. Barazimi i tangjentës dhe barazimi i normales

Këtu do ta zbatojmë derivatin e parë për përcaktimin e barazimeve të tangjentës dhe normales të grafikut të funksionit.

Le të jetë dhënë funksioni $y = f(x)$. Pika $T_0(x_0, y_0)$ le t'i takojë grafikut të funksionit. Tangjenta e grafikut të funksionit te pika $T_0(x_0, y_0)$ është drejtëz që e prek grafikun e funksionit në pikën T_0 . Tangjentën do ta shënojmë me t_{T_0} ku tek indeksi theksohet pika ku e kërkojmë tangjentën.

Normalja e grafikut të funksionit te pika e dhënë që është normale në tangjentën që kalon nëpër atë pikë. Normalja zakonisht shënohet me p_{T_0} , ku përsëri tek indeksi theksojmë në cilën pikë e kërkojmë normalen, Figura 4.

Prej këtu për drejtëzat normale kemi se $k_p = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$, pra barazimi i normales është

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Shembulli 1 Ta shkruajmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales të grafikut të funksionit $y = 2x^2 - x + 1$ te pika $A(1, 2)$.

Barazimi i tangjentës

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), \\ f'(x) &= 4x - 1, \quad f'(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3, \end{aligned}$$

pra prej këtu, barazimi i tangjentës do të jetë

$$\begin{aligned} y - 2 &= 3(x - 1), \\ 3x - y - 1 &= 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1 \end{aligned}$$

Barazimi i normales

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\ y - 2 &= -\frac{1}{3}(x - 1), \\ x + 3y - 7 &= 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Shembulli 2 Ta shkruajmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të funksionit $y = 2x^3 - 3x + 2$ në pikën $A(1, y_0)$.

Ordinata e pikës $A(1, y_0)$ është:

$$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1.$$

Barazimi i tangjentës është dhënë me formulën ,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

ku koeficienti i drejtimit të tangjentës është vlera e derivatit të parë te pika $x = 1$ d.m.th.,

$$f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 3,$$

prej ku për barazimin e tangjentës në pikën e dhënë $A(1, 1)$ është:

$$\begin{aligned} y - 1 &= 3(x - 1), \\ 3x - y - 2 &= 0 \Leftrightarrow y = 3x - 2. \end{aligned}$$

Barazimi i normales

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$

$$x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Shembulli 3

Ta shkruajmë barazimin a tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të

funksionit $y = \sqrt{x}$ në pikën $A\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$

Ta caktojmë abshisën e pikës $A\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$

$$f(x_0) = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{x_0} = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{4}.$$

Barazimi i tangjentës është

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

ku koeficienti i drejtimit të tangjentës është vlera e derivatit të parë te pika $x_0 = \frac{1}{4}$ d.m.th.,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1,$$

prej ku për barazimin e tangjentës te pika e dhënë $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ kemi

$$y - \frac{1}{2} = 1\left(x - \frac{1}{4}\right), \text{ d.m.th., } y = x + \frac{1}{4}.$$

Barazimi i normales te pika $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ është

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$y = -x + \frac{3}{4}.$$

1

Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të funksionit

a) $y = -x^2 - 2x$, në pikën $A(-2, y_0)$; ;

b) $y = \frac{1}{x^2}$, në pikën $A(-1, y_0)$.

Shembulli 4

Ta shkruajmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të funksionit $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x - 8}$ në pikën $A(5, y_0)$.

Mënyra për zgjidhje është e njëjtë siç edhe te shembujt paraprak:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(5) = \sqrt[3]{5^2 - 5 \cdot 5 - 8} = \sqrt[3]{-8} = -2, \\ f'(x) &= \left[(x^2 - 5x - 8)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^2 - 5x - 8)^{\frac{1}{3}-1} (x^2 - 5x - 8)', \\ &= \frac{1}{3} (x^2 - 5x - 8)^{-\frac{2}{3}} (2x - 5) = \frac{2x - 5}{3\sqrt[3]{(x^2 - 5x - 8)^2}}, \\ f'(x_0) &= f'(5) = \frac{2 \cdot 5 - 5}{3\sqrt[3]{(5^2 - 5 \cdot 5 - 8)^2}} = \frac{5}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Barazimi i tangjentës

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y + 2 = \frac{5}{12}(x - 5),$$

$$5x - 12y - 49 = 0.$$

Barazimi i normales

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y + 2 = -\frac{12}{5}(x - 5)$$

$$12x + 5y - 50 = 0.$$

Shembulli 5

Ta shkruajmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të funksionit $y = x^2 - 2x$ në pikat te të cilët grafiku e pren boshtin x .

Grafiku i këtij funksionit është parabolë. T'i caktojmë së pari pikëprerjet me boshtin x . Ta shkruajmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të funksionit

$$y = 0, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Domethënë, kërkojmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales në pikat $A(0,0)$ dhe $B(2,0)$. Do ta caktojmë derivatin e parë të funksionit. Ta shkruajmë barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së grafikut të funksionit.

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Barazimi i tangjentës në pikën $A(0,0)$ është

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

Barazimi i normales në pikën $A(0,0)$ është

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$\begin{aligned}f'(0) &= 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\y &= -2x, \\2x + y &= 0.\end{aligned}$$

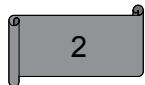
$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x, \\x - 2y &= 0.\end{aligned}$$

Barazimi i tangjentës në pikën $B(2,0)$ është

$$\begin{aligned}f'(2) &= 2 \cdot 2 - 2 = 2, \\y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), \\y &= 2(x - 2), \\2x - y - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Barazimi i normales në pikën $B(2,0)$ është:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 2), \\y &= -\frac{1}{2}x + 1.\end{aligned}$$



2 Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimit të normales së grafikut të funksionit

a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ në pikën $A(2, y_0)$,

b) $y = x^4 - 3x^2$ në pikën $A(2, y_0)$

Shembulli 6

Ta shkruajmë barazimin e tangjentës së lakores $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ e cila është paralele me drejtëzën $7x - 4y + 28 = 0$. Në pikat e prekjes të shkruhet edhe barazimi i normales. Pasi tangjenta është paralele me drejtëzën $7x - 4y + 28 = 0$, ato kanë koeficient të drejtimit.

$$\begin{aligned}7x - 4y + 28 &= 0 \\4y &= 7x + 28 \\y &= \frac{7}{4}x + 7 \\k &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k = f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1, \\3x^2 - 4x + 1 &= \frac{7}{4}, \\12x^2 - 16x - 3 &= 0.\end{aligned}$$

Zgjidhjet e barazimit katror janë: $x_1 = \frac{3}{2}$ dhe $x_2 = -\frac{1}{6}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{13}{8}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{481}{216}$$

Domethënë, kërkojmë barazim të tangjentës dhe barazim të normales te pikat $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right)$ dhe $B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right)$

Barazimi i tangjentës në pikën

$$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right) \text{ dhe } k = \frac{7}{4} \text{ do të jetë:}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0), \\ y + \frac{13}{8} &= \frac{7}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ 14x - 8y - 34 &= 0, \\ 7x - 4y - 17 &= 0. \end{aligned}$$

Barazimi i tangjentës në pikën

$$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right) \text{ dhe } k = \frac{7}{4} \text{ do të jetë:}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0), \\ y + \frac{481}{216} &= \frac{7}{4}\left(x + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Barazimi i normales në pikën

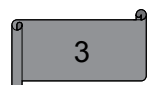
$$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right) \text{ dhe } k = \frac{7}{4} \text{ do të jetë:}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{k}(x - x_0), \\ y + \frac{13}{8} &= -\frac{4}{7}\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ 32x + 56y + 43 &= 0. \end{aligned}$$

Barazimi i normales në pikën

$$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right) \text{ dhe } k = \frac{7}{4} \text{ do të jetë:}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{k}(x - x_0), \\ y + \frac{418}{216} &= -\frac{4}{7}\left(x + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$



3

Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimit të normales së grafikut të funksionit

$y = x^3 + 3x^2 - 5$ në pikën $6x + 2y + 3 = 0$. Në pikat e prekjes të shkruhet edhe barazimi i normales.

Detyra për punë të pavarur

- Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimit të normales së grafikut të funksionit:
 - $y = x^4 - x^2 + 3$ në pikën $A(1, 0)$;
 - $y = x^3 - 3x^2 + 5$, në pikën $A(-2, y_0)$.
- Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimit të normales së grafikut të funksionit $y = 4 - x^3$ në pikëprerjet me boshtin x .
- Ta shkruajmë barazimin e tangjentës së lakores $y = x^2 - 1$ e cila është paralele me drejtëzën $6x - y - 10 = 0$. Në pikat e prekjes të shkruhet edhe barazimi i normales.
- Ta shkruajmë barazimin e tangjentës së lakores $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ e cila është paralele me drejtëzën $2x + y + 4 = 0$. Në pikat e prekjes të shkruhet edhe barazimi i normales.

9. Derivati i rendit të lartë

Për të përkufizuar derivat të funksionit të rendit të lartë, së pari përkufizojmë derivatet e dyta të funksionit $y = f(x)$. Funksioni $y = f(x)$ le të jetë diferenciable në bashkësinë D_f , atëherë derivati i tij $f'(x)$ është funksion i përkufizuar në D_f .

Përkufizimi 1: Nëse ekziston derivati i parë të funksionit të derivuar $f'(x)$ në D_f atëherë $(f'(x))$ quhet **derivati i dytë i funksionit** $y = f(x)$ dhe shënohet me $f''(x)$. E shënojmë,

$$f''(x) = (f'(x))' \text{ ose } y''(x) = (y'(x))'.$$

Me diferencimin e më tejshëm të derivatit të dytë $f''(x)$ e fitojmë derivatin e tretë të funksionit $(f''(x))' = f'''(x)$. Me mënyrën e njëjtë mund të fitohen derivati i katërt, i pestë etj., deri sa plotësohet kushti për ekzistimin e derivatit vijues.

Shembulli 1 Për funksionin $y = x^5$ kemi: $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = 0$ dhe çdo derivat i ardhshëm do të jetë 0.

Shembulli 2 Ta caktojmë derivatin e tretë të funksionit $y = x \ln x$

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x,$$

$$y'' = (1 + \ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Shembulli 3 Ta caktojmë derivatin e dytë të funksionit $y = x^3 \ln \frac{x}{2}$

$$y' = 3x^2 \ln \frac{x}{2} + x^3 \frac{2}{x} \frac{1}{2} = 3x^2 \ln \frac{x}{2} + x^2,$$

$$y'' = 6x \ln \frac{x}{2} + 3x^2 \frac{2}{x} \frac{1}{2} + 2x = 6x \ln \frac{x}{2} + 5x.$$

1

Cakto derivatin e dytë të funksionit:

a) $y = xe^x$;

b) $y = x^2 \ln x$.

$$c) y = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$ç) y = \frac{x+1}{x-1}.$$

2

Vërteto se funksioni $y = \frac{x-2}{x+3}$ e kënaq barazimin $(x-2)y'' + 2yy' = 0$.

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto derivatin e dytë të funksionit:

$$a) y = e^{2x-3};$$

$$b) y = \ln(x^2 + 2x);$$

$$c) y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$ç) y = x^3 \ln x.$$

$$d) y = \sqrt{x}\sqrt{x};$$

$$dh) y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2};$$

$$e) y = 2x^2 + 5x - 3.$$

2. Cakto derivatin e dytë të funksionit:

$$a) x^3 - 3x^2 + 1 - y = 0;$$

$$b) y + xy + x^2 = 2.$$

3. Vërteto se funksioni $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ e kënaq barazimin $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$

10. Monotonia dhe ekstremet lokale të funksionit

Të përkujtohemi se një funksion është monotonisht rritës nëse prej $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$, derisa funksioni është monotonisht zvogëluar nëse prej $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$. Shqyrtimi i monotonisë së funksioneve vetëm me ndihmën e përkufizimit të monotonisë ndonjëherë mund të jetë shumë e vështirë. Në këtë pjesë prej njësive modulare do të vërejmë se si me ndihmën e derivatit në mënyrë të thjeshtë mund ta caktojmë monotoninë e funksioneve në disa interval prej fushës së përkufizimit për funksionin.

Teorema 1. Funksioni $y = f(x)$ le të jetë diferenciable në intervalin (a, b) ku $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

1) Nëse $y = f(x)$ monotonisht rritet në intervalin (a, b) atëherë $f'(x) > 0$ për çdo $x \in (a, b)$;

2) Nëse $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet në intervalin (a, b) atëherë $f'(x) < 0$ për çdo $x \in (a, b)$;

Vërtetim: Derivati i parë i funksionit $y = f(x)$ është përkufizuar me $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Nëse supozojmë se $\Delta x > 0$ edhe te përkufizimi për derivatin e parë të funksionit $y = f(x)$ zëvendësojmë

$x = x_0$ dhe $x + \Delta x = x_1$, derivati i parë te $x_0 < x_1$ d.m.th., x_0 do të jetë $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$

1. Le të jetë $y = f(x)$ monotone rritëse në intervalin (a, b) . Atëherë për $x_0, x_1 \in (a, b)$ të atillë

që $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$ do të vijojë $f(x_1) - f(x_0) > 0$ kemi, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ prej ku $x \in (a, b)$ për $f'(x) > 0$

2. Le të jetë $y = f(x)$ monotone zvogëluese në intervalin (a, b) . Atëherë për $x_0, x_1 \in (a, b)$

të atillë që $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$ do të vijojë $f(x_1) - f(x_0) < 0$ kemi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, prej ku $x \in (a, b)$ për $f'(x) < 0$. ■

Vlen edhe gjykimi i anasjelltë te teorema 1.

Teorema 2: Funksioni $y = f(x)$ le të jetë diferenciable në intervalin (a, b) ku $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

1. Nëse për çdo $f'(x) > 0, x \in (a, b)$. atëherë, $y = f(x)$ monotonisht rritet në intervalin (a, b) ;
2. Nëse për çdo $f'(x) < 0, x \in (a, b)$. atëherë $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet në intervalin (a, b) .

Vërtetim: Derivati i parë i funksionit $y = f(x)$ është përkufizuar me $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Nëse supozojmë se $\Delta x > 0$ edhe te përkufizimi i derivatit të parë të funksionit $y = f(x)$ zëvendësojmë

$x = x_0$, derivati i parë te pika $x + \Delta x = x_1$ d.m.th., $x_0 < x_1$ do të jetë

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Le të jetë $f'(x) > 0$ për $x \in (a, b)$. Prej përkufizimit të derivatit të parë vijon se

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Pasi $\Delta x > 0$ vijon se $f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) > 0$ d.m.th.,

$f(x_1) > f(x_0)$ përkatësisht funksioni $y = f(x)$ monotonisht rritet për $x \in (a, b)$

2. Le të jetë $f'(x) < 0$ për $x \in (a, b)$. Prej përkufizimit të derivatit të parë vijon se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0. \text{ Pasi } \Delta x > 0 \text{ vijon se } f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) < 0, \text{ d.m.th.,}$$

$f(x_1) < f(x_0)$ përkatësisht funksioni $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet për $x \in (a, b)$. ■

Shembulli 1 Për funksionin $y = x^3$, derivati i parë kemi: $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pasi $x \in \mathbb{R}$ derivati është më i madh se zero për çdo $x \in \mathbb{R}$, ky funksion është monotono rritës për çdo $x \in \mathbb{R}$ (figura 5)

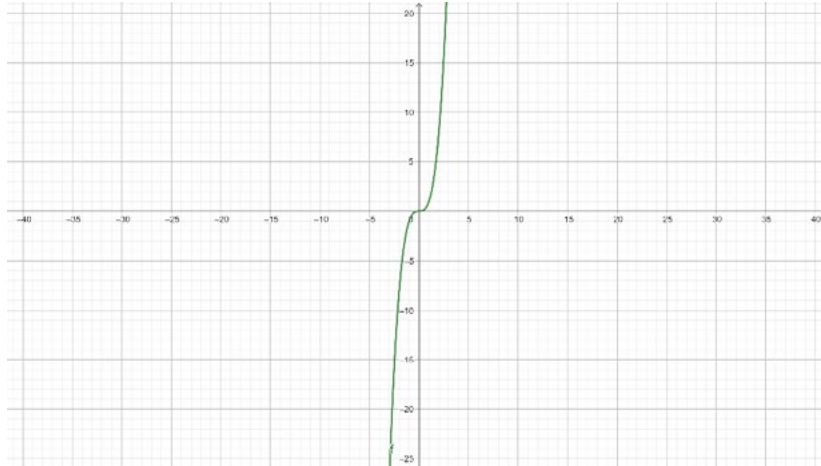


Figura 5

Shembulli 2 Për funksionin $y = x^2 - 2x + 1$ do t'i përcaktojmë intervalet e rritjes dhe zvogëlimit. E kërkojmë derivatin e parë të funksionit: $y' = 2x - 2$

1. $y' = 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, domethënë funksioni rritet në intervalin $(1, \infty)$.
2. $y' = 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, domethënë funksioni zvogëlohet në intervalin $(-\infty, 1)$
3. $y' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Pika x_0 tek e cila derivati i parë vlen $y' = f'(x) = 0$ quhet **pika stacionare**. Te Shembulli jonë pika $x = 1$ është pikë stacionare.

Shembulli 3 Për funksionin $y = x^3 - 3x$ do t'i përcaktojmë intervalet e rritjes dhe zvogëlimit. E kërkojmë derivatin e parë të funksionit: $y' = 3x^2 - 3$.

Për t'i fituar pikat stacionare, njehsojmë: $y' = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$ ku fitojmë se $x_1 = 1$ dhe $x_2 = -1$.

Më tej,

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Domethënë funksioni rritet në intervalin $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$y' < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1).$$

Domethënë funksioni zvogëlohet në intervalin $(-1, 1)$



Cakto pikat stacionare dhe intervalet e rritjes dhe zvogëlimit për funksionin

a) $y = x^2 - 1$;

b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Shembulli 4

Për funksionin $y = \frac{x^2}{x-2}$ do t'i përcaktojmë intervalet e rritjes dhe zvogëlimit. E

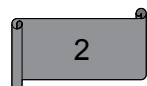
njehsojmë derivatin e parë të funksionit: $y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

Këtu vërejmë se $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, për çdo $(x-2)^2 > 0$,

$$y' > 0 \Leftrightarrow x(x-4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty).$$

Domethënë funksioni rritet në intervalin, $(-\infty, 0)$ dhe $(4, \infty)$,

Prej $y' < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4)$ vijon se funksioni zvogëlohet në interval $(0, 4)$.



Caktoi intervalet e rritjes dhe zvogëlimit për funksionin:

a) $y = x^2 e^x$;

b) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Le të jetë $y = f(x)$ përkufizuar në intervalin (a, b) . Themi se (a, b) dhe le të jetë $x_0 \in (a, b)$. funksioni $f(x)$ ka maksimum lokal në pikën x_0 , nëse ekziston ε rrethinë x_0 ashtu $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ për çdo $f(x) < f(x_0)$ (figura 6).

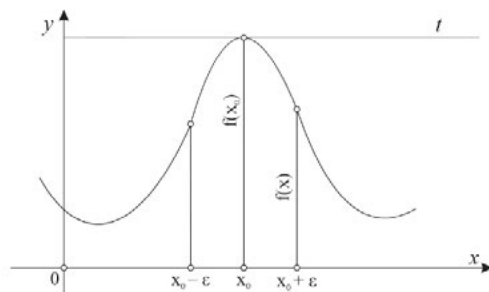


Figura 6

Le të jetë $y = f(x)$ përkufizuar në intervalin (a, b) dhe le të jetë $x_0 \in (a, b)$. Themi se funksioni $f(x)$ ka minimum lokal në pikën x_0 , nëse ekziston ϵ rrethinë $f(x) > f(x_0)$ për çdo $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ (figura 7)

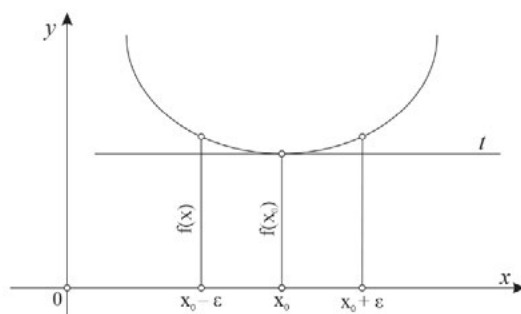


Figura 7

Minimumi lokal dhe maksimumi lokal i një funksioni quhen **ekstremet lokale të funksionit**.

Pika x_0 tek e cila funksioni $y = f(x)$ ka ekstrem lokal, e ndan fushën e përkufizimit të funksionit në interval të rritjes dhe interval të zvogëlimit, d.m.th., nëse për $\delta > 0$, funksioni rritet në intervalin $(x_0 - \delta, x_0)$

Shembulli 5

Cakto ekstremet lokale të funksionit $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Së pari do t'i caktojmë intervalat e monotonies: Kemi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$ edhe në këtë interval funksioni rritet. Ndërsa kur $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$ edhe në këtë interval funksioni zvogëlohet, (figura 8). Domethënë te pika $x_0 = 2$, derivati i parë e ndryshon shenjë prej negative në pozitive, pra në këtë pikë funksioni ka minimum lokal.

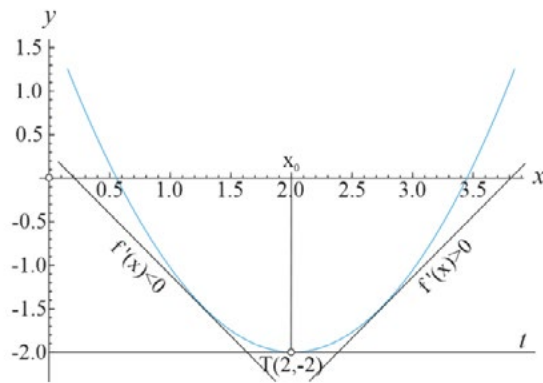


Figura 8

Teorema 3: Nëse funksioni $y = f(x)$ është diferenciable në intervalin (a, b) dhe nëse $f(x_0)$ është ekstrem lokal për ndonjë $x_0 \in (a, b)$ atëherë $f'(x_0) = 0$.

Gjykimi i anasjelltë jo patjetër të jetë i saktë, prej ku mund të përfundojmë se $f'(x_0) = 0$ është kusht i nevojshëm, ndërsa jo, edhe i mjaftueshëm për ekzistimin e ekstremit lokal në pikën x_0 . Domethënë është e nevojshme caktimi i kushteve plotësuese me plotësimin e së cilës do të garantohet ekzistimi i ekstremit lokal në pikën e dhënë. Si shembull mund ta shqyrtojmë funksionin $y = x^3 + 3x$. Derivati i parë të ky funksion është gjithmonë pozitiv, d.m.th., $y' = 3x^2 + 3 > 0$, $x \in \mathbb{R}$ që do të thotë se ky funksion monotonisht rritet në gjithë drejtëzën reale. Kjo do të thotë se nuk ka as minimum as maksimum. Gjithashtu edhe funksioni $y = x^3$ monotonisht rritet në gjithë drejtëzën reale që do të thotë se nuk ka as minimum as maksimum, ndërsa në pikën $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$.

Teorema 4: Nëse funksioni $y = f(x)$ është diferenciable në intervalin (a, b) edhe për çdo pikë $x_0 \in (a, b)$ vlen:

1) $f'(x_0) = 0$

2) $f'(x)$ e ndryshon shenjën në rrethinën e x_0 atëherë $f(x_0)$ është ekstrem lokal i funksionit $f(x)$.

Domethënë do t'i kemi tre raste:

Nëse $f'(x)$ e ndryshon shenjë prej negative në pozitive, atëherë funksioni ka maksimum lokal. Por nëse $f'(x)$ e ndryshon shenjë prej pozitive në negative, atëherë funksioni ka minimum lokal. Por nëse nuk e ndryshon shenjë atëherë nuk ka vlerë ekstreme, (figura 9).

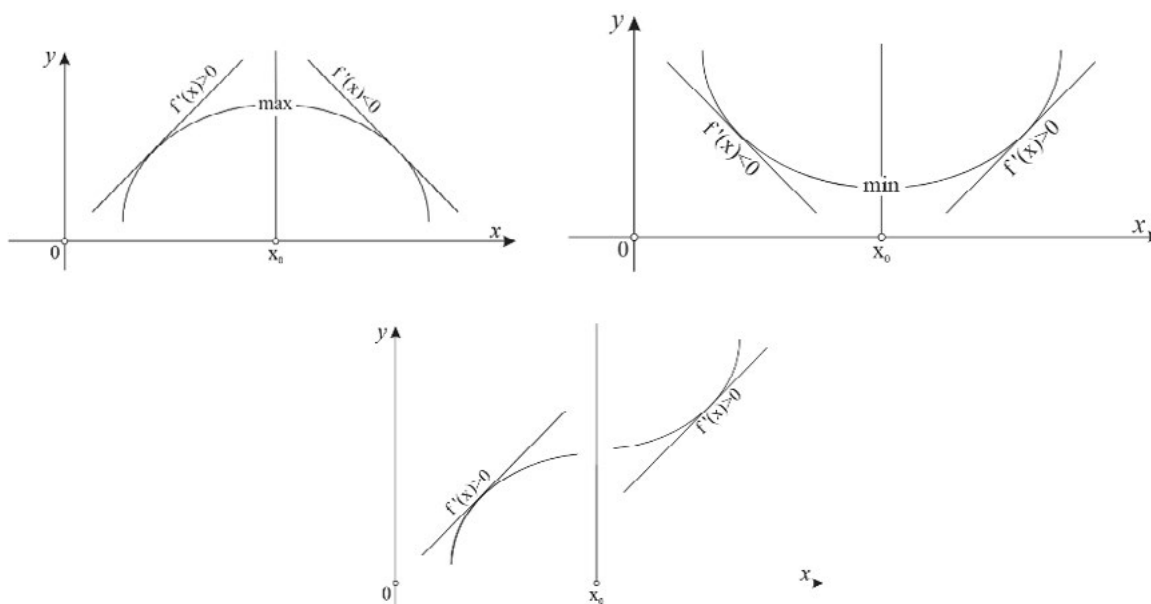


Figura 9

Shembulli 6

Për funksionin $y = x^3 - 3x$ prej shembullit 3, t'i gjejmë ekstremet lokale. Vërejtëm se $f'(x) > 0$ në intervalin $(-\infty, -1)$ dhe $(-1, \infty)$. Derisa $f'(x) < 0$ në intervalin $(-1, 1)$.

Domethënë në intervalin $(-\infty, -1)$ funksioni rritet, ndërsa në intervalin $(-1, 1)$ funksioni zvogëlohet.

Te pika $x = -1$, derivati i parë e ndryshon shenjë prej pozitive në negative. Pra në këtë pikë funksioni ka maksimum lokal, $y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.

Prej këtui vijon se funksioni ka maksimum lokal në pikën $A(-1, 2)$.

Në intervalin $(-1, 1)$ funksioni zvogëlohet, ndërsa në intervalin $(1, \infty)$, funksioni rritet. Domethënë në pikën $x = 1$, derivati i parë e ndryshon shenjë prej negative në pozitive, pra në këtë pikë funksioni ka minimum lokal $y_{\min} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$.

Domethënë funksioni ka minimum te pika $B(1,-2)$, (figura 10)

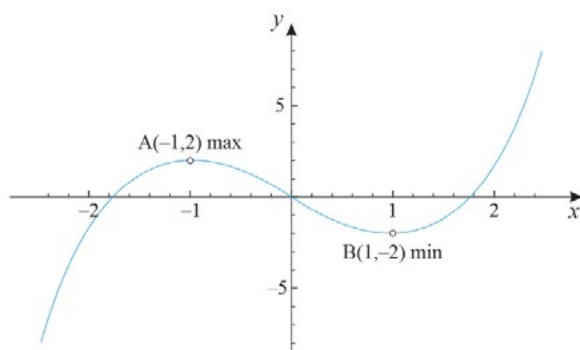
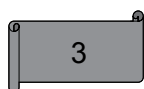


Figura 10



Caktoi ekstremet lokale të funksionit

a) $y = x^3 - x^2 - x - 1$;

b) $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Shembulli 7

T'i caktojmë ekstremet lokale të funksionit $y = \sqrt[3]{x^2}$. Për këtë funksion të përkufizuar në fushën e përkufizimit është gjithë bashkësia prej numrave realë, d.m.th., $D_f = \mathbb{R}$ dhe

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty), \text{ и } y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Problemi këtu është ai që derivati i parë nuk është përkufizuar për $x = 0$, ndërsa pasi 0 i takon fushës së përkufizimit të funksionit kjo nuk do të thotë se funksioni te $x = 0$ nuk do të ketë vlerë ekstreme, në këtë rast minimum.

Ndonjëherë caktimi i shenjës së derivatit të parë nuk është detyrë e thjeshtë. Me zbatimin e derivatit të dytë detyrat të këtij lloji bëhen shumë më të thjeshta. Të supozojmë se funksioni ka derivat të parë dhe të dytë në rrethinën e pikës x_0 . Siç me ndihmën e derivatit të parë caktojmë se funksioni a rritet ose zvogëlohet në rrethinën e pikës x_0 , ashtu edhe me derivatin e dytë do të caktojmë se $f'(x)$ a rritet ose zvogëlohet.

Nëse në pikën x_0 funksioni ka maksimum, atëherë derivati i parë i tij $f'(x)$ në rrethinën e pikës x_0 zvogëlohet. Kjo do të thotë se derivati i funksionit $f'(x)$ është negativ, d.m.th., $(f'(x))' = f''(x) < 0$ në rrethinën e pikës x_0 .

Nëse në pikën x_0 funksioni ka minimum, atëherë derivati i parë i tij $f'(x)$ në rrethinën e pikës x_0 rritet. Kjo do të thotë se derivati i funksionit $f'(x)$ është pozitiv, d.m.th., $(f'(x))' = f''(x) > 0$ në rrethinën e pikës x_0 .

Domethënë mund të përfundojmë këtë rregull:

Funksioni $f(x)$ le të ketë derivat të parë dhe të dytë të vijueshëm në rrethinën e pikës x_0 , dhe le të jetë $f'(x_0) = 0$. Atëherë funksioni ka ekstrem lokal në pikën x_0 dhe:

1. Nëse $f''(x_0) < 0$ funksioni ka maksimum lokal,
2. Nëse $f''(x_0) > 0$ funksioni ka minimum lokal,
3. Nëse $f''(x_0) = 0$ derivatin e dytë nuk mund ta shfrytëzojmë për caktimin e vlerës ekstreme, në këtë rast do ta shqyrtojmë shenjë e derivatit të parë të funksionit.

Shembulli 8

Do t'i caktojmë ekstremet lokale të funksionit $y = x^3 - 3x^2$.

Nëse e njehsojmë derivatin e parë dhe e barazojmë me 0, kemi:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ose } x = 2,$$

d.m.th., funksioni do të ketë vlera ekstreme në pikat $x = 0$ dhe $x = 2$.

Me njehsim dhe vlerësim të derivatit të dytë kemi:

$$y'' = 6x - 6, \quad x = 0 \text{ për, } y''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0,$$

domethënë funksioni ka maksimum në pikën $y_{maks} = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.

$$y''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0,$$

domethënë funksioni $x = 2$ ka minimum në pikën $y_{\min} = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$.

4

Caktoi ekstremet lokale të funksionit:

a) $y = x^4 + 2x^2 - 1$;

b) $y = 3x^2 - 5x^3$.

Të përfundojmë se për caktimin e vlerave ekstreme të funksioneve të cilët janë dyherë diferenciable i shfrytëzojmë këto rregulla:

1. Caktohet derivati i parë $f'(x)$ i funksionit,
2. Për caktimin e pikave stacionare zgjidhet barazimi $f'(x) = 0$
3. Caktohet derivati i dytë $f''(x)$ dhe shqyrtohet shenja e tij për çdo pikë stacionare.

Shembulli 9

T'i caktojmë vlerat ekstreme të funksionit $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$. Nëse e njehsojmë derivatin e parë dhe e barazojmë me 0, kemi:

$$y' = x^4 - x^3 = x^3(x - 1),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(x - 1) = 0,$$

vijon se funksioni do të ketë vlera ekstreme te pikat $x = 0$ ose $x = 1$.

Me njehsimin dhe vlerësimin e derivatit të dytë kemi:

$y'' = 4x^3 - 3x^2$, $x = 0$ için, $y''(0) = 0$, prej nuk mund asgjë të përfundojmë për pikën stacionare të fituar. Pasi,

$$y''(1) = 1 > 0,$$

domethënë funksioni ka minimum lokal në pikën $x = 1$, $y_{\min}(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$.

Pasi,

$$y''(0) = 0,$$

domethënë nuk mund të caktojmë se në pikën $x = 0$, funksioni a ka ekstrem nëpërmjet derivatit të dytë. Duhet ta shqyrtojmë sjelljen e derivatit të parë te ajo pikë.

Për $f'(x) > 0$, d.m.th., funksioni $x^3 \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$, monotonisht rritet.

Derisa për vlerat për $f'(x) < 0$, $x^3 \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, d.m.th., funksioni monotonisht zvogëlohet.

Derivati i parë i funksionit në $x = 0$ e ndryshon shenjën, pra prej këtu vijon se te pika $x = 0$, funksioni ka maksimum lokal.

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto intervalet e rritjes dhe zvogëlimit të funksionit:

a) $y = 2x - x^2 + 5$;

b) $y = x^2 + 2x - 3$;

c) $y = 5x^3 - 7x^2 + 2$;

ç) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$;

d) $y = \frac{2x-1}{3x+4}$;

dh) $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$;

e) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$.

2. Cakto ekstremet lokale të funksionit:

a) $y = 2x - 5$;

b) $y = x^2 - 5x + 3$;

c) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$;

ç) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$;

d) $y = x^3(x-1)$;

dh) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

e) $y = x^2 e^x$;

f) $y = \ln x + \frac{1}{x}$;

g) $y = \frac{x}{x^2+x+1}$;

h) $y = \frac{x^2-7}{x+4}$.

3. Cakto parametrin a te funksioni $f(x) = ax^2 - 4x + 2$ ashtu që ai të ketë

a) minimum lokal në pikën $x = 2$, b) minimum lokal në pikën $x = 4$

4. Caktoi parametrat a dhe b te funksioni $f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x - 1$ ashtu që ai të ketë minimum lokal në $x = 3$, ndërsa maksimum lokal në $x = -2$.

11. Konveksiteti/konkaviteti dhe pikat e infleksionit të funksionit

Vërejtëm se derivati i parë mund ta shfrytëzojmë për vijimin e monotonies së funksionit diferenciable. Në mënyrë të ngjashme me ndihmën e derivatit të dytë mund të shqyrtojmë “lakimin e lakore” $y = f(x)$ në intervalin e dhënë.

Teorema 1: Funksioni $y = f(x)$ le të ketë derivat të parë dhe të dytë të vijueshëm në intervalin (a, b) .

1. Nëse $x \in (a, b)$ për çdo $f''(x) < 0$, atëherë grafiku i funksionit është konveks (i dalë) në atë interval.
2. Nëse $x \in (a, b)$ për çdo $f''(x) > 0$, atëherë grafiku i funksionit është konkav (i futur) në atë interval.

Kjo teoremë na ndihmon ta caktojmë natyrën e lagesës së grafikut të funksionit $y = f(x)$.

Ta shqyrtojmë lakoren $y = f(x)$, që është diferenciable në intervalin (a, b) (figura 11 dhe Figura 12). $M_1(x_1, f(x_1))$ dhe $M_2(x_2, f(x_2))$ le të jenë dy pika të çfarëdoshme prej lakores ashtu që $x_1 < x_2$. Tangjenta në pikat M_1 dhe M_2 le të jenë drejtëzat t_1 dhe t_2 dhe α_1 dhe α_2 janë këndet që tangjentat i formojnë me pjesën pozitive të boshtit x (figura 11 dhe Figura 12).

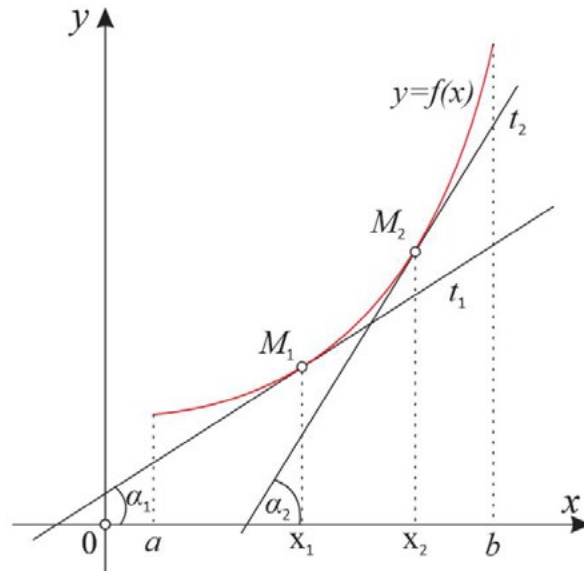


Figura 11

Te Figura 11 është paraqitur lakorja konkave (e futur) në intervalin (a, b) . Mund të vërejmë se me zmadhimin e vlerës së x zmadhohet edhe këndi që tangjenta përkatëse e formon me pjesën pozitive të boshtit x , d.m.th., $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$. Pasi $f'(x_1) = \tan \alpha_1$ dhe $f'(x_2) = \tan \alpha_2$ dhe pasi $\tan \alpha$ është funksion rritës vijon se edhe $f'(x)$ është funksion rritës në (a, b) , domethënë kemi $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$ pra derivati i funksionit $f'(x)$ është pozitiv në intervalin (a, b) d.m.th., $f''(x) > 0$.

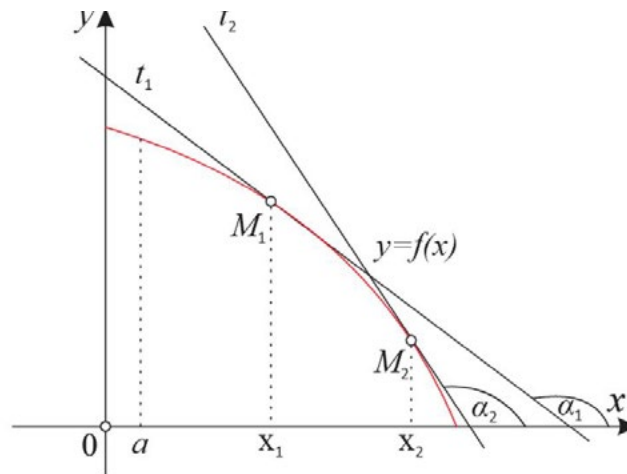


Figura 12

Te Figura 12 është paraqitur lakore konvekse (e dalë) në intervalin (a, b) . Mund të vërejmë se me zmadhimin e vlerës së x zvogëlohet këndi që tangjentat përkatëse e formojnë me pjesën pozitive të boshtit të x , d.m.th., $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$.

Pasi $f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$ dhe $f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$ dhe pasi $\operatorname{tg} \alpha$ është funksion rritës vijon se edhe $f'(x)$ është funksion rritës në (a, b) , domethënë kemi $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, pra derivati i funksionit $f'(x)$ është negative në intervalin (a, b) d.m.th., $f''(x) < 0$.

Shembulli 1 T'i caktojmë intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit të lakores $y = x^3$. Derivati i parë dhe i dytë i funksionit janë $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Funksioni është konkav kur $y'' = 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Domethënë në intervalin $(0, \infty)$, lakorja është konkave (e future). Derisa funksioni do të jetë konveks (i dalë) kur $y'' = 6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ d.m.th., në intervalin $(-\infty, 0)$.

1

Cakto intervalet e konveksitetit për funksionin:

a) $y = x^3 - 1$;

b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Shembulli 2 T'i caktojmë intervalet e konveksitetit dhe të konkavitetit të lakore $y = x^2 + 2\ln x$

Derivati i parë dhe i dytë i funksionit janë:

$$y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

Funksioni është konkav në intervalet $(-\infty, -1)$ dhe $(1, \infty)$. Derisa funksioni do të jetë konveks në intervalin $(-1, 1)$.

2

Cakto intervalet e konveksitetit për funksionin:

a) $y = \ln x$, $x \in (0, \infty)$;

b) $y = e^{-x^2}$.

Përkufizimi 1: Pikat prej lakores të cilat e ndajnë intervalin në të cilën lakorja është konkave / konvekse në intervalin ku lakorja është konvekse /konkave quhen **pikat e infleksionit (lakimit)**.

Në pikën e kthesës x_0 lakorja e ndryshon formëpn e saj prej konkave (të future) në konvekse (të dalë) ose anasjelltas, që do të thotë se për funksionin $y = f(x)$ kur x kalon prej të majtës djathtas nëpërmjet x_0 e ndryshon shenjën, pra derisa ekziston derivati i dytë atëherë $f''(x_0) = 0$. Prej gjithë kësaj mund të përfundojmë:

Kushti i nevojshëm lakorja $y = f(x)$ të ketë pikë të infleksionit në x_0 është $y = f(x)$, ndërsa kushti i mjaftueshëm është $f''(x)$ ta ndryshojë shenjën në rrethinën e pikës x_0 .

Shembulli 3

Do t'i caktojmë pikat e infleksionit të funksionit $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

Për intervalet për konkavitete dhe kemi:

$$y' = 3x^2 - 6x + 5, y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Në rrethinën e pikës $x = 1$, derivati i dytë e ndryshon shenjën $y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = 2$, pra pika e infleksionit është $P(1, 2)$.

3

Cakto pikat e infleksionit të funksionit:

a) $y = x^3 - x^2 - x - 1$;

b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Kur funksioni $y = f(x)$ ka derivat të dytë, pikat e infleksionit të funksionit caktohen në katër hapa:

1. Gjendet $f''(x)$;
2. Zgjidhet barazimi $f''(x) = 0$
3. Shqyrtohet shenja e $f''(x)$, në rrethinën e pikave të infleksionit.

Shembulli 4

T'i caktojmë pikat e infleksionit të funksionit $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Sipas hapave të përmendura më lart, do ta caktojmë derivatin e parë të funksionit:

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Pastaj, do ta caktojmë derivatin e dytë të funksionit:

$$y'' = \frac{-4x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot (2 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 1)[-4x(x^2 + 1) - 4x(2 - 2x^2)]}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}.$$

Me barazimin e derivatit të dytë të funksionit me 0, kemi:

$$y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}.$$

Me shqyrtimin e shenjës në rrethinën e pikave të infleksionit kemi:

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}), f''(x) < 0 \Rightarrow$ funksioni është konveks,

$x \in (-\sqrt{3}, 0), f''(x) > 0 \Rightarrow$ funksioni është konkav,

$x \in (0, \sqrt{3}), f''(x) < 0 \Rightarrow$ funksioni është konveks,

$x \in (\sqrt{3}, \infty), f''(x) > 0 \Rightarrow$ funksioni është konkav.

Pasi majtas dhe djathtas prej pikave $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$, derivati i dytë i funksionit ka shenja të ndryshme, vijon se këto pika janë pika të infleksionit

$$P_1\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0, 0), P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Për qartësi më të madhe rezultatet e fituara do t'i fusim në tabelë:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvekse	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	konkave	0	konvekse	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	konkave

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit të lakore:

a) $y = 2x^3 - x^2 + 5$;

b) $y = 4x - 4x^3 - 4$;

c) $y = 3x^2 - 5x + 2$;

ç) $y = 2x^4 - 12x^2$.

2. Cakto pikat e infleksionit të lakores:

a) $y = \frac{x}{x+1}$;

b) $\frac{x}{x^2+1}$.

3. Cakto intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit të lakores dhe cakto pikat e infleksionit:

a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}, x \neq \pm 1$

b) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}, x \neq -1$;

c) $y = x \ln^2 x, x > 0$;

ç) $y = x^2 e^x$;

d) $y = x e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$;

dh) $y = x^2 \ln x, x > 0$.

12. Shqyrtimi i vijimit dhe skicimi i grafikut të funksionit

Për ta vizatuar grafikun e funksionit $y = f(x)$, është e nevojshme së pari ta analizojmë vijimin e grafikut të funksionit, nëpërmjet këtyre katër hapave:

1. Fusha e përkufizimit të funksionit;
2. Çift/tek i funksionit dhe periodicitetit i tij;
3. Pikëprerjet e grafikut të funksionit me boshtet e koordinatave (zero, prerja me boshtin y);
4. Asimptotat e funksionit;
5. Vlerat ekstreme dhe intervalet e monotonisë;
6. Pikat e infleksionit, konkavitetit dhe konveksitetit.

Grafikun e funksionit e skicojmë në bazë të të dhënave të fituara për sjelljen e funksionit dhe për formën e grafikut të tij. Skema e përmendur jo patjetër të vijohet me radhë.

Preferohet të gjitha të dhënat me radhë të futen te tabela, dhe njëkohësisht të futen edhe në sistemin koordinativ.

Shqyrtimi i vetive të funksionit dhe skicimi i grafikut të tij do ta shqyrtojmë nëpërmjet disa shembujve.

Shembulli 1

Ta shqyrtojmë dhe skicojmë grafikun e funksionit $y = 2x^2 - 3x + 1$.

1. Fusha e përkufizimit të funksionit është përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$, pra prej këtu $D_f = \mathbb{R}$.

2. Çift/tek i funksionit

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 \neq f(x).$$

Funksioni nuk është çift:

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 = -(-2x^2 - 3x - 1) = -f(x).$$

Funksioni nuk është tek. Domethënë funksioni nuk është as çift, as tek.

3. Pikëprerjet me boshtet koordinative

Prerja me boshtin x (zero e funksionit)

$$y = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2} \text{ dhe } x_2 = 1.$$

Pikat e prerjes me boshtin x janë $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ dhe $B(1, 0)$

Prerja me boshtin y

$$x = 0, \quad 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Pika e prerjes me boshtin y është $C(0, 1)$.

4. Asimptotat e funksionit

Asimptotë horizontale nuk ka pasi

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty.$$

Asimptotë vertikale nuk ka, pasi funksioni është përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$. Asimptota e pjerrët është e formës $y = kx + n$.

Pasi

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \right) = \infty,$$

vijon se grafiku i funksionit nuk ka asimptotë të pjerrët.

5. Vlerat ekstreme dhe intervalet e monotonisë

$$y' = 4x - 3,$$

$$y' = 0, 4x = 3, x = \frac{3}{4}$$

$$y'' = 4 > 0.$$

Domethënë funksioni për $x = \frac{3}{4}$ ka minimum lokal,

$$y_{\min} = y\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{8}.$$

Pika $D\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ është minimum lokal i grafikut.

Për monotoninë e funksionit kemi:

$y' = 4x - 3 > 0, 4x > 3, x > \frac{3}{4}$, d.m.th., për $x \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ funksioni rritet,

$y' = 4x - 3 < 0, 4x < 3, x < \frac{3}{4}$, d.m.th., për $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ funksioni zvogëlohet. Nëse shqyrtimin e bëjmë nëpërmjet tabelës, kemi:

x	$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
y'	- ↘	+ ↗

6. Pikat e infleksionit dhe intervalet e lakimit $y'' = 4 > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$ lakorja nuk ka pika të infleksionit dhe në gjithë intervalin konkav (i future), ndërsa grafiku i tij nuk e ka formën “U”. Grafiku i funksionit është dhënë në figurën 13.

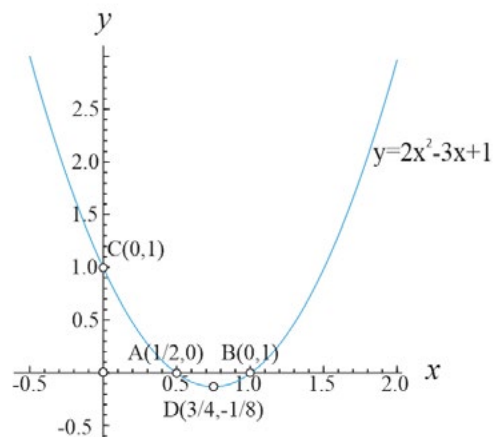


Figura 13

Shembulli 2

Ta shqyrtojmë vijimin dh eta skicojmë grafikun e funksionit $y = x^4 - 4x^3$.

1. Fusha e përkufizimit

Funksioni është përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$, pra prej këtu $Df = \mathbb{R}$.

2. Çift/tek i funksionit :

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 \neq f(x).$$

Funksioni nuk është çift.

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 = -(-x^4 - 4x^3) = -f(x).$$

Funksioni nuk është tek. Domethënë funksioni nuk është as çift as tek.

3. Prerjet me boshtet e koordinatave.

Prerja me boshtin x (zero të funksionit)

$$y = 0, x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0, x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 4.$$

Pikat e prerjes me boshtin x janë $A(0, 0)$ dhe $B(4, 0)$

Prerjet me boshtin y :

$$x = 0, 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0.$$

Pika e prerjes me boshtin y është $A(0,0)$.

4. Asimptotat e funksionit

Asimptotë horizontale nuk ka pasi:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 4x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty.$$

Asimptotë vertikale nuki ka pasi funksionit është përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$ Asimptota e pjerrët është e formës $y = kx + n$. Pasi

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 - 4x^3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty,$$

vijon se grafiku i funksionit nuk ka asimptotë të pjerrët.

5. Vlera ekstreme dhe interval të monotonisë

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) \\ \Rightarrow y' = 0 &\Leftrightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3 \\ y'' &= 12x^2 - 24x. \end{aligned}$$

Për derivatin e dytë zë funksionit te pika $x_1 = 0$ kemi $y''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$ prej ku nuk mund të themi se funksioni a ka ekstrem lokal në pikën $x_1 = 0$.

Për derivatin e dytë të funksionit në pikën $x_2 = 3$ kemi $y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 > 0$ pra vijon se funksioni në pikën $x_2 = 3$ ka minimum lokal

$$y_{\min} = y(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27.$$

Pika $C(3, -27)$ është pika e minimumit lokal.

Me shqyrtimin e shenjes së derivatit të parë të funksionit kemi

$$y' = 4x^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x-3) > 0, x > 3, \text{ d.m.th., për } x \in (3, \infty) \text{ funksioni rritet,}$$

$$y' = 4x^2(x-3) < 0 \Leftrightarrow (x-3) < 0, x < 3, \text{ d.m.th., për } x \in (-\infty, 3) \text{ funksioni zvogëlohet.}$$

Nëse shqyrtimin e bëjmë nëpërmjet tabelës, kemi

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	- 	+ 

6. Pikat e infleksionit dhe intervalet e lakimit

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2),$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2.$$

Derivati i dytë y'' e ndryshon shenjen gjatë kalimit nëpër pikat $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 2$, pasi $y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ d.m.th., në këto interval funksioni është konkav dhe $y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) < 0, x \in (0, 2)$ d.m.th., në këto interval funksioni është konveks.

Për pikat $x_1 = 0$ kemi $x_2 = 2$

$$y(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0,$$

$$y(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16.$$

Pika e infleksioni janë $P_1(0, 0)$ dhe $P_2(2, -16)$

Për qartësi më të madhe rezultatet e fituara do t'i fusim në tabelë:

Tabela konkave konvekse konkave

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
y''	+	-	+
y	konkav	konveks	konkav

Grafiku i funksionit është skicuar te Figura 14.

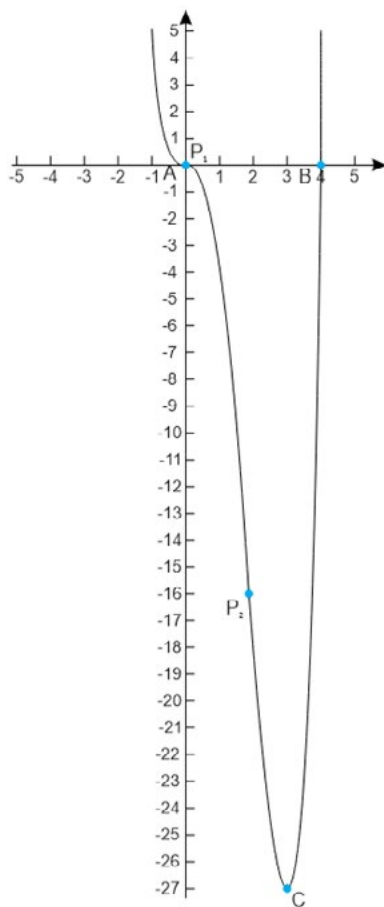


Figura 14

Shembulli 3

Për ta shqyrtuar vijimin dhe skicimin e grafikut të funksionit $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

1. Fusha e përkufizimit të funksionit :

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Rightarrow x \neq \pm 1,$$

funksoni është përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. pra prej këtu $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

2. Çift/tek i funksionit

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Funksoni është tek, që do të thotë se grafiku i tij është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave.

3. Prerjet me boshtet koordinative Prerja me boshtin x (zero të funksionit)

$$y = 0, \quad \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Pika e prerjes me boshtin x është $(0, 0)$ Prerja me boshtin y

$$x = 0, \quad y(0) = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0,$$

Pika e prerjes është $(0, 0)$.

4. Asimptotat e funksionit Asimptotë horizontale nuk ka pasi

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \right) = \frac{1}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

Asimptotë vertikale:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \varepsilon)^3}{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \varepsilon)^3}{(1 - \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \varepsilon)^3}{-\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \varepsilon)^3}{(-1 + \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (-2 + \varepsilon)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 - \varepsilon)^3}{(-1 - \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = -\infty.$$

vijon se asimptota vertikale janë drejtëzat $x = 1$ dhe $x = -1$.

Asimptota e pjerrët e ka formën $y = kx + n$. Me caktimin e koeficientit të drejtimit dhe anëtarit të lirë kemi:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{1 - 0}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

Asimptota e pjerrët është drejtëza $y = x$

5. Vlerat ekstreme dhe intervalet e monotonisë

Prej

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

kemi se

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 3 = 0$$

Derivati i dytë i funksionit është

$$y'' = \left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \right)' = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Për derivatin e dytë të funksionit në pikën $x_1 = 0$ kemi $y''(0) = 0$, prej ku nuk mund të themi se funksioni a ka ekstrem lokal në pikën $x_1 = 0$.

Për derivatin e dytë të funksionit në pikën $x_2 = \sqrt{3}$ kemi $y''(\sqrt{3}) = \frac{12\sqrt{3}}{8^3} > 0$, prej ku $x_2 = \sqrt{3}$ vijon se funksioni

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

në pikën $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ ka minimum lokal

Për derivatin e dytë të funksionit në pikën $x_3 = -\sqrt{3}$ kemi $y''(-\sqrt{3}) = \frac{-12\sqrt{3}}{8^3} < 0$ nga e cila rrjedh se funksioni në pikën $x_3 = -\sqrt{3}$ ka maksimum lokal

$$y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pika $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ është pika e maksimumit lokal.

Pasi $x^2 > 0$ dhe $(x^2-1)^2 > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$, kemi se $y' > 0$ kur $x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$,

, funksion i rritet derisa pra kur $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, funksioni zvogëlohet.

Vërejtëm se funksioni është tek që do të thotë se grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave. Prandaj mund t'i shqyrtojmë vetëm vlerat pozitive të x .

Nëse shqyrtimin e bëjmë nëpërmjet tabelës, kemi:

	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$x^2 - 3$	-	+
y'	-	+
y		

6. Pikat e infleksionit dhe intervalet e lakimit

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3},$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 3 = 0$$

barazimi $x^2 + 3 = 0$ nuk ka zgjidhje reale, pasi e kemi vetëm pikën $x = 0$ dhe $y(0) = 0$. Si kandidat për pikën e infleksionit është $P(0, 0)$.

Për qartësi më të madhe thjeshtësimin duke pasur parasysh se $x^2 + 3 > 0, \forall x \in D_f$ dhe funksioni është tek do të bëjmë tabelë:

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	+	+
$(x^2 - 1)^3$	-	+
y''	-	+
y	$\cap$	$\cup$

Tani mund ta vizatojmë grafikun e funksionit. Te Figura 15 do të jepet grafiku vetëm për vlerat pozitive të x .

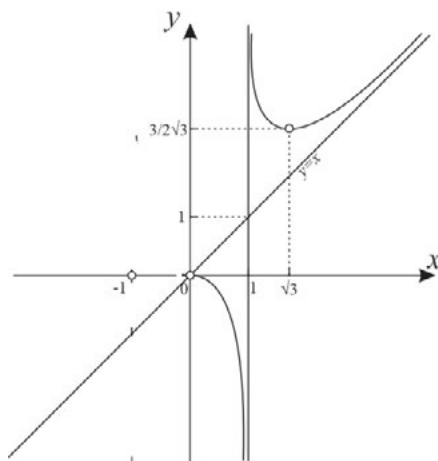


Figura 15

Funksioni është tek d.m.th., grafiku i funksionit është simetrik ndaj fillimit të koordinatave dhe ai e ka formën të dhënë të Figura 16:

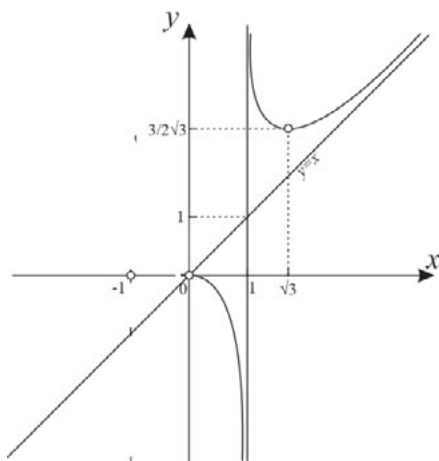


Figura 16

Shembulli 4 Ta shqyrtojmë vijimin dhe skicimin e grafikut të funksionit $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$. Fusha e përkufizimit të funksionit

$$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2,$$

Funksioni është logaritmik pra patjetër $\frac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.

Domethënë funksioni është përkufizuar për $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ dhe

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-1, \infty).$$

2. Çift/tek të funksionit

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x+2} = \ln \frac{1-x}{2-x}.$$

Funksioni nuk është as çift as tek, atë mund ta përfundojmë edhe për shkak të asaj që fusha e përkufizimit nuk është simetrike.

3. Prerjet me boshtet e koordinatave. Prerja me boshtin x (zero të funksionit)

$$y = 0, \quad \ln \frac{x+1}{x+2} = 0 = \ln 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 1 \Rightarrow x+1 = x+2 \Rightarrow 0 \cdot x = 1,$$

që do të thotë se funksioni nuk ka zero.

Prerja me boshtin y

Funksioni ka prerje me boshtin y , pasi për $x = 0$ funksioni ka vlerë

$$y(0) = \ln \frac{1}{2}.$$

Pika e cila është prerje me boshtin y është $A\left(0, \ln \frac{1}{2}\right)$

4. Asimptotat e funksionit

Asimptota horizontale Pasi

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \ln \frac{1+0}{1+0} = \ln 1 = 0,$$

vijon se $y = 0$ është asimptotë horizontale.

Asimptotë vertikale

Me caktimin e vlerës kufitare të funksionit në pikën tek e cila nuk është përkufizuar funksioni, kemi

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{-2-\varepsilon+1}{-2-\varepsilon+2} = \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon} = \infty,$$

pra vijon se $x = -2$ është asimptotë vertikale prej të majtës. Pasi

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{-1+\varepsilon+1}{-1+\varepsilon+2} = \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = -\infty,$$

pra vijon se $x = -1$ është asimptotë vertikale prej të djathtës.

Asimptotë të pjerrët nuk ka, pasi te drejtëza $y = kx + n$, koeficienti $k = 0$, d.m.th.,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x+2} \right) \\ &= \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2}} = 0. \end{aligned}$$

5. Vlerat ekstreme dhe intervalet e monotonies

E caktojmë derivatin e parë të funksionit:

$$y' = \left(\ln \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \frac{(x+1)'(x+2) - (x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Për ta shqyrtuar sjelljen e derivatit të parë të funksionit, e formojmë tabelën:

	$(-\infty, -2)$	$(-1, \infty)$
$x+1$	-	+
$x+2$	-	+
y'	+	+
y		

Funksioni rritet në gjithë fushën e përkufizimit $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$, pra funksioni nuk ka vlera ekstreme. Mospasja e vlerave ekstreme vërehet edhe prej asaj që në asnjërën prej fushës së përkufizimit, derivati i parë nuk ka vlerë 0.

6. Pikat e infleksionit dhe intervalet e lakimit

E caktojmë derivatin e dytë të funksionit:

$$y'' = \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)' = \left(\frac{1}{x^2+3x+2} \right)' = \left((x^2+3x+2)^{-1} \right)'$$

$$= -1 \cdot (x^2+3x+2)^{-2} (x^2+3x+2)' = \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}.$$

Për ta shqyrtuar sjelljen e derivatit të parë të funksionit, e formojmë tabelën:

	$(-\infty, -2)$	$(-1, \infty)$
$2x+3$	-	+
-1	-	-
y''	+	-
y	$\cup$	$\cap$

Grafiku i funksionit është dhënë te Figura 17

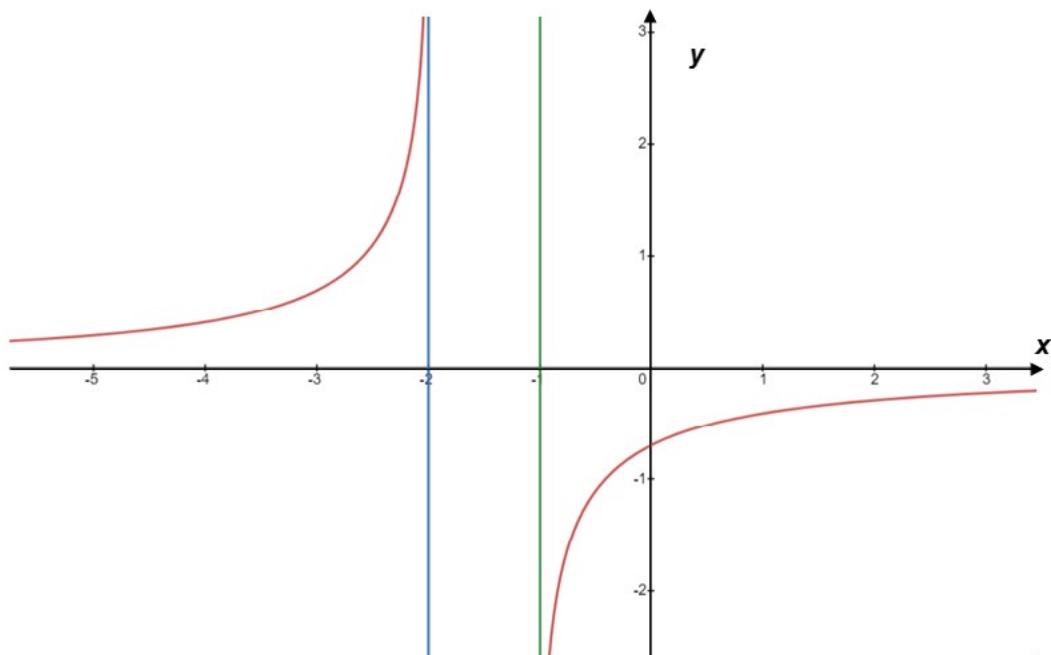


Figura 17

Detyra për punë të pavarur

1. Shqyrto vijimin dhe skico grafikun e funksionit:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

b) $y = x^3 - 3x + 2$;

c) $y = \frac{1}{1+x^2}$;

ç) $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$;

d) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;

dh) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;

e) $y = \frac{x^2+2x-1}{x^2}$;

f) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

2. Shqyrto vijimin dhe skico grafikun e funksionit:

a) $y = x^2 e^x$;

b) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

c) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

ç) $y = x - \ln x$.

13. Zbatimi i derivatit për zgjidhjen e problemeve të ekstremebe

Këtu do të japim disa shembuj të cilët do ta shqyrtojmë derivatin e parë dhe të dytë për zgjidhjen e problemeve praktike.

Shembulli 1 Perimetri i një drejtkëndëshi është 20 njësi. Sa duhet të jetë gjatësia e brinjëve të drejtkëndëshit që syprina të jetë më e madhe?

Brinjët e drejtkëndëshit le t'i shënojmë me a dhe b . Prej formulës për perimenter të drejtkëndëshit kemi $P = 2a + 2b$.

Domethënë:

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a.$$

Syprina e drejtkëndëshit njehsohet sipas formulës $S = a \cdot b$. Me zëvendësimin, kemi,

$$S(a) = a(10 - a) = 10a - a^2.$$

$$S'(a) = 10 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5.$$

Për të konstatuar se vlerat e fituara të gjatësisë së brinjës a , syprina a është më e madhe, patjetër ta gjejmë derivatin e dytë.

Derivati i dytë $S''(5) = -2 < 0$, në çfarëdo pikë është më e vogël se zero. Përfundojmë se për $a = 5$ njësi syprina është maksimale.

Brinja $b = 10 - a = 10 - 5 = 5$ njësi

Domethënë syprina më e madhe prej të gjithë drejtkëndëshave me perimenter të njëjtë ka katrori me brinjë $a = 5$, dhe syprina është $S = 5 \cdot 5 = 25$ njësi katrore.

Shembulli 2 Gjatësia e një segmenti është 20 cm. Të ndahet segmenti në dy pjesë, ashtu që shuma e kubeve të dy pjesëve të jetë më e vogël.

Pjesët e segmenti le t'i shënojmë me a dhe b .

Kemi se $a + b = 20 \Rightarrow b = 20 - a$

Me S ta shënojmë shumën prej kubeve të tyre:

$$S = a^3 + b^3$$

$$S(a) = a^3 + (20 - a)^3.$$

$$S'(a) = 3a^2 + 3(20 - a)^2(20 - a)' = 3a^2 - 3(20 - a)^2$$

$$= 3a^2 - 3(400 - 40a + a^2) = 120a - 1200$$

$$S'(a) = 120a - 1200 = 0 \Rightarrow a = 10.$$

$$S''(10) = 120 > 0$$

Domethënë për $a = 10$, S ka vlerë më të vogël, pra pjesët prej segmentit janë 10 dhe 10.,

Shembulli 3 Te trekëndëshi kënddrejtë me brinjë 15, 20 dhe 25 është brendashkruar drejtkëndësh ashtu që dy kulme të drejtkëndëshit shtrihen te hipotenuza e trekëndëshit. Sa është syprina maksimale e drejtkëndëshit të brendashkruar?

Kulmet e trekëndëshit do t'i shënojmë me A , B , dhe C , por të drejtkëndëshit me PQR , dhe S (figura 18). Syprina e drejtkëndëshit është $S = \overline{SQ} \cdot \overline{RQ}$. Prej kushtit të detyrës kemi $\overline{AB} = 25$, $\overline{BC} = 15$, $\overline{AC} = 20$ dhe brinjët e drejtkëndëshit t'i shënojmë me $\overline{SQ} = a$, $\overline{RQ} = b$. Le të jetë $\overline{CM}$ lartësia e lëshuar ndaj hipotenuzës së trekëndëshit ABC dhe $\overline{CN}$ është lartësia e lëshuar ndaj hipotenuzës së trekëndëshit SR . Ta gjejmë varësinë ndërmjet $\overline{SQ} = a$ dhe $\overline{RQ} = b$. Prej figurës 18 vërejmë se: $\triangle ABC \sim \triangle SRC$. Prej ngjashmërisë së trekëndëshave vijon se brinjët përkatëse janë proporcionale.

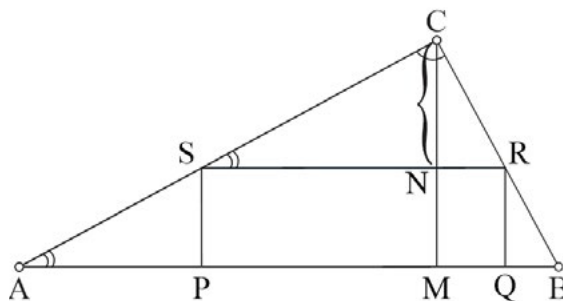


Figura 18

$$\triangle ABC \sim \triangle SRC,$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$$

Ta caktojmë tani $\overline{CM}$. Syprina e $\triangle ABC$ mund të njehsohet në dy mënyra:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$$

$$25 \cdot \overline{CM} = 15 \cdot 20$$

Të zëvendësojmë te proporcionet

$$\frac{25}{a} = \frac{12}{\overline{CN}}.$$

Ngel ta caktojmë $\overline{CN}$, $\overline{CN} = \overline{CM} - \overline{MN} = 12 - \overline{RQ} = 12 - b$, pasi $\overline{MN} = \overline{RQ}$

$$\frac{25}{a} = \frac{12}{12 - b},$$

$$12a = 25(12 - b),$$

$$a = \frac{25}{12}(12 - b).$$

Për syprinën e drejtkëndëshit kemi:

$$S = a \cdot b = \frac{25}{12}(12 - b)b,$$

$$S(b) = \frac{25}{12}(12b - b^2).$$

Vijimisht, ta gjejmë derivatin e parë $S'(b)$:

$$S'(b) = \frac{25}{12}(12 - 2b),$$

$$S'(b) = 0$$

$$\frac{25}{12}(12 - 2b) = 0$$

$$b = 6,$$

$$S''(6) = -\frac{25}{6} < 0.$$

Domethënë për $b = 6$ syprina e drejtkëndëshit është maksimale. Ngel edhe ta gjejmë brinjën a dhe syprinën maksimale.

$$a = \frac{25}{12}(12 - 6) = \frac{25}{2},$$

$$S = ab = 6 \cdot \frac{25}{2} = 75.$$

Domethënë syprina maksimale e drejtkëndëshit të këtit të brendashkruar të trekëndëshi kënddrejtë është 75.

Shembulli 4

Prej copës së kartonit në formë të katrorit me brinjë 8 cm, te çdo kënd prehet nga një katror (si te Figura 19), dhe në këtë mënyrë formohet kutia. Do t'i gjejmë dimensionet për të cilat kuti ka vëllim më të madh.

Me x ta shënojmë brinjën e katrorit që pren prej kutisë. Baza e kutisë do të jetë katror me brinjë $8 - 2x$, ndërsa lartësia e kutisë do të jetë x , Figura 19

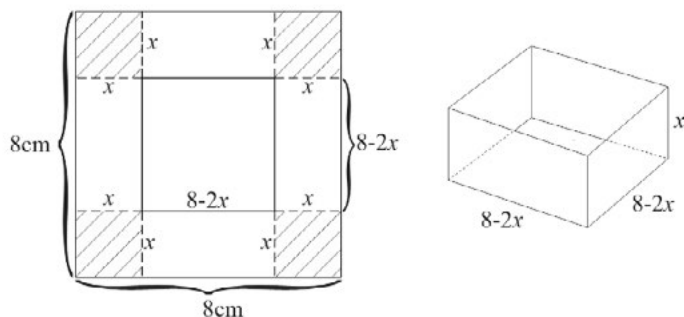


Figura 19

Kutia paraqet prizmi katërkëndor i rregullt me vëllim:

$$V = B \cdot H = (8 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V(x) = (64 - 32x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 32x^2 + 64x.$$

Vlera kritike për x (vlera maksimale ose minimale) do ta fitojmë kur derivatin e parë të funksionit $V(x)$ do ta barazojmë me 0.

$$V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$$

$$V'(x) = 0$$

$$4(3x^2 - 16x + 16) = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 4.$$

Nga ana tjetër gjatësia e brinjës patjetërtë jetë pozitive, d.m.th., $8 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -8 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$

domethënë x mund të pranojë vlerë prej intervalit $(0, 4)$. Prej këtu zgjidhja e vetme është $x_1 = \frac{4}{3}$.

Kjo vlerë e vëllimit a është maksimale?

$$V''(x) = 24x - 64,$$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \cdot \frac{4}{3} - 64 = 32 - 64 = -32 < 0.$$

Mund të përfundojmë se për $x = \frac{4}{3}$, vëllimi është maksimal dhe vlera e tij është

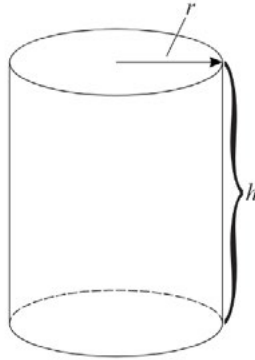
$$V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\frac{4}{3} = \frac{1024}{27} \approx 38.$$

Për gjatësinë e brinjës së bazës së kutisë kemi:

$$8 - 2x = 8 - 2\frac{4}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33.$$

Shembulli 5

Prodhues i kutive për deponim të ushqimit dëshiron të bëjë konserva në formë të cilindrit me vëllim 1000cm^3 . Do t'i gjejme dimensionet e cilindrit për të cilët çmimi i konservës në formë të cilindrit do të jetë më e vogël.

**Figura 20**

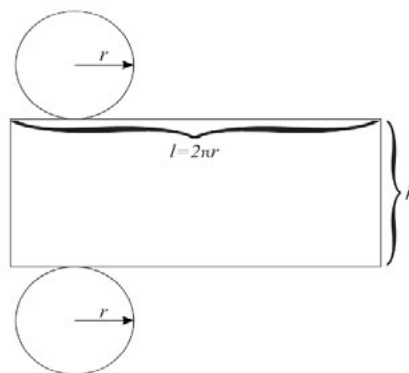
QI çmimi i konservës së jetë më e vogël, duhet të gjenden vlerat e rrezes dhe lartësisë për të cilat syprina e cilindrit do të jetë më e vogël. Le të jetë h lartësia e cilindrit dhe r është rrezja e cilindrit. Vëllimi i cilindrit është $V = \pi r^2 h$

Prej formulës së vëllimit do ta gjejme lidhjen ndërmjet r dhe h . Lartësia mund të shprehet nëpërmjet rrezes në këtë mënyrë:

$$\pi r^2 h = 1000,$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Syprina e cilindrit është shuma prej syprinës së bazave (πr^2) dhe syprinës së drejtkëndëshit ($2\pi r h$) (figura 21) :

**Figura 21**

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h,$$

$$P(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \frac{1000}{\pi r^2} = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Tani për syprinën është funksioni $S(r)$:

$$S(r) = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Duhet pasur kujdes, rrezja r të jetë më e madhe se zero ($r > 0$). Me gjetjen e derivatit të parë fitohet

$$S'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2}.$$

Për gjetjen e vlerës ekstreme, derivatin e parë e barazojmë me zero.

$$4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4r\pi = \frac{2000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,41 \text{ cm.}$$

Për të gjetur se për këtë vlerë syprina a është minimale patjetër ta gjejmë derivatin e dytë :

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}.$$

$$S''(5,41) = 4\pi + \frac{4000}{(5,41)^3} > 0.$$

Domethënë për $r \approx 5,41$, syprina e cilindrit është minimale. Për lartësinë kemi se është:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(5,41)^2} \approx 10,88 \text{ cm.}$$

Pra, vlera minimale e syprinës së cilindrit është

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi h \approx 553,58 \text{ cm}^2.$$

Shembulli 6

Te koni i drejtë me rreze të bazës 4 cm dhe lartësinë 6 cm është brendashkruar cilindri me vëllim maksimal. Do ta gjejmë vëllimin e cilindrit.

Le të jetë H lartësia e konit dhe R është rrezja e bazës së konit, derisa r dhe h janë rrezja dhe lartësia e cilindrit, përkatësisht. Vëllimi i cilindrit është $V = \pi r^2 h$. Është e nevojshme vëllimi të varet vetëm prej një ndryshore r ose h , përkatësisht të shprehet nëpërmjet r ose h .

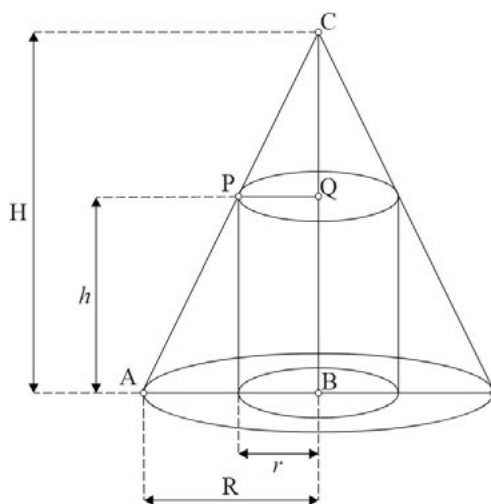


Figura 22

Le të jetë $\overline{AB} = R$, $\overline{PQ} = r$, ndërsa C është kulmi i konit. Prej figurës 22, mund të vërejmë se $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ dhe brinjët e tyre përkatëse janë proporcionale. Pra e kemi këtë proporcion:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{QC}}, \\ \frac{R}{r} &= \frac{H}{H-h}, \\ \frac{4}{r} &= \frac{6}{6-h}, \\ 6r &= 24 - 4h, \\ 4h &= 24 - 6r, \\ h &= 6 - \frac{3}{2}r.\end{aligned}$$

Tani te formula për vëllimin e cilindrit ta zëvendësojmë lartësinë:

$$\begin{aligned}V(r) &= \pi r^2 \left(6 - \frac{3}{2}r \right), \\ V(r) &= \pi \left(6r^2 - \frac{3}{2}r^3 \right).\end{aligned}$$

Me gjetjen e derivatit të parë kemi

$$V'(r) = \pi \left(12r - \frac{9}{2} r^2 \right).$$

Për gjetjen e vlerës ekstreme, derivatin e parë e barazojmë me zero:

$$\pi \left(12r - \frac{9}{2} r^2 \right) = 0,$$

$$12r - \frac{9}{2} r^2 = 0,$$

$$24r - 9r^2 = 0,$$

$$3r(8 - 3r) = 0.$$

Fitojmë se $r_1 = 0$ ose $r_2 = \frac{8}{3}$. Por nëse $r_1 = 0$ atëherë edhe $V = 0$ sipas kësaj nuk është vëllimi më i madh. Domethënë vlera ekstreme e vetme fitohet për $r_2 = \frac{8}{3}$. Për të shikuar se për këtë vlerë vëllimi a është maksimal e kërkojmë derivatin e dytë

$$V''(r) = 12\pi - 9r\pi = 3\pi(4 - 3r),$$

$$V''\left(\frac{8}{3}\right) = 3\pi \left(4 - 3 \cdot \frac{8}{3} \right) = -12\pi < 0.$$

Domethënë për $r = \frac{8}{3}$ cm, vëllimi i cilindrit është maksimal. Për lartësinë kemi se është:

$h = 6 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 2$ cm. Pra vlera maksimale e vëllimit të cilindrit është:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \frac{128\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

Shembulli 7

Prodhuksi i këmishave, cakton se për të shitur x këmisha të reja, çmimi i një këmishe duhet të shprehet nëpërmjet funksionit $p(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Prodhuksi gjithashtu cakton se shpenzimet për prodhim të x këmishave të reja janë dhënë me funksionin $C(x) = 20 + 1,5x$. Prodhuksi dëshiron ta gjen çmimin për një këmishë për të cilën do të ketë fitim maksimal.

Shpenzimi i përgjithshëm njehsohet me:

$C(x) = \text{Shpenzime fikse} + (\text{Shpenzime të ndryshueshme}) \cdot (\text{Numri i njësive të prodhuara})$

Të ardhurat e përgjithshme njehsohet me $R(x) = (\text{Numri i njësive}) \cdot (\text{Çmimi sipas njësisë})$

Përfitimi i përgjithshëm njihet me: $P(x) =$ Të ardhurat e përgjithshme – Shpenzimet e përgjithshme.

Për gjetjen e fitimit maksima, duhet së pari ta gjejmë derivatin e parë të funksionit të fitimit $P'(x)$, d.m.th., ta njehsojmë $P(x)$

Pikën stacionare do ta gjejmë me zgjidhjen e barazimit $P'(x) = 0$

Çmimi sipas njësisë $p(x)$ është dhënë me funksionin $p(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Shpenzimet e përgjithshme për prodhimin e x këmishave është dhënë me funksionin $C(x) = 20 + 1,5x$.

Profiti i përgjithshëm është $R(x) = x \cdot p = x \frac{16}{\sqrt{x}} = 16\sqrt{x}$

Funksioni i fitimit:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 16\sqrt{x} - (20 + 1.5x) \\ &= 16\sqrt{x} - 20 - 1.5x \\ &= 16\sqrt{x} - 1.5x - 20. \end{aligned}$$

Për gjetjen e fitimit maksimal e kërkojmë derivatin e parë të $P(x)$.

$$P'(x) = \frac{16}{2\sqrt{x}} - 1,5 = \frac{8}{\sqrt{x}} - 1,5$$

Për gjetjen e pikës stacionare:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{16}{2\sqrt{x}} - 1.5 = 0 \\ \frac{16}{2\sqrt{x}} &= 1.5 \\ 3\sqrt{x} &= 16 \\ \sqrt{x} &= \frac{16}{3} = 5.33 \\ x &= 5.33^2 = 28,44 \approx 28. \end{aligned}$$

Për të vërejtur se kjo vlerë a është maksimale e kërkojmë derivatin e dytë.

$$P''(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} - 1.5 \right)' = -\frac{4}{\sqrt{x^3}}.$$

Pasi $P'(x)$ është negative, fitimi do të jetë maksimal kur do të prodhohen 28 këmisha.

Fitimi maksimal është $P(28) = 16\sqrt{x} - 1.5x - 20 = 22,66$.

Domethënë, prodhuesi bënë fitim maksimal prej 22,66 njësi parash kur do të prodhon 28 këmisha.

Çmimi i një këmishe duhet të jetë $p(x) = \frac{16}{\sqrt{28}} = 3$ për të realizuar fitim maksimal.

Detyra për punë të pavarur

1. Numrin 15 ndaje në dy mbledhës, ashtu që prodhimi i tyre të jetë më i madh.
2. Numrin 180 ndaje në dy mbledhës ashtu që shuma e katrorit të mbledhësit të parë i shumëzuar me dy dhe katrorin e mbledhësit të dytë i shumëzuar me tre të jetë më i vogël.
3. Është dhënë trekëndëshi me brinjë 10 cm dhe lartësi 4 cm. Në trekëndësh është brendashkruar drejtkëndësh, ashtu që dy kulme të tij shtrihen te brinja e dhënë, ndërsa dy të tjerat te brinjët e tjera të trekëndëshit. Gjej brinjët e drejtkëndëshit, ashtu që syprina e drejtkëndëshit të jetë më e madhe.
4. Prej copës së kartonit në formë të drejtkëndëshit me brinjë 10 cm dhe 8 cm, prej çdo kulmi prehen nga një katzror, dhe në këtë mënyrë formohet kuti e hapur. Të gjenden dimensionet për të cilën kutia do të ketë vëllim më të madh.
5. Prej të gjithë trekëndëshave barakrahas me perimetër 15, gjej dimensionet e trekëndëshit i cili ka syprinë më të madhe.
6. Prodhuksi i kutive dëshiron të bëjë kuti në formë të paralelopipedit me vëllim 500cm^3 . Të gjenden dimensionet e paralelopipedit për të cilat çmimi i kutisë do të jetë më e vogël.
7. Te elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$ është brendashkruar trekëndësh barakrahas me syprinë më të madhe ashtu që baza e trekëndëshit është paralele me boshtin më të madh të elipsës, ndërsa një kulm i trekëndëshit është kulm i elipsës. Të gjendet syprina e trekëndëshit.
8. Rreth topit me rreze 6 cm është jashtashkruar me vëllim më të vogël. Të njehsohet syprina e konit.
9. Funkzioni i kërkesës së një prodhimi është $x = -\frac{1}{2}p + 100$, ku p është çmimi i prodhimit, ndërsa funksioni i shpenzimeve është $C(x) = x^2 + 20x + 147$. Të caktohet fitimi maksimal (përfitimi)? (Udhëzim: Funkzioni i të ardhurave është prodhim prej kërkesës dhe çmimit sipas prodhimit njësi)
10. Shpenzimet ditore të përgjithshme dhe të ardhurat ditore të përgjithshme të një qumështore janë dhënë me funksionet $C(x) = 30x + 1000$ dhe $R(x) = -\frac{1}{500}x^2 + 50x$, përkatësisht. Të caktohet prodhimi ditor për të cilën realizohet fitimi maksimal. Sa është fitimi maksimal?

14. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Cakto derivatin e funksionit:

a) $y = x - 4$ në pikën $x_0 = 5$,

b) $y = x^2 + 3$ në pikën $x_0 = 1$,

c) $y = (2x + 1)^2$ në pikën $x_0 = 2$,

ç) $y = \frac{x^2 + 3}{x}$ në pikën $x_0 = 1$.

2. Cakto derivatin e funksionit, me zbatimin e formulës përkatëse:

a) $y = 2x^4 + \frac{1}{x}$,

b) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$,

c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

ç) $y = \frac{1}{x^4} + 2x^3$.

3. Cakto derivatin e funksionit:

a) $y = 5x^2 - 4 \ln x$,

b) $y = \log_2 x + e^x + 3x^4$,

c) $y = 3^x + 5 \cdot e^x$,

ç) $y = \frac{x}{1 - x^2}$,

d) $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

dh) $y = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.

4. Cakto derivatin e funksionit:

a) $y = \ln x \cdot \cos x$,

b) $y = 2x^3 \ln x$,

c) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$,

ç) $y = \frac{\ln x}{x^3}$,

d) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$,

dh) $y = (2x + 1)e^x$,

e) $y = (x^2 + 3x - 4)e^x$,

f) $y = \frac{e^x}{x}$.

5. Cakto derivatin e funksionit të përbërë:

a) $y = (5x + 7)^{12}$,

b) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$,

c) $y = e^{x^3 - 2x}$

ç) $y = \ln x^5$,

d) $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$,

dh) $y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$,

e) $y = \ln \sqrt{\frac{2x}{1 - 2x}}$,

f) $y = (2x + 1)^2 e^{2x}$

g) $y = e^{\sqrt{x}} \ln 2x$,

h) $y = e^{x^2} x^3$.

6. Cakto derivatin e funksionit:

a) $y = e^{x^2 + 3x + 4}$,

b) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$,

$$c) y = x^{1-x^2}$$

$$ç) y = x^{\ln x}.$$

7. Cakto derivatin e dytë të funksionit:

$$a) y = (5x + 7)^{12},$$

$$b) y = \ln(x^2 + 2x),$$

$$c) y = 2x^2 - 3x^2 + 5,$$

$$ç) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

8. Cakto intervalet e monotonies dhe vlerat ekstreme të funksionit:

$$a) y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

$$b) y = \frac{x}{1-x},$$

$$c) y = (x-1)e^x,$$

$$ç) y = -x^2 + 6x - 7.$$

9. Cakto intervalet e konveksitetit dhe konkavitetit të lakores dhe cakto pikat e infleksionit:

$$a) y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

$$b) y = \frac{x}{1-x},$$

$$c) y = (x-1)e^x,$$

$$ç) y = -x^2 + 6x - 7.$$

10. Skico grafikun e funksionit:

$$a) y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad b) y = \frac{x^2}{2x-4}; \quad c) y = \frac{e^x}{x}; \quad ç) y = \ln(x^2 + 1).$$

Njësia modulare 2 – Njehsimi integral (për drejtimin ekonomik)

1. Integrali i pacaktuar

Detyra e njehsimit diferencial është të merret me gjetjen e derivative të funksionit të dhënë $y = f(x)$. Njehsimi integral zgjidh problem të kundërt të problemit për gjetjen e derivatit. Ai problem është në realitet caktimi i funksionit derivati i të cilit është i ditur. Pikërisht për këtë shkak, njehsimi integral kuptohet si operacion invers i njehsimit diferencial.

Përkufizimi 1: Le të jetë dhënë funksioni f të përkufizuar në intervalin (a, b) . Çdo funksion diferenciable f i përkufizuar në intervalin (a, b) ashtu që

$$f'(x) = f(x), x \in (a, b),$$

quhet **funksion primitiv** për funksionin f .

Shembulli 1 Për funksionin $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, funksioni primitiv është $F(x) = \frac{x^4}{4}, x \in \mathbb{R}$, pasi

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} \right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Por nëse e shqyrtojmë edhe funksionin $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5, x \in \mathbb{R}$, atëherë vlen

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 5 \right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Prej këtu vijon teorema:

Teorema 1: Le të jetë $F(x)$ është funksioni primitiv $F(x)$ në intervalin (a, b) . Atëherë edhe funksioni $F(x)+C$ ku $C \in \mathbb{R}$ është çfarëdo konstante, është gjithashtu funksion primitiv për funksionin $F(x)$.

Vërtetim: Gjykimi te teorema vijon prej pasi

$F(x)$ edhe $F(x)+C$ kanë derivate të parë të njëjtë i cili është i barabartë me funksionin $F(x)$.

$$(F(x) + C)' = (F(x))' = f(x).$$

■

Teorema 2: Le të jenë $F(x)$ dhe $G(x)$ funksione primitive të ndryshme të funksionit $F(x)$ në intervalin (a, b) . Atëherë për funksionin $G(x)$ vlen $G(x) = F(x) + C$ ku $C \in \mathbb{R}$

Vërtetim: Nëse $F(x)$ dhe $G(x)$ janë funksione primitive të ndryshme të funksionit $f(x)$ në intervalin (a, b) , atëherë vlen

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Le të jetë $H(x) = G(x) - F(x)$, prej ku vijon se

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Për $H'(x) = 0$ kemi se $H(x) = C$

pra sipas kësaj $C = G(x) - F(x)$, d.m.th., $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ ■

Operacioni për gjetjen e funksionit primitiv të funksionit të dhënë quhet **integrim**. Ky operacion është invers i diferencimit përkatësisht i gjetjes së derivatit të funksionit.

Por, te diferencimi vërejtëm se funksioni është njëvlerësisht i përcaktuar, që nuk është rast tek integrimi. Atë e vërejtëm te shembulli 1.

Prej teoremës 1 mund të përfundojmë se çdo funksion ka pafundësisht shumë funksione primitive.

Gjithashtu, prej teoremës 2 mund të përfundojmë se në vend të gjenden të gjitha funksionet primitive të funksionit të dhënë, mjafton të gjendet vetëm një, cilado prej tyre. Nëse gjendet vetëm një funksion primitiv, të gjitha të tjerat fitohen me shtuarjen e konstantes C .

Bashkësinë e të gjitha funksioneve primitive f , mund ta shënojmë si:

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Përkufizimi 2: Bashkësia prej të gjitha funksioneve primitive të funksionit të dhënë f quhet **integral i pacaktuar**.

Integrali i pacaktuar i funksionit f shënohet me:

$$\int f(x) dx$$

Sipas kësaj, mund të shkruajmë se $\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ ose vetëm shkurtimisht $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Te përkufizimi 2, $f(x)$ quhet **integrali** ose **funksioni nënintegral** por $f(x) dx$ quhet **shprehje nënintegrale**.

Konstanta C pra te $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ quhet **konstanta e integrimit**

Shembulli 2 Pasi $(a^x)' = a^x \ln a$, vijon se $\frac{a^x}{\ln a}$ është funksion primitiv i $a^x, a > 0, a \neq 1$. Pra

mund të shkruajmë se $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

1 Gjej funksionin primitiv të funksionit:

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = x^n$.

Vërejtëm se funksioni i dhënë mund të ketë pafund shumë funksione primitive. Por, jo çdo funksion ka primitive. Mund të theksojmë se çdo funksion i vijueshëm ka primitive.

Nëse për funksionin e dhënë f i përkufizuar në intervalin (a, b) ekziston funksion primitiv, atëherë themi se funksioni f është **integrabil** në intervalin (a, b) .

Pjesa e matematikës e cila merret me caktimin e funksionit primitiv, d.m.th., me njehsimin e integraleve, si edhe zbatimi i tyre quhet **njehsimi integral**.

Nëse dëshirojmë gjeometrikisht ta sqarojmë konceptin e integralit të pacaktuar, atëherë pasi e përkufizuar si bashkësi prej funksioneve primitive, lirisht mund të themi se integrali i pacaktuar paraqet bashkësi prej lakoreve në rrafsh, të cilat janë grafikët e funksioneve primitive dhe quhen **lakore integrale**.

Për ta gjetur lakoren integrale e cila kalon nëpër pikën e dhënë $A(x_0, y_0)$, atëherë me zëvendësim të koordinatave të pikës në $y = f(x) + C$, do ta fitojmë konstantën e integrimit, d.m.th.

$$y_0 = F(x_0) + C, \text{ prej ku } C = y_0 - F(x_0).$$

Atëherë lakorja integrale e kërkuar e cila kalon nëpër pikën $A(x_0, y_0)$ e ka barazimin $y = f(x) + y_0 - F(x_0)$.

Do t'i shqyrtojmë këto shembuj:

Shembulli 3 Do të tregojmë se është funksion $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ primitiv funksioni $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Nëse njehsojmë derivatin prej funksionit, do të fitojmë:

$$(F(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Shembulli 4 Do ta caktojmë atë funksion primitiv f të $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ grafiku i të cilës kalon nëpër pikën $A(1, 2)$.

Funksioni primitiv i funksionit $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ është $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, pasi

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Me zëvendësimin e koordinatave të pikës në $A(1, 2)$, kemi $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$

$$F(1) = \frac{1^4}{4} + 2\sqrt{1} = \frac{9}{4}$$

Domethënë lakorja integrale e kërkuar e cila kalon nëpër pikën $A(1, 2)$ e ka barazimin, $y = f(x) + y_0 - F(x_0)$ d.m.th., $y = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}$.

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto nga një funksion primitiv për funksionin:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0; \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Trego se $F(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|$ është funksion primitiv i funksionit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

3. Kontrolllo a është e saktë:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2 \ln^2 x} + C; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx.$$

4. Cakto atë funksion primitiv f i f grafiku i të cilës kalon nëpër pikën $A(0,2)$, nëse

$$\text{a) } f(x) = 3x^2; \quad \text{b) } f(x) = e^x.$$

2. Vetitë themelore të integralit të pacaktuar dhe tabela e integraleve themelore

Prej përkufizimit të integralit të pacaktuar vijojnë këto veti:

Teorema 1: Nëse funksioni f është integrabile në intervalin (a, b) , atëherë vlen:

1. Derivati i integralit të pacaktuar është i barabartë me funksionin nënintegral, d.m.th., nëse

$$\int f(x) dx = f(x) + C \text{ atëherë } C \in \mathbb{R} \\ (\int f(x) dx)' = f(x), x \in (a, b).$$

2. Diferenciali i integralit të pacaktuar është i barabartë me shprehjen nënintegral, d.m.th., nëse $\int f(x) dx = f(x) + C$, atëherë $C \in \mathbb{R}$

$$d(\int f(x) dx) = f(x) dx, x \in (a, b).$$

3. Integrali i pacaktuar prej diferencialit të funksionit primitiv $f(x)$ është i barabartë me $f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, d.m.th., vlen:

$$\int df(x) = \int f'(x) dx = \int f(x) dx = f(x) + C, x \in (a, b).$$

Vërtetim: 1. Funksioni f le të jetë funksion primitiv i funksionit në intervalin (a, b) , përkatësisht

$$\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Atëherë kemi: $(\int f(x) dx)' = (f(x) + c)' = f'(x) = f(x)$

2. Funkzioni f le të jetë funksion primitiv i funksionit f në intervalin (a, b) , përkatësisht $\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Atëherë kemi: $d(\int f(x) dx) = d(f(x) + c) = f'(x) dx = f(x) dx, x \in (a, b)$

3. Funksionit f le të jetë funksion primitiv i funksionit f në intervalin (a, b) , përkatësisht $\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Atëherë kemi: $\int df(x) = \int f'(x) dx = \int f(x) dx = f(x) + C, x \in (a, b)$ ■

Teorema 1 tregon se diferencimi dhe integrimi janë operacione inverse.

Gjatë njehsimit të integralit të pacaktuar, vlejné vetitë e dhëna në këtë teoremë:

Teorema 2:

1. Nëse funksionet f dhe g janë integrabile në intervalin (a, b) , atëherë shuma e tyre $(f + g)$ dhe ndryshimi i tyre $f - g$ janë funksione integrabile në intervalin (a, b) dhe vlen $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, x \in (a, b)$.
2. Nëse funksioni f është integrabile në intervalin (a, b) dhe nëse $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atëherë edhe funksioni $k \cdot f$ është integrabile dhe vlen

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx, x \in (a, b).$$

Vërtetim: 1. Te njehsimi diferencial vlen se: $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$. Nëse këtë barazim e integrojmë nga të dy anët, fitojmë:

$$\int d(f(x) \pm g(x)) = \int (df(x) \pm dg(x)).$$

Me shfrytëzimin e 3. Prej teoremës 1, kemi:

$$\int (df(x) \pm dg(x)) = \int d(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x) = \int df(x) \pm \int dg(x)..$$

2. Pasi vlen: $d(\int k \cdot f(x) dx) = kd(\int f(x) dx)$, ndërsa duke e shfrytëzuar 2. Prej teoremës 1, kemi: $d(\int k \cdot f(x) dx) = k \int f(x) dx$. ■

Vetitë të vërtetuara te teorema 2 janë të njohura si **veti themelore për integrim**.

Në bazë të përkufizimit të integralit të pacaktuar dhe tabelës së derivateve themelore, mund ta shkruajmë **tabelën e integraleve themelore**.

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	

Me shfrytëzimin e vetive themelore të integralit të pacaktuar dhe tabela e integraleve themelore, do të zgjidhim disa shembuj:

Shembulli 1 T'i zgjidhim këto integrale të pacaktuara:

$$a) \int x^6 dx; \quad b) \int (x^2 + 3x - 1) dx; \quad c) \int x^3 \sqrt{x} dx; \quad \text{ç)} \int (2^x + 5^x)^2 dx.$$

a) Me shfrytëzimin e tabelës me integrale themelore, d.m.th., integrali i dytë themelor, kemi:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

b) Me shfrytëzimin e tabelës me integrale themelore dhe rregulla për integrim të shumës dhe ndryshimit të funksioneve, kemi:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + 3 \frac{x^2}{2} + 3C_2 - x - C_3 = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + (C_1 + 3C_2 - C_3) = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

c) Së pari do të bëjmë transformimin e funksionit nënintegral, ndërsa pastaj do ta shfrytëzojmë integralin tabelar të dytë

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C.$$

ç) Nëse e përshkruajmë ndryshe funksionin nën integral, do të fitojmë:

$$\begin{aligned}\int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C\end{aligned}$$

Për shkak të shënuarit e thjeshtë, nuk do të shkruajmë më shumë konstante te rezultati, ndërsa drejtpërdrejt në fund do të shkruajmë vetëm një konstante.

1 Zgjidhi integralet e pacaktuara:

a) $\int (1 + 2x + 4x^2) dx$; b) $\int (1 - 3x) \cdot (x^2 + 1) dx$; c) $\int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x - 4}{x} \right) dx$.

Shembulli 2 Do t'i zgjidhim këto integrale të pacaktuara:

a) $\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$; b) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$; c) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.

Me shfrytëzimin e tabelës së integraleve themelore, si edhe të rregullave për integrim, do të kemi:

a)

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{x^3} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx = \\ &= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C.\end{aligned}$$

Zgjidhi integralet e pacaktuara:

$$\text{a) } \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad \text{b) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e pacaktuara:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^x) dx; & \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx; & \quad \text{c) } \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx; \\ \text{ç) } \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx; & \quad \text{d) } \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right) dx; & \quad \text{dh) } \int (2+x^2)^3 dx. \end{aligned}$$

3. Metoda e zëvendësimit

Për zgjidhjen e integralit të pacaktuar është e domosdoshme të zbatohen metoda të caktuara (teknika të integritimit). Integralet më të thjeshta zgjidhen nëpërmjet zbatimit të tabelës dhe vetive themelore, të cilat tani më i shqyrtoam, ndërsa ai integrim është i pamundshëm të zbatohet në të gjitha rastet. Njëra prej metodave themelore të cilat shfrytëzohen për zgjidhjen e integraleve të pacaktuara më të përbërë është metoda e zëvendësimit të ndryshores ose metoda e substituimit. Kjo metodë është për zëvendësimin e ndryshores x me ndryshore të re t , e cila do ta thjeshtësojë integralin fillestar duke vijuar tek integrali tabelar

Metoda e zëvendësimit është dhënë me këtë teoremë:

Teorema 1: Le të jetë f funksion integrabil në intervalin (a, b) dhe le të jetë φ dhe le të jetë funksion diferenciable në intervalin (α, β) e pasqyron në interval (a, b) . Atëherë vlen

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \text{për } x = \varphi(t)$$

Vërtetim: Funkzioni f është funksion primitiv i funksionit f . Atëherë sipas përkufizimit do të vlen $\int f(x) dx = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$. Do të përkufizojmë funksion $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$

Nëse e diferencojmë funksionin Φ do të fitojmë $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$

Prej këtu fitojmë se funksioni Φ është funksion primitiv i funksionit $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Kjo do të thotë se prej përkufizimit të integralit të pacaktuar do të kemi:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Nëse marrim parasysh se $x = \varphi(t)$, atëherë;

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = f(x) + C.$$

Me shfrytëzimin e metodës së zëvendësimit, pjesë prej funksionit nënintegral zëvendësohet me ndryshore të re. Patjetër të theksojmë se nuk ekziston rregull sipas të cilës do të bëhet zëvendësimi $x = \varphi(t)$. Gjithashtu, diferenciali i funksionit të vjetër patjetër të shprehet nëpërmjet diferencialit të ndryshores së re. Qëllimi është të fitohen një ose më shumë integrale tabelare të cilët lehtë zgjidhen. Pas zgjidhjes së integralit, është e nevojshme të kthehemi te ndryshorja fillestare, duke shfrytëzuar zëvendësimin.

Do ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 1 T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int (5-2x)^4 dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{(x-2)^3}; \quad \text{c) } \int \frac{e^x}{x^2} dx; \quad \text{ç) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

a) Për zgjidhjen e këtij integrali mund ta shfrytëzojmë formulën e binomit dh eta shkruajmë funksionin $(5-2x)^4$ nënintegral në formën e zbërthyer. Por, kjo mënyrë merr më shumë kohë. Për këtë shkak do ta shfrytëzojmë metodën e zëvendësimit.

Fusim zëvendësim $t = 5 - 2x$, prej ku $dt = -2dx$ ose e shprehim diferencialin e funksionit me diferencialin e ndryshores së re do të kemi $dx = -\frac{dt}{2}$

$$\text{Prej këtu, } \int (5-2x)^4 dx = \int t^4 \left(\frac{-dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{(5-2x)^5}{10} + C$$

b) Krejtësisht në mënyrë të ngjashme integral i pacaktuar nën a) e shfrytëzojmë zëvendësimin $t = x - 2, dt = dx$

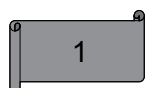
$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

c) Te ky shembull në mënyrë të ngjashme të shembujve paraparak, e shfrytëzojmë zëvendësimin

$$\frac{1}{x} = t, -\frac{1}{x^2} dx = dt, \text{ prej ku kemi } \int \frac{e^x}{x^2} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

ç) Me shfrytëzimin e zëvendësimit $\ln(x) = t$, prej ku $\frac{1}{x} dx = dt$, kemi

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$



Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{5x+4}; \quad \text{b) } \int \sqrt[5]{(4-7x)^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx.$$

Shembulli 2

T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{\frac{x}{e^2} dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$$

a) Gjatë zgjidhjes së integralit e shfrytëzojmë zëvendësimin $\ln \frac{1+x}{1-x} = t$, prej ku $\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} dt$, ku kemi:

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

b) Për zgjidhjen e këtij integrali do të shfrytëzojmë dy zëvendësime:

– me zëvendësimin e parë integrali transformohet në:

$$e^{\frac{x}{2}} = t, \quad \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = dt, \quad dx = \frac{2}{t} dt, \quad e^x = \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = t^2$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t(t+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \\
&= 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \left(\frac{1+t}{t^2(1+t)} - \frac{t}{t^2(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t-t}{t(1+t)} \right) dt = \\
&= 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t}{t(1+t)} + \frac{t}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int \frac{1}{(1+t)} dt = (*),
\end{aligned}$$

më tej me shfrytëzimin e zëvendësimit $s = t + 1$, $ds = dt$ për integral $\int \frac{1}{(1+t)} dt$, kemi

$$(*) = 2 \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \ln|t| + \ln|s| \right) + C = (**),$$

prej ku duke u kthyer prapa me futjen e zëvendësimit, kemi:

$$(**) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - \ln \left| e^{\frac{x}{2}} \right| + \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C = -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C.$$

Vërejtje: Ndonjëherë është e nevojshme disa here të futet zëvendësim me ndryshore të re, që integrali silltet në tabelar.

Shembulli 3

Ta zgjidhim integralin e pacaktuar $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$.

Së pari e shfrytëzojmë zëvendësimin $\ln(x) = t$, prej ku $\frac{1}{x} dx = dt$, ndërsa pastaj edhe njëherë fusim

zëvendësim $\ln(t) = u$, prej ku $\frac{1}{t} dt = du$

Me këtë për integralin kemi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln|t|| + C = \\
&= \ln|\ln|\ln|x||| + C.
\end{aligned}$$

Shembulli 4

Shpenzimet kufitare për prodhimin e një prodhimi janë dhënë me funksionin

$C_g(Q) = \frac{e^Q}{e^Q + 3}$, ku Q është niveli i prodhimit. Nëse kompania prodhon 2 njësi, shpenzimet e përgjithshme janë 2 njësi para. Do t'i caktojmë shpenzimet e përgjithshme dhe fikse.

Domethënë, për t'i caktuar shpenzimet e përgjithshme prej shpenzimeve kufitare, do të kemi:

$$C_g(x) = C'(x).$$

Integralin do ta zgjidhim me shfrytëzimin e metodës së zëvendësimit:

$$C(Q) = \int C_g(Q) dQ = \int C_g(Q) dQ = \int \frac{e^Q}{e^Q + 3} dQ.$$

$$t = e^Q + 3 \Leftrightarrow dt = e^Q dQ \Leftrightarrow dQ = \frac{dt}{e^Q}, \text{ prej ku}$$

$$C(Q) = \int C_g(Q) dQ = \int C_g(Q) dQ = \int \frac{e^Q}{e^Q + 3} dQ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^Q + 3| + C.$$

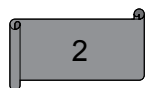
Prej kësaj kur kompania prodhon 2 njësi, shpenzimet e përgjithshme janë 2 njësi para, do ta caktojmë vlerën e konstantes C .

$$C(2) = 2 \text{ d.m.th.}, 2 = \ln|e^2 + 3| + C \Rightarrow C = 2 - \ln|e^2 + 3| \approx -0.341.$$

Domethënë funksioni i shpenzimeve të përgjithshme është dhënë me:

$$C(Q) = \ln|e^Q + 3| - 0.341.$$

Shpenzimet fikse janë shpenzimet të cilat kompania i ka në fillim dhe nuk janë të lidhura me nivelin e prodhimit: $C(0) = \ln|e^0 + 3| - 0.341 \approx 1.046$.



Funksioni i të ardhurave kufitare është dhënë me $R_g(p) = e^{2p+1}$, ku p është çmimi i një prodhimi. Cakto funksionin e të ardhurave të përgjithshme.

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int x(x^2 - 13)^{23} dx; \quad \text{b) } \int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x - 9)^7 dx; \quad \text{c) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 3x - 10}.$$

2. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int (x^2 - 3)\sqrt[5]{x^3 - 9x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}; \quad \text{c) } \int \frac{x^2}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

3. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx; \quad \text{c) } \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

4. Shpenzimet kufitare për prodhim të një prodhimi janë dhënë me funksionin

$$C_s(Q) = \frac{e^Q}{e^Q + 2}, \text{ ku } Q \text{ është niveli i prodhimit. Nëse kompania prodhon 4 njësi,}$$

shpenzimet e përgjithshme janë 3 para njësi. Cakto shpenzimet e përgjithshme dhe fikse.

4. Metoda e integrimit parcial

Metoda e zëvendësimit të ndryshores nuk është e mjaftueshme që të njehsohen integralet e pacaktuar në klasën e gjerë të funksioneve. Shpesh funksioni nënintegral është shkruar në formë të prodhimit të funksionit dhe diferencialit të funksionit tjetër, por poashtu nuk mund të futet zëvendësim të ndryshores për të sjellë integralin në tabelar.

Për këtë shkak i qasemi metodës tjetër për zgjidhjen e integralit të pacaktuar, ndërsa ajo është **metoda e integrimit parcial** ose metoda e **integrimit sipas pjesëve**.

Formula për integrimin parcial është dhënë në këtë teoremë:

Teorema 1: Nëse funksionet $u(x)$ dhe $v(x)$ janë funksione diferenciable në intervalin (a, b) , atëherë vlen formula për integrim parcial,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Vërtetim: Le të jetë $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funksion primitiv i funksionit $u(x)v'(x)$ në intervalin (a, b) . Prej përkufizimit të funksionit primitiv vijon se funksioni f është i vijueshëm dhe për këtë vlen $F'(x) = u(x)v'(x)$, $x \in (a, b) \setminus A$, $A \subset (a, b)$ është bashkësi diskrete. Për shkak të diferencibilitetit të funksioneve $u(x)$ dhe $v(x)$ vijon se edhe funksioni është i vijueshëm në intervalin (a, b) .

Prej këtu vijon se edhe funksioni $G(x) = u(x)v(x) - f(x)$ është i vijueshëm në intervali (a, b) . Nëse e diferencojmë, kemi:

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u'(x)v(x).$$

Vijon se funksioni $G(x)$ është funksion primitiv i funksionit $u'(x)v(x)$ në intervalin (a, b) dhe poashtu vlen:

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Prej këtu fitohet formula: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$.

Formulën për integrim parcial mund ta shkruajmë edhe në formën:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Zgjedhja për funksionet $u(x)$ dhe $v(x)$ nuk kryhet sipas rregullave të caktuara, ndërsa në mënyrë intuitive

Nëse zgjedhja për funksionet $u(x)$ dhe $v(x)$ është e gabuar, në vend që ta thjeshtësojë integralin, do ta bën më të ndërlikuar për zgjidhje në lidhje me fillestarin.

Shembulli 1 T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int xe^{-x} dx; \quad \text{b) } \int \ln x dx.$$

a) Për zgjidhjen e integralit do të shfrytëzojmë integrimin parcial në këtë mënyrë.

Se si u do ta zgjedhim $u = x$. Me njehsim të derivatit të parë, d.m.th., diferencim kemi $du = dx$.

Mbetja prej shprehjes nënintegral është dv , domethënë $dv = e^{-x} dx$. Prej këtu me integrim kemi $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$

Me zëvendësim të formula për integrim parcial do të kemi:

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

b) Për zgjidhjen e integralit do të shfrytëzojmë integrim parcial në këtë mënyrë: Se si do ta zgjedhim

$u = \ln(x)$. Me njehsim të derivatit të parë, d.m.th., diferencim kemi $du = \frac{1}{x} dx$. Mbetja prej shprehjes nënintegral është dv , domethënë $dv = dx$. Prej këtu me integrim kemi $v = \int dx = x$

Me zëvendësimin të formula për integrim parcial do të kemi:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

1. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x^2 e^x dx$; b) $\int x^2 \ln x dx$; c) $\int \frac{x}{e^x} dx$.

Shembulli 2

T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

a) $\int e^{x+\ln x} dx$; b) $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx$.

Edhe të dy integralet do t'i zgjidhim me metodën e integrimit parcial:

a) Nëse $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$, me zëvendësim të formula për integrim parcial kemi:

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

b) Nëse tek integrali fillestar së pari e shfrytëzojmë metodën e zëvendësimit. Me zëvendësim $x + 1 = t$, $dx = dt$, kemi: $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx = \int ((t-1)^2 + t-1) \ln(t) dt = \int (t^2 - t) \ln(t) dt$.

Më tej me shfrytëzimin e metodës së integrimit parcial, për $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$,

$$dv = (t^2 - t) dt \Rightarrow v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}, \text{ kemi}$$

$$\begin{aligned} \int (t^2 - t) \ln t dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt + \frac{1}{2} \int t dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{9} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2(x+1) - 3)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2x-1)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + C. \end{aligned}$$

2

Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x \ln(x^2 - 1) dx$; b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x^2 e^{-x} dx$; b) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x \ln^2 x dx$; b) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

3. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int \frac{x}{e^x} dx$; b) $\int x^2 \ln x dx$.

4. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int \ln x dx$; b) $\int x \ln(x-1) dx$.

5. Koncepti për integral të caktuar

Koncepti integral i caktuar është koncept fundamental në matematikë dhe shkencat e tjera teknike. Së pari të vërejmë cili problem dhe cila ide ka sjellë deri te koncepti integral. Duhet të theksojmë se metoda për njehsimin e integralit ekziston shumë para metodave për njehsimin diferencial. Dihet se matematikani antik Arkimedi në shekullin III p.e.r. e ka shfrytëzuar metodën për njehsimin e integraleve. Ai e ka pasur të ditur se parabola e ndan sipërfaqen e drejtkëndëshit kulmet e të cilit janë ta parabola ndërsa dy të tjerët shtrihen te boshti x , në dy sipërfaqe që qëndrojnë 2 : 1. Thelbësore deri te koncepti i integralit, ka ndikuar problem për caktimin e syprinës së trapezit të lakuar. Së pari do ta paraqesim idenë, përkatësisht metodën deri tek e cila kanë ardhur pavarësisht njëri nga tjetri matematikani i madh gjerman Lajbnic dhe matematikani anglez Njutoni të cilët kanë jetuar në gjysmën e dytë të shekullit XVII dhe gjysmës së parë të shekullit XVIII. Përkufizimi të cilin do ta japim e ka dhënë matematikani gjerman Riman në shekullin XIX, ndërsa shenjën të cilën do ta shfrytëzojmë e ka futur matematikani francez Furie në shekullin.

Me trapez të lakuar e nënkuptojmë pjesën prej rrafshit i cili gjendet ndërmjet boshtit x , grafiku i dhënë i funksionit jonegativ $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ dhe drejtëzave $x = a$ dhe $x = b$ dhe të cilat janë paralele me boshtin y . Detyra jonë është ta caktojmë syprinën e trapezit të lakuar (figura 1). Ideja është ta ndajmë intervalin $[a, b]$ në shumë nënintervale, me të cilën sipërfaqen e trapezit të lakuar do ta ndajmë në drejtkëndësha, me të cilët përafërsisht do ta njehsojmë syprinën e trapezit të lakuar.

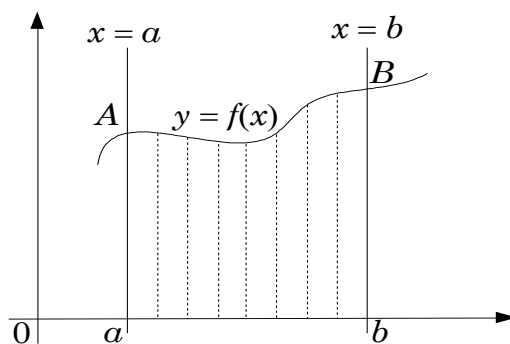


Figura 1

Përkufizimi 1: Me ndarje të segmentit nënkuptojmë bashkësi të fundshme prej pikave

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, ashtu që:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Domethënë këtë segment e ndajmë në numër të fundshëm të segmenteve. T'i shqyrtojmë pikat

$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = b$, (figura 2)

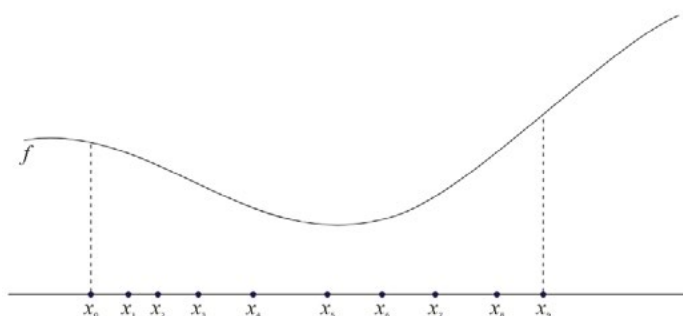


Figura 2

Me $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ e shënojmë gjatësinë e segmentit i . Domethënë këto janë gjatësitë e të gjithë segmenteve. Edhe e fusim konceptin diametër të ndarjes që është e barabartë, e mdonjë segment

$$d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_{x_i}$$

Vijimisht. Do të tregojmë se një ndarje e segmentit P_1 është më e mire P_2 nëse vlen $P_2 \subset P_1$ d.m.th., ndarja përmban numër më të madh të pikave, nga ndarja P_2 . Kjo do të thotë se fusim edhe ndonjë pikë për shembull ajo le të jetë pika x_4 ndërmjet pikave x_3 dhe x_4 atëherë ndarja e re do të jetë më e mire nga ndarja paraprake. (figura 3)

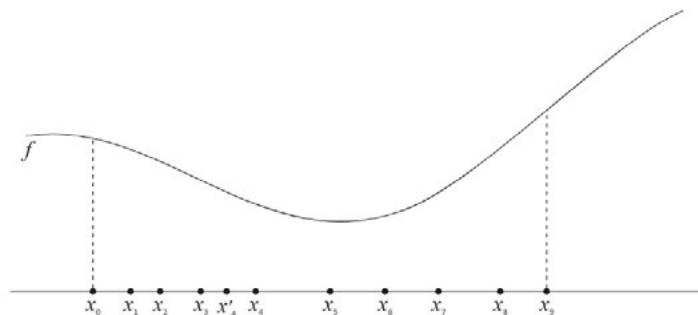


Figura 3

Domethënë është më e mire deri sa përmban më shumë pika prej ndonjë ndarje tjetër. Tani në çdonjërin ndarje të katër segmenteve do të zgjedhim nga një pikë: $\zeta_i \in (x_i, x_{i+1})$. Te shembulli ynë ato janë pikat $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_9$ (figura 4). Në këto pika do ta njehsojmë vlerën e funksionit $y = f(\zeta_i)$. Pasi funksioni f është i vijueshëm në çdo pikë të intervalit $[a, b]$, ekziston $f(\zeta_i)$. Domethënë $y_1 = f(\zeta_1), \dots, y_9 = f(\zeta_9)$ do t'i shënojmë këto vlera të grafikut të funksionit (figura 4).

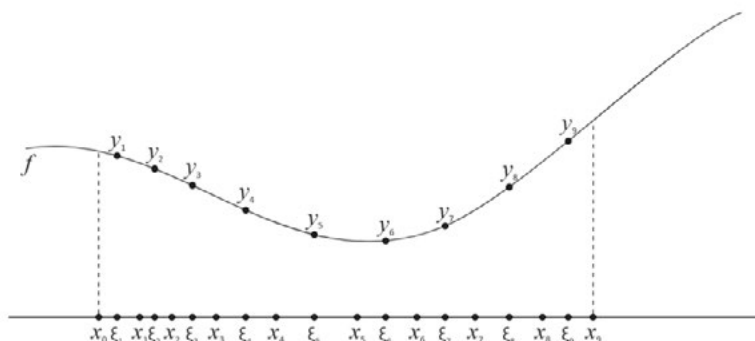


Figura 4

Tani për çdo segment do të konstruktojmë drejtkëndësh me brinjë Δx_i dhe $f(\zeta_i)$. Te Shembulli jonë do të konstruktojmë nëntë drejtkëndësha të këtillë (figura 5).

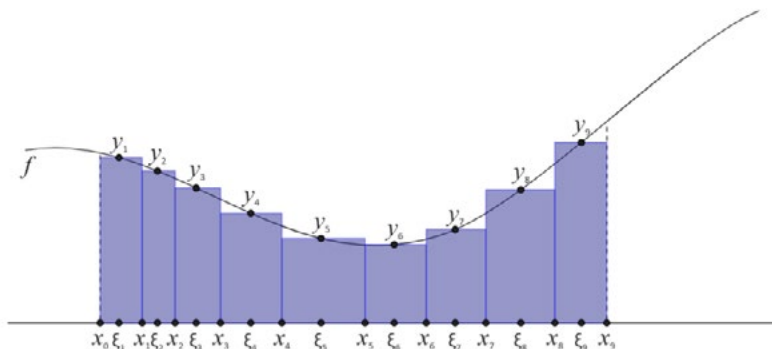


Figura 5

Kemi se gjatësia e drejtkëndëshit është e barabartë me gjatësinë e segmentit përkatës, ndërsa gjerësia e drejtkëndëshit është e barabartë me vlerën e funksionit në pikat ξ_i . Drejtkëndëshat t'i shënojmë me Π_i . Është e qartë se syprina e çdo drejtkëndëshi do të jetë e barabartë me:

$$P(\Pi_i) = f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

Shuma e syprinave e të gjitha këtyre drejtkëndëshave mund të shkruhet në këtë mënyrë:

$$P(S) = f(\xi_1) \Delta_{x_1} + f(\xi_2) \Delta_{x_2} + \dots + f(\xi_9) \Delta_{x_9}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^9 f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

Është e qartë se kjo syprinë varet prej zgjedhjes së pikave ξ_i . Nëse zhvendosim ndonjërin prej pikave ξ_i atëherë do të ndryshojë edhe syprina e drejtkëndëshit përkatës. Por atë që duhet ta vërtetojmë është se syprina e këtij trapeze të lakuar është përafërsisht i barabartë me shumën e syprinave të drejtkëndëshave.

Të vërejmë çka do të ndodhë nëse tani e shtojmë pikën x'_4 dhe në intervalin prej x_3 deri te x_4 zgjedhim pika ξ'_4 në këtë pikë do ta caktojmë edhe vlerën e funksionit y'_4 . Tani për segmentin x_3 prej deri te x'_4 do të konstruktojmë drejtkëndësh. Në vend të drejtkëndëshit të segmenti x_3 prej deri te x_4 do të kemi dy drejtkëndësha prej x_3 deri te x'_4 dhe prej x'_4 deri te x_4 (figura 6)

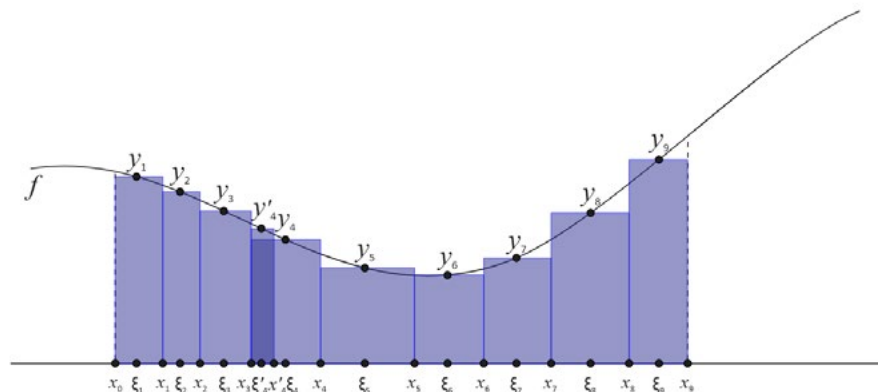


Figura 6

Të vërejmë çka mund të përfundohet nëse te ndarja ekzistuese fusim edhe një pikë. Së pari mund të vërejmë se shuma e syprinave e të gjithë drejtkëndëshave ka vlerë më të përafërt (më të saktë) me vlerën e syprinës së trapezit të lakuar. Tjetër çka mund të përfundohet është se diametri i ndarjes së re (ndarje më e mirë) është më e vogël ose e barabartë me diametrin e ndarjes paraprake. Me fjalë të tjera sa më shumë pika fusim te ndarja gjatësia maksimale e segmenteve është aq më e vogël dhe e vogël, ndërsa syprina e të gjithë drejtkëndëshave është më afër deri te syprina e trapezit të lakuar.

Në mënyrë intuitive tani është e qartë, se sado që diametrik i ndarjes është më i vogël, d.m.th., nëse diametrik i ndarjes tenton kah zero atëherë shuma e syprinave të këtyre drejtkëndëshave do të afrohet në mënyrë arbitrare afër deri te syprina e trapezit të lakuar. Kjo na çon deri te përkufizimi.

Përkufizimi 2: Le të jetë funksioni i dhënë $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, le të jetë P është çfarëdo ndarje e segmentit $[a, b]$ dhe le të jenë ξ_i çfarëdo pika të zgjedhura, nga njëra prej çdo nënsegmenti.

$$\text{Shuma } \sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i}$$

quhet **shuma e integralit të Rimanit** për funksionin f për ndarjen e dhënë P dhe zgjedhja e pikave ξ_i .

Përkufizimi 3: Funksioni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ është integrabile në kuptimin e Rimanit, në segmentin $[a, b]$ nëse ekziston numër real ashtu që të vlen:

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i} = I$$

përkatësisht nëse vlen:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P)(\forall \xi_i)(d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f) - I| < \varepsilon)$$

Numrin I e shënojmë me

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

dhe paraqet **integral i caktuar** prej funksionit $f(x)$ prej kufirit a deri te kufiri b .

Kufirin a e quajmë **kufiri i poshtëm i integralit**, derisa b **kufiri i lartë i integralit**. Funksioni $f(x)$ quhet **funksioni nënintegral**, derisa dx është diferencial i të panjohurës x , përkatësisht e paraqet gjatësinë e nënsegmenteve të ndarja P .

Integrali i caktuar në realitet shërben për njehsimin e syprinës së trapezit të lakuar, ndërsa ka edhe zbatime të tjera në teknikë dhe inxhinieri. Është shumë e rëndësishme të dimë se integrali në realitet është shuma prej shumë mbledhësve të pafundshëm. Prej këtui edhe shënimi për integral është “i zgjatur S” që në realitet paraqet shumë. Të përfundojmë, integrali i caktuar është vlera kufitare e shumës prej shumë mbledhësve të pafundshëm.

Në vazhdim do të përmendim teoremë pa e vërtetuar, e cila është vetia e funksioneve integrale dhe integraleve të caktuar:

Teorema 1: Funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione integrale në intervalin $[a, b]$ dhe le të jetë $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atëherë funksioni $\alpha f(x) + \beta g(x)$ është integaribil në intervalin $[a, b]$ dhe vlejnjë këto veti:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teorema e fundit vërtetohet thjesht me zbatimin direkt të përkufizimit për integral të caktuar.

Shembulli 1 Ta njehsojmë integralin $\int_0^1 dx$

Funksioni $f(x) = 1$ është i vijueshëm në intervalin $[0, 1]$, prej ku vijon se $\int_0^1 dx$ ekziston. Për të njehsuar integralin mund ta zgjedhim këtë ndarje $P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Gjatësia e çdonjërit prej segmenteve, për shembull është $\frac{1}{n}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Pikat ξ_i i zgjedhim të jenë të barabarta me vlerën

e kufirit të djathtë të segmenteve, për shembull për segmentin i zgjedhim $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ Për shumatat përkatëse $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$ kemi:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Pasi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = 1$, mund të përfundojmë se $\int_0^1 dx = 1$.

Shembulli 3

Ta njehsojmë integralin $\int_0^1 x dx$.

Funksioni $f(x) = x$ është i vijueshëm në intervalin $[0, 1]$, prej ku vijon $\int_0^1 x dx$ se ekziston.

Për ta njehsuar integralin mund të zgjedhim këtë ndarje:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Gjatësia e çdo segmenti prej segmenteve është $\frac{1}{n}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Pikat

$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ i zgjedhim të jenë të barabarta me vlerë të kufirit të djathtë të segmenteve, për shembull

për segmentin i zgjedhim $\xi_i = \frac{i+1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Për shumën përkatëse kemi:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Pasi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$

Prej ku mund të përfundojmë se $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Njehsimi i integralit të caktuar sipas përkufizimit mund të jetë më i komplikuar.

Te mësimi i ardhshëm do të jepet formula e Njuton-Lajbnic-it që e lehtëson njehsimin e integralit të caktuar.

6. Teorema themelore e njehsimit integral

Këtu do ta shqyrtojmë teoremën themelore të njehsimit integral të njohur edhe si **formula e Njuton-Lajbnic-it**, do t'i shqyrtojmë edhe vetitë e integralit të caktuar.

Kur e përkufizuar integralin e caktuar supozuam se është dhënë funksioni $f(x)$ që është i vijueshëm dhe jonegativ në intervalin $[a, b]$. Gjithashtu treguam se me integral të caktuar e kuptojmë syprinën e trapezit të lakuar, e cila është caktuar me grafikun e funksionit $f(x)$ boshti x dhe drejtëzat a dhe b (figura 7).

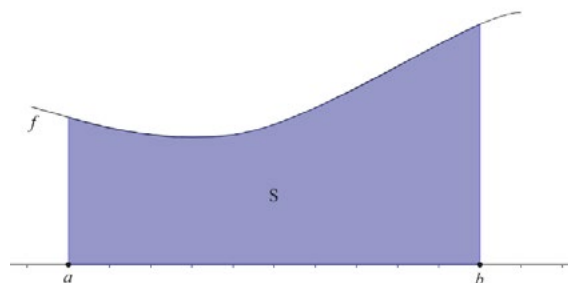


Figura 7

Sipas përkufizimit, integrali paraqet shumë prej më tepër syprinave të vogla të pafundshme të drejtkëndëshave:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Për $x \in [a, b]$ le ta përkufizojmë funksionin $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Për këtë funksion vlen se është i vijueshëm në intervalin $[a, b]$ dhe është funksion primitiv $f(x)$ i funksionit në intervalin $[a, b]$. Kjo

do të thotë se funksioni mund të jetë përkufizuar edhe si $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$, ku konstanta C është e çfarëdoshme.

Barazimi i fundit do të thotë se integrali i caktuar prej a deri te x funksioni $f(t)$ (ky funksion është i njëjtë $f(x)$ vetëm me tjetër shënim të ndryshore) është funksion i cili e mat syprinën e këtij trapezit të lakuar kur $x \in [a, b]$ (figura 8).

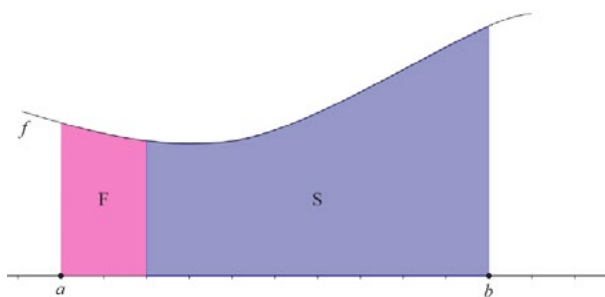


Figura 8

Me f është caktuar syprina e pjesës prej trapezit të lakuar kur $x \in [a, b]$. Qartë vërehet derisa x e zmadhojmë do të zmadhohet edhe syprina F , nëse x zvogëlohet do të zvogëlohet edhe syprina f (figura 9).

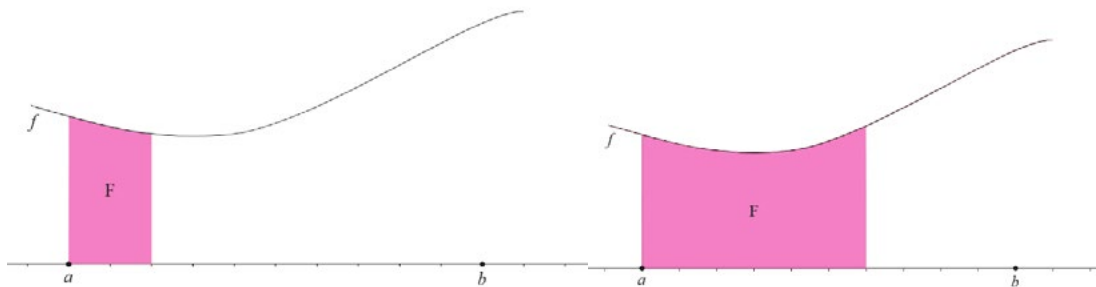


Figura 9

Prej këtu mund të përfundojmë se funksioni $f(x)$ është rritës. Ngel ta caktojmë vlerën e konstantes C . Për këtë qëllim do të vendojmë $x = a$ edhe fitojmë:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C.$$

Është e qartë se integrali $\int_a^a f(t) dt$ do të jetë i barabartë me 0, pasi në vend të trapezit të lakuar do të kemi segment (figura 10).

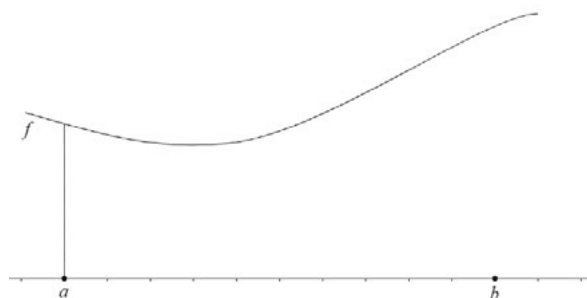


Figura 10

Nga ana tjetër nëse vendojmë se $x = b$, kemi se:

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = S + C,$$

që do të thotë se syprina f do të jetë e barabartë me syprinën e gjithë trapezit të lakuar S (figura 7).

Nëse zëvendësojmë se $C = F(a)$ kemi

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Formula e fundit është e njohur si **formula e Njuton-Lajbnic**. Me këtë e vërtetuar këtë teoremë.

Teorema 1: (Teorema e Njuton-Lajbnic) Nëse funksioni f është i vijueshëm në intervalin $[a, b]$ dhe nëse f është çfarëdo funksion i tij primitiv, atëherë vlen barazimi:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Kjo teoremë quhet **teorema themelore e njehsimit integral**, ndërsa barazimi (1) **rregulla themelore e njehsimit të integrimit** ose **formula e Njuton-Lajbnic**.

Formula Njuton-Lajbnic e jep lidhjen ndërmjet integralit të pacaktuar dhe integralit të caktuar dhe me këtë në masë të madhe lehtësohet njehsimi i integralit të caktuar. Për ta njehsuar integralin e caktuar të funksionit f në intervalin $[a, b]$ mjafton të gjejmë funksionin e tij primitiv f dhe ta njehsojmë rritjen e tij te segmenti $[a, b]$. Domethënë njehsimin e integralit të caktuar e sjellim në gjetjen e ndonjë funksioni primitiv që është ekuivalente me njehsimin e integralit të pacaktuar

Shembulli 1 Të njehsojmë $\int_a^b x^n dx, n \in \mathbb{Z}, 0 \notin [a, b]$.

Do të shqyrtojmë dy raste:

Kur $n \neq -1$, në këtë rast $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, funksioni $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ është primitiv për funksionin x^n pra kemi

$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Për $n = -1$, kemi $\int_a^b \frac{dx}{x}$, pasi për $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ kemi:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

1 Njehso integralin e caktuar $\int_1^2 x^3 dx$

Shembulli 2 T'i zgjidhim integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^2 (3-2x)dx \quad \text{b) } \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx.$$

Për zgjidhjen e integraleve të caktuar do ta shfrytëzojmë formulën e Njuton-Lajbnic.

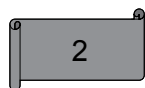
$$\text{a) } \int_0^2 (3-2x)dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2}\right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{2 \cdot 0^2}{2}\right) = 6 - 4 = 2.$$

b) Me zgjidhjen e integralit përkatës së pacaktuar kemi:

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \ln|x| + e^x + C.$$

Prej këtu për integralin e caktuar do të kemi:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \left(\ln|x| + e^x\right) \Big|_1^3 = \ln 3 + e^3 - e.$$



Zgjidhi integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)dx; \quad \text{b) } \int_0^1 x^2(x^3 + 1)dx.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^2 x dx,$$

$$\text{b) } \int_1^3 x^2 dx,$$

$$\text{c) } \int_0^1 e^x dx,$$

$$\text{ç) } \int_0^1 \sqrt{x} dx,$$

$$\text{d) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\text{dh) } \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx.$$

2. Zgjidhi integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x^4 + x^{-2} + 2}{x^3} dx; \quad \text{b) } \int_0^1 (x-3)^3 dx; \quad \text{c) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - 3\right) dx; \quad \text{ç) } \int_1^4 (e^x + \sqrt{x}) dx.$$

3. Njehso integralin e caktuar:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^7 dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$$

7. Integrimi me zëvendësim tek integrali i caktuar

Sipas formulës së Njuton-Lajbnicit njehsimin e integralit të caktuar e sjellim në gjetjen e ndonjë funksioni primitiv që është ekuivalente me njehsimin e integralit të pacaktuar. Tek integrali i pacaktuar tanimë e shqyrtoam metodën e integrit me zëvendësim, i cili sillet te formula: Zgjidhi integralet e caktuara.

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Këtu do ta fusim zëvendësimin $x = \varphi(t)$.

Shembulli 1 T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx.$$

a) E fusim zëvendësimin $t = x + 2$ prej ku $dx = dt$. Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshimi edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilat për ndryshoren kufijtë e rinj janë ku $x = -1 \Rightarrow t = -1 + 2 = 1$ edhe kur $x = 1 \Rightarrow t = 1 + 2 = 3$. Me futjen e zëvendësimit dhe kufijtë e rinj të njehsuar për ndryshoren e re të future, integralin e zgjidhim si

$$\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx = \int_1^3 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20.$$

b) E fusim zëvendësimin $x + 1 = t$, $dx = dt$. Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshim edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = -2 \Rightarrow t = -2 + 1 = -1$ dhe kur $t = 0 + 1 = 1$. Prej këtu kemi:

$$\int_{-2}^0 e^{x+1} dx = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}.$$

1. Njehso integralin e caktuar:

$$\text{a) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx; \quad \text{b) } \int_1^2 e^{2x+1} dx.$$

Shembulli 2 T'i zgjidhim integralet e caktuara:

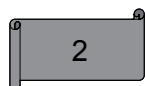
$$\text{a) } \int_4^5 \frac{dx}{x-3}; \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}.$$

a) E fusim zëvendësimin $t = x - 3$, $dx = dt$. Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshimi edhe te kufijtë të integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = 4 \Rightarrow t = 4 - 3 = 1$ dhe kur $x = 5 \Rightarrow t = 5 - 3 = 2$. Prej këtu kemi:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) E fusim zëvendësimin $t = 2x + 1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = (1/2)$. Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshimi edhe te kufijtë të integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ dhe kur $x = 2 \Rightarrow t = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Prej këtu kemi:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$



2

Njehso integralin e caktuar:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{(4x-3)^2}.$$

Shembulli 3

T'i zgjidhim integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^3 \sqrt{1+x} dx; \quad \text{b) } \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$$

a) E fusim zëvendësimin $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 0$, $t = 1$ dhe $x = 3$, $t = 2$. Dhe kemi:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = 2 \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}.$$

b) E fusim zëvendësimin $t = \sqrt[3]{1-x}$, $t^3 = 1-x$, $dx = -3t^2 dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 1$, $t = 0$ edhe $x = 9$, $t = -2$. Dhe kemi:

$$\begin{aligned}\int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx &= \int_0^{-2} (1-t^3) t (-3t^2) dt = \int_0^{-2} (3t^6 - 3t^3) dt = \left(\frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} \right) \Big|_0^{-2} = \frac{3(-2)^7}{7} - \frac{3(-2)^4}{4} \\ &= 3 \cdot 16 \left(-\frac{8}{7} - \frac{1}{4} \right) = \frac{48 \cdot (-39)}{28} = 66,85.\end{aligned}$$

3

Zgjidhi integralet e caktuara:

a) $\int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} dx$; b) $\int_2^4 \sqrt{2x-3} dx$; c) $\int_0^1 x \sqrt[5]{x+2} dx$.

Shembulli 4

T'i njehsojmë integralet e caktuara:

a) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$; b) $\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$.

a) E fusim zëvendësimin $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 0$, $t = 1$ edhe $x = 1$, $t = 2$. Dhe kemi:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

b) E fusim zëvendësimin $x^2 - 5x + 6 = t$, $(2x-5) dx = dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = -1$, $t = 12$ edhe $x = 0$, $t = 6$. Dhe kemi:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int_{12}^6 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{12}^6 = \ln 6 - \ln 12 = \ln \left(\frac{6}{12} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

4

Njehso integralet e caktuara:

a) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$; b) $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx$.

Shembulli 5

T'i zgjidhim integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx.$$

a) E fusim zëvendësimin $x-1 = t^2$, $dx = 2t dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 1$, $t = 0$ edhe $x = 2$, $t = 1$. Dhe kemi:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

b) E fusim zëvendësimin $t^6 = e^x + 3$, $6t^5 dt = e^x dx$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 0$, $t = \sqrt[6]{4}$ edhe $x = \ln(2)$, $t = \sqrt[6]{5}$. Dhe kemi:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx = 6 \int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6 dt = \frac{6}{7} e^7 \Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7} (5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}).$$

5Njehso integralin e caktuar $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+2} dx$

Në vazhdim do të japim disa veti të cilat mund t'i shfrytëzojsh për zgjidhje më të lehtë të integraleve të caktuara.

1) Funksioni $f(x)$ le të funksion tek, d.m.th. $f(-x) = -f(x)$. ta njehsojmë tani integralin:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Do ta shqyrtojmë së pari integralin $\int_{-a}^0 f(x) dx$. E fusim zëvendësimin $t = -x$, $dt = -dx$, pra patjetër t'i ndryshojmë edhe kufijtë e integralit $x = -a$, $t = a$ dhe $x = 0$, $t = 0$ Kemi

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{funksioni tek}}{=} \int_a^0 -f(t)(-dt) = \int_a^0 f(t) dt \underset{\text{me ndryshimin e kufijve}}{=} - \int_0^a f(x) dx$$

dhe nëse zëvendësojmë tek integrali i parë kemi:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Prej këtui mund të përfundojmë se nëse funksioni nën integral është tek, ndërsa intervali i integrimit simetrik në lidhje me zeron, vlera e integralit është e barabartë me zero.

Shembulli 6 Të vërtetojmë se $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.

Funksioni $f(x) = x^3$ është funksion tek pasi $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Pasi intervali i integrimit është simetrik në lidhje me zeron, vlera e integralit është zero. Për këtë integral lehtë kontrollohet se është i barabartë me zero:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

2) Ta shqyrtojmë tani edhe veti tjetër që gjithashtu do të na ndihmon në zgjidhjen e integraleve të caktuar. Le të jetë $f(x)$ funksioni çift, d.m.th., ta njehsojmë tani integralin: $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Së pari do ta shqyrtojmë integralin $\int_{-a}^0 f(x)dx$. Me futjen e zëvendësimit $t = -x$, $dt = -dx$, është e nevojshme t'i ndryshojmë edhe kufijtë e intervalit $x = -a$, $t = a$ dhe $x = 0$, $t = 0$, kemi

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{funksioni çift}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_a^0 -f(x)dx \underset{\text{me ndryshimin e kufijve}}{=} \int_0^a f(x)dx.$$

Nëse zëvendësojmë tek integrali i parë kemi:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Formula e fundit gjeometrisht mund ta interpretojmë në këtë mënyrë: deri sa funksioni është çift grafiku i tij është simetrik në lidhje me boshtin y, prandaj syprina e figurës ndërmjet drejtëzave $x = a$ dhe $x = 0$ është e barabartë me syprinën e figurës ndërmjet drejtëzave $x = 0$ dhe $x = a$ prej ku vijon formula e sipërme.

Shembulli 7

Të vërtetojmë se $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$

Funksoni $f(x) = x^2$ është çift pasi $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Pasi intervali i integrimit është simetrik

në lidhje me zeron, për vlerën e integralit kemi:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

6

Njihso integralet e caktuara:

a) $\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2} dx$; b) $\int_{-3}^3 2x^4 dx$.

Detyra për punë të pavarur

1. Njihso këto integralet e caktuara:

a) $\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx$, b) $\int_0^1 (3x+1)^2 dx$, c) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+2)^2}$,
 ç) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3}$, d) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$, dh) $\int_2^{10} \sqrt{2x+5} dx$,
 e) $\int_0^1 \sqrt[5]{(5x+1)^2} dx$, f) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$, g) $\int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx$,
 h) $\int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx$, i) $\int_0^1 e^{2x+1} dx$, j) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x+2}}{\sqrt[3]{e^x+2}} dx$.

2. Njihso këto integralet e caktuara:

a) $\int_{-1}^1 x^7 dx$; b) $\int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx$.

8. Integrimi parcial i integralit të caktuar

Njehsimin e integralit të caktuar e sjellim në gjetjen e ndonjë funksioni primitiv që është ekuivalent me gjetjen e integralit të pacaktuar. Integrimi parcial më së shpeshti shfrytëzohet kur funksioni nënintegral është logaritmike, eksponenciale ose trigonometrike. Tek integrali i pacaktuar tani më e shqyrtoam metodën e integrimit parcial:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Kjo formulë përshtatet për integralin e caktuar dhe e ka formën:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Shembulli 1 T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^2 x e^x dx; \quad \text{b) } \int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx; \quad \text{c) } \int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx.$$

a) Me shfrytëzimin e integrimit parcial $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, kemi:

$$\int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2e^2 - 0e^0) - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

b) Me shfrytëzimin e integrimit parcial $u = x^2 - 5 \Rightarrow du = 2x dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, kemi:

$$\int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (x^2 - 5) e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-2x} dx = \frac{2}{e^2} - \frac{5}{2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

Për ta zgjidhur integralin $\int_0^1 x e^{-2x} dx$, kemi: $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, përsëri duhet ta zbatojmë integrimin parcial, ku:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

nëse këtë e zëvendësojmë tek integrali i parë do të kemi:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\ &= \frac{2}{e^2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{9}{4} + \frac{5}{4e^2}\end{aligned}$$

c) Me shfrytëzimin e integrimit parcial $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3)dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, kemi:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = (x^2 + 3x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx.$$

Për ta zgjidhur integralin $\int_0^1 (2x + 3)e^x dx$, kemi: $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, përsëri duhet ta zbatojmë integrimin parcial, ku:

$$\int_0^1 (2x + 3)e^x dx = (2x + 3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1,$$

nëse këtë e zëvendësojmë tek integrali i parë do të kemi:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - (3e - 1) = 2.$$

1 Njehso këto integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{b) } \int_1^2 (x^2 + 2x + 1)e^x dx.$$

Shembulli 2 T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{b) } \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$$

a) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$, $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $v = 2\sqrt{x}$.

Kemi:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \ln 4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 = 4 \cdot (\ln 4 - 1).$$

b) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $u = \ln 2x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Kemi:

$$\begin{aligned} \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{x^4}{16} \Big|_2^4 = \frac{1}{4} (4^4 \ln 8 - 2^4 \ln 4) - \frac{1}{16} (4^4 - 2^4) = 184 \ln 2 - 15. \end{aligned}$$

c) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $u = \ln(x+1)$, $du = \frac{dx}{x+1}$, $dv = dx$, $v = x$.

Kemi:

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = ((e-1) \ln e) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= e-1 - \left[\int_0^{e-1} \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} \right] = e-1 - \left[x \Big|_0^{e-1} - (\ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \right] = e-1 - [(e-1-0) - (\ln e - \ln 1)] = \\ &= e-1-e+1+\ln e = 1. \end{aligned}$$

2

Njesho integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^e x^2 \ln x; \quad \text{b) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} (x^2 + x) \ln(x+1) dx.$$

Shembulli 3

Ta njeshojmë integralin e caktuar: $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

Prej integritit parcial kemi $u = \ln^2 x$, $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $dv = \frac{1}{x^2} dx$, $v = -\frac{1}{x}$. Kemi

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx,$$

Për ta zgjidhur integralin $\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$, kemi: përsëri duhet ta zbatojmë integrimin parcial, ku:

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1,$$

nëse këtë e zëvendësojmë tek integrali i parë do të kemi:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{2}{e} + 1 \right) = -\frac{5}{e} + 2.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Të njehsohen këto integrale:

a) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx;$

b) $\int_1^2 (3x+5)e^{-x} dx;$

c) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx;$

ç) $\int_0^1 (x^2 - 2)e^x dx;$

d) $\int_1^e \ln x dx;$

dh) $\int_1^e x^2 \ln x dx;$

e) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$

f) $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx.$

9. Syprina e figurës së rrafshët

Prej përkufizimit të integralit të caktuar vërejtëm se ai paraqet syprinën e trapezit të lakuar i cili është përcaktuar me grafikun e funksionit jonegativ $f(x)$ dhe boshtin e intervalit $[a, b]$ (figura 11)

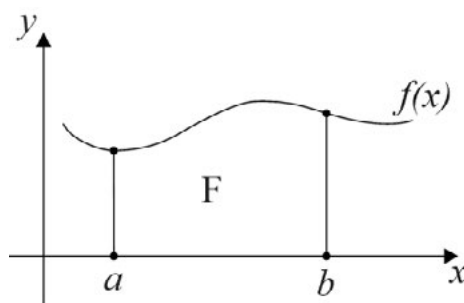


Figura 11

Domethënë për syprinën e trapezit të lakuar prej figurës 11 kemi se

$$P(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

Në rastin kur funksioni është negativ, vlera e integralit të caktuar do të jetë negative (figura 12).

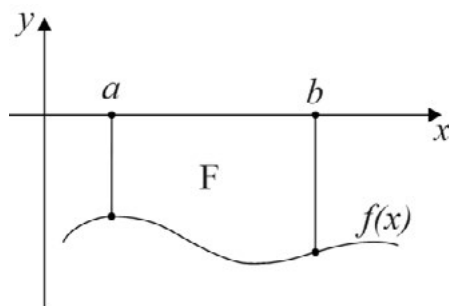


Figura 12

Domethënë për ta njehsuar, syprinën e figurës në rastin kur funksioni është negativ $f(x)$, vlerën e integralit të caktua do ta vendojmë në shenjë të vlerës absolute, për të fituar numër pozitiv, pasi syprina nuk mund të jetë negative.

$$P(F) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Shembulli 1

Ta njehsojmë syprinën e figurës, të kufizuar me lakoren $y = \frac{1}{x}$, boshtin e abshisës dhe drejtëzat $x = 1$ dhe $x = 3$

Te Figura 13 janë paraqitur lakorja dhe të dy drejtëzat:

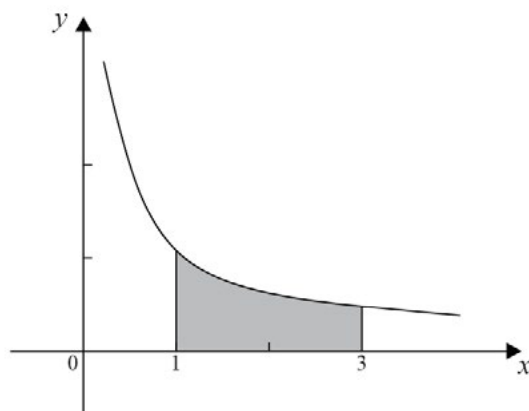


Figura 13

Sipas sqarimit paraprak, për ta njehsuar syprinën e pjesës së ngjyrosur kemi:

$$P = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Të shqyrtojmë tani se si do ta njehsojmë syprinën e figurës e cila është kufizuar me grafikët e funksioneve $f_1(x)$ dhe $f_2(x)$ të intervalit $[a, b]$ të Figura 14.

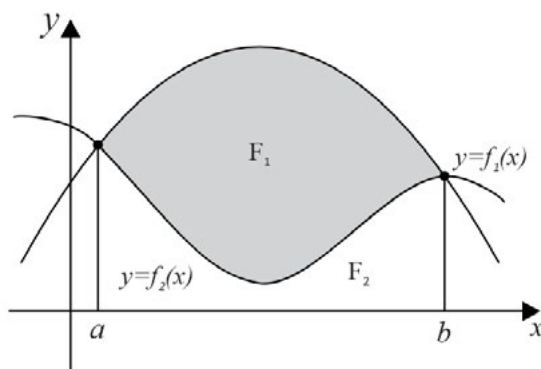


Figura 14

Nëse me F_1 e shënojmë trapezin e lakuar nën grafikun e funksionit $f_1(x)$ por me F_2 e paraqesim trapezin e lakuar nën grafikun e funksionit $f_2(x)$ mund të paraqitet si ndryshim të trapezit të lakuar F me trapezin e lakuar F_1 . Prej ku mund të përfundojmë se syprina e figurës është e barabartë F_2 me ndryshimin e syprinës së trapezit të lakuar dhe trapezit të lakuar, d.m.th,

$$P(F) = P(F_1) - P(F_2) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

Shembulli 2

Ta paraqesim syprinën e figurës (figura 15) të kufizuar me parabolat: $y^2 = 2x$ dhe $x^2 = 2y$

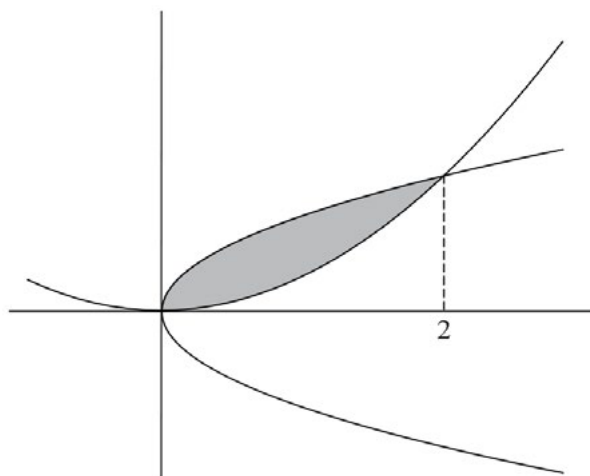


Figura 15

Parabolat të cilat e kufizojnë figurën syprina e të cilës duhet të caktohet janë paraqitur te Figura 15. Së pari i gjejmë koordinatat a pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integrit. Prej

$$y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}, y > 0 \text{ atëherë } \sqrt{2x} = \frac{x^2}{2}, \quad 2x = \frac{x^4}{4}. \quad x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

$A(0, 0)$, $B(2, 2)$ Prej $y^2 = 2x$ Domethënë pikëprerjet janë $F_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx$ Syprina e trapezit të lakuar

të kufizuar me lakoren $x^2 = 2y$ është $F_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$. Pra syprina e trapezit të lakuar që e kërkojmë është $F = F_1 - F_2$, d.m.th.,

$$F = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} \right) \bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Shembulli 3

Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 16) të kufizuar me parabolën $y = x^2$ dhe drejtëzën $x + y = 2$.

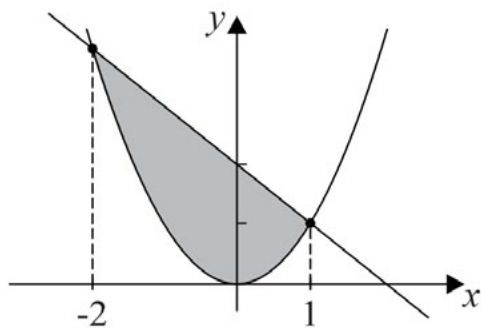


Figura 16

Së pari i gjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integralit sipas të cilit integrojmë. E zëvendësojmë te $y = x^2$ dhe e fitojmë barazimin katror $x + y = 2$. Me zgjidhjen e barazimit katror $x + x^2 = 2$ fitohet se zgjidhjet e tij janë $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Domethënë pikëprerjet janë $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$. Syprina e figurës që e kërkojmë është:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Shembulli 4

Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 17) të kufizuar me parabolën $y = 2 - x^2$ dhe drejtëzën $y = x$

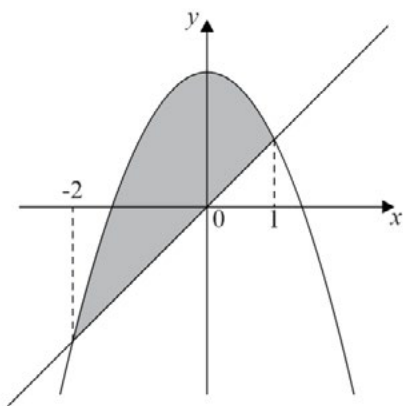


Figura 17

Së pari i gjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integrimit. I zëvendësojmë $y = x$ te $x^2 + x - 2 = 0$ dhe e fitojmë barazimin katror.

$x^2 + x - 2 = 0$ Me zgjidhjen e barazimit katror fitohet se zgjidhjet e tij janë $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Domethënë pikëprerjet janë $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$

Syprina e figurës që e kërkojmë është:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Shembulli 5

Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 18) të kufizuar me parabola $y = 2x^2 + 1$ dhe $y = x^2 + 10$

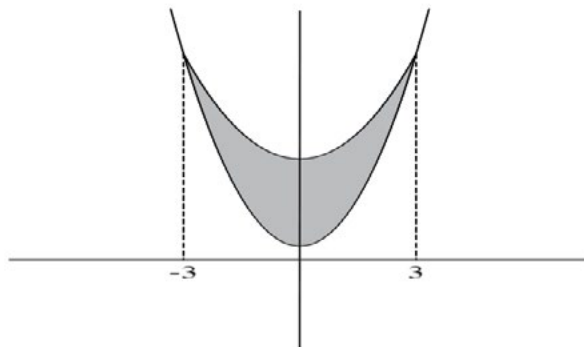


Figura 18

Së pari i gjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integrimit. Nëse i barazojmë barazimet kemi $2x^2 + 1 = x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 3$ Syprinën e figurës që e kërkojmë është:

$$F = \int_{-3}^3 (x^2 + 10 - 2x^2 - 1) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 36.$$

Gjatë zgjidhjes shfrytëzojmë se edhe të dy funksionet janë çift (simetrike në lidhje me boshtin y)

Shembulli 6

Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 19) të kufizuar me lakoret $y = e^x$, $y = e^{-x}$ dhe drejtëzën $x = 2$

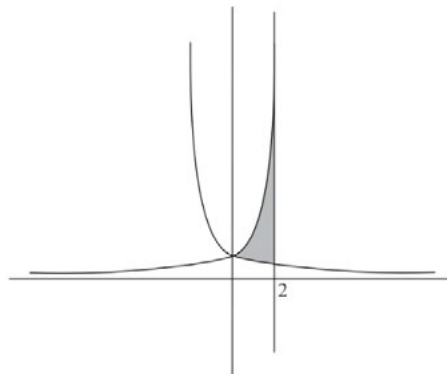


Figura 19

Prej figurës 19 mund të vërehet sipërfaqja në të cilën lëviz prej 0 deri te 2 dhe se lakorja e sipërme është $y = e^x$ lakorja e poshtme është $y = e^{-x}$. Pikëprerjet e të dy lakoreve mund t'i fitojmë edhe prej

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Prej këtu për syprinën kemi:

$$F = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^{-0}) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2.$$

Shembulli 7

Të njehsohet syprina e figurës (figura 20) të kufizuar me lakoret $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$.

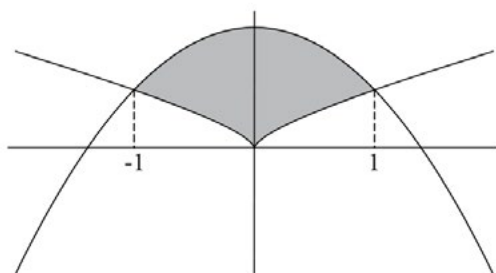


Figura 20

E gjejmë prerjen e të dy lakoreve dhe i fitojmë pikëprerjet $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ Prej figurës 20 vërejmë se

$$F = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{2}{15}.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = x^2$ dhe $y = \sqrt{x}$.
2. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = x^2 + x + 3$ dhe drejtëzën $y = x + 7$
3. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = \ln(x)$ dhe $y = \ln^2(x)$.
4. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = \frac{1}{1+x^2}$ dhe $y = \frac{x^2}{2}$.
5. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakore $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ drejtëzat $y = 0$, $x = e$.
6. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakore $y = \frac{1}{x^2}$ drejtëzat $y = x$.
7. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakore $y = e^x$, $y = e^{-x}$ drejtëzat $x = 1$.

10. Vëllimi i trupit rrotullues

Me ndihmën e integralit të caktuar mund të njehsohet vëllimi i trupit. Në vazhdim do të tregojmë se si mund të njehsojmë vëllimin e trupit rrotullues me ndihmën e integralit të caktuar. Do të tregojmë se si arrihet deri te formula për njehsimin e vëllimit të trupit rrotullues, me shfrytëzimin e përkufizimit të integralit të caktuar. Le të jetë f funksion i vijueshëm në intervalin $[a, b]$ dhe për çdo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

Me rrotullimin e trapezit të lakuar nën lakoren $f(x)$ e intervalit $[a, b]$ rreth boshtit x fitohet trupi rrotullues K (figura 21).

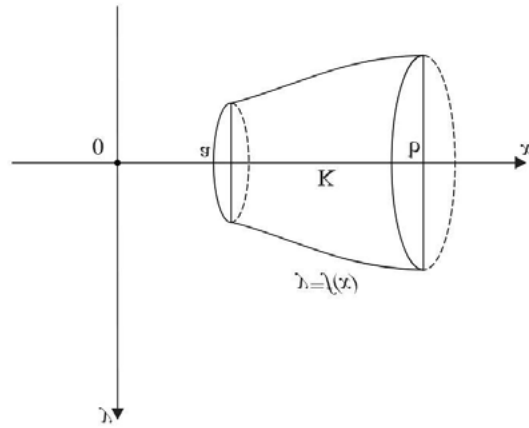


Figura 21

Me qëllim përafërsisht të njehsohet vëllimi i trupit rrotullues, ngjashëm siç punuam te përkufizimi për integral të caktuar, intervalin $[a, b]$ do ta ndajmë në n nënsegmente me ndonjë ndarje P . Do të fokusohemi, te nënsegmenti $[x_i, x_{i+1}]$. Zgjedhim pikë $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ dhe në këtë pikë $f(\xi)$ do ta caktojmë vlerën e funksionit $(\xi, f(\xi))$. Te pika $f(\xi)$ do të tërheqim drejtëz paralele me boshtin x . Kur ky trapez i lakuar rrotullohet rreth boshtit x fitohet trupi rrotullues (figura 22)

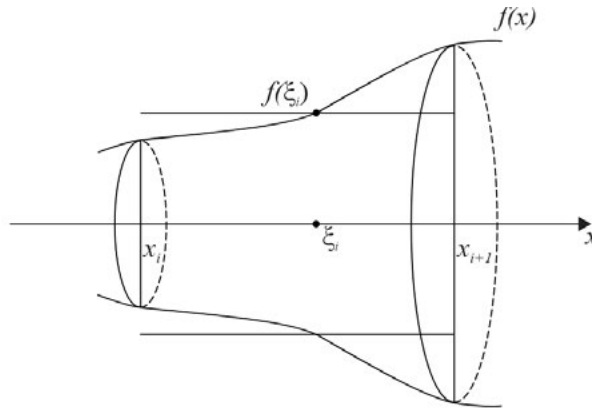


Figura 22

Por do ta rrotullojmë edhe drejtëzën që kalon nëpër $(\xi, f(\xi))$ dhe është paralele me boshti x . Në realitet vëllimi i trapezit të lakuar rrotullues do ta aproksimojmë me vëllimin e cilinrit (figura 23)

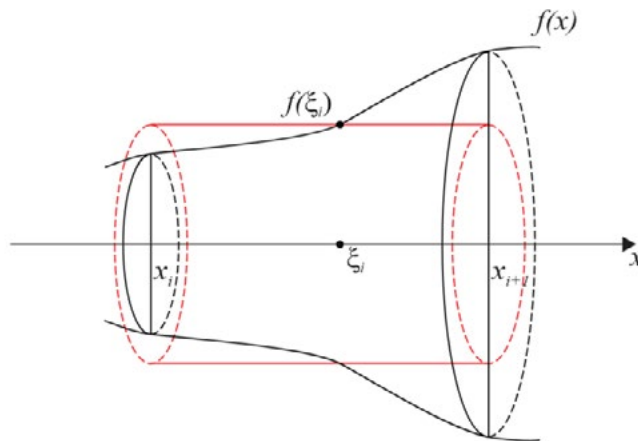


Figura 23

Vëllimi i këtij cilindri është $V_i = f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i$ ku $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ është lartësia e cilindrit, ndërsa $f(\xi_i)$ është rrezja e tij. Siç theksuam intervalin $[a, b]$ e ndajmë në n nënsegmente dhe nëse i mbledhim

vëllimet e të gjithë cilindrave në intervalet $i = 0, \dots, n-1$ për $[x_i, x_{i+1}]$ do të kemi $\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i$

. Sa më e mirë është ndarja e intervalit $[a, b]$, aq është më i vogël ndryshimi i vëllimit të cilindrit dhe pjesës së cilindrit rrotullues të nënsegmentit të shqyrtuar $[x_i, x_{i+1}]$, pra për $n \rightarrow \infty$ mund të llogarisim se shuma e fundit është vëllimi i trupit rrotullues K . Kjo është shuma e Rimanit për funksionin $f^2(x) \pi$. Kur do të ekzistojë vlera kufitare e kësaj shume të Rimanit do të ekzistojë edhe vëllimi i trupit rrotullues. Prej këtu mund të themi se për vëllimin e trupit rrotullues vlen formula

$$V(K) = \int_a^b f^2(x) \pi dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Teorema 1: Le të jetë f funksion i vijueshëm në intervalin $[a, b]$ dhe $x \in [a, b]$ për çdo $f(x) \geq 0$. Atëherë vëllimi i trupit rrotullues K i fituar me rrotullimin rreth boshti x të trapezit të lakuar në intervalin $[a, b]$ është i barabartë me:

$$V(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Shembulli 1 Të tregojmë se vëllimi i topit është i barabartë me $\frac{4}{3} r^3 \pi$.

Topin do ta fitojmë me rrotullimin e rrethit $x^2 + y^2 = r^2$ rreth boshtit x . Prej barazimit $x^2 + y^2 = r^2$ kemi $y^2 = r^2 - x^2$

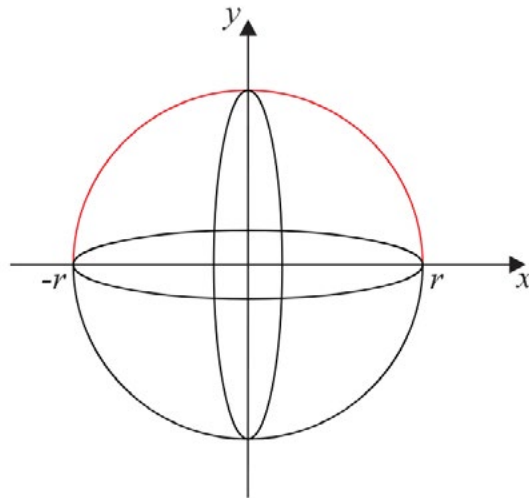


Figura 24

Për të njehsuar vëllimin e topit, do të shqyrtojmë vetëm rrotullimin e gjysmërrethit të sipërm (të shënuar me të kuqe), dhe kemi:

$$V(K) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x \Big|_{-r}^r - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r \right] = \pi \left[r^2(r+r) - \frac{1}{3}(r^3 + r^3) \right] = \pi \left[2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right] = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Shembulli 2

Ta njehsojmë vëllimin e trupit që fitohet me rrotullimin e lakores $y = 9x - x^2$ rreth boshtit x .

Pikëprerjet e grafikut të funksionit $y = 9x - x^2$ me boshtin x janë 0 dhe 9 pasi

$9x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(9 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 9$ Me rrotullimin do të fitohet figura e dhënë te figura 25.

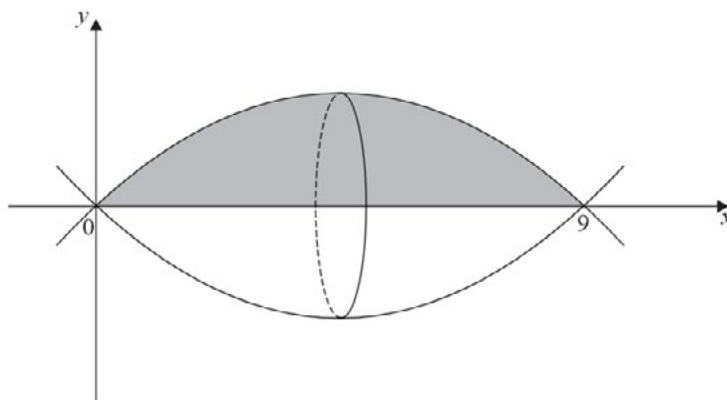


Figura 25

Pra për vëllimim do të fitojmë:

$$V = \pi \int_0^9 (9x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^9 (81x^2 - 18x^3 + x^4) dx = \pi \left[81 \frac{x^3}{3} \Big|_0^9 - 18 \frac{x^4}{4} \Big|_0^9 + \frac{x^5}{5} \Big|_0^9 \right]$$

$$= \pi \left[27 \cdot 9^3 - \frac{9}{2} \cdot 9^4 + \frac{9^5}{5} \right] = 1968,3\pi.$$

Shembulli 3

Ta njehsojmë vëllimin e trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshti x të pjesës së rrafshit të kufizuar me lakoren $y = \frac{1}{x}$ dhe drejtëzat $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ (figura që është e kufizuar me lakoren e dhënë dhe drejtëzat dhe e cila rrotullohet rreth boshtit x është dhënë te Figura 26a. Ndërsa trupi vëllimi i të cilit kërkohet është dhënë te Figura 26b.)

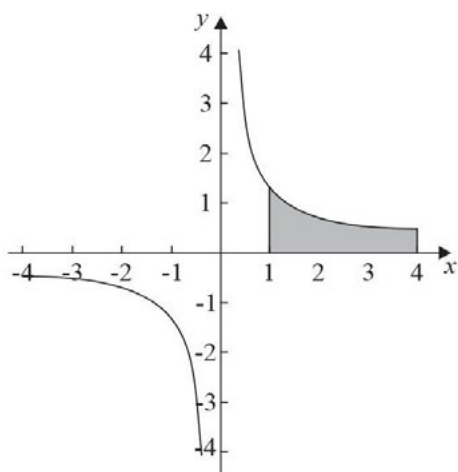


Figura 26 a)

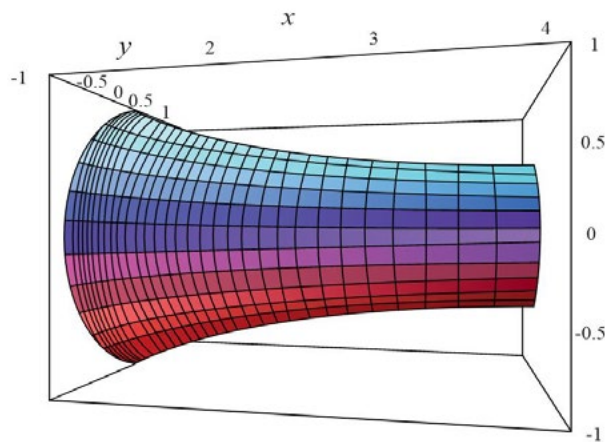


Figura 26 b)

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^4 \right) = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Shembulli 4

Ta njehsojmë vëllimin e trupit që fitohet me rrotullimin e parabolës $y = x^2$ rreth boshtit y të intervali $0 \leq y \leq 4$

Trupi që fitohet me rrotullimin e parabolës quhet **paraboloid**. Për shembullin tone me kufizime të dhëna, paraboloidi është paraqitur te Figura 27.

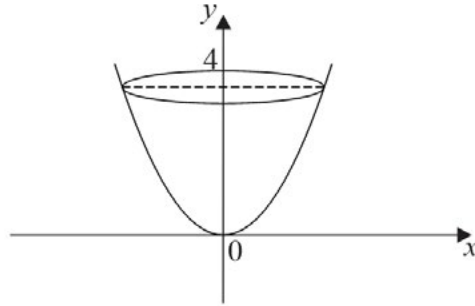


Figura 27

Këtu duhet të theksojmë se rrotullimi rreth boshtit y , pra formula e sipërme e përshtatur kur kryhet

rrotullimi rreth boshtit y do të jetë $V(K) = \pi \int_a^b x^2 dy$.

Domethënë kemi:

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi.$$

Shembulli 5

Ta njehsojmë vëllimin e trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshtit y të trupit të

kufizuar me lakoren $y = \frac{1}{1+x^2}$ dhe drejtëzat $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$

Prej barazimit të lakores vijon se $x^2 = \frac{1}{y} - 1$. Vëllimi i trupit rrotullues që fitohet me rrotullimin rreth boshtit y në drejtëzën $x = 1$, për $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ dhe vëllimi i trupit rrotullues që fitohet me rrotullimin rreth boshtit y të lakores $x^2 = \frac{1}{y} - 1$, për $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Te (figura 28a) është dhënë Figura me rrotullimin e të cilës fitohet trupi, ndërsa te (figura 28b) është dhënë vet trupi.

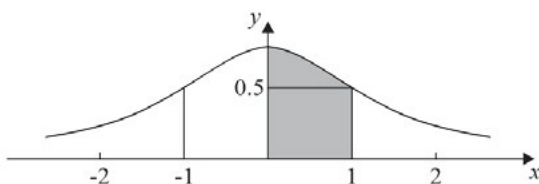


Figura 28 a)

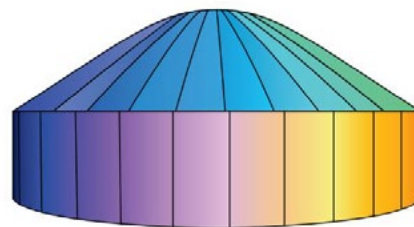


Figura 28 b)

$$V = \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy \right) = \pi \left(y \Big|_0^{\frac{1}{2}} + (\ln|y| - y) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(-\ln \frac{1}{2} \right) = \pi (-\ln 2^{-1}) = \pi \ln 2.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Të njehsohet vëllimi i trupit që fitohet me rrotullimin e elipsës $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rreth boshtit x .
2. Të njehsohet vëllimi i trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshtit x të trupit të kufizuar me parabolën $y^2 = x - 1$ dhe drejtëzën $y = x - 2$
3. Të njehsohet vëllimi i trupit që fitohet me rrotullimin e parabolës $y^2 = 2(x - 1)$ rreth boshtit x në intervalin $1 \leq x \leq 3$
4. Të njehsohet vëllimi i trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshtit x të trupit të kufizuar me lakoret $x^2 + y^2 = 1$ dhe $x^2 + 2y^2 = 1$
5. Të njehsohet vëllimi i trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshtit x të trupit të kufizuar me lakoren $y = \frac{4}{x}$ dhe drejtëzat $y = x$, $x = 4$

11. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Zgjidhi integralet e pacaktuara:

$$\text{a) } \int \sqrt[4]{x^3} dx \quad \text{b) } \int \frac{2}{x^5} dx \quad \text{c) } \int (3 + x^3)^3 dx \quad \text{ç) } \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$\text{d) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx \quad \text{dh) } \int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx \quad \text{e) } \int \sqrt{3x - 4} dx \quad \text{f) } \int \frac{dx}{(5x - 2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\text{g) } \int \frac{dx}{2 + 3x^2} \quad \text{h) } \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[4]{x + 5}} dx; \quad \text{i) } \int \frac{2x - 3}{1 - x} dx;$$

2. Me zbatimin e formulës së Njuton-Lajbnicit, njehso integralet:

$$\text{a) } \int_1^2 \sqrt[4]{x^3} dx,$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx,$$

$$c) \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + x^3 \right) dx,$$

$$ç) \int_0^1 2x^4 + 3x^2 + 1.$$

3. Me ndihmën e integrimit me zëvendësim njehso integralet:

$$a) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$b) \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

$$c) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$ç) \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3},$$

4. Me ndihmën e integrimit me zëvendësim njehso integralet:

$$a) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx,$$

$$b) \int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

5. Me metodën e integrimit parcial njehso integralet:

$$a) \int_0^1 \frac{2x + 3}{e^x} dx$$

$$b) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

6. Me metodën e integrimit parcial njehso integralet:

$$a) \int_1^2 x \ln(2x^2 - 1) dx$$

$$b) \int_2^4 (2x - 1) \ln x dx$$

7. Me metodën e integrimit parcial njehso integralet:

$$a) \int_0^{e-2} \ln(x + 2) dx$$

$$b) \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

8. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = 2x^2 + 1$ dhe $y = x^2 + 10$

9. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = 2x - x^2$ dhe drejtëzës $x + y = 0$

10. Njehso vëllimin e trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshtit y të trupit të kufizuar me lakoren $y = x^3$ dhe drejtëzat $y = 8$ dhe $x = 0$

11. Njehso vëllimin e trupit që fitohet me rrotullimin rreth boshtit x të trupit të kufizuar me lakoren $y = 2 - x^2$ dhe drejtëzën $y = 1$

12. Funkzioni i kufizuar me shpenzimet e dhëna me $C_g(x) = \frac{600}{\sqrt{40x + 1}}$, prej ku x është numri i njësive të prodhuara. Gjatë prodhimit dhe shitjes të 10 njësive, shpenzimet e përgjithshme janë 1000, d.m.th., $C(10) = 1000$. Të gjendet funksioni i shpenzimeve të përgjithshme.

Njësia modulare 3 – Matricat

(për të gjitha drejtimet e tjera)

Fillimet e disiplinës matematikore Algjebra lineare, e cila llogaritet për fushë të re matematikore relative, datojnë me futjen dhe zbatimin e determinantave, të cilat paraprakisht janë shfrytëzuar për zgjidhjen e sistemeve të barazimeve lineare. Në vitin 1693 në punën e matematikanit gjerman Gotfrid Vilhelm fon Lajbnic (1646-1716) janë shfrytëzuar determinantat, ndërsa matematikani zviceran Gabriel Kramer (1704-1752) në vitin 1750 e ka realizuar të ashtuquajturën **rregulla e Kramerit** për zgjidhjen e sistemeve të barazimeve lineare. Më vonë, matematikani gjerman Johan Karl Fridrih Gaus (1777– 1855) e ka futur metodën e Gausit të eliminimit për zgjidhjen e sistemeve të barazimeve lineare. Konceptin matricë për herë të parë haste në punën e matematikanëve anglez: Këtë termë e ka futur Xhejms Xhozef Silvester (1814-1897) në vitin 1848. Shumëzimin e matricave dhe gjetjen e matricës inverse janë përkufizuar nga Artur Kejli (1821-1895).

1. Koncepti për determinantën e rendit të dytë dhe të tretë

Në vitin e parë u njohët me determinantat e rendit të dytë. Këtu përsëri do të përkujtohemi për ato dhe do të përkufizojmë determinantë të rendit të tretë.

Determinanta e rendit të dytë

Përkufizimi 1: Determinanta e rendit të dytë është skema katrore e paraqitjes së shprehjes $a_1b_2 - a_2b_1$ d.m.th.,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1$$

ku a_1, a_2, b_1, b_2 janë numra realë ose shprehje, të cilat janë shpërndarë në dy rreshta dhe kolona.

Shembulli 1 Ta njehsojmë determinantën e rendit të dytë.

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11.$$

1 Njehso këto determinanta të rendit të dytë: a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

Shembulli 2

Ta zgjidhim barazimin $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$, sipas të panjohurës x . Së pari e njehsojmë

determinantën $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 6x$ dhe e fitojmë barazimin $x^2 - 6x = 0$ zgjidhjet e të cilit $x_1 = 0$, $x_2 = 6$.

2

Zgjidhi barazimet sipas të panjohurës x : a) $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x - 2 & 4 \\ 3 & x + 2 \end{vmatrix} = 0$.

Shembulli 3

Ta zgjidhim pabarazimin $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} \geq 0$ sipas të panjohurës x . E njehsojmë determinantën $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 6x$ dhe e fitojmë pabarazimin $x^2 - 6x \geq 0$ i cili është i saktë për $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$

3

Zgjidhi pabarazimet sipas të panjohurës x : a) $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} < 0$; b) $\begin{vmatrix} x - 2 & 4 \\ 3 & x + 2 \end{vmatrix} > 0$.

Determinanta e rendit të tretë

Përkufizimi 2: Determinanta e rendit të tretë është skemë katrori i paraqitjes së shprehjes $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ d.m.th.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

ku $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ numra realë ose shprehje, të cilët janë shpërndarë në tre rreshta dhe tri kolona.

Numrat realë $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ose shprehje quhen **elementet e determinantës**. Elementet a_1, b_2, c_3 janë elementet prej **diagonales kryesore**, ndërsa a_3, b_2, c_1 janë elementet prej **diagonales dytësore** të determinantës së rendit të tretë. Njehsimi i determinantës (për të mos e mbajtur mend) bëhet me ndihmën e disa rregullave si

Rregulla e Sarusit dhe rregulla e trekëndëshit, të cilat do t'i prezantojmë në vazhdim:

Rregulla e Sarusit: Kolona e parë dhe e dytë prej determinantës së rendit të tretë përshkruhen si kolona e katërt dhe e pestë. Bëhen prodhimet prej elementeve të diagonales kryesore dhe të elementeve të dy diagonaleve të cilat janë paralele me diagonalen kryesore, të cilat hyjnë në njehsimin me shenjë "+" dhe prodhimet prej elementeve të diagonales dytësore dhe në të dy diagonalet të cilat janë paralele me diagonalen dytësore, të cilat hyjnë me shenjë "-" d.m.th.,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Shembulli 4

Ta njehsojmë determinantën e rendit të tretë me rregullën e Sarusit:

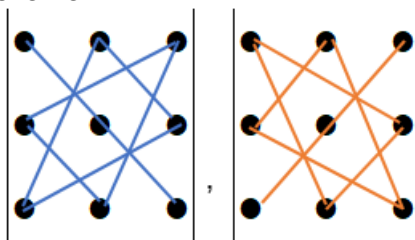
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = -3$$

4

Njehso këto determinanta të rendit të tretë me rregullën e Sarusit:

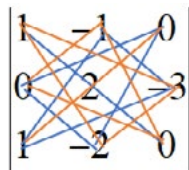
a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & -1 & b \\ -a & ab & 4 \end{vmatrix}$

Rregulla e trekëndëshave: Elementet e determinantës trajtohen si kulme të trekëndëshit. Bëhen prodhime prej elementeve të diagonales kryesore dhe të elementeve me rol të kulmeve të dy trekëndëshave një brinjë e të cilës është paralele me diagonalen kryesore dhe ato hyjnë në njehsim me shenjë "+" (të shënuara me ngjyrë të kaltër), dhe prodhime prej elementeve të diagonales dytësore dhe elementeve me rol të kulmeve të dy trekëndëshave njëra brinjë e të cilit është paralele me diagonalen dytësore, të cilat hyjnë me shenjë "-" (të shënuara me ngjyrë të kuqe), sipas kësaj skeme



Shembulli 5

Ta njehsojmë determinantën e rendit të tretë me rregullën e trekëndëshave sipas kësaj skeme:



$$\text{d.m.th., } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = -3$$

5

Njehsoi këto determinanta të rendit të tretë me rregullën e trekëndëshave

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & -1 & b \\ -a & ab & 4 \end{vmatrix}.$$

Krahasoi zgjidhjet e fituara me zgjidhjet e determinantave prej detyrës 4!

Determinantat mund t'i zgjidhim edhe me zbërthimin e determinantës sipas elementeve të rreshtit të dhënë, d.m.th., shtyllës. Para se ta tregojmë rregullën do të fusim dy koncepte minore dhe komplementi algjebrik. Determinantën e rendit të tretë do ta shënojmë me Δ dhe mund ta paraqesim edhe me shënimin e elementeve të tij me një shkronjë a dhe si indeks vendpozita e elementeve në lidhje me rreshtat dhe kolonat te determinanta (a_{22} ka indeks 22, që do të thotë se gjendet te rreshti i dytë dhe kolona e dytë

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Përkufizimi 3: Le të jetë Δ determinanta e rendit të tretë dhe për çfarëdo indeksa $1 \leq i, j \leq 3$ të zgjedhur eliminohen elementet prej rreshtit i dhe shtyllës j . Për numrin Δ_{ij} themi se është **minor** i Δ që i korrespondon elementit a_{ij} .

Përkufizimi 4: Komplementi algjebrik i elementit a_{ij} të determinantës së rendit të tretë Δ është numri $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$

Njehsimi i determinantave të rendit të tretë mund të realizohet me zbërthimin e determinantës nëpërmjet elementeve të njërit prej rreshtave të tij (kolonë) dhe minorëve të tyre përkatëse.

Teorema 1: Vlera e determinantës së rendit të tretë Δ mund të fitohet si shumë prej prodhimeve të elementeve të rreshtit i (kolona j) të shumëzuar me komplementet e tyre përkatëse algjebrike d.m.th.,

$$\Delta = a_{i1} \cdot a_{i1}^* + a_{i2} \cdot a_{i2}^* + a_{i3} \cdot a_{i3}^*, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (\Delta = a_{1j} \cdot a_{1j}^* + a_{2j} \cdot a_{2j}^* + a_{3j} \cdot a_{3j}^*, \quad 1 \leq j \leq 3).$$

Vërtetim: Krejtësisht çfarëdo e zgjedhim kolonën e tretë dhe do të vërtetojmë $j = 3$ kemi

$\Delta = a_{13} \cdot a_{13}^* + a_{23} \cdot a_{23}^* + a_{33} \cdot a_{33}^*$. Prej përkufizimit 2, determinantë e rendit të tretë është

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \\ &\quad - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13} \cdot a_{13}^* + a_{23} \cdot a_{23}^* + a_{33} \cdot a_{33}^* \end{aligned}$$

Në mënyrë analoge vërtetohet $i = 1, 2, 3$ edhe për $j = 1, 2$. ■

Shembulli 6

Vlera e determinantës së rendit të tretë të zbërthyer sipas kolonës së tretë është

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2 + 1) = -3$$

Krahasoje vlerën e determinantës prej Shembullit 5. Çka përfundon?

6

Njehso determinantën prej shembullit 6, duke e zbërthyer sipas:

- a) rreshtit të dytë b) kolonës së parë.

Siç edhe te determinantat e rendit të dytë dhe me determinantën e rendit të tretë, ne mund të zgjidhim barazime dhe pabarazime.

7

Zgjidhi barazimet sipas të panjohurës x :

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 2 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 2 & x-2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8

Zgjidhi pabarazimet sipas të panjohurës x :

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} < 5+x;$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} > 3-x.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Njehsoi këto determinanta:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 \sin x & 3 \\ \sin 2x & \cos x \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} p & q \\ p^2 & q^2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} p-q & p^2+q^2 \\ -1 & p+q \end{vmatrix};$$

$$\text{ç)} \begin{vmatrix} a & b+d & 1 \\ b & d+a & 1 \\ d & a+b & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 \\ 2 & m+2 & 2 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}; \quad \text{dh)} \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ \cos x & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Njehsoi këto determinanta të rendit të tretë sipas ndonjë rreshti ose kolone:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Zgjidhi këto barazime sipas të panjohurës x :

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & (x+1)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 5x+1 & x+1 \end{vmatrix} = x-2;$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & x+3 \\ 3 & 2 & (x+3)^2 \\ 3 & 3 & (x+3)^3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{ç)} \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ x & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3x.$$

4. Zgjidhi këto barazime sipas të panjohurës x :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2-x; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & 1 \\ x+3 & 2 & 1 \\ 3 & x+3 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

2. Vetitë e determinantës së rendit të dytë dhe të tretë

Këtu do të jepen vetitë e determinantave të rendit të dytë dhe të tretë. Disa veti janë identike edhe te determinantat e rendit të dytë edhe te determinantat e rendit të tretë, prandaj ato veti do të jepen vetëm një herë.

1^o Nëse te një determinantë, dy rreshta (kolona) i ndërrojnë vendet, atëherë determinantë e ndryshon shenjë.

Është e qartë për determinantën e rendit të dytë $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, nëse të dy rreshtat i

ndërrojnë vendet $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ atëherë determinanta e ndryshon shenjë.

 **1** Kontrolllo vetinë 1^o te determinanta e rendit të tretë kur $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ kolona e dytë dhe e tretë do t'i ndërrojnë vendet.

Shembulli 1 a) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$ nëse rreshtat i ndërrojnë vendet kemi

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$. Është e qartë se determinanta e ndryshon shenjë.

b) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15$, kur kolona e parë dhe e tretë i ndërrojnë vendet kemi

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15$. Është e qartë se determinanta e ndryshon shenjë.

2 a) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ ndërroi vendet e të dy kolonave, pastaj njehsoi të dy determinantat. Çka përfundon?

b) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ndërroi vendet e rreshtit të dytë dhe të tretë, ndërsa pastaj njehsoi të dy determinantat. Çka përfundon?

2° Nëse elementet përkatëse prej të dy rreshtave të ndryshëm (kolona) te determinanta janë të barabarta ndërmjet veti, atëherë vlera e determinantës është zero.

Për determinantën e rendit të tretë, ku elementet përkatëse të rreshtit të parë dhe të dytë janë të barabarta, vlera e asaj determinanta është zero d.m.th.,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{11} - a_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

3 Kontrolllo vetinë 2° te determinanta e rendit të dytë kur të dy kolonat kanë elemente përkatëse të barabartë!

Shembulli 2 a) Determinanta $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -35 + 35 = 0$, ku edhe të dy rreshtat kanë elemente përkatëse të barabarta ka vlerë.

b) Determinanta $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 20 - 4 + 8 - 20 = 0$, ku edhe kolona e dytë dhe e tretë

kanë elemente përkatëse të barabarta ka vlerë 0.

4 Njehso a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ Sqaro zgjidhjen!

3° Nëse elementet përkatëse të dy rreshtave (kolonave) te një determinanta janë proporcionale atëherë determinanta e ka vlerën zero.

Për determinantën e rendit të tretë, ku elementet përkatëse të rreshtit të parë dhe të dytë janë proporcionale kemi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{11}a_{32}a_{13} + ka_{12}a_{13}a_{31} - ka_{13}a_{12}a_{31} - ka_{32}a_{13}a_{11} - ka_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

5

Kontrollo vetinë 3^o te determinanta e rendit të dytë kur të dy kolonat kanë elemente përkatëse proporcionale!

Shembulli 3

a) Determinanta $\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$ pasi elementet e rreshtit të parë dhe të dytë janë proporcionale. $\frac{-5}{1} = \frac{-10}{2}$.

b) Determinanta $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 6 - 6 = 0$, pasi elementet e kolonës së parë dhe të dytë janë proporcionale $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$.

6

Njehso: a) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. Sqaro zgjidhjen!

4^o Nëse të gjithë elementet e ndonjë rreshti (kolone) te determinanta janë të barabartë me zero determinantë e ka vlerën zero.

Determinanta e rendit të dytë $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, pasi elementet e rreshtit të dytë janë të barabartë me zero.

7

Kontrollo vetinë 4^o te determinanta e rendit të tretë kur e kolonës së dytë janë të barabarta me zero.

Shembulli 4

Determinantat $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ kanë vlerë zero, pasi te determinanta

e rendit të dytë elementet e kolonës së dytë janë zero, port te determinanta e rendit të tretë elementet e rreshtit të tretë janë zero.

8

Njehso: a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Sqaro zgjidhjen!

5° Vlera e determinantës nuk ndryshon nëse të gjithë elementet e një rreshti (kolone) shumëzohen me një numër të njëjtë k dhe prodhime e atilla të fituara u shtohen elementeve përkatës së ndonjë rreshti (kolone).

Për determinantën e rendit të dytë, ku elementet përkatëse të rreshtit të dytë shumëzohen me numrin e njëjtë k dhe ushtohen elementet përkatëse të rreshtit të parë kemi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{12})a_{22} - a_{12}(a_{12} + ka_{22}) = a_{11}a_{22} - ka_{12}a_{22} - a_{12}a_{12} - ka_{12}a_{22} \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Vlera e determinantës nuk ndryshon.

9 Kontrolllo vetinë 5° te determinanta e rendit të tretë ku elementet e kolonës së dytë shumëzohen me një numër të njëjtë k dhe u shtohen elementet përkatëse të kolonës së tretë.

Shembulli 5

a) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$ te rreshti i parë i shtojmë elementet përkatëse të rreshtit të dytë të shumëzuar me numrin 3 dhe fitojmë determinantën

$$\begin{vmatrix} 1+3 \cdot 3 & -1+2 \cdot 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5, \text{ e cila e ka vlerën e njëjtë me determinantën fillestare.}$$

b) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ te kolona e dytë i shtojmë elementet përkatëse

të kolonës së tretë të shumëzuar me numrin -5 dhe fitojmë determinantën

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \cdot (-5) & 3 \\ 0 & -1+(-2) \cdot (-5) & -2 \\ 0 & 0+(-1) \cdot (-5) & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1, \text{ e cila e ka vlerën e njëjtë me determinantën fillestare.}$$

10 a) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ te kolona e dytë shtoi elementet përkatëse të kolonës së

parë të shumëzuar me numrin $\frac{1}{3}$, ndërsa pastaj njehso të dy determinantat. Çka përfundon?

b) Te determinanta $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ te rreshti i tretë shtoi elementet përkatëse të rreshtit të parë të

shumëzuar me numrin 0,5, ndërsa pastaj njehso të dy determinantat. Çka përfundon?

6° Determinanta shumëzohet me numrin k ashtu që me atë numër k shumëzohen elementet prej një rreshti (kolone) të determinantës

Për determinantat e rendit të tretë elementet e të cilës së rreshtit të dytë shumëzohen me numër të njëjtë k , kemi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{11}a_{32}a_{13} + ka_{12}a_{13}a_{31} - ka_{13}a_{12}a_{31} - ka_{32}a_{13}a_{11} - ka_{11}a_{12}a_{33} =$$

$$= k(a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{11} - a_{11}a_{12}a_{33}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

d.m.th., vlera është e barabartë me vlerën e determinantës fillestare të shumëzuar me k .

11 Kontrolllo vetinë 6° te determinanta e rendit të dytë ku elementet e kolonës së dytë shumëzohen me numrin e njëjtë k .

Shembulli 6 Prej $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 + 15) = 38$ dhe $\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 30 = 38$ është e

qartë se $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$.

12 Njehso determinantën $-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & -3 \cdot 0 & 1 \\ 1 & -3 \cdot 5 & -2 \\ -3 & -3 \cdot 1 & -1 \end{vmatrix}$. Çka përfundon?

7° Nëse çdo element prej një rreshti (kolone) të determinantës që është shumë prej dy mbledhësve atëherë determinanta mund të paraqitet si shumë prej dy determinantave. Elementet te determinanta e parë (mbledhësi i parë-determinanta) te rreshti i përmendur (kolona) janë mbledhësi te parë dhe elementet e determinantës së dytë (mbledhësi i dytë-determinanta) te rreshti (kolona) i përmendur janë mbledhësi te dytë, ndërsa rreshtat (kolonat) tjera janë identike me rreshtat (kolonat) përkatëse si edhe te determinanta fillestare.

Në realitet,

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = (a+e)d - c(b+f) = (ad - bc) + (ed - fc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$$

13

Kontrollo vetinë 7^o te determinanta e rendit të tretë ku elementet e kolonës së dytë janë shumë prej mbledhësve.

Shembulli 7

Vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 1+0 & 5 & -2 \\ -3-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8$. Prej determinantës

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6, \text{ është e qartë } \begin{vmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 1+0 & 5 & -2 \\ -3-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

14

Njehsoi determinantat $\begin{vmatrix} 1+2 & 3 \\ -5+3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$! Çka përfundon?

8° Nëse elementet e një rreshti (kolone) të determinantës së rendit të tretë janë kombinime lineare të elementeve përkatës së dy rreshtave (kolonave) të tjerë atëherë vlera e determinantes është zero

15

Me shfrytëzimin e vetive 3^o dhe 8^o vërteto se $\begin{vmatrix} k_1a_{12} + k_2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ k_1a_{22} + k_2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ k_1a_{32} + k_2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Determinantat e formës $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$ në realitet janë **trekëndore lart**, ndërsa determinantat

$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ në realitet janë **trekëndore poshtë**

16

Trego $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$ dhe $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \text{ !}$

Pastaj njehso determinantën $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ me shfrytëzimin e vetive të determinantave me të cilat e transformojmë në trekëndore të lartë.

Për komplementin algjebrik është saktë vetia:

9° Te determinantat e rendit të tretë, shuma e prodhimeve të elementeve të çfarëdo rreshti (kolone) me komplementet algjebrike përkatëse të rreshtit (kolonës) tjetër është zero.

17

Për determinantat e rendit të tretë $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ kontrollo shumën e prodhimeve të

elementeve të rreshtit të tretë me komplementet algjebrike përkatëse të rreshtit të parë është zero

d.m.th., $a_{31}a_{11}^* + a_{32}a_{12}^* + a_{33}a_{13}^* = 0 \text{ !}$

Detyra për punë të pavarur

1. Kontrolllo vallë:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

ç) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ?$

2. Me shfrytëzimin e vetive të determinantave njehso

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -16 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a-b & ac-bc \\ c+1 & c+c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{ç)} \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}!$$

3. Me shfrytëzimin e vetive të determinantave vërteto:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \sin(x+y) & \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \cos 2\beta & \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \\ \cos 2\gamma & \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}!$$

4. Me shfrytëzimin e disa vetive të determinantave, njehso këto determinanta të rendit të tretë me transformimin në trekëndor të lartë ose trekëndor të poshtëm:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$5. \text{ Për determinantat e rendit të tretë } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ vërteto se } a_{13}a_{11}^* + a_{23}a_{21}^* + a_{33}a_{31}^* = 0$$

3. Zgjidhja e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura dhe diskutimi për bashkësinë e zgjidhjeve

Paraprakisht u njohëm me barazimin linear me dy të panjohura dhe bashkësia e zgjidhjeve të tij, si edhe me sistemin prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura dhe metodat e zgjidhjes së tyre. Si metoda për zgjidhjen e sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura i përmendëm metodën e zëvendësimit, metodën e koeficientëve të kundërt, metoda grafikr dhe rregulla e Kramerit (zgjidhja me ndihmën e determinantave të rendit të dytë). Këtu do të fusim sistem prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura dhe determinantat e rendit të tretë do t'i shfrytëzojmë për zgjidhjen e tij. Zgjidhja e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura me determinanta të rendit të tretë është në realitet shfrytëzimi i rregullës së Kramerit.

Përkufizimi 1: Bashkësia prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura për të cilat kërkohen zgjidhje të përbashkëta quhet **sistem prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura**:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

ku $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$.

Numrat $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ quhen **koeficientët para të panjohurës, ndërsa** numrat d_1, d_2, d_3 quhen **anëtarë të lirë të sistemit**

Kjo formë e sistemit quhet **forma normale** ose **e përgjithshme** e sistemit prej tre barazimeve lineare me tret të panjohura.

Në realitet flitet për konjunksion të tre barazimeve lineare me tri të panjohura.

Zgjidhja e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura, është dhënë me këtë përkufizim

Përkufizimi 2: Zgjidhja e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura është çdo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ për të cilën të tre barazimet}$$

teshe e renditur prej numrave realë të lejuar

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3 \end{cases} \text{ te sistemi kalojnë në gjykime të vërteta d.m.th.}$$

Në lidhje me zgjidhjen është e saktë

Sistemi mund të ketë **zgjidhje të vetme** (sistemi është i caktuar), të **mos ketë zgjidhje** (sistemi është kundërtëhenës) ose ka **pafund shumë zgjidhje** (sistemi është i pacaktuar).

Shpesh here sistemet nuk janë dhënë në formën e përgjithshme, ndërsa duhet të transformohen me transformacione matematikore të mjaftueshme.

Prandaj, është e rëndësishme

Dy sisteme prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura janë **ekuivalente** në fushën e njëjtë të përkufizimit, nëse çdo zgjidhje e njërit sistem është, zgjidhje edhe të sistemit tjetër.

Sistemi ekuivalent me sistemin e dhënë fitohet kurm çfarëdo barazim prej sistemit zëvendësohet me barazimin ekuivalent.

Sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura, nëse nuk është në formën e përgjithshme atëherë me shfrytëzimin e sistemeve ekuivalente të të dhënit mund të silltet në formën normale (të përgjithshme)

Le të jetë dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura në formën normale:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Koeficientët $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ para të panjohurave x, y, z dhe anëtarët e lirë d_1, d_2, d_3 i formojnë determinantat d_1, d_2, d_3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Determinanta Δ , e formuar prej koeficientëve para të panjohurave $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ quhet **determinanta e sistemit**. Por tre determinantat e tjera $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ quhen **determinanta të panjohurave** x, y, z përkatësisht

Është e saktë

Sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura mund të zgjidhet me determinantat

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ Zgjidhja e vetme fitohet me formulat } x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \Delta \neq 0, \text{ të cilat}$$

quhen **rregullat e Kramerit**

Le të jetë (x_0, y_0, z_0) zgjidhje për sistemin $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ d.m.th. fitohen gjykime të sakta. $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3 \end{cases}$ Barazimin e parë e shumëzojmë me komplementin algjebrik a_1^*

të elementit a_1^* . Ekuacionin e dytë e shumëzojmë me plotësuesin algjebrik a_2^* të elementit a_2^* .

Barazimin e tretë e shumëzojmë me komplementin algjebrik a_3^* të elementit a_3^* . Pastaj i mbledhim dhe kemi:

$$a_1^*(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + a_2^*(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) + a_3^*(a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0) = a_1^*d_1 + a_2^*d_2 + a_3^*d_3$$

Me shfrytëzimin e vetisë 10 prej vetive të determinantave të rendit të tretë dhe Teorema 1 të njësia e parë mësimore fitehet:

$$x_0 \underbrace{(a_1^*a_1 + a_2^*a_2 + a_3^*a_3)}_{\Delta} + y_0 \underbrace{(a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + a_3^*b_3)}_0 + z_0 \underbrace{(a_1^*c_1 + a_2^*c_2 + a_3^*c_3)}_0 = \underbrace{a_1^*d_1 + a_2^*d_2 + a_3^*d_3}_{\Delta_x}$$

d.m.th., $x_0 \cdot \Delta = \Delta_x$.

Në të njëjtën mënyrë me shumëzimin e barazimeve me komplement algjebrik të elementeve prej kolonës së dytë fitohet $\Delta = \Delta_y$ edhe me shumëzim të barazimeve me komplementin algjebrik të elementeve prej kolonës së tretë fitohet $z_0 \cdot \Delta = \Delta_z$. Në fund fitohet se treshja e numrave (x_0, y_0, z_0)

që është zgjidhje e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura dhe të sistemit $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$

. Le të jetë (x_0, y_0, z_0) dhe çfarëdo treshe e numrave të renditur është zgjidhje e vetme e

sistemit $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$. Atëherë ajo është zgjidhje edhe të sistemit $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$. Prej këtu

fitohen formulat $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. Prej çfarëdo tresheve të numrave (x_0, y_0, z_0) vijon se

çdo zgjidhje e sistemit $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ është zgjidhje e sistemit $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ d.m.th., zgjidhja

e vetme është $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$

Shembulli 1 Për sistemin prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura,

$$2x + y - z = 0$$

$$x - 2z = -3$$

$$5y + z = 2$$

determinantat janë

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

Në pajtim me rregullat e Kramerit kemi $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$ Zgjidhja e sistemit është treshja e numrave të renditur (1, 0, 2)

1

Me rregullat e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 8 \\ y - 2z = -5 \end{cases}$$

Vërejtëm se sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura është ekuivalent me sistemin

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$. Le të jetë Δ për sistemin prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura. Në këtë rast janë të mundshme dy nënraste: $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$

a) Nëse të paktën njëra prej determinantave $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ është e ndryshueshme prej zeros, për

shembull $\Delta_x \neq 0$, atëherë te sistemi $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ është kundërthënës. Prej këtui vijon se sistemi prej tre

barazimeve lineare me tri të panjohura është kundërthënës.

b) Nëse $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ atëherë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura ka pafund shumë zgjidhje

Me të vërtetë, nëse të gjithë koeficientët prej një barazimi dhe anëtarët e lirë janë zero atëherë ai barazim e ka formën $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$. Domethënë çdo treshe e numrave të renditur do të jetë zgjidhje e këtij barazimi. Atëherë kemi sistem prej dy barazimeve lineare tjera me tri të panjohura, që mundet të ketë pafund shumë zgjidhje ose të jetë sistem kundërthënës. Fitohet situatë e njëjtë dhe nëse të paktën njëri prej koeficientëve të paktën një barazim është i ndryshueshëm prej zeros.

2 Te sistemi $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ ku
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 merr $a_1 \neq 0$ vërteto se sistemi

ka pafund shumë zgjidhje ose është kundërthënës!

Është e saktë:

Sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura ka ose pafund shumë zgjidhje (sistem i papërcaktuar) ose nuk ka zgjidhje (sistem kundërthënës) nëse $\Delta = 0$.

Në pajtim me atë që u theksuar deri më tani, mund ta japim këtë teoremë të Kramerit:

Teorema 1 (Kramer): a) Nëse determinanta e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura është e ndryshueshme prej zeros d.m.th., atëherë ai sistem ka zgjidhje të vetme (sistem të pacaktuar) $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

b) Nëse determinanta e sistemit $\Delta = 0$ është $\Delta x \neq 0 \vee \Delta y \neq 0 \vee \Delta z \neq 0$ edhe atëherë sistemi nuk ka zgjidhje (sistem kundërthënës).

c) Nëse determinanta e sistemit është $\Delta = 0$ edhe $\Delta x = 0 \wedge \Delta y = 0 \wedge \Delta z = 0$ atëherë sistemi ka pafund shumë zgjidhje ose nuk ka zgjidhje (sistem kundërthënës)

Shembulli 2

a) Është dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ y = -3 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

Determinanta e sistemit është $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ndërsa determinanta

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$: Domethënë, sistemi është kundërthënës. Me të vërtetë me

zëvendësimin $y = -3$ te barazimi i parë dhe i tretë të sistemit, fitohet sistemi $\begin{cases} x - z = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$, i cili

është sistem kundërthënës

b) Është dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura,

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ y = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

Determinanta e sistemit është $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ndërsa edhe determinantat $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

Domethënë, sistemi ka pafund shumë zgjidhje ose është kundërthënës. Nëse te barazimi i parë dhe i tretë prej sistemit marrim për $y = -1$ atëherë e fitojmë sistemin $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ku njëri barazim është eliminuar edhe $z = x$. Për $x = t$ kemi se $z = t$. Domethënë, zgjidhja e përgjithshme e këtij sistemi mund të merret çifti i renditue $(t, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$ d.m.th., bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $M = \{(t, -1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) Është dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ 6x + 2y - 6z = 2 \\ 9x + 3y - 9z = 2 \end{cases}.$$

Determinanta e sistemit është $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & -6 \\ 9 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, ndërsa edhe determinantat $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

Domethënë, sistemi ka pafund shumë zgjidhje ose është kundërthënës. Nëse barazimin e dytë e pjesëtojmë me 2 atëherë e fitojmë sistemin $\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ 3x + y - 3z = 1 \\ 3(3x + y - 3z) = 2 \end{cases}$ i cili është qartë sistem kundërthënës prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

Zgjidhi këto sisteme prej tre barazimeve me tri të panjohura:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - 2y + 2z = 10; \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -3x + 3y - 3z = 2. \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ ku anëtarë e lirë janë zero quhet **sistem homogjen prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura**.

Sistemi homogjen i formon determinantat:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Është e qartë se prej vetive të determinantave të rendit të tretë fitohet $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Në pajtim me teoremën e Kramerit nëse $\Delta \neq 0$ atëherë sistemi ka zgjidhje të vetme, ndërsa kjo është zgjidhje zero (trivial) (0,0,0). Ky sistem ka edhe zgjidhje jozero dhe për këto zgjidhje është saktë kjo teoremë.

Teorema 2: sistem homogjen prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura ka zgjidhje jozero nëse dhe vetëm nëse determinanta e sistemit $\Delta = 0$

jozero

Vërtetim: Sistemi homogjen prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura le të ketë zgjidhje

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \text{ Për } (x_0, y_0, z_0) \text{ prej rregullave të Kramerit fitohet vetëm zgjidhje zero } (0,0,0) \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

për sistemin homogjen prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura dhe vijon kundërthënie e supozimit se ka zgjidhje jozero. Domethënë $\Delta = 0$.

Le të jetë $\Delta = 0$ të sistemit homogjen prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \text{ Prej teoremës së Kramerit c) vijon se ky sistem ka pafund} \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

shumë zgjidhje ose është kundërthënë. Duke pasur parasysh se ky sistem e ka zgjidhjen zero vijon se nuk mund të jetë sistem kundërthënë. Vijon se sistemi ka pafund shumë zgjidhje. ■

Shembulli 3

Sistemi homogjen prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ y = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

e ka determinantën $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Derisa te barazimi i parë dhe i tretë prej sistemit marrim për $y = 0$ atëherë e fitojmë sistemin $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ku njëri barazim është eliminuar dhe $z = x$. Për

$x = t$ fitojmë se $z = t$. Domethënë, zgjidhja e përgjithshme e këtij sistemi mund të merret çifti i renditur $(t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$ d.m.th., bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $M = \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4

Gjej të gjitha zgjidhje e këtyre sistemeve homogjene prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Diskutimi i bashkësisë së zgjidhjeve

Diskutimi i bashkësisë së zgjidhjeve të një sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura do ta realizojmë me shfrytëzimin e determinantive dhe teoremës së Kramerit nëpërmjet shembullit dhe detyrave, në mënyrë të njëjtë siç edhe diskutimi për bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura në vitin e parë.

Shembulli 4

Për sistemin prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

në lidhje me parametrin a do ta diskutojmë zgjidhjen e tij. Determinanta e sistemit është:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2 - 3a = (a-1)^2(a+2). \text{ Tre determinantat e tjera janë:}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-3)(a-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1).$$

Sistemi ka zgjidhje të vetme kur $\Delta \neq 0$ d.m.th., $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ dhe ajo është $x = \frac{a-3}{(a-1)(a+2)}$

$y = \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)} = z$ d.m.th., zgjidhja është treshja e renditur

$$\left(\frac{a-3}{(a-1)(a+2)}, \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)}, \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)} \right).$$

Sistemi nuk ka zgjidhje ose ka pafund shumë zgjidhje, nëse $\Delta = 0$ d.m.th., $a = 1 \vee a = -2$

Për $a = 1$ determinante $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Sistemi ka formë $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ dhe njëri barazim është

eliminuar. Domethënë e kemi sistemin $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ dhe prej barazimit të parë kemi $z = 1 - x - y$.

Me zëvendësimin e këtij barazimi në të dytën kemi $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ që është kundërthënëse. Domethënë sistemi është sistemi kundërthënëse d.m.th., nuk ka zgjidhje

Për $a = -2$ determinantën $\Delta x = 15 \neq 0$ atëherë sistemi nuk ka zgjidhje

Varësisht prej parametrin a , diskutoe zgjidhjen e sistemit

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+4y+z=1 \\ 6x+(a+2)y+2z=1 \end{cases}.$$

Disa sisteme mundet futje e të panjohurave ndihmëse përkatëse të transformohen në sistem prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura dhe kështu të zgjidhen.

Shembulli 5 Sistemi:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-z} - \frac{3}{y+2x} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x-z} + \frac{2}{y+2x} - \frac{3}{z} = -6 \\ \frac{4}{x-z} - \frac{5}{y+2x} - \frac{2}{z} = 12 \end{cases}$$

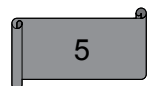
me futjen e të panjohurave ndihmëse $u = \frac{1}{x-z}, v = \frac{1}{y+2x}, w = \frac{1}{z}$ transformohet në sistem prej tre

barazimeve $\begin{cases} 2u - 3v + w = 9 \\ u + 2v - 3w = -6 \\ 4u - 5v - 2w = 12 \end{cases}$ lineare me tri të panjohura. Ky sistem duke e zgjidhur me rregullat

e Kramerit ke zgjidhje (1,-2,1). Kthehemi prapa te të panjohurat ndihmëse, ku fitojmë sistem prej

tre barazimeve lineare me tri të panjohura $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$. Me zgjidhjen e këtij sistemi me rregullat

e Kramerit fitohet zgjidhja (2,1), që është njëkohësisht edhe zgjidhje e sistemit fillestar $(2, -\frac{5}{2}, 1)$

 Zgjidhe sistemin. $\begin{cases} \frac{3}{x+y-z} - \frac{6}{y+x} - \frac{1}{x-z} = 1 \\ \frac{6}{x+y-z} - \frac{4}{y+x} + \frac{1}{x-z} = 3 \\ \frac{15}{x+y-z} + \frac{2}{y+x} + \frac{3}{x-z} = 5 \end{cases}$

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi këto sisteme të barazimeve:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = -1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ -5x + 5y - 5z = 5 \end{cases}$; ç) $\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases}$.

2. Zgjidhi këto sisteme homogjene prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0. \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

3. Varësisht prej vlerës së parametrit m diskuto zgjidhjen e sistemit

$$a) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m; \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -4x + 5y - 2z = 1 \\ 2x + y - mz = 1 - 2m \end{cases}$$

4. Me futjen të zëvendësimit zgjidhi këto sisteme:

$$a) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -6; \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -\frac{2}{x-2y} + \frac{3}{x+y+z} - \frac{4}{y-z+1} = 1 \\ \frac{1}{y-z+1} + \frac{3}{x-2y} - \frac{1}{x+y+z} = 2. \\ \frac{1}{x-2y} - \frac{4}{x+y+z} + \frac{5}{y-z+1} = -3 \end{cases}$$

4. Koncepti për matricë

Ta përkufizojmë konceptin matricë

Përkufizimi 1: Le të jenë $m, n \in \mathbb{N}$ numra natyror dhe le të jenë dhënë $m \cdot n$, numrat realë

$a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, të renditur në m rreshta dhe n kolona

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Për këtë skemë drejtkëndore themi se është **matricë** të formës $m \times n$ ose $m \times n$ – **matrica**, **ndërsa** për numrat realë a_{ij} se janë elementet e saj

Matricat zakonisht i shënojmë me shkronjat latine të mëdhaja të shtypit dhe në vend të shënimit të dhënë te përkufizimi 1, shkurtimisht matricën mund ta shkruajmë edhe me $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Një matricë është plotësisht e përcaktuar nëse dihen vlerat e elementeve të saj, si edhe pozitat e tyre në kuadër të asaj matrice.

Kur flasim për pozitën e elementit të matricës atëherë do të themi se ai gjendet te rreshti i dhe te kolona j d.m.th, te prerja e rreshtit i dhe kolonës j .

Shembulli 1 Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ është e formës me 2 rreshta dhe 3 kolona, ndërsa matrica $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ është e formës me 2 rreshta dhe 4 kolona

1 Cakto rendin e këtyre matricave:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Përkufizimi 2: Për dy matricë $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ themi se janë **të barabarta** nëse janë prej formës së njëjtë $m \times n$ dhe nëse elementet përkatëse i kanë të barabarta, d.m.th., $a_{ij} = b_{ij}$ nëse për të gjithë $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$

Shembulli 2 Të dy matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$ nuk janë të barabarta, edhe se të

dyjat janë të rendit të njëjtë 3×2 dhe përbëhen prej elementeve të njëjtë. Por, elementet e njëjtë duhet të jenë vendosur edhe në vendet përkatëse. Numri 1 prej matricës A gjendet te pozita rreshti 1 dhe kolona 1, por e matricës B gjendet te pozita rreshti 1 dhe kolona 2.

2 Caktoi ashtu që të dy matricat të jenë të barabarta,

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y+1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Përkufizimi 3: Për matricën e formës $m \times n$, për të cilën vlen se të gjithë elementet e saj janë të barabartë me zero, do të themi se është matricë-**zero** dhe e shënojmë $O_{m,n}$ (ose $O_{n \times n}$)

Përkufizimi 4: Matrica për të cilën $m = 1$ (d.m.th., $1 \times n$ është i formës që do të thotë se ka vetëm një rresht

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]$$

quhet **matrica-rresht**, ndërsa matrica me vetëm një kolonë (të formës

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

e quajmë si **matrica-kolonë**.

Përkufizimi 5: Le të jetë A , $m \times n$ matricë. Me A^T do ta shënojmë matricën të fituar me ndërrimin e roleve të rreshtave dhe kolonave të A . Për A^T themi se është **matricë e transponuar** e matricës.

Nëse $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ atëherë $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$

Shembulli 3

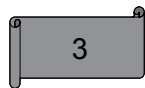
Për matricën $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ matrica e saj matrica e transponuar është

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Për matricën e transponuar e saktë është kjo teorema 1:

Teorema 1: Për çfarëdo matricë A vlen $(A^T)^T = A$.

Vërtetim: Vetia vijon prej përkufizimit 5, nëse $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ atëherë $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$. Nëse $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ atëherë $A^T = [a_{ij}]_{n \times m} = A$.



3

Për matricën $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, kontrollo barazimin $(A^T)^T = A$

Përkufizimi 6: Për matricën për të cilën numri i rreshtave është i barabartë me numrin e kolonave, d.m.th. $m = n$ themi se është **matricë katrore** (të rendit n). Elementet $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ e matricës katrore $A = [a_{ij}]$ të rendit n e përbëjnë diagonalja (kryesore) e A . Diagonalja dytësore e përbëjnë elementet $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$.

Përkufizimi 7: Për matricën $E_n = [e_{ij}]$ e rendit n për të cilin vlen se themi se $e_{ij} = \begin{cases} 1: \text{nëse: } i = j \\ 0: \text{nëse: } i \neq j \end{cases}$ (nëse: nëse) është **matricë njësi** të rendit n .

Shembulli 4

a) Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ është matricë katrore e rendit 3. Elementet e

diagonales kryesore janë 2, -2. Elementet e diagonales kryesore janë Elementet e diagonales kryesore janë , ndërsa elementet e diagonales dytësore janë 4, -2, -4

b) Matrica njësi e rendit të dytë e ka formën

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4

a) Jepni shembull të matricës katrore të rendit 4 dhe shënoni elementet e diagonales kryesore dhe dytësore.

b) Shkruaje matricën njësi të rendit të tretë!

Disa matrica katrore:

1. Matrica katrore quhet **matricë trekëndore lart** nëse të gjitha elementet e saja “nën” diagonalja kryesore janë të barabarta me zero, ose më precis, ajo është matrica për të cilën të gjithë $a_{ij} = 0$ d.m.th., $i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Matrica katrore quhet **matricë trekëndore poshtë** nëse të gjitha elementet e saja “mbi” diagonalja kryesore janë të barabarta me zero d.m.th., ajo është matrica për të cilën $a_{ij} = 0$ d.m.th., $i > j$ vlen se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Këto dy lloje të matricave me emër të përbashkët emërtohen **matrica trekëndore**.

3. Matrica e cila njëkohësisht është trekëndore edhe poshtë edhe lart quhet **matrica diagonale** d.m.th.,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Nëse të gjithë elementet prej siagonales te diagonalja te matrica diagonal ndërmjet veti janë të barabarta, matricën e këtillë do ta quajmë **matricë skalare** d.m.th.,

$$a_{ij} = \begin{cases} d: & \text{ako } i = j \\ 0: & \text{ako } i \neq j \end{cases} \text{ d.m.th.,}$$

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}$$

5. Nëse $A^T = A$, për A themi se është **matricë simetrike**, derisa atëherë $A^T = -A$ matrica A quhet **matricë e pjerrët simetrike (antisimetrike)**

6. Nëse $A^T A = A A^T = E$, atëherë A matrica quhet **matricë ortogonale**

Shembulli 5

a) Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ është matricë trekëndore lart, ndërsa matrica

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

është matricë trekëndore poshtë, derisa pra matrica

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

është matricë diagonale

b) Matrica $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ është matricë skalare.

c) Matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ është matricë simetrike, ndërsa matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ është matricë simetrike e pjerrët



a) Jep shembull të matricës trekëndore lart dhe shembull të matricës trekëndore poshtë të rendit të tretë!

b) Çfarë matrica janë matrica katrore njësi dhe zero?

c) Matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ është simetrike ose matricë simetrike e pjerrët?

Detyra për punë të pavarur

1. Janë dhënë matricat $A = \begin{bmatrix} x-y & 2y \\ 1 & -z-u \\ x-z & z \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} z & u \\ z+u & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$. Për cilat vlera të x , y dhe z , matricat janë të barabarta?

2. Për matricën $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ cakto A^T !

3. A ekzistojnë te matrica $A = \begin{bmatrix} a & c \\ a-c & 3 \end{bmatrix}$ për të cilat $A = A^T$?

4. Si janë këto matrica katrore

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{ç) } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Operacionet me matrica

Te matricat mund të përkufizohen operacione të caktuara. Operacionet me të cilat operohet janë: shumëzimi i matricave me numër, mbledhja e matricave dhe shumëzimi i matricave.

Shumëzimi i matricës me numër

Përkufizimi 1: Le të jenë $a \in \mathbb{R}$ dhe $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. **Prodhiimi i numrit real a me matricën A** është matrica e rendit të njëjtë si edhe matrica A (domethënë, e rendit $m \times n$, e shënojmë me aA , elementet e të cilës janë prodhimet e numrit a me elementet përkatëse prej A , d.m.th.,

$$aA = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Shembulli 1 Prodhiimi i numrit real -2 me matricën katrore $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ të rendit 2 është matrica

$-2 \cdot A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 & -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, e cila është gjithashtu matricë katrore e rendit 2, si edhe matrica A .

 Njehso: a) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 6 & 2 \end{bmatrix}$; b) $6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Për këtë operacion është e saktë teorema 1:

Teorema 1: Matricat A dhe O le të jenë të rendit $m \times n$ dhe $a \in \mathbb{R}$. Atëherë janë të sakta këto veti:
i) $0 \cdot A = O$, ii) $a \cdot O = O$, iii) $1 \cdot A = A$, iv) $(-1) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

Vërtetim: Le të jenë çfarëdo $m \times n$ matrica të dhëna $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $O = [0]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

(i) Prodhiimi i numrit real 0 me matricën A

$$0 \cdot A = 0 \cdot [a_{ij}] = [0 \cdot a_{ij}] = [0] = O$$

është matrica zero O

(ii) Prodhiimi i çfarëdo numri real a dhe matrica zero O është

$$a \cdot O_{m,n} = a \cdot [0] = [a \cdot 0] = [0] = O_{m,n}$$

është matrica zero O .

(iii) Prodhimi i numrit real 1 dhe matricës A është

$$1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

është matrica A .

(iv) Prodhimi i numrit real -1 dhe matricës A është

$$-1 \cdot A = -1 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [-1 \cdot a_{ij}] = [-a_{ij}]_{m \times n} \text{ dir.}$$

■

Përkufizimi 2: Për matricën $(-I)$ A do të themi se është **e kundërt** e matricës A dhe do ta shënojmë me $-A$

Shembulli 2 Për matricën $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, e kundërt është matrica $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

2. Shkruaj matrica të kundërta të matricave:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Mbledhja e matricave

Operacioni i mbledhje e matricave është përkufizuar me këtë përkufizim 3:

Përkufizimi 3: Le të jenë $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ dhe $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, ku $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Shuma e matricave A dhe B është matrica $m \times n$, elementet e të cilës prej A dhe B d.m.th. elementet të cilët janë në pozitë të njëjtë:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Në pajtim me përkufizimin 3 mund të përfundojmë se mbledhen vetëm matricat e rendit të njëjtë. Derisa tani zbritja e dy matricave realizohet nëpërmjet mbledhjes së matricës së parë (mbledhësi i parë) me matricën e kundërt të matricës së dytë (mbledhësi i dytë) që merr pjesë në procesin e mbledhjes d.m.th., $A - B = A + (-B)$.

Shembulli 3 Për matricat katrore $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ të rendit 2 me 2 rreshta dhe kolona, shuma e tyre është:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3 & 2+(-3) \\ -3+3 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

d.m.th., matrica katrore është e rendit të njëjtë 2, si edhe të dy matricat A dhe B , të cilat i mbledhim:

3. Njehso $A + B$ dhe $B + A$ për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Çka vëren?

Teorema 2: Matricat A, B, C dhe O le të jenë të rendit të njëjtë dhe $a, b \in \mathbb{R}$. Atëherë janë të sakta këto veti:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| 1) $A + B = B + A$; | 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$; | 3) $A + O = A$; |
| 4) $A + (-A) = O$; | 5) $(a + b)A = aA + bA$; | 6) $(ab)A = a(bA)$; |
| 7) $a(A + B) = aA + aB$; | 8) $(aA)^T = aA^T$; | 9) $(A + B)^T = A^T + B^T$. |

Vërtetim: Le të jenë dhënë matricat $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, $m \times n$ të rendit $a, b \in \mathbb{R}$

1) Me zbatimin e ligjit komutativ për mbledhje të numrave realë, tregohet se është i saktë ligji komutativ për mbledhjen e matricave

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = B + A.$$

2) Me shfrytëzimin e ligjit asociativ për mbledhje të numrave realë, tregohet se është i saktë ligji asociativ për mbledhje të matricave:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} + ([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}) = A + (B + C). \end{aligned}$$

3) Shuma e matricës A dhe matricës zero na jep përsëri matricën A d.m.th.,

$$A + O = [a_{ij}]_{m \times n} + [0]_{m \times n} = [a_{ij} + 0]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A.$$

4) Shuma e matricës dhe matricës së saj të kundërt na jep matricën zero O d.m.th.,

$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = O.$$

5) Për numra realë dhe çfarëdo matricë, me zbatimin e ligjit distributive të shumëzimit në lidhje me mbledhjen e te numra realë kemi:

$$\begin{aligned} (a + b)A &= (a + b) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [(a + b) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij} + b \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [b \cdot a_{ij}]_{m \times n} = \\ &= a \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + b \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = a \cdot A + b \cdot A. \end{aligned}$$

6) Për çfarëdo numra realë a, b dhe çfarëdo matricë A me zbatimin e ligjit asociativ të shumëzimit të numrave realë kemi:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot A &= (a \cdot b) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [(a \cdot b) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot (b \cdot a_{ij})]_{m \times n} = a \cdot [b \cdot a_{ij}]_{m \times n} \\ &= a \cdot (b \cdot [a_{ij}])_{m \times n} = a \cdot (b \cdot A) \end{aligned}$$

7) Për çfarëdo numër real a dhe çfarëdo matrica A dhe B , me zbatimin e ligjit distributive të shumëzimit në lidhje me mbledhjen te numra realë kemi:

$$a \cdot (A + B) = a \cdot ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) = a \cdot [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [a \cdot b_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= a \cdot \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} + a \cdot \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = a \cdot A + a \cdot B.$$

8) Për çfarëdo numër real a dhe çfarëdo matricë A , prej $aA = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ kemi: $(aA)^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$, ndërsa është e saktë dhe $aA^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$. Vijon. $(aA)^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m} = aA^T$

9) Për çfarëdo matrica A dhe B , në pajtim me përkufizimin për mbledhje të matricave dhe matricës së transponuar, është e saktë $A^T = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$, $B^T = \begin{bmatrix} b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} + \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}, A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Vijon $(A + B)^T = A^T + B^T$

Shembulli 4 Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ matrica $3A - 2B$ e ka formën

$$3A - 2B = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4 Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ dhe numrat realë 2 dhe -5 provoi vetitë e teoremës 2

Shumëzimi i matricave

Për shumëzimin e dy matricave e japim këtë përkufizim 4:

Përkufizimi 4: Le të jenë $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ dhe $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{n \times k}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k$. Me prodhim të matricave A dhe B do ta nënkuptojmë matricën $A \cdot B = C$ ku $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{m \times k}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$ dhe

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$$

Prej përkufizimit është e qartë se shumëzohen vetëm matricat për të cilat vlen se numri i kolonave e matricës së parë (shumëzuesi i parë) është i barabartë me numrin e rreshtave të matricës së dytë (shumëzuesi i dytë) dhe kështu që çdo element c_{ij} (domethënë elementi pozita e të cilit është në

prerjen e rreshti i dhe kolonës j) prej matricës-prodhim fitohet mer shumëzimin e elementit prej rreshtit i të matricës së parë me elementet përkatëse të kolonës j të matricës së dytë dhe pastaj prodhimet mbledhen.

Shembulli 5 Për matricën katrore $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ të rendit 2 me 2 rreshta dhe 2 kolona dhe matrica e rendit 2×3 me 2 rreshta dhe 3 kolona $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, prodhimi i tyre është matrica C e rendit 2×3 me 2 rreshta dhe 3 kolona. Operacioni shumëzim realizohet sipas rregullës së dhënë më poshtë.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -9 & 13 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = C$$

- 1 rreshti me 1 kolona: $1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$ – elementi te matrica C ; 11a
- 1 rreshti me 2 kolona: $1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 2$ – elementi te matrica C ; 12a
- 1 rreshti me 3 kolona: $1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$ – elementi te matrica C ; 13a
- 2 rreshti me 1 kolona: $2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 = -9$ – elementi te matrica C ; 21 a
- 2 rreshti me 2 kolona: $2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) = 13$ – elementi te matrica C ; 22a
- 2 rreshti me 3 kolona: $2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -2$ – elementi te matrica C . 23a

5 Cakto matricën $C = A \cdot B$ për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Për shumëzimin e matricave do ta japim këtë teoremë 3, pa vërtetim:

Teorema 3: Le të jetë $a \in \mathbb{R}$. Atëherë janë të sakta vetitë:

- 1) B për, $a(AB) = (aa)B = A(ab)$, për matricën $m \times n$ edhe matrica A dhe $n \times k$;
- 2) $A(BC) = (Ab)C$, për matricën $m \times n$ edhe matrica B dhe $k \times l$ (ligji asociativ);
- 3) $A(B + c) = AB + AC$ për $m \times n$ matricën A , $n \times k$ edhe matrica B dhe C ; (ligji distributive i majtë)
 $(A + b)C = AC + BC$, për $m \times n$ matricën $n \times k$ edhe matrica A dhe B ; (ligji distributive i djathtë)
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$ për $m \times n$ matricën A , $n \times k$ edhe matrica B

Vërtetimi bëhet thjeshtë me shfrytëzimin e përkufizimit për prodhim të matricave dhe vetive të operacioneve me numra realë.

6

Njehso AB dhe BA : a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, Vallë $AB = BA$?

Në rastin e përgjithshëm vlen ligji komutativ për shumëzimin e matricave d.m.th., $AB \neq BA$

7

Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, dhe numri real 6, provo vetitë e teoremës 3

Fuqia e matricës

Me shfrytëzimin e operacionit shumëzim të matricave do të përkufizojmë fuqinë e matricës.

Për matricën katrore prodhimi A dhe $A \cdot A$ shkurtimisht e shënojmë me A^2 d.m.th., $A \cdot A = A^2$. Për prodhimin $A \cdot A \cdot A = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$ shkurtimisht shkruajmë A^3 d.m.th., $A \cdot A \cdot A = A^3$ etj.

Përkufizimi 5: Për çdo matricë katrore A mund të përkufizohet, **fuqia** e A^n (ku n është numër i plotë jonegativ) me: $A^0 = E$, $A^1 = A$ dhe në mënyrë induktive $A^n = A^{n-1} \cdot A$ për $n > 1$

Te fuqia $A^0 = E$, E është matricë njësi të rendit të njëjtë si edhe matrica A

8

Për matricat e dhënë: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; 6) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ njehso A^2 dhe A^3 .

Përkufizimi 6: Nëse $A^2 = E$, arëherë A quhet **matricë involutore**.

Përkufizimi 7: Nëse $A^2 = A$, atëherë A quhet **matricë idempotente**.

9

Kontrollo vallë matricat A dhe B janë involutore ose idempotente ose asnjëra, as tjetra.

Detyra për punë të pavarur

1. Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ njehso:

a) $5A - 3B + 4C$; b) $(-2A)^T + (3B - 4C)^T$; c) $5C^T - 3A^T + 4B^T$.

2. Për matricat e dhëna te detyra 1 provo se a është e saktë:

a) $(A + B) + C = A + (B + C)$; b) $A + C = C + A$!

3. Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, njehso:

a) $5A - 3BC$; b) $A^T \cdot (3B - 4C)$; c) $(AC)^T - (3BC)^T$.

4. Për matricat e dhëna te detyra 3 provo se a është e saktë:

a) $BC = CB$; b) $A \cdot (C + B) = AC + AB$; c) $(AC)B = A(CB)$!

5. Cilat prej këtyre matricave $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ dhe $D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ mund të shumëzohen? Njehso prodhimet të cilët ekzistojnë! Pastaj gjej B^2 dhe D^3

6. Provo cila prej këtyre matricave janë involutore, ndërsa cilat idempotente:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Matrica inversibile dhe inverse

Në këtë pjesë do të shqyrtojmë matrica katrore.

Së pari do të fusim konceptin determinantë e matricës katrore.

Për matricën katrore $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, determinanta është:

$$\det A = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Për determinantat e dy matricave katrore A dhe B vlen: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Para se ta fusim konceptin e matricës josingulare (inversibile, invertibile) përpiku ta zgjidhësh detyrën.

1 Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, njehso AB dhe BA .

Përkufizimi 1: Për matricën katrore A themi se është matricë **inversibile (josingulare, invertibile)**, nëse ekziston matricë katrore B e rendit të njëjtë si edhe A , ashtu që $AB = BA = E$

E saktë është kjo teoremë 1

Teorema 1: Për matricën A inversibile (josingulare, invertibile) matrica saj inverse A^{-1} është njëvlerësisht e caktuar.

Vërtetim: Le të jetë A matricë josingulare (inversibile), Atëherë ajo ka matricë inverse. Për matricën A le të ekzistojnë dy matrica inverse B dhe C . Vijon $AB = BA = E$ dhe $AC = CA = E$. Domethënë $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$.

Nëse matrica nuk është josingulare, atëherë ajo quhet **matricë singulare**

Shembulli 1 a) Matrica singular është matrica zero.

b) Matrica njësi është josingulare (ajo është inverse e vetvetes) d.m.th., $EE = E$ pasi $E = E^{-1}$.

Kontrollo!

c) Për matricën $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ do ta gjejmë matricën inverse me barazimin $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$

$$\text{Kemi } \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2u = 0 \\ x + 3z = 0 \\ y + 3u = 1 \end{cases} \text{ Pas kontrollit } \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \\ u = 1 \end{cases}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \quad A^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$$

fitohet se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrica inverse e matricës së rendit të dytë. Matrica inverse e rendit të dytë ta fitojmë në të njëjtën

mënyrë si te shembulli 1, c). Për $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matricën do ta gjejmë matricën inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ me barazimin $AA^{-1} = E$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

$$\text{Kemi } \begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bu=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+du=1 \end{cases}, \text{ prej ku } \begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc} \\ y = -\frac{b}{ad-bc} \\ z = -\frac{c}{ad-bc} \\ u = \frac{a}{ad-bc} \end{cases}. \text{ Derisa tani } A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$$

Prej këtu matrica inverse e matricës $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ do ta ketë këtë formë

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Mund të përfundojmë se për të ekzistuar A^{-1} është e nevojshme dhe e mjaftueshme $A \neq 0$.

Shembulli 1 Për matricën $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ determinanta është $B = 2 \neq 0$. Domethënë, ekziston matricë inverse e matricës B . Matrica inverse është

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2

Gjeje matricën inverse të matricës $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

Matrica inverse e matricës së rendit të tretë. Ta formojmë matricën elementete të cilës janë të

barabarta me komplemente algebrike përkatëse të $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Domethënë, le të jetë

matrica katrore e rendit 3 dhe le të jetë $A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}$. Matrica e këtillë e fituar e përbërë

prej komplementeve algebrike $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ të elementeve përkatëse a_{ij} prej matricës quhet

matricë reciproke e matricës A . Për matricën e transponuar të saj do të themi se është matricë e

adjunguar e matricës A dhe e shënojmë me $adj A = (A^*)^T$

Vijojnë dy teorema. Të cilat do të na japin kriter për josingularitet të një matrice katrore dhe formulë për njehsimin e matricës inverse.

Teorema 1: Për çdo matricë katrore vlen $A \cdot adj A = adj A \cdot A = (\det A) \cdot E$

Teorema 2: Matrica katrore A është matricë josingulare nëse dhe vetëm nëse $A \neq 0$. Në rastin e këtillë, matricën inverse e gjejmë me

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{\det A} \cdot adj A$$

Domethënë, nëse është dhënë matrica katrore A , për të njehsuar A^{-1} dhe nëse ajo është e ndryshueshme prej zeros, atëherë ka matricë inverse dhe ajo është matrica elementet e të cilës janë të barabarta me elementet përkatëse prej matricës së adjunguar të ndara me vlerën e determinantës së A

3

Vërteto barazimin $A \cdot adj A = adj A \cdot A = (\det A) \cdot E$!!

Shembulli 3

ekziston

Për matricën $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ determinanta është $\det A = 2 \neq 0$. Domethënë,

matricë inverse e matricës A . Për matricën reciproke kemi:

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & a_{12}^* &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & a_{13}^* &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\ a_{21}^* &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, & a_{22}^* &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & a_{23}^* &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ a_{31}^* &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, & a_{32}^* &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, & a_{33}^* &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Matrica e saj reciproke është $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Matrica inverse është $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4 Gjeje matricën inverse të $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 3: Le të jenë A dhe B dy matrica josingulare (inversibile) të rendit të njëjtë. Atëherë janë të sakta këto veti

- 1) $A = (A^{-1})^{-1}$; 2) Ekziston $(AB)^{-1}$, ku $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Vërtetim: Le të jenë A dhe B dy matrica josingulare (inversibile) të rendit të njëjtë

1). $A = AE = A(A^{-1}(A^{-1})^{-1}) = (AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = E(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

2) Matricat A dhe B janë josingulare dhe është e saktë $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Normalisht, ekziston edhe (matricë inversibile), domethënë ekziston $(AB)^{-1}$ Kemi

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

Vijon $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5 Le të jenë dhënë matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kontrollo se matricat a janë josingulare! Pastaj kontrollo vetitë 1) dhe 2) prej teoremës 3.

Detyra për punë të pavarur

1. Të caktohen matricat inverse për matricat:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2. Të caktohen matricat inverse për matricat:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ kontrollo barazimin $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. Për matricën $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ kontrollo barazimin $A = (A^{-1})^{-1}$

7. Zgjidhja e barazimeve të matricës

Deri më tani keni zgjidhur barazime të ndryshme algjebrike. Këtu do të njihemi me të ashtuquajturat **barazime të matricës**. Barazimet e matricës janë barazime të cilat e panjohura është matrica. Në hapin e parë zgjidhet barazimi i matricës nëpërmjet të shprehurit të panjohurës matricë, më së shpeshti të shënuar me X , ndërsa hapi i dytë operohet me matricat me ruajtjen e vetive të tyre. Në vazhdim do të japim shembuj të barazimeve të matricës, ku matricat $A, B, C, \dots$ janë katrore të rendit të dytë dhe luajnë rol të matricat e njohura, ndërsa matrica X është matrica katrore e panjohur. Është e rëndësishme se nuk vlen ligji komutativ për shumëzim të dy matricave katrore të çfarëdoshme A, B , pra për këtë shkak kur shumëzojmë barazim me matrica, do të theksojmë se a shumëzojmë prej të majtës ose prej të djathtës.

Shembulli 1 Te këto barazime të matricës do ta shprehim matricën X .

$$\text{a) } A \cdot X = B / \cdot A^{-1} \text{ prej të majtës} \quad \text{b) } X \cdot A = B / \cdot A^{-1} \text{ prej të djathtës}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$XE = B \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$\text{c) } A \cdot X \cdot B = C / \cdot A^{-1} \text{ prej të majtës}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$EX \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$X \cdot B = A^{-1} \cdot C / \cdot B^{-1} \text{ prej të djathtës}$$

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$XE = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

Është e qartë se gjatë të zgjidhurit e barazimit të matricës është e nevojshme të njehsohet matrica inverse.

Shembulli 2

Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dhe $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ barazimi i matricës

$BX = A + E$, do ta gjejmë matricën X në këtë mënyrë: B prej majtas B^{-1}

$$BX = A + E \cdot B^{-1} \text{ prej të majtës}$$

$$B^{-1} \cdot BX = B^{-1} (A + E)$$

$$EX = B^{-1} (A + E)$$

$$X = B^{-1} (A + E).$$

Pastaj, e gjejmë matricën inverse B^{-1} të matricës B d.m.th.,

$$B^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix}$$

Prej ku,

$$\begin{aligned} X = B^{-1} (A + E) &= -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ X &= -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 6 & -15 & 25 \\ -10 & -23 & -45 \\ 38 & 1 & 99 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1

Zgjidhi barazimet e matricës sipas x :

a) $A \cdot X = B$;

b) $X \cdot A = B$;

c) $A \cdot X \cdot B = C$;

ç) $CX = A - B$;

për matricat $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2

Zgjidhi barazimet e matricës sipas x :

a) $A \cdot X = B$;

b) $X \cdot A = B$;

c) $A \cdot X \cdot B = C$;

ç) $CX = A - B$;

për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Të japim edhe disa barazime të matricave më të përbëra, ku shfrytëzojmë edhe zëvendësim.

Shembulli 3

a) Prej barazimit të matricës $A \cdot x - B = x + E$, e shprehim matricën X prej

$$A \cdot X - X = B + E$$

$$\underbrace{(A - E)}_C X = B + E$$

$$CX = B + E / \cdot C^{-1} \text{ prej të majtës}$$

$$X = C^{-1}(B + E)$$

$$X = (A - E)^{-1}(B + E)$$

b) Prej barazimit të matricës $XB + C = x + A$ e shprehim matricën X

$$XB - X = A - C$$

$$X \underbrace{(B - E)}_D = A - C$$

$$XD = A - C / \cdot D^{-1} \text{ prej të djathtës}$$

$$X = (A - C)D^{-1}$$

$$X = (A - C)(B - E)^{-1}$$

c) Prej barazimit të matricës $X^{-1}A(B + E)^{-1} = B^{-1}$ e shprehim matricën X

$$X^{-1}A(B + E)^{-1} = B^{-1} / \cdot X \text{ prej të majtës}$$

$$XX^{-1}A(B + E)^{-1} = XB^{-1}$$

$$A(B + E)^{-1} = XB^{-1} / \cdot B \text{ prej të djathtës}$$

$$A(B + E)^{-1}B = X$$

$$X = A(B + E)^{-1}B$$

Për matricat $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ njehso matricën te çdonjëra prej barazimeve të matricave nën a) b) dhe c) te Shembulli 3.

3

Zgjidhi barazimet e matricës sipas x :

$$\text{a) } (A - 2E)(X + E) = A \text{ nëse } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } (XA^{-1})^{-1} = X^{-1} + B \text{ nëse } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi barazimet e matricës sipas X për matricat katrore të rendit të dytë:

a) $X^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}$ nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix};$

b) $AX^{-1} + B = CX^{-1}$ nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

2. Zgjidhi barazimet e matricës sipas x për matricat katrore të rendit të tretë:

a) $(B + E)^{-1}AX^{-1} = A^{-1}$ nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$

b) $(B + 3E)(X - E) = A$ nëse $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

8. Zgjidhja e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

Sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura më vërejtëm se mund t'i zgjidhim me ndihmën e rregullave të Kramerit. Sistemin e këtillë mund ta zgjidhim me ndihmën e barazimit të matricës dhe me ndihmën e metodës së Gausit të eliminimit. Në vazhdim do ta sqarojmë zgjidhjen me barazim të matricës, ndërsa zgjidhja me metodën e Gausit të eliminimit do ta lejmë për njësinë e ardhshme mësimore.

Le të jetë dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Në bazë të këtij sistemi, i formojmë këto matrica:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Atëherë sistemi mund të shkruhet në të ashtuquajturën **formë e matricës**

$$AX = B.$$

Me të vërtetë, nëse e njehsojmë prodhimin AX , për matricat e këtilla të formuara dhe e barazojmë me B , e fitojmë sistemin e dhënë të barazimeve.

Për matricën A themi se është matricë e sistemit. Të supozojmë se ajo është josingulare ($\det A \neq 0$). Atëherë për barazimin e matricës $AX = B$ tani më vërejtëm se sillet në $x = A^{-1}B$, d.m.th., duke shfrytëzuar formulën për gjetjen e matricës inverse fitohet matrica e panjohur

$$X = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \cdot B.$$

Vërejtje: Barazimi i matricës për zgjidhjen e sistemit shfrytëzohet vetëm kur matrica e sistemit është matricë josingulare.

Shembulli 1

Ta zgjidhim sistemin prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

me barazime të matricës $AX = B$. Matrica e sistemit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dhe matrica- rreshta

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Matrica inverse A e matricës është

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -6 & -2 & -4 \\ -7 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrica $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Zgjidhja e sistemit është treshja e numrave të renditur $(1, -1, 1)$.

1

Me ndihmën e barazimeve të matricës zgjidhi këto sisteme prej tre barazimeve me tri të panjohura:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2; \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2z = -3 \\ 5y + z = 2 \end{cases}$$

Detyra për punë të pavarur

Zgjidhi këto sisteme me barazim të matricës:

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} ; \quad 2. \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases} ; \quad 3. \begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases} ; \quad 4. \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases} .$$

9. Metoda e Gausit të eliminimit

Transformimet elementare të cilat zbatohen te sistemet prej dy barazimeve lineare me dy të panjohura të mësuar në vitin e parë zbatohen edhe te sistemet lineare me tri të panjohura për fitimin e sistemeve ekuivalente. Ato janë:

- a) zëvendësimi i vendeve të barazimeve;
- b) shumëzimi i njërës prej barazimeve me numër jozero;
- c) njërës prej barazimeve i shtohet barazim tjetër i s i shumëzuar me ndonjë numër jozero.

Le të jetë dhënë sistemi prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura në formën normale (të përgjithshme):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Thelbi i metodës së Gausit për zgjidhjen e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura qëndron në manipulimin e sistemit d.m.th., barazimet shumëzohen me numra të caktuar dhe u shtohen barazimeve tjera me qëllim të eliminohet e panjohura e caktuar dhe të arrihet deri te zgjidhja për një të panjohur. Pastaj, kthehemi prapa për t'i gjetur vlerat e të panjohurave tjera. Manipulimi me sistemin e bëjmë me transformimet elementare.

Shembulli 1

Për zgjidhjen e sistemit prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \text{ ta prezantojmë metodën e Gausit:}$$

1) Barazimin e parë e shumëzojmë me -2 dhe ia shtojmë barazimit të dytë, ndërsa të parën e shumëzojmë edhe me -1 dhe ia shtojmë barazimit të tretë,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-5z=-2 / R_1(-2)+R_2 \\ x-y+z=3 / R_1(-1)+R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-7z=-4 \\ -2y=2 \end{cases}$$

E eliminojmë të panjohurën x prej barazimit të parë dhe të tretë. Por, e eliminojmë edhe z prej barazimit të tretë.

2. barazimin e tretë e pjesëtojmë me -2 dhe e fitojmë zgjidhjen sipas y ,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-7z=-4 \\ -2y=2/:(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-7z=-4 \\ y=-1 \end{cases}$$

3) Zëvendësohet vlera e y te barazimi i parë dhe barazimin e dytë e pjesëtojmë me -7 dhe fitohet vlera e të panjohurës z :

$$\begin{cases} x+z=2 \\ -7z=-7/:(-7) \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

4) Zëvendësohet vlera e të panjohurës z te barazimi i parë dhe fitohet vlera e të panjohurës x :

$$\begin{cases} x+z=2 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Zgjidhje e sistemit është $(1, -1, 1)$.

Derisa sistemi i dhënë prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura nuk është në formën normale (të përgjithshme), për ta zbatuar metodën e Gausit, është e nevojshme sistemin ta sjellim në formën normale.



Me metodën e Gausit të zgjidhen këto sisteme prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

$$a) \begin{cases} 2x-y+z=8 \\ x+2y=0 \\ 3x-y=7 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases}$$

Me metodën e Gausit të elementit duhet të konstatohet se sistemi a ka pafund shzumë zgjidhje pse është kontradiktor.

Shembulli 2

a) Sistemin
$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 16 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases}$$
 e zgjidhim me metodën e Gausit të eliminimit:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 16 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 5x + y + z = 16 / R_1(-5) + R_2 \\ 3x - y + z = 2 / R_1(-3) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 16y - 4z = 76 / :4 \\ 8y - 2z = 38 / :2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 19 \\ 4y - z = 19 \end{cases}$$

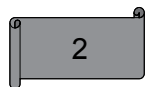
Te sistemi i fundit është e qartë se barazimi i tretë është i tepërt dhe sistemi ka pafund shumë zgjidhje d.m.th., për $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ fitohet $z = 4t - 19$, $x = 7 - t$. Bashkësia e zgjidhjeve është:
 $M = \{(7 - t, t, 4t - 19) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) Sistemin
$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 8 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases}$$
 e zgjidhim me metodën e Gausit të eliminimit,

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 8 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 5x + y + z = 8 / R_1(-5) + R_2 \\ 3x - y + z = 2 / R_1(-3) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 16y - 4z = 68 / :4 \\ 8y - 2z = 38 / :2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 17 \\ 4y - z = 19 / R_2(-1) + R_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 17 \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \end{cases}$$

Barazimin e fundit prej sistemit është barazim kundërthënës. Domethënë, sistemi është sistem kundërthënës.



Me metodën e Gausit të zgjidhen këto sisteme prej tre barazimeve lineare me tri të panjohura:

a)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x - 2y + 2z = 6; \\ 6x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x - 4y + 10z = 8. \\ 3x + 6y - 4z = 8 \end{cases}$$

Detyra për punë të pavarur

Me metodën e Gausit të zgjidhen këto sisteme të barazimeve lineare me tri të panjohura:

1.
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12; \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases};$$

3.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8; \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases}; \quad 5. \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 3x-5y+2z=-1 \end{cases}; \quad 6. \begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+y-z=2 \\ -5x+5y-5z=5 \end{cases}.$$

10. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Njihso këto determinanta:

$$a) \begin{vmatrix} a & a+b \\ a-b & a \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Duke shfrytëzuar vetitë e determinantave vërteto:

$$a) \begin{vmatrix} a+bx & a+bx & c \\ d+ex & d+ex & f \\ g+hx & g+hx & m \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 1 & p & qw \\ 1 & q & wp \\ 1 & w & pq \end{vmatrix} = (q-p)(w-p)(w-q).$$

3. Me ndihmën e rregullave të Kramerit të zgjidhet sistemi $\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ -2x+y-3z=0 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}$.

$$4. \text{ Le të jenë dhënë matricat } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Njihso : a) $3C-4B$; b) A^3 ; c) $-2BC$; ç) A^{-1} ; d) C^{-1}

5. Caktoe të panjohurën x prej këtyre barazimeve:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Le të jenë A dhe B dy matrica josingulare të rendit të njëjtë dhe le të jetë $AB = BA$. Vërteto se $AB^{-1} = B^{-1}A$ dhe $A^{-1}B = BA^{-1}$:

7. Për matricat $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ gjeje matricën e panjohur X prej barazimit të matricës

$$XA^{-1}B = A^{-1} + E$$

8. Zgjidhe sistemin $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 4y - 2z = 1 \\ 5x + y + 4z = -3 \end{cases}$ me:

a) barazim të matricës, b) Metoda e eliminimit.

9. Diskuto zgjidhjen e këtyre sistemeve varësisht prej parametrave:

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1; \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + ay + (a+1)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases}$.

10. Zgjidhi këto sisteme:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 5; \\ 6x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 4x + 4y + 4z = 16; \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0; \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

ç) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0; \\ -x - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{2}{x-2y} - \frac{3}{y+2z} + \frac{1}{2x-z+y} = 0 \\ -\frac{3}{x-2y} + \frac{4}{y+2z} - \frac{2}{2x-z+y} = 1; \\ \frac{5}{x-2y} + \frac{1}{y+2z} + \frac{4}{2x-z+y} = -3 \end{cases}$

dh) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2. \\ -x - z = 3 \end{cases}$

Njësia modulare 4 – Gjeometria analitike në hapësirë (për të gjitha drejtimet)

Gjeometria analitike është disiplinë e matematikës tek e cila gjeometria mësohet me shfrytëzimin e algjebërës. Te gjeometria analitike Figurat gjeometrike shqyrtohen në sistemin kënddrejtë të Dekartit dydimensional dhe tredimensional, duke paraqitur në mënyrë analitike, d.m.th., me barazime algjebrike. Për themelues të gjeometrisë analitike llogaritet matematikani francez Rene Dekart (1596-1650) me veprën e tij, "Gjeometria". Në njërin prej tri shtesave, "Diskutim për metodat" (1637), e jep zbatimin e metodës së përgjithshme të sintezës ndërmjet gjeometrisë dhe algjebërës. Megjithatë, prej letrave të matematikanit francez Pjer De Ferma (1601-1665) vërehet ideja për gjeometrinë analitike qysh para botimit të veprës së Dekartit. Sido qoftë, paraqitja e gjeometrisë analitike llogaritet për fillim të matematikës bashkëkohor.

Në këtë njësi modulare, së pari do të përkujtohem për prodhimet ndërmjet vektorëve, të cilët tani më janë mësuar në vitin e tretë: prodhimi skalar, vektorial dhe i përzier i vektorëve. Pastaj do të bëjmë zgjerim të Gjeometrisë analitike të mësuar në rrafsh në Gjeometri analitike në Hapësirë.

1. Prodhimi skalar i vektorëve

Në këtë pjesë do të përkujtohem për prodhimin skalar ndërmjet dy vektorëve. Por, para prodhimit skalar të vektorëve të përkujtohem në disa përkufizime themelore të lidhura me konceptin vektor, koordinata e vektorit dhe pika te sistemi koordinativ tredimensional i Dekartit.

Përkufizimi 1: Vektor është segment për të cilin dihet cila prej pikave të skajshme të tij është fillim, ndërsa cila është pika e mbarimit (e fundit). Çdo vektor është dhënë me tre elemente: gjatësia, drejtimi dhe kahja.

Përkufizimi 2: Vektor kolinear do t'i quajmë vektorët të cilët shtrihen në drejtëzën e njëjtë ose drejtëzave paralele.

Përkufizimi 3: Vektor komplanar do t'i quajmë vektorët të cilët të bartur te një pikë shtrihen në rrafshin e njëjtë.

Sistemi koordinativ kënddrejtë (hapësinor) është përcaktuar me pikën fikse O , dhe te ajo janë lidhur tre vektor reciprokisht normal dhe të barabartë sipas gjatësisë së vektorëve $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Gjatësinë e tyre e zgjedhim për njësi mase $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Këto vektor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ janë të njohur me emrin **orte** ose **vektor bazik (vektor njësi)**

Rreze-vektori $\vec{a}$ është vektor fillimi i të cilit është fillimi i koordinatave të sistemit koordinativ kënddrejtë hapësinor, ndërsa pika e mbarimit është çfarëdo pikë A . Koordinatat e rreze-vektorit $\vec{a}$ dhe koordinatat e pikës së tij të mbarimit janë të njëjta A , Figura 1.

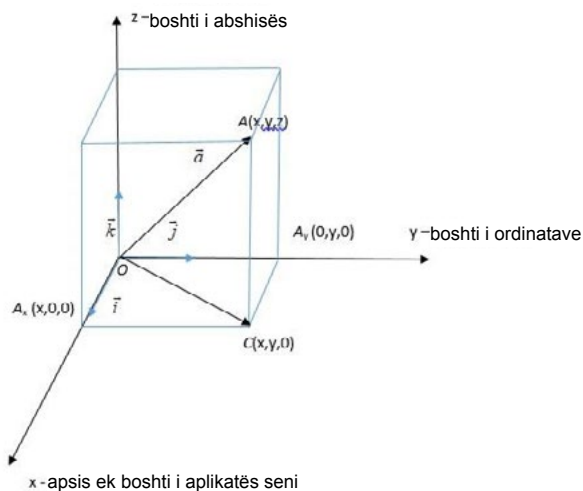


Figura 1

Prodhimii rreze-vektorit $\vec{a}$ mund të paraqitet (njëvlerësisht) në formën $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$.

Forma koordinative e rreze-vektorit $\vec{a} = (x, y, z)$, domethënë se për çdo vektor i shoqërojmë treshe të renditur të numrave realë. Pika e tij e mbarimit $A(x, y, z)$ e ka formën e njëjtë koordinative. Domethënë, koordinatat e pikës janë koordinatat edhe të rrezevektorit

Për vektorët të dhënë në formën koordinative $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dhe skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ përkufizohen operacionet: mbledhje të vektorëve në formën koordinative me $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ dhe shumëzimi i vektorit në formën koordinative me numër real $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

Forma koordinative e çfarëdo vektori $\vec{AB}$ të përcaktuar me: $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, ku pika fillestare është $A(a_1, a_2, a_3)$ edhe pika e mbarimit është $B(b_1, b_2, b_3)$

Koordinatat e pikës $M(x, y, z)$ që shtrihet te drejtëza e përcaktuar me pikat $A(a_1, a_2, a_3)$ dhe $B(b_1, b_2, b_3)$ e ndan segmentin AB në raport λ gjenden sipas formulave:

$$x = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda}, y = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}, z = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}.$$

Në veçantë, koordinatat e pikës $M(x, y, z)$ që është mesi i segmentit AB njehsohet sipas formulave:

$$x = \frac{a_1 + b_1}{2}, y = \frac{a_2 + b_2}{2}, z = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Të kalojmë në përkufizimin e prodhimit skalar të dy vektorëve:

Përkufizimi 4: Prodhimi skalar i dy vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$ është numri $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ ku α është këndi ndërmjet vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$, ndërsa $|\vec{a}|$ dhe $|\vec{b}|$ janë gjatësitë e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ përkatësisht

Shembulli 1 Për të dy vektorët $\vec{a}, \vec{b}$ me intensitete (module) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4$ dhe kënd ndërmjet tyre $\alpha = 30^\circ$ prodhimi skalar është

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

1 Njehso prodhimin skalar të vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$ me intensitete $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6$ dhe kënd ndërmjet tyre $\alpha = 150^\circ$!

Prej përkufizimit 4 është e qartë se prodhimi skalar ndërmjet dy vektorëve mund të jetë:

- numër pozitiv, nëse këndi ndërmjet tyre është i ngushtë;
- numër negative, nëse këndi ndërmjet tyre është i gjerë.

Të përkujtohem edhe në vetitë e prodhimit skalar dhe të zbatimit të tij.

Teorema 1: Për çfarëdo vektor $\vec{a}, \vec{b}$ është e saktë

$$1^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}; \quad \text{d.m.th. t.e. } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

$$2^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Teorema 2: Për prodhimin skalar të çfarëdo vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dhe çfarëdo skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ janë të sakta këto veti:

$$1^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$2^0 \quad \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b});$$

$$3^0 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Teorema 3: Për dy vektor jozero $\vec{a}, \vec{b}$ është e saktë $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, ku α është këndi ndërmjet tyre.

Shembulli 2 → Prodhimi skalar i vektorëve $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ ku $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 2$ dhe këndi $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ me shfrytëzimin e prodhimit skalar të vektorëve është:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (4\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (5\vec{p} + 2\vec{q}) = 20|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{q} \cdot \vec{p} - 6|\vec{q}|^2 \\ &= 20|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 = 20|\vec{p}|^2 - 7\vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 \\ &= 20 \cdot 4^2 - 7|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \alpha - 6 \cdot 2^2 = 320 - 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 24 \\ &= 320 - 28 - 24 = 268 \end{aligned}$$

2

Njihso prodhimin skalar të vektorëve $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, nëse $|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ edhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 120^\circ$!

Shembulli 3 → Për ta gjetur këndin β ndërmjet vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$ prej shembullit 2, do ta shfrytëzojmë

formulën te teorema 3 $\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$

Prodhimi skalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 268$ është tani më i njehsuar, ndërsa t'i njehsojmë modulet e vektorëve me shfrytëzimin e Teoremës 1.2⁰

$$|\dot{a}|^2 = \dot{a} \cdot \dot{a} = (4\dot{p} - 3\dot{q})^2 = 16|\dot{p}|^2 - 24\dot{p} \cdot \dot{q} + 9|\dot{q}|^2 = 16 \cdot 4^2 - 24|\dot{p}| \cdot |\dot{q}| \cdot \cos \alpha + 9 \cdot 2^2$$

$$= 256 - 24 \cdot 4 + 36 = 232$$

$$|\dot{b}|^2 = \dot{b} \cdot \dot{b} = (5\dot{p} + 2\dot{q})^2 = 25|\dot{p}|^2 + 20\dot{p} \cdot \dot{q} + 4|\dot{q}|^2 = 25 \cdot 4^2 + 20|\dot{p}| \cdot |\dot{q}| \cdot \cos \alpha + 4 \cdot 2^2$$

$$= 400 + 20 \cdot 4 + 16 = 496$$

Domethënë

$$\cos \beta = \frac{268}{\sqrt{232} \cdot \sqrt{496}} = \frac{268}{2\sqrt{58} \cdot 4\sqrt{31}} \approx 0,79 \Rightarrow \beta \approx 37,81^\circ.$$

3 Njehso këndin β ndërmjet vektorëve $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ nëse $|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ edhe këndi $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$

Për ortet në pajtim me figurën 1, është e saktë

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

Për formën koordinative të prodhimit skalar tani më e dime se janë të sakta këto veti:

Teorema4: Prodhimiskalarivektorëve të dhënë në formën koordinative $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

është numri $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Teorema 5: Për çfarëdo vektor $\vec{a}, \vec{b}$ është e saktë,

(1) gjatësia e vektorit: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

(2) këndi ndërmjet vektorëve: $\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

(3) kushti për normalitet (ortogonalitet) të dy vektorëve $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$.

Me ndihmën e formës koordinative të prodhimit skalar, na mund ta gjejmë edhe largesën d ndërmjet dy pikave $A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$. Tani më dime se vektori $\overrightarrow{AB}$ ka formën koordinative $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$. Largesa ndërmjet këtyre dy pikave është.

$$d = \overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Shembulli 4

a) Për vektorët $\vec{a} = (3, 2, -3)$, $\vec{b} = (7, 0, -5)$ të cilët janë dhënë në formën koordinative prodhimi skalar është $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-5) = 21 + 15 = 36$. Ndërsa pra, këndi ndërmjet tyre është

$$\cos \alpha = \frac{36}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + (-5)^2}} = \frac{36}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{74}} = 0,89 \Rightarrow \alpha = 27,13^\circ.$$

b) Gjatësia e vektorit $\vec{a} = (0, -3, 2)$ të dhënë në formën koordinative është

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

c) Për pikat $A(2, -3, 1)$, $B(-2, 3, -4)$, largesa e tyre është

$$d = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 + 3)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{122}.$$

4

a) Njihso prodhimin skalar dhe këndin α ndërmjet vektorëve $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-4, 2, -3)$ të dhënë në formën koordinative

b) Njihso gjatësinë e vektorit $\vec{a} = (-1, 5, -2)$!

c) Njihso largesën ndërmjet pikave $A(1, -2, -1)$, $B(5, -6, 0)$

5

Kontrollo se vektorët $\vec{a} = (5, -2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$ a mund të jenë brinjët e katrorit

Detyra për punë të pavarur

1. Njihso: a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; b) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; c) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot 5\vec{b}$, nëse $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ dhe këndi ndërmjet

tyre është $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2. Njihso prodhimin skala të vektorëve $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, nëse $|\vec{p}| = 8$, $|\vec{q}| = 1$ dhe këndi

ndërmjet vektorëve $\vec{p}, \vec{q}$ është $\alpha = \frac{\pi}{3}$! Pastaj, gjeje këndin ndërmjet vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$!

3. Për çfarë qoftë vektor $\vec{a}, \vec{b}$, vërteto se:

$$\text{a) } (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \quad \text{b) } (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

4. Vërteto: Diagonalet e rombit janë ndërmjet veti normale!

5. Për vektorët $\vec{a} = (1, -2, -3)$, $\vec{b} = (2, 0, -5)$ njehso!

a) $\vec{a}, \vec{b}$ b) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ c) këndin α ndërmjet tyre

A janë ortogonalë vektorët $\vec{a}, \vec{b}$?

6. Janë dhënë kulmet e $\triangle ABC$ / $A(3, -2, 1)$, $B(-1, -2, 4)$, $C(-4, -2, 0)$ /. Gjej:
- këndin e brendshëm të trekëndëshit te kulmi C ;
 - gjatësinë e vijës së rëndimit të trekëndëshit të lëshuar ndaj brinjës $\overline{AB}$.
7. Për vektorin e dhënë $\vec{a} = (3, -2, 1)$ gjej koordinatat e vektorit $\vec{x}$ që shtrihet te rrafshi yz nëse $\vec{a} \perp \vec{x}, |\vec{x}| = 3\sqrt{5}$

2. Prodhimi vektorial i vektorëve

Të përkujtohem në përkufizimin e prodhimit vektorial të dy vektorëve

Përkufizimi 1: Prodhimi vektorial i vektorëve jokolinear $\vec{a}, \vec{b}$ e quajmë vektorin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (figura 2) ashtu që

- drejtimi i vektorit $\vec{c}$ është normal në rrafshin te i cili shtrihen $\vec{a}, \vec{b}$
- vektorët $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ formojnë treshe të djathtë të vektorëve;
- intensiteti (moduli) i vektorit $\vec{c}$ është $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$, ku këndi është kënd α ndërmjet vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$.

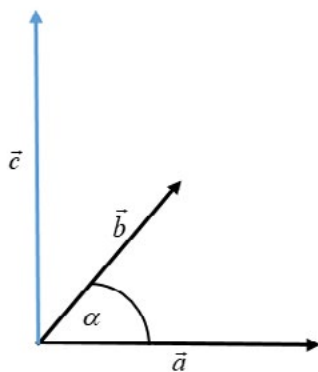


Figura 2

Shenja e cila shfrytëzohet për shënimin e prodhimit vektorial $\vec{a} \times \vec{b}$ është edhe $[\vec{a}, \vec{b}]$

Shembulli 1 Për dy vektor $\vec{a}, \vec{b}$ me intensitet $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4$ dhe kënd ndërmjet tyre $\alpha = \frac{\pi}{3}$ moduli i vektorit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ është

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 1 \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

1 Njehso modulin e prodhimit vektorial të vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$ me module $|a| = 1, |b| = 6$ dhe kënd ndërmjet tyre $\alpha = 120^\circ$!

Të përkujtohem në vetitë e prodhimit vektorial dhe zbatimit të tij.

Teorema 1: Për prodhimin vektorial të çfarëdo vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dhe prodhimit skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ janë këto veti:

$$1^0 \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$$

$$2^0 \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a}, \vec{b} \text{ janë kolinear}$$

$$3^0 \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

$$4^0 \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b});$$

$$5^0 \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Teorema 2: syprinat e paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a}, \vec{b}$ është

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Rrjedhimi: Syprina e trekëndëshit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a}, \vec{b}$ është

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Teorema 3: Forma koordinative e prodhimit vektorial për dy vektor

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ e } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Shembulli 2 Moduli i prodhimit vektorial $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ ku $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 2$ edhe këndi $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ e njehsojmë në këtë mënyrë:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (4\vec{p} - 3\vec{q}) \times (5\vec{p} + 2\vec{q}) = 20\vec{p} \times \vec{p} + 8\vec{p} \times \vec{q} - 15\vec{q} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{q} \\ &= 8\vec{p} \times \vec{q} + 15\vec{p} \times \vec{q} = 25\vec{p} \times \vec{q}\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 25 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \sin \alpha = 25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{3}.$$

2 Njehso modulin e prodhimit vektorial të vektorëve $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, nës $|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ dhe këndi $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$.

Shembulli 3 a) Për vektorët $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0)$, të cilët janë dhënë në formën koordinative, prodhimi vektorial është vektori

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} = (0, 0, -1)$$

b) Syprina e paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët është $\vec{a} = (1, -1, 0), \vec{b} = (0, -1, 0)$

njësi katrore $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2} = 1$

3 Njehso syprinën e $\triangle ABC$ me kulme $A(3, 2, -5), B(1, -4, 3), C(-3, 1, 0)$. Pastaj njehso gjatësinë e lartësisë së trekëndëshit të lëshuar ndaj brinjës $\overline{BC}$.

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso: a) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$; c) $2\vec{a} - 3\vec{b} \times 5\vec{b}$, nëse $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ dhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 45^\circ$!
2. Njehso $|\vec{a} \times \vec{b}|$ vektorët $\vec{a}, \vec{b}$ me modulet $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$ dhe $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$.
3. Njehso syprinën e trekëndëshit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$ ku vektorët $\vec{p}, \vec{q}$ kanë module $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 3$ dhe kënd $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 30^\circ$.
4. Për çfarëdo qoftë vektor $\vec{a}, \vec{b}$, vërteto se:
 - a) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} \times \vec{b}$; b) $2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$.
5. Për vektorët $\vec{a} = (2, -3, 5), \vec{b} = (-1, 0, 3)$ njehso:
 - a) $\vec{a} \times \vec{b}$; b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$; c) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times 5\vec{b}$!

6. Njehso lartësinë e paralelogramit $ABCD$ të dhënë me kulmet koordinative $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, 5, -6)$, $D(4, 2, -3)$

7. Njehso α për këndin ndërmjet vektorëve $\vec{a} = (2, 3, -5)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$.

3. Prodhimi i përzier i vektorëve

Të përkujtohem edhe në një prodhim, ndërsa prodhimi ndërmjet tre vektorëve.

Përkufizimi 1: Prodhimi i përzier i tre vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ e quajmë skalarina $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Prodhimi i përzier e ka shënimin $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Të përkujtohem edhe në disa teorema të lidhura me prodhimin e përzier dhe zbatimi i tij.

Teorema 1: Vëllimi i paralelopipedit të konstruktuar prej vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ është

$$V = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

Shenja e prodhimit të përzier është pozitiv, nëse vektorët $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formojnë treshe të vektorëve të djathtë. Ndërsa tani, shenja e prodhimit të përzier është negative, nëse vektorët $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formojnë treshe të vektorëve të majtë

Rrjedhimi: Vëllimi i tetraedrit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ është

$$V = \frac{1}{6} \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

Teorema 2: Për cilët vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ është e saktë form $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ula nëse dhe vetëm nëse vektorët janë komplanar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Teorema 3: Për çfarëdo vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, forma koordinative e prodhimit të përzier është dhënë me formulën

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Shembulli 1

Prodhimi i përzier i treshes së vektorëve të djathtë $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ku vektori $\vec{c}$ është normal në vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, të cilët pra formojnë kënd prej 30° ku është: $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 1$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})) \cdot |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 6 \cdot 5 \sin 30^\circ \cdot 1 \cdot 1 = 15$$

Treshja e djathtë e vektorëve do të thotë se vektorët $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}$ janë me kahe të njëjtë

1

a) Njihso prodhimin e përzier të vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nëse atë janë reciprokisht normal dhe formojnë treshe të djathtë të vektorëve me module $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2$.

b) Njihso vëllimin e kuadrit me tehe të bazave $a = 7, b = 3, c = 5$!

Shembulli 2

a) Për vektorët a) $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$, prodhimi i përzier është

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 2 = -6.$$

b) Për vektorët a) $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$, vëllimi i paralelopipedit të konstruktuar mbi këto vektor është $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Prodhimi i përzier $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -6$, Vijon se njësitë kubike $V = |-6| = 6$.

c) Vëllimi i tetraedrit të konstruktuar mbi të njëjtët ato tre vektorë $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$ është $V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$ njësi kubike.

2

a) Njihso vëllimin e tetraedrit të konstruktuar mbi vektorët

$\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (3, 4, -2), \vec{c} = (-2, 0, 4)$.

b) Njihso vëllimin e tetraedrit me kulme $A(1, 2, 1), B(3, 4, -2), C(-2, 0, 4), S(1, 2, 3)$

Shembulli 3

Vektorët $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$ janë komplanar pasi prodhimi i tyre i përzier është zero d.m.th.,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 - 9 + 9 - 1 - 54 + 33 = 55 - 55 = 0.$$

Kontrollo se mbi vektorët $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$, $\vec{c} = (-2, 1, -1)$ a mund të konstruktohet paralelopiped

Detyra për punë të pavarur

1. Për çfarëdo vektor janë të sakta këto barazime $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

$$\text{Vërteto } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

2. Vërteto $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})!$

3. Njehso prodhimin e përzier të treshes së djathtë të vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nëse vektori $\vec{c}$ është normal në vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, të cilët formojnë kënd prej 45° ndërmjet veti, me module $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2$

4. Njehso vëllimin e kubit me teh të bazës $|\vec{a}| = 7$ me zbatimin e vektorëve.

5. Njehso lartësinë e paralelopipedit të konstruktuar mbi vektorët

$$\vec{a} = (-1, 0, 1), \vec{b} = (-3, 4, -2), \vec{c} = (-2, 1, 0).$$

6. Vëllimi i tetraedrit le të jetë me kulmet e bazës $A(1, 2, 1)$, $B(3, 4, -2)$, $C(-2, 0, 4)$ është 15 njësi kubike. Gjej koordinatat e kulmit, nëse dihet se kulmi shtrihet te boshti x !
7. Njehso vlerën e parametrin m , nëse vektorët $\vec{a} = (m, 0, 1)$, $\vec{b} = (-2, 4, 1)$, $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ janë komplanarë.

4. Forma e përgjithshme e barazimit të rrafshit

Le të jetë $Oxyz$ sistemi kënddrejtë koordinativ i Dekartit në hapësirë. Së pari do ta caktojmë barazimin Σ i cili është përcaktuar me një pikë të tij dhe vektorin jozero normal në rrafshin

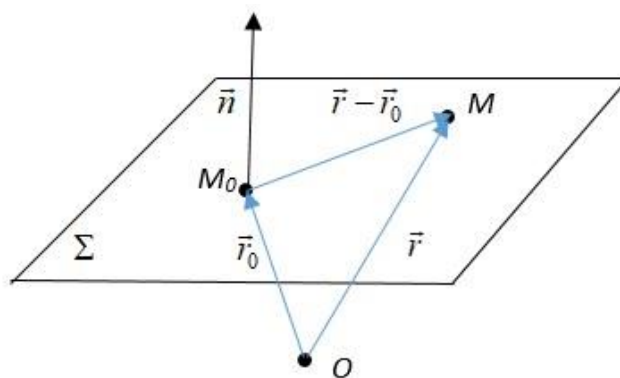


Figura 3

Nëse është dhënë pika M_0 dhe vektori jozero $\vec{n}$, atëherë ekziston rrafsh njëvlerësisht i caktuar që kalon nëpër pikën e dhënë M_0 dhe është normal në vektorin e dhënë $\vec{n}$. Pika le të jetë M_0 e përcaktuar me rreze-vektor $\vec{r}_0$, Figura 3. Le të jetë dhënë çfarëdo pikë prej rrafshit të caktuar me rreze vektor M Me lëvizjen e pikës Σ në rrafsh ndryshon vektori $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, por megjithatë ai gjithmonë ngel normal në $\vec{n}$ pasi $\overline{M_0M}$ shtrihet në rrafsh Σ d.m.th., $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$. Prodhimi skalar të dy vektorëve reciprokisht normal është 0, d.m.th., $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ përkatësisht $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Ky kusht e kënaq çdo pikë M prej rrafshit Σ , por nëse M nuk shtrihet te rrafshi Σ , ai kusht nuk vlen. Prandaj, me këtë shprehet vetia e përkatësisë së pikave te rrafshi

Prandaj është e natyrshme që ky kusht ta marrë si barazim të rrafshit në formën vektoriale.

Përkufizimi 1: Barazimi

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

ku vektori $\vec{n} \perp \Sigma$, $\vec{r}_0$, është rreze-vektor i pikës M_0 dhe $\vec{r}$ është rreze-vektor i pikës M quhet **barazimi vektorial i rrafshit Σ**

Pikat $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, vektori $\vec{n} = (A, B, C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, rreze-vektorët $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ dhe vektori $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ kanë forma të veta koordinative.

Barazimi vektorial $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ i rrafshit Σ ka edhe shprehje analitike, d.m.th., **formë koordinative** të formës $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Përkufizimi 2: Barazimi i rrafshit të formës

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

quhet **barazimi skalar i rrafshit që kalon nëpër një pikë $M_0(x_0, y_0, z_0)$** dhe është normal në vektorin e dhënë $\vec{n} = (A, B, C)$

Shembulli 1

Ta shkruajmë barazimin e rrafshit Σ që kalon nëpër pikën $M_0(1, 3, -5)$ dhe është normal në vektorin $\vec{n} = (-2, 5, 1)$. Në pajtim me barazimin kemi $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Barazimin e fundit mund ta transformojmë në formën $-2(x - 1) + 5(y - 3) + 1(z + 5) = 0$, të cilën mund ta llogarisim për barazim $2x - 5y - z + 8 = 0$ të rrafshit Σ .

1

Gjeje barazimin e rrafshit Σ që kalon nëpër pikën $A(5, -3, 7)$ dhe është normal në vektorin $\vec{n} = (7, -8, 10)$

Formën koordinative të barazimit të rrafshit mund ta transformojmë në këtë formë $Ax + By + Cz + D = 0$, ku

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Përkufizimi 3: Barazimi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

quhet **forma e përgjithshme e rrafshit** me $n = (A, B, C)$ vektor normal në atë.

Te barazimi i përgjithshëm i rrafshit, koeficientët A , B , C dhe D janë numra realë. Domethënë, ndonjë prej tyre mund të jetë i barabartë me zero dhe të fitojmë raste special të rrafshit në lidhje me vendpozitën e tij te sistemi koordinativ kënddrejtë i Dekartit:

1. Nëse $D = 0$ atëherë barazimi i përgjithshëm i rrafshit e ka formën $By + Cz + D = 0$. Kjo do të thotë $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ se është një zgjidhje e tij, pra kemi se në këtë rast rrafshi kalon nëpër fillimin koordinativ

2. Nëse $A = 0$ atëherë barazimi i përgjithshëm i rrafshit e ka formën $By + Cz + D = 0$. Ky është rrafsh normal në vektorin $\vec{n} = (0, B, C)$. Por, vektori është normal $\vec{i} = (1, 0, 0)$, domethënë ky rrafsh është paralel me boshtin x . Nëse $D = 0$ përsëri edhe barazimi i përgjithshëm i rrafshit është i formës $By + Cz = 0$. Ky rrafsh është paralel me boshtin x dhe e përmban fillimin koordinativ: Me fjalë të tjera, është i saktë ai rrafsh që e përmban boshtin x .

3. Nëse $A = B = 0$ atëherë barazimi i përgjithshëm i rrafshit e ka formën $Cz + D = 0$. Ky rrafsh është normal te vektori $\vec{n} = (0, 0, C)$, i cili është kolinear me ortin $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Domethënë, ai është barazimi i rrafshit, paralel me rrafshin të formuar prej boshtit x dhe boshtit y . Në rastin special, nëse gjatë rastit të këtillë vlen se edhe $D = 0$, atëherë e fitojmë barazimin e rrafshit me formën $z = 0$, që paraqet barazimin të rrafshit koordinativ Oxy .

2

Diskutoi rastet $Ax + Cz + D = 0$, $Ax + D = 0$, $Ax + By + D = 0$, $x = 0$, $y = 0$

Prej diskutimeve të gjertanishme mund të përfundojmë se:

Nëse njëri prej koeficientëve A , B ose C është zero, atëherë rrafshi është paralel me boshtin koordinativ që është “përkatës” i atij koeficienti

Nëse saktë njëri prej atyre koeficientëve nuk është zero, atëherë rrafshi është normal me boshtin përkatës, d.m.th., është paralel me rrafshin koordinativ të përcaktuar me dy boshtet e tjera.

Shembulli 2

Rrafshi me barazimin $2x - z + 5 = 0$ është paralel me boshtin y , ndërsa rrafshi $6z - 7 = 0$ është normal me boshtin z d.m.th., paralel me rrafshin Oxy

3

Si është pozita e rrafsheve të dhënë me këto barazime:

a) $x + y = 0$

b) $2x + y - z = 0$

c) $-2y + 3z = 4$.

Detyra për punë të pavarur

1. Gjej barazimin e rrafshit Σ që kalon nëpër pikën $B(8, 3, -4)$ dhe vektori $\vec{n} = (5, 2, -3)$ normal në atë. Pastaj kontrollo se pika $P(7, 5, 4)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(0, 29, 0)$ a shtrihet në Σ
2. Janë dhë dy pika në hapësirë $A(-2, -1, -3)$, $B(0, 3, -5)$. Gjeje barazimin e rrafshit Σ me vektor normal $\vec{n} = (1, 0, -3)$ që kalon nëpër mesin e segmentit AB
3. Si është pozita e rrafsheve të dhëna me këto barazime:
a) $x - 2y + z = 0$; b) $3x + y = 2$; c) $3x - 4z = 0$; ç) $x = 0$;
d) $y - z - 2 = 0$?
4. Gjeje barazimin e përgjithshëm të rrafshit Σ që kalon nëpër pikën $A(5, 0, -3)$ dhe është paralel me rrafshin Oyz
5. Gjeje barazimin e përgjithshëm të rrafshit Σ që kalon nëpër pikën $B(-1, 3, -3)$ dhe nëpër boshtin y .

5. Forma normale e barazimit të rrafshit

Le të jetë dhënë rrafshi Σ me vektor $\vec{n} \perp \Sigma$ (vektor normal është orientuar prej fillimit të koordinatave kah rrafshi) dhe me çfarëdo pikë M_0 të cilës i përgjigjet rreze-vektor $\vec{r}$, që është në largësi $p > 0$ prej fillimit koordinativ O te sistemi koordinativ kënddrejtë të Dekartit në hapësirë Figura 4. Atëherë vektori njësi që i përgjigjet vektorit $\vec{n}$ është $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Largësia p prej fillimit të koordinatave O deri te rrafshi Σ , qartë është projektioni i rreze-vektorit $\vec{r}$ mbi vektorin njësi $\vec{n}_0$ d.m.th., $\vec{n}_0 \cdot \vec{r}$ t.e. $p = \text{pr}_{\vec{n}_0} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}_0|} = \vec{r} \cdot \vec{n}_0$. Prej këtij fitohet barazimi $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$.

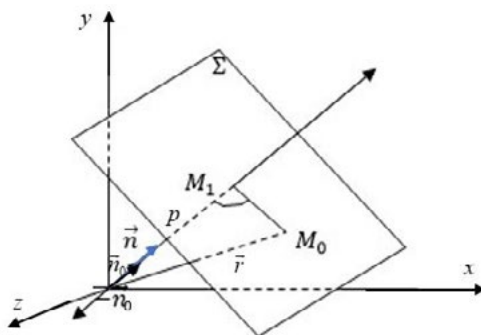


Figura 4

Përkufizimi 1: Barazimi

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$$

quhet **forma normale vektoriale e barazimit** të rrafshit Σ ku $\vec{n} \perp \Sigma$ është vektori njësi dhe p është largësia e rrafshit prej fillimit të koordinatave.

Është e qartë se për rrafshin Σ që kalon nëpër fillimin e $p = 0$

Për format koordinative të vektorëve $\vec{r} = (x, y, z)$ dhe $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, ku α , β dhe γ janë këndet e vektorit $\vec{n}_0$ me boshtet koordinative Ox , Oy dhe Oz përkatësisht, forma normale vektoriale e barazimit $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$ transformohet në formën

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

Përkufizimi 2: Barazimi

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

është **forma normale e barazimit të rrafshit** Σ , ku α , β dhe γ janë këndet e vektorit njësi $\vec{n}_0$ me boshtet koordinative Ox , Oy dhe Oz përkatësisht dhe p është largësia e rrafshit prej fillimit të koordinatave.

Shembulli 1

Ta shkruajmë formën normale vektoriale të barazimit të rrafshit $x - y + 3z - 5 = 0$ që është paralel me rrafshin $x - y + 3z - 5 = 0$ dhe është në largësi 7 prej fillimit të koordinatave. Vektori që është normal në rrafshin e dhënë barazimi i të cilit kërkohet dhe ai është $\vec{n} = (1, -1, 3)$.

Vektori njësi do të jetë $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11} \right)$ dhe $p = 7$. Atëherë barazimi në formën

normale vektoriale do të jetë $\vec{r} \cdot \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11} \right) - 7 = 0$

1

Shkruaje formën normale vektoriale të barazimit të rrafshit që është normal në vektorin $\vec{n} = (1, 2, 3)$ dhe kalon nëpër fillimin e koordinatave O .

Duke pasur parasysh se te normalja prej një rrafshi ekzistojnë dy ort ndërmjet veti të kundërt $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ dhe $-\vec{n}_0 = (\cos(\pi - \alpha), \cos(\pi - \beta), \cos(\pi - \gamma))$, në pajtim me figurën 4,

kemi se ekzistojnë dy forma normale të barazimit të rrafshit Σ ku duke shumëzuar me (-1) kalohet prej njërit barazim në tjetrin (-1)

Kështu Σ nëse është përcaktuar me barazimin e tij të përgjithshëm $Ax + By + Cz + D = 0$ atëherë **forma normale** e tij është dhënë me barazimin

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

ku $\vec{n} = (A, B, C)$ është vektor i normales me gjatësi $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, Shenja para rrënjës katrore te emëruesi zgjedhet të jetë i kundërt prej shenjës para anëtarit të lirë D në formën e përgjithshme të barazimit të rrafshit, për të siguruar vektori njësi të jetë i orientuar prej fillimit të koordinatave ndaj rrafshit

Shembulli 2

a) Në formën normale të barazimit të rrafshit $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 5 = 0$ vektori njësi i rrafshit është $\vec{n}_0 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ dhe largësia prej fillimit të koordinatave është $p = 5$.

b) Rrafshi i dhënë në formën e përgjithshme $4x - 5y - z - 1 = 0$ e ka formën normale $\frac{2\sqrt{42}}{21}x - \frac{5\sqrt{42}}{42}y - \frac{\sqrt{42}}{42}z - \frac{\sqrt{42}}{42} = 0$, ku vektori njësi i normal në rrafshin është $\vec{n}_0 = (\frac{2\sqrt{42}}{21}, -\frac{5\sqrt{42}}{42}, -\frac{\sqrt{42}}{42})$ edhe largësia prej fillimit të koordinatave është $p = \frac{\sqrt{42}}{42}$

2

Këto barazime të rrafsheve të dhënë në formën e përgjithshme paraqiti në formën normale:

$$a) 2x + 3y - 2z + 3 = 0$$

$$b) x - y + 3z - 5 = 0$$

Detyra për punë të pavarur

- Shkruaj formën normale vektoriale të barazimit që është:
 - normal me vektorin $\vec{n} = (1, 2, -2)$ dhe është në largësi 10 prej fillimit të koordinatave;
 - normal me vektorin $\vec{n} = (-4, -4, 2)$ dhe është në largësi 4 prej fillimit të koordinatave
- Shkruaj formën normale vektoriale të barazimit të rrafshit që është paralel me rrafshin $x - 2y + 2z - 15 = 0$ dhe është në largësi 5 prej fillimit të koordinatave
- Shkruaj formën normale vektoriale të barazimit të rrafshit që është paralel me rrafshin që kalon nëpër tri pika jokolineare $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 5, -4)$, $C(0, -1, 5)$ dhe kalon nëpër fillikin e koordinatave O .
- Këto barazime të rrafsheve të dhënë në formën e përgjithshme paraqiti në formën normale:
 - $2x + y - 2z + 6 = 0$
 - $x - 2y + 3z - 2 = 0$
- Cili rrafsh është paraqitur në formën normale:
 - $5x + y - z + 3 = 0$;
 - $\frac{2}{3}x + 3y - \frac{2}{5}z - 4 = 0$;
 - $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{2} = 0$.
- Te barazimet vijuese të rrafsheve të dhënë në formën normale, gjej largësën prej fillimit të koordinatave dhe vektorit të tyre normal:
 - $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{6} = 0$;
 - $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 3 = 0$.

6. Forma segmentale e barazimit të rrafshit

Le të jetë dhënë forma e përgjithshme e barazimit të rrafshit $\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ ku të gjithë koeficientët janë të ndryshëm prej zeros d.m.th., $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ atëherë barazimi mund ta përshkruajmë në formën

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

d.m.th.,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Nëse marrim $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ fitojmë $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Përkufizimi 1: Barazimi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

quhet **form segmentale e barazimit të rrafshit**.

Koncepti “segmental” vjen prej segmentit jozero (pjesë) a , b dhe c , që gjeometrikisht i paraqesin segmentet që te boshtet koordinative Ox , Oy dhe Oz i pren rrafshi i dhënë, Figura 5.

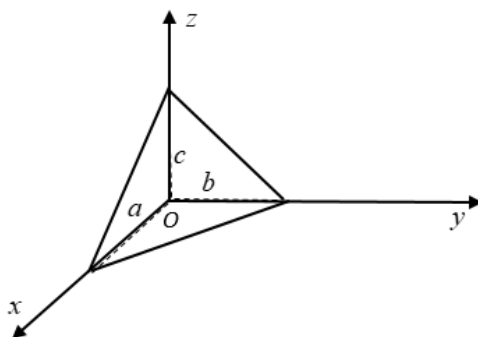


Figura 5

Këto segmente mund të jenë edhe negative. Te Figura 6 është dhënë rasti ku segmenti i boshti të abshisë dhe ordines është numër negativ d.m.th., $a = b = -2$.

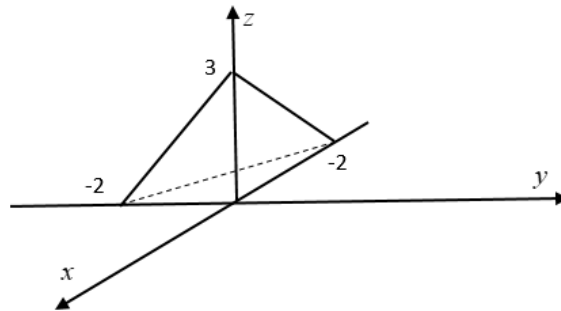


Figura 6

Tani më vërejtëm se forma segmentale e barazimit të rrafshit fitohet me transformimin e formës së përgjithshme të barazimit të rrafshit dhe të njëjtën do ta paraqesim me këtë shembull.

Shembulli 1 Le të jetë dhënë një rrafsh në formën e përgjithshme

$$5x - 3y + z - 15 = 0,$$

ku $A = 5 \neq 0$, $B = -3 \neq 0$, $C = 1 \neq 0$, $D = -15 \neq 0$. Mënyra e transformimit në formën segmentale është kjo:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z - 15 &= 0 \\ 5x - 3y + z &= 15 \quad / : 15 \\ \frac{5x}{15} - \frac{3y}{15} + \frac{z}{15} &= 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{15} &= 1. \end{aligned}$$

1 Paraqiti barazimet e këtyre rrafsheve në formën segmentale:

a) $3x - 4y + 3z + 7 = 0$

b) $4x - 3y - 6z + 12 = 0$

Le të jetë dhënë barazimi i një rrafshi në formën segmentale Σ . Transformimi prej formës segmentale

në formën e përgjithshme të rrafshit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ është Σ :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 1 \quad \cdot abc \\ bcx + acy + abz &= abc \\ bcx + acy + abz - abc &= 0 \\ \text{ku } Ax + By + Cz + D &= 0, \end{aligned}$$

ku $A = bc$, $B = ac$, $C = ab$, $D = -abc$.

2

Paraqiti barazimet e këtyre rrafsheve në formën e përgjithshme:

$$\text{a) } \frac{x}{4} - \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1; \quad \text{b) } \frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{\frac{1}{4}} - \frac{z}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Shembulli 2

, Le të jetë dhënë barazimi i rrafshit $\Sigma: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1$ në formën segmentale $a = 2, b = 3, c = -1$. Ta transformojmë barazimin në formën e përgjithshme

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z &= 1 / \cdot 6 \\ 3x + 2y - 6z &= 6 \\ 3x + 2y - 6z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

ku $A = 3, B = 2, C = -6, D = -6$

Shembulli 3

Të formojmë barazim të rrafshit Σ që kalon nëpër pikat $A(2, 1, -5)$ dhe $B(-2, 0, 3)$, port e boshtet koordinative x dhe z pren segmente të barabartë. Domethënë, $a = c$: Atëherë forma segmentale e barazimit të tij do të jetë:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$$

Pika $A \in \Sigma$ d.m.th., koordinatat e saja e kënaqin formën segmentale të barazimit:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{5}{a} &= 1 / \cdot ab \\ 2b + a - 5b &= ab \\ a - 3b &= ab. \end{aligned}$$

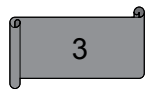
Pika $B \in \Sigma$ d.m.th., koordinatat e saja e kënaqin formën segmentale të barazimit:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{a} + \frac{0}{b} + \frac{3}{a} &= 1 / \cdot a \\ a &= 1. \end{aligned}$$

E zgjidhim sistemin

$$\begin{cases} a - 3b = ab \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3b = b \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = 1 \end{cases}.$$

Forma segmentale e barazimit Σ është: e: $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$



Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër pikën $A(8, -3, 2)$ dhe te bishtet koordinative pren segmente të barabarta

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto segmentet që i prejnë këto rrafshe te boshtet koordinative:
a) $2x - 3y - 5z - 20 = 0$ b) $7x + 5y + 4z + 15 = 0$
2. Shkruaj barazimin e rrafshit që te boshtet koordinative pren segmente $a = -2, b = c = 1$
3. a) Shkruaj barazimin e rrafshit që kalon nëpër pikën $A(1, 2, 3)$ dhe te boshtet koordinative pren segmente të barabartë
b) Shkruaj barazimin e rrafshit që kalon nëpër pikën $A(1, 2, 3)$ dhe $B(-1, -2, 4)$ te boshtet koordinative y dhe z pren segmente të barabartë
4. Cakto parametrin m te barazimi i rrafshit $(2 - m)x - 3y - 5z - 15 = 0$ ashtu që shuma e segmenteve të cilët i pren rrafshi me boshte koordinative është 7.
5. Cakto parametrin m te barazimi i rrafshit $(2m - 3)x - 3my + 2z - 10 = 0$ ashtu që prodhimi i segmenteve të cilët i pren rrafshi në boshtet koordinative x dhe z është 2.
6. Cakto parametrin m te barazimi i rrafshit $(1 - m)x + 2y + 5z - 20 = 0$ ashtu që prodhimi i segmenteve të cilët i pren rrafshi në boshtet koordinative x dhe z është 100.
7. Njehso vëllimi e tetraedrit të formuar prej rrafsheve koordinative dhe rrafshit $2x - 10y + 5z - 30 = 0$.

7. Barazimi i rrafshit nëpër tri pika

Le të jenë dhënë tri pika jokolineare M_1, M_2 dhe M_3 . Rreze-vektorët le të jenë dhënë me pikat M_1, M_2 dhe M_3 , të cilat shtrihen te rrafshi Σ i shënojmë me $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ përkatësisht, ndërsa rreze-vektori i çfarëdo pikë M e shënojmë me $\vec{r}$, Figura 7. Vektorët $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ shtrihen në rrafsh Σ , domethënë ato janë vektor komplanar, pra prodhimi i tyre i përzier është zero $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$.

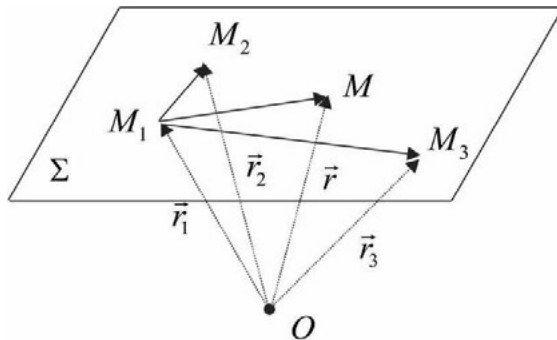


Figura 7

Përkufizimi 1: Barazimi

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

paraqet **formë vektoriale e barazimit të rrafshit që kalon nëpër tri pika.**

Nëse pikat jokolineare të cilat shtrihen te rrafshi i shprehim nëpërmjet koordinatave $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ atëherë edhe rreze-vektorët e tyre do t'i kenë koordinatat e njëjtë, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, përkatësisht. Forma koordinative e çfarëdo pikë prej rrafshit është $M(x, y, z)$ edhe rreze-vektor i tij $\vec{r} = (x, y, z)$. Vektorët $\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ janë dhënë me koordinatat

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1 &= (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) . \end{aligned}$$

Atëherë barazimi vektorial i rrafshit që kalon nëpër tri pika jokolineare në formën koordinative është:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ku $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Përkufizimi 2: Barazimi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

quhet **barazimi i rrafshit që kalon nëpër tri pika jokolineare** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ dhe $M_3(x_3, y_3, z_3)$

Shembulli 1

Barazimi i rrafshit që kalon nëpër tri pika jokolineare $M_1(0, -1, 2)$, $M_2(1, -2, -1)$ dhe $M_3(3, 1, 0)$ është

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y + 1 & z - 2 \\ 1 - 0 & -2 + 1 & -1 - 2 \\ 3 - 0 & 1 + 1 & 0 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y + 1 & z - 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Me zgjidhjen e determinantës së rendit të tretë fitohet

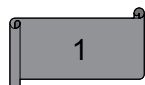
$$2x - 9(y + 1) + 2(z - 2) + 3(z - 2) + 6x + 2(y + 1) = 0$$

$$8x - 7(y - 2) + 5(z - 3) = 0$$

$$8x - 7y + 5z - 1 = 0.$$

Barazimi i përgjithshëm i këtij rrafshi është

$$8x - 7y + 5z - 1 = 0$$



Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër tri pika jokolineare dhe

$M_1(1, -1, -3)$, $M_2(-1, 2, 0)$ dhe $M_3(-5, -2, 1)$

Detyra për punë të pavarur

1. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër tri pika

a) $M_1(0, 1, -3)$, $M_2(1, 2, 0)$, $M_3(-1, -2, 1)$;

b) $M_1(-2, 4, -10)$, $M_2(1, 4, 5)$, $M_3(0, 2, 0)$.

2. Kontrolllo vallë pikat:

a) $A(1, 2, -3)$, $B(3, 2, 2)$, $C(4, 5, 1)$, $D(-4, -3, 1)$

b) $A(0, 1, -2), B(1, 0, -1), C(1, 1, 0), D(2, -1, 0)$

Janë komplanare! Në rastin e konstatuar, gjeje barazimin e atij rrafshi!

2. Shkruaje barazimin e rrafshit të cili shtrihet $\triangle ABC / A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6) /$ Ndonjë prej pikave $M(-1, 2, 3), N(2, 1, -3), S(0, -2, 1)$ a shtrihet në atë rrafsh?

8. Pozita reciproke e dy rrafsheve

Në lidhje me pozitën reciproke të dy rrafsheve, ato mund të jenë paralel ndërmjet veti (të puthiten ose të mos kenë pika të përbashkëta) ose të priten.

Le të jenë dhënë dy rrafshet në formën e përgjithshme:

$$\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Vektorët, të cilët janë normal të dy rrafshet janë:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_1 \perp \Sigma_1 \quad \text{dhe} \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2), \quad \vec{n}_2 \perp \Sigma_2.$$

Këndi ndërmjet rrafsheve. Kur dy rrafshet priten atëherë ato formojnë kënd $\alpha = \angle(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Ky kënd është në realitet këndi ndërmjet vektorëve të tyre normal $\alpha = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. Për këndin ndërmjet dy rrafsheve e llogarisim këndin më të vogël prej të dy këndeve α dhe $\pi - \alpha$. Për këndin më të vogël le ta marrim këndin si kënd ndërmjet $\vec{n}_1$ dhe $\vec{n}_2$ Figura 8.

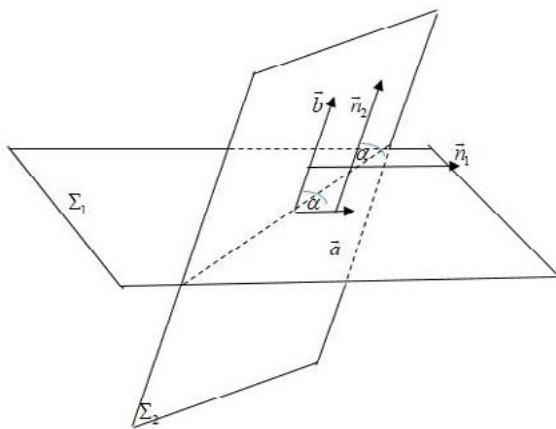


Figura 8

Këndin α mund ta njehsojmë nëpërmjet prodhimit skalar të vektorëve $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ d.m.th.,
 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha$ Prej këtu fitohet këndi α si $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Deri sa e shfrytëzojmë
 formën koordinative të vektorëve normal $\vec{n}_1$ dhe $\vec{n}_2$ atëherë fitohet formula

$$\cos \alpha = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Prerja e dy rrafsheve është drejtëz, e cila qartë vërehet prej figurës 8.

Kushti për normalitet të dy rrafsheve. Të dy rrafshet le të priten dhe këndi ndërmjet tyre le të jetë $\alpha = 90^\circ$. Atëherë prodhimi skalar i vektorëve normal $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ është zero d.m.th., $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Me shfrytëzimin e formës koordinative të prodhimit skalar për vektorët normal kemi $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

Barazimi $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

paraqet **kushtpërnormalitet (ortogonalitet)** të dy rrafsheve Σ_1 dhe Σ_2 , ku $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ dhe $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$.

Kushti për paralelizëm të dy rrafsheve. Kur dy rrafshe janë paralel $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$, atëherë vektorët normal të tyre janë paralel $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, Figura 9.

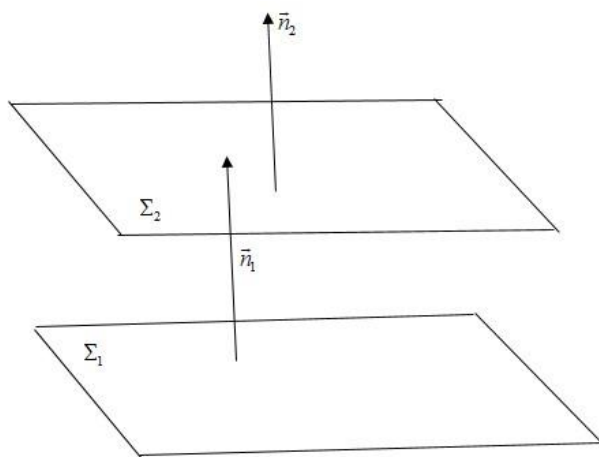


Figura 9

Qartë shikohet prej figurës 9 se vektorët normal $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ janë vektor kolinear. Atëherë ekziston numër real λ ashtu që $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$. Me shfrytëzimin e koordinatave të tyre kemi $A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2$.

Vijon $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$.

Barazimi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

paraqet **kusht për paralelizëm** ndërmjet rrafshëve Σ_1 dhe Σ_2 , ku $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ dhe $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$.

Nëse vlen kushti për paralelizëm dhe është e saktë $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$ edhe atëherë të dy rrafshet puthiten

$\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Nëse vlen kushti për paralelizëm, ndërsa edhe $\frac{D_1}{D_2} \neq \lambda$ atëherë të dy rrafshet nuk kanë pika të përbashkëta $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.

Shembulli 1 Rrafshet $\Sigma_1: 3x - 3y + 9z - 2 = 0$ dhe $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ janë paralel $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$

pasi $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} \neq 1$. Por rrafshet $\Sigma_1: 3x - 3y + 9z - 6 = 0$ dhe $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ puthiten $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$

pasi $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$. Sa u tha tani, rrafshet $\Sigma_1: 4x + 2y + z - 2 = 0$ dhe $\Sigma_2: x + y + 2z - 1 = 0$

priten, pasi $\frac{4}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$.

1

Cakto raportin reciprok të këtyre rrafshëve;

- a) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ b) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + z - 2 = 0$
c) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + z - 1 = 0$

Shembulli 2

Ta caktojmë këndin α nën të cilin priten rrafshet $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$ dhe $\Sigma_2: x + y + 2z - 1 = 0$. Vektorët e tyre normal janë $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ dhe $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$. Në pajtim me formulën të dhënë më lart kemi:

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha \approx 62^\circ.$$

2

Cakto këndin α ndërmjet rrafsheve $2x - 3y + z - 2 = 0$ dhe $x + y + z + 3 = 0$

Shembulli 3

Ta gjejmë barazimin e rrafshit Σ_1 që kalon nëpër pikat $M(1, -1, 0)$ dhe $N(2, -3, 1)$ dhe është normal në rrafshin $\Sigma_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$. Prej $M \in \Sigma_1: A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0$ dhe $N \in \Sigma_1: A(2-1) + B(-3+1) + C \cdot 1 = 0$. Prej kushtit për normalitet $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$ kemi $2A - B + 3C = 0$. Kemi,

$$\begin{cases} A - 2B + C = 0 \\ 2A - B + 3C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2B - A \\ 2A - B + 6B - 3A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2B - A \\ -A + 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -3B \\ A = 5B \end{cases}$$

Marrim $B = 1$ dhe fitojmë: $C = -3$, $A = 5$ Barazimi i rrafshit do të jetë:

$$\Sigma_1: 5x + y - 3z - 4 = 0$$

3

Shkruaje barazimin e rrafshit Σ_1 që kalon nëpër pikën $M(1, -1, 0)$ dhe është paralel me rrafshin $\Sigma_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto raportin reciprok të këtyre dy rrafsheve:

a) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: 6x - 8y + 2z - 2 = 0$;

b) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: 6x - 8y + 2z - 5 = 0$;

c) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: x - 2y + z - 1 = 0$.

Për rrafshet të cilët priten, gjej këndin α nën të cilin priten

2. Shkruaje barazimin e rrafshit Σ që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe është normal në rrafshet $\Sigma_1: x - y + z - 1 = 0, \Sigma_2: x + y - 2z - 3 = 0$

3. Shkruaj barazimin e rrafshit Σ_1 që kalon nëpër pikat $M(1, -1, 0)$ dhe $N(2, 3, -2)$ dhe është normal në rrafshin $\Sigma_2: 2x + 3y - z - 2 = 0$.

4. Shkruaje barazimin e rrafshit Σ_1 që kalon nëpër pikën $N(2, 3, -2)$ dhe është paralel me rrafshin $\Sigma_2: x - y + z = 0$

9. Largesa prej pikës deri te rrafshi

Për përcaktimin e largesës prej pikës deri te rrafshi do ta shfrytëzojmë qasjen e njëjtë si edhe fitimin e formës normale vektoriale të barazimit të rrafshit.

- Çka është largesa prej pikës deri te rrafshi?

Përgjigja e kësaj pyetje është se ajo është largesse më e shkurtër prej pikës deri te rrafshi. Le të jetë $M_I(x_I, y_I, z_I)$ çfarëdo pikë prej rrafshit me rreze-vektor Σ dhe vektor $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Le të jetë pika $\vec{n} \perp \Sigma$, $\vec{n} = (A, B, C)$ dhe dëshirojmë ta njehsojmë largesën prej pikës M deri te rrafshi Σ . Te pika $M_I(x_I, y_I, z_I)$ me rreze-vektor $\vec{r} = (x_I, y_I, z_I)$ e gjejmë projektionin e saj M_I mbi rrafshin Σ . Atëherë

$$\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x_I - x_0, y_I - y_0, z_I - z_0).$$

Largesa prej pikës $M(x_I, y_I, z_I)$ deri te rrafshi Σ është projektioni i vektorit mbi vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$

$$\begin{aligned} d = \overline{MM_1} &= |\text{pr}_{\vec{n}}(\vec{r} - \vec{r}_0)| = \left| \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|A(x_I - x_0) + B(y_I - y_0) + C(z_I - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_I + By_I + Cz_I - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_I + By_I + Cz_I + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

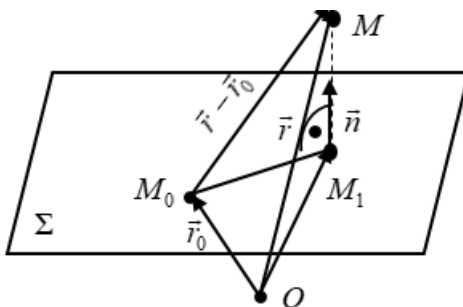


Figura 10

Përkufizimi 1: Largesa prej pikës $M(x_I, y_I, z_I)$ deri te rrafshi Σ është

$$d = \frac{|Ax_I + By_I + Cz_I + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ku $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n} \perp \Sigma$.

Është e qartë se largesa prej pikës deri te rrafshi është $d \geq 0$. Largesa $d = 0$, nëse pika shtrihet te rrafshi.

Shembulli 1 Barazimi i rrafshit që kalon nëpër tri pika $A(-1, 2, -3)$, $B(0, 5, -2)$ dhe $C(-1, -1, 1)$ është

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12(x+1) - 3(z+3) + 3(x+1) - 4(y-2) = 15x - 4y - 3z + 14,$$

d.m.th. $15x - 4y - 3z + 14 = 0$. Largesja prej pikës $M(1, 1, -1)$ deri te rrafshi është

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|15 - 4 + 3 + 14|}{\sqrt{225 + 16 + 9}} = \frac{28}{5\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{25}$$

1 Njehso largesën prej pikës $M(1, 0, -2)$ deri te rrafshi që kalon nëpër pikën $A(-1, 2, 3)$ dhe është paralel me rrafshin $x - 2y + z - 4 = 0$.

Shembulli 2 Të formohet barazimi i rrafshit paralel i rrafshit $2x - y - 2z - 2 = 0$, largesa e të cilit prej atij është 4.

Për ta gjetur largesën ndërmjet rrafshit të dhënë $2x - y - 2z - 2 = 0$ dhe rrafshit që është paralel me rrafshin e dhënë $M(1, 1, 0)$ dhe duhet ta caktojmë, do të marrim çfarëdo pikë prej rrafshit të dhënë. Le të jetë pika prej rrafshit $2x - y - 2z - 2 = 0$. Prej largesës së dhënë kemi

$$d = \frac{|A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|A + B + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 4.$$

Prej paralelizmit të rrafsheve vijon $\frac{A}{2} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{-2} = k$ prej ku $A = 2k$, $B = -k$, $C = -2k$.

Nëse $k = 1$, atëherë kemi se $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$

Prej largesës së dhënë kemi: $\frac{|2 - 1 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 4 \Leftrightarrow |1 + D| = 12 \Leftrightarrow D_1 = 11; D_2 = -11$

Prej këtu kemi barazimet e të dy rrafsheve $2x - y - 2z + 11 = 0$ dhe $2x - y - 2z - 11 = 0$ të cilët i kënaqin kushtet e dhëna

2 Njehso largesën ndërmjet dy rrafsheve paralel $2x - 3y + z - 4 = 0$ dhe $4x - 6y + 2z - 5 = 0$.

Detyra për punë të pavarur

1. Njihso largesën prej pikës $A(-1, 2, 3)$ deri te rrafshi $x - 2y - 3z - 3 = 0$
2. Në boshtin z cakto pikë në lloj e larguar prej rrafsheve $x - 2y - 3z - 3 = 0$ dhe $3x + y - z + 6 = 0$.
3. Njihso largesën prej fillimit të koordinatave deri te rrafshi që kalon nëpër pikat $A(-1, 2, 3)$ dhe është normale në drejtëzën $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$.
4. Njihso gjatësinë e lartësisë të lëshuar prej kulmit A të tetraedrit $ABCD / A(1, 2, -3), B(0, 1, 2), C(-3, 0, -1), D(1, -1, -2)$
5. Cakto pikë prej boshtit y që është në largësi 5 njësi prej rrafshit $x + 2y - 2z + 2 = 0$.

10. Barazimi i drejtëzës në hapësirë

Këtu do të jepen barazimet e drejtëzave në hapësirë dhe atë: forma parametrike e barazimit të drejtëzës, forma kanonike e barazimit të drejtëzës, barazimi i drejtëzës nëpër dy pika dhe forma implicite e drejtëzës së dhënë (si prerje të dy rrafsheve).

Forma vektoriale e drejtëzës

Le të jetë dhënë drejtëza p në hapësirë, paralel me vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ dhe e cila kalon nëpër çfarëdo pikë M_0 me rreze-vektor $\vec{r}_0$. Për ta fituar barazimin e drejtëzës p , zgjedhim pikë M_0 me rreze-vektor $\vec{r}$. Figura 11

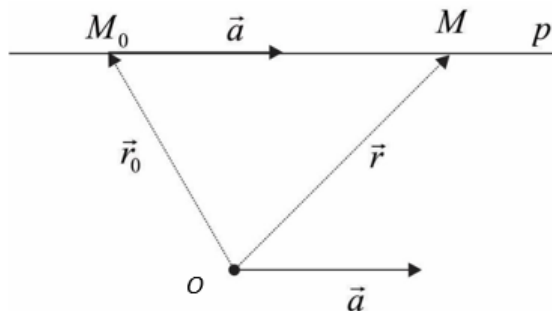


Figura 11

Në pajtim me figurën 11 kemi se vektori $\vec{a}$ është kolinear me vektorin $\overrightarrow{M_0M}$ që do të thotë se ekziston skalar t ashtu që $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$. Atëherë për rreze-vektor të pikës M kemi

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}.$$

Përkufizimi 1: Barazimi

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$$

është **forma vektoriale e barazimit të drejtëzës**, që është paralel me vektorin $\vec{a} \neq \vec{0}$ dhe kalon nëpër çfarëdo pikë M_0 me rreze-vektor $\vec{r}_0$, ku t është skalar. Vektori $\vec{a}$ quhet **vektor mbajtës i drejtëzës**.

Forma parametrike e barazimit të drejtëzës

Me shfrytëzimin e barazimit vektorial të drejtëzës $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$ dhe formës koordinative e vektorëve

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dhe $\vec{r} = (x, y, z)$ kemi

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a_1, a_2, a_3).$$

Barazimet e fituara $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$, $z = z_0 + a_3 t$ janë barazimet për drejtëzën p në formën koordinative

Përkufizimi 2: Barazimet

$$x = x_0 + a_1 t$$

$$y = y_0 + a_2 t$$

$$z = z_0 + a_3 t$$

quhen **forma parametrike e barazimit të drejtëzës** që është paralel me vektorin $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dhe kalon nëpër pikën $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ku t është skalar.

Shembulli 1

Forma parametrike e barazimit të drejtëzës që është paralel me vektorin $\vec{a} = (-1, 1, 2)$ dhe kalon nëpër pikën $M_0(2, 0, -3)$ është dhënë me barazimet:

$$x = 2 - t$$

$$y = t$$

$$z = -3 + 2t.$$

1

Shkruaje formën parametrike të barazimit të drejtëzës që është paralel me vektorin

$\vec{a} = (1, -2, -3)$ dhe kalon nëpër fillimin e koordinatave.

Forma kanonike e barazimit të drejtëzës

Me transformim të vogël të barazimeve të cilat janë në formë parametrike të barazimeve për $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, fitohet formë e re e barazimit të drejtëzës t . Transformimi i vogël i të shprehurit të skalarit prej të gjitha tre barazimeve

$$t = \frac{x-x_0}{a_1}, t = \frac{y-y_0}{a_2}, t = \frac{z-z_0}{a_3},$$

dhe barazimi i anëve të djathta të tyre.

Përkufizimi 3: Barazimi

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

quhet **forma kanonike e barazimit të drejtëzës** e cila është paralele me vektorin $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dhe kalon nëpër pikën $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ku t është skalar.

Në formën kanonike të barazimit të drejtëzës vërehet se pjesëtohet me a_1, a_2, a_3 , të cilat janë koordinatat a vektorit mbajtës $\vec{a}$ të drejtëzës

Imponohet pyetja:

- Çka me formën kanonike të barazimit të drejtëzës, kur ndonjëra prej koordinatave të vektorit $\vec{a}$ është zero?

Nëse ndonjëra prej koordinatave të vektorit mbajtës $\vec{a}$ është zero d.m.th., ndonjëra a_1, a_2, a_3 është zero, për shembull $a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ atëherë forma kanonike e barazimit të drejtëzës është

$$x-x_0=0, \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}.$$

Shembulli 2

Ta paraqesim në sistemin koordinativ kënddrejtë të Dekartit drejtëza p që kalon nëpër pikën $M_0(1, -1, 5)$ dhe është paralel me vektorin $\vec{a} = (1, 4, 0)$ Figura 12

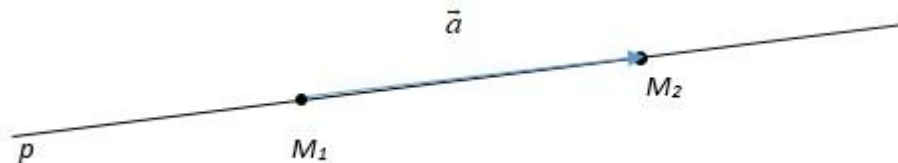


Figura 13

Përkufizimi 4: Barazimi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

është **barazimi i drejtëzës që kalon nëpër dy pika** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2, z_2)$

Shembulli 3

Forma kanonike e barazimit të drejtëzës që kalon nëpër dy pika $M_1(2, -1, 2)$ dhe $M_2(1, -2, 0)$ është

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2}$$

3

Shkruaj barazimin e drejtëzës që kalon nëpër kulmin B të katërkëndëshit $ABCD$ / $A(1, -2, -3)$, $B(2, 3, -6)$, $C(-3, 5, 4)$, $D(-5, -6, 4)$ paralel me diagonalen AC e katërkëndëshit $ABCD$.

Drejtëza e dhënë në formën implicite (si prerje e dy rrafshëve)

Te pjesa e shqyrtimit të raportit të dy rrafshëve joparalel, se ato rrafshë formojnë ndonjë kënd dhe prerja e tyre është drejtëz. Duke pasur parasysh për atë që prerja e dy rrafshëve joparalele është drejtëz (figura 14), atëherë mund si barazim të drejtëzës ta llogarisim edhe këtë formë:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

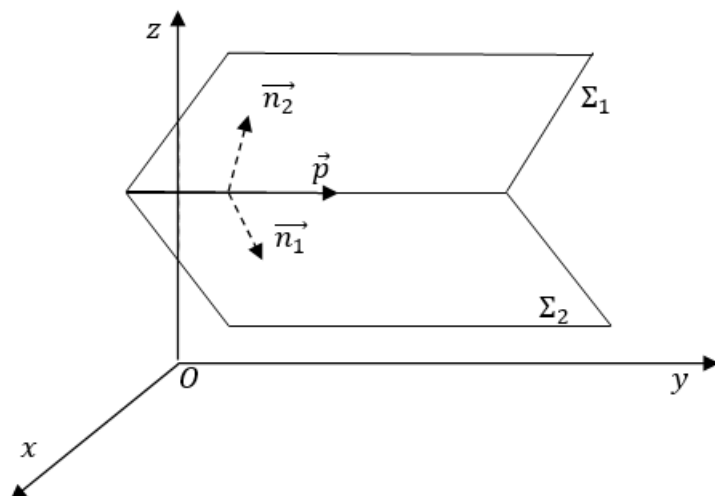


Figura 14

Përkufizimi 5: Barazimi i drejtëzës së formës

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

quhet **forma implicite e drejtëzës së dhënë (forma e përgjithshme e barazimit të drejtëzës)**, ku $\Sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dhe $\Sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ janë dy rrafshet joparalele.

Çdo barazim i drejtëzës së dhënë në formën implicite mund ta transformojmë në formën kanonike të barazimit të drejtëzës është normale në vektorët normal të dy rrafsheve. Prej këtu vektori i tij mbajtës mund ta marrim prodhimin vektorial të dy vektorëve normal, që është gjithashtu normale te ato.

Mënyra është kjo që vijon:

Vektori i cili është paralel me drejtëzën është:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq 0,$$

ku $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp \Sigma_1$ dhe $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp \Sigma_2$ janë vektor normal te y rrafshet. Gjendet pika $M_0(x_0, y_0, z_0)$ e cila i kënaq të dy barazimet, d.m.th., M_0 është pika prej drejtëzës, pra forma kanonike e barazimit të drejtëzës është:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Shembulli 4 Prej formës implicite të drejtëzës së dhënë

$$p: \begin{cases} x-2y+3z+4=0 \\ 5x+4y-z+2=0 \end{cases}$$

ta gjejmë formën e saj kanonike.

Vektori paralel me këtë drejtëz është

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-10, 16, 14).$$

Pika e cila shtrihet te drejtëza $M_0(0, y, z)$ është i kënaq barazimet e të dy rrafshëve,

$$\begin{cases} -2y+3z+4=0 \\ 4y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+12y+6+4=0 \\ z=4y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=-2. \end{cases}$$

d.m.th., $M_0(0, -1, -2)$. Forma kanonike e barazimit të kësaj drejtëze është

$$\frac{x}{-10} = \frac{y+1}{16} = \frac{z+2}{14}$$

4

Shkruaje formën kanonike të barazimit për drejtëzën p të dhënë në formën kanonike

Pastaj, kontrollo se pika $M(0, 1, 1)$ a shtrihet te drejtëza p

$$p: \begin{cases} -3x-2y+z+1=0 \\ x+4y-z-3=0 \end{cases}$$

Detyra për punë të pavarur

1. Shkruaje formën kanonike të barazimit të drejtëzës që është paralele me vektorin $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ dhe kalon nëpër pikën $A(1, 2, -2)$.
2. Shkruaje formën parametrike të barazimit të drejtëzës që është normale në rrafshin $\Sigma: -3x - 2y + z + 1 = 0$ dhe kalon nëpër pikën $B(3, -5, -7)$.

3. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër drejtëzën $p: \begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ x - 2y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ dhe është paralele me boshtin y .

4. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër drejtëzën $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = z-5$ dhe kalon nëpër fillimin e koordinatave

5. Shkruaje barazimin e rrafshit që është paralel me drejtëzën $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{4}$ dhe kalon nëpër pikën $C(0, -1, -2)$

6. Shkruaj barazimet e drejtëzave të cilat kalojnë nëpër çdo kulm $\triangle ABC$ të dhënë me koordinatat $A(-1, 2, -3)$, $B(1, 3, -5)$, $C(0, 4, 6)$ dhe janë paralele me brinjët e përballta

7. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër çdonjërin kulm të katërkëndëshit $ABCD$ të dhënë me koordinatat $A(-1, 2, 5)$, $B(-2, -3, -6)$, $C(-3, 5, 4)$, $D(5, -6, 4)$ dhe është paralel me diagonalen e katërkëndëshit që i lidh kulmet e tij përkatës

11. Raporti reciprok i drejtëzës dhe rrafshit

Në lidhje me pozitën e ndërmjetshme, drejtëza p dhe rrafshi Σ mund të jenë paralel, shënimi ($p \parallel \Sigma$) (drejtëza p dhe rrafshi Σ nuk kanë pika të përbashkëta $p \cap \Sigma = \emptyset$ – ose drejtëza p shtrihet te rrafshi $p \perp \Sigma$), ose ta kenë pikë të përbashkët d.m.th., drejtëza p e depërton rrafshin Σ (në rastin e veçantë, drejtëza p është normale te rrafshi Σ d.m.th.,

Le të jetë dhënë drejtëza p dhe rrafshi Σ

$$p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

$$\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$$

ku vektori mbajtës i drejtëzës p është $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, pika $M_0(x_0, y_0, z_0) \in p$ dhe vektori normal te rrafshi Σ , $\vec{n} = (A, B, C)$.

Drejtëza e depërton rrafshin

Drejtëza p dhe rrafshi Σ le të kenë një pikë të përbashkët M d.m.th., $M \in p \cap \Sigma = \{M\}$ Figura 15.

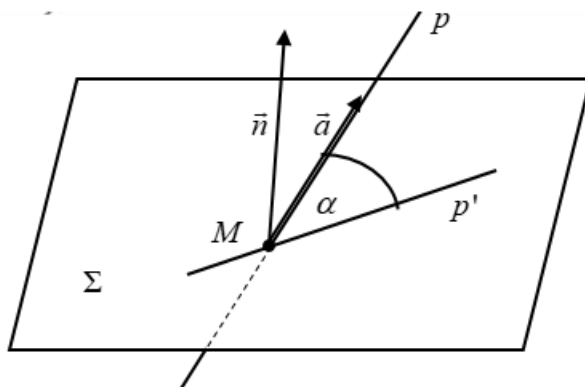


Figura 15

Këndi α ndërmjet drejtëzës p dhe rrafshit Σ është më i vogël prej të dy këndeve fqinje që i formon drejtëza p dhe projeksioni i tij ortogonal p' mbi rrafshin Σ , d.m.th. këto dy kënde janë kënde sublementar, për të cilët vlen $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Pasi merret këndi më i vogël, mund të llogaritet se $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Këndi ndërmjet drejtëzës p , $\vec{n}$ është $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Prej formulës trigonometrike për çfarëdo kënd vlen $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Prej këtui për këndin ndërmjet $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dhe $\vec{n} = (A, B, C)$ prej përkufizimit të prodhimit skalar kemi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}, \text{ d.m.th.}$$

$$\sin \alpha = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Pika tek e cila drejtëza e depërton rrafshin quhet **pika e depërtimit**.

Shembulli 1 Drejtëza $p: \frac{x-8}{-3} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-7}{-1}$ e depërton rrafshin $\Sigma: 5x + 3y - 4z + 16 = 0$ dhe pika e depërtimit është pika M , që e fitojmë me transformimin e formës kanonike të drejtëzës në formë parametrike

$$\begin{aligned} x &= 8 - 3t \\ y &= -6 + 2t \\ z &= 7 - t. \end{aligned}$$

Me zëvendësimin e saj te barazimi i rrafshit kemi

$$5(8 - 3t) + 3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 16 = 0 \Rightarrow 5t = 10 \Rightarrow t = 2$$

Pika e depërtimit të drejtëzës me rrafshin është pika $M(2, -2, 5)$

Këndi α ndërmjet drejtëzës p dhe rrafshit Σ do ta njehsojmë nëpërmjet formulës

$$\sin \alpha = \frac{|(-3) \cdot 5 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4)|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \alpha \approx 11^\circ.$$

1 Cakto pikën e depërtimit të drejtëzës $p: x-1=2y=\frac{4-z}{2}$ me rrafshin

$$\Sigma: 2x + 3y - z + 1 = 0$$

Në rastin e veçantë $p \perp \Sigma$, d.m.th., këndi ndërmjet drejtëzës p dhe rrafshit Σ është $\alpha = 90^\circ$.

Atëherë vektori mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i drejtëzës p dhe vektorit $\vec{n} = (A, B, C)$ normal në rrafsh Σ janë kolinear. Domethënë, ekziston skalar λ ashtu që $\vec{a} = \lambda \vec{n}$. Me shfrytëzimin e formës së tyre koordinative kemi $\lambda = \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$

Kushti për normalitet të drejtëzës dhe rrafshit është

$$\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$$

ku $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ është vektori mbajtës i drejtëzës, ndërsa $\vec{n} = (A, B, C)$ është vektor normal te rrafshi

Shembulli 1 Drejtëza $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{5}$ është normale në rrafshin $2x - 3y + 5z - 1 = 0$, pasi

$$\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = \frac{5}{5}$$

Drejtëza është paralele me rrafshin

Drejtëza p le të jetë paralele me rrafshin Σ d.m.th., $p \parallel \Sigma$ Figura 16.

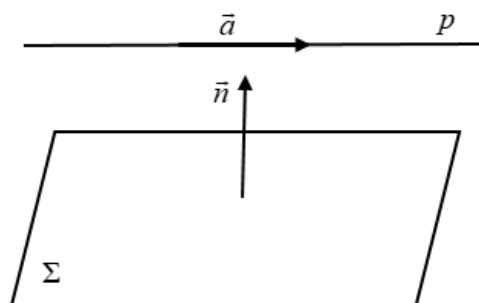


Figura 16

Nëse $p \parallel \Sigma$ atëherë $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \perp \vec{n} = (A, B, C)$. Domethënë, prodhimi skalar i vektorit mbajtës $\vec{a}$ së drejtëzës p dhe vektorit $\vec{n}$ normal në rrafsh Σ është zero d.m.th., $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$. Me shfrytëzimin e formës së tyre koordinative kemi $a_1A + a_2B + a_3C = 0$

Barazimi

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0$$

quhet **kushti për paralelizëm** të drejtëzës me mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dhe vektor normal në rrafshin $\vec{n} = (A, B, C)$

Në rastin e veçantë, drejtëza $p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ shtrihet te rrafshi $\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ nëse vlen kushti për paralelizëm $a_1A + a_2B + a_3C = 0$ dhe pika $M_0(x_0, y_0, z_0)$ prej drejtëzës e kënaq barazimin e rrafshit $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Shembulli 3 a) Drejtëza $p: \frac{x-1}{2} = 2-y = z+1$ është paralele me rrafshin $\Sigma: x + y - z - 4 = 0$

pasi e kënaq kushtin për paralelizëm $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$. Prej $1 + 2 + 1 - 4 = 0$ vijon se kjo drejtëz p shtrihet te rrafshi Σ .

b) Drejtëza $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z+1$, e cila është paralele me rrafshin $\Sigma: x + y - z - 1 = 0$ nuk shtrihet te rrafshi, pasi është kënaq kushti për paralelizëm $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$,

$1 + 2 + 1 - 1 = 3 \neq 0$ dir, d.m.th., $p \cap \Sigma = \emptyset$

2

Cakto pozitën reciproke të drejtëzës me rrafshin:

a) $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = z-4$, $\Sigma: 2x - y + z - 6 = 0$;

b) $p: \frac{x+2}{-2} = y-1 = \frac{z+1}{-1}$, $\Sigma: 2x - y + z - 6 = 0$.

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto pikën e depërtimit të drejtëzës $p: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$ me rrafshin $\Sigma: x + 2y + 3z + 4 = 0$

Sa është këndi ndërmjet drejtëzës p dhe rrafshit Σ ?

2. Cakto pozitën reciproke të drejtëzës $p: x = y = 6 - z$ me rrafshin $\Sigma: 2x - y + z - 6 = 0$
3. Shkruaje barazimin e rrafshit Σ që është normal te drejtëza $p: x - 1 = \frac{y}{2} = z + 2$ dhe kalon nëpër pikën $A(-1, 2, -3)$. Pastaj, gjeje pikën e depërtimit!
4. Shkruaje barazimin e rrafshit Σ që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe në të cilën shtrihet drejtëza $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$
5. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $B(-1, -4, 4)$ dhe është normale te rrafshi $\Sigma: 2x + 5y - 3z - 4 = 0$. Pastaj, cakto pikën e depërtimit!

12. Pozita reciproke e dy drejtëzave

Në lidhje me pozitën e ndërmjetshme të dy drejtëzave në hapësirë mund të priten, të jenë paralele dhe të jenë aplanare. Ta shqyrtojmë çdonjërin në veçantësi.

Le të jenë dhënë dy drejtëza

$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

$$b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

ku vektorët $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ mbajtës $M_1(x_1, y_1, z_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2, z_2)$ dhe janë pika prej drejtëzave a dhe b përkatësisht

Drejtëzat priten

Drejtëzat a dhe b le të priten në pikën $M(x, y, z)$, Figura 17. Këndi α që e formojnë të dy drejtëzat a dhe b është këndi ndërmjet vektorëve të tyre mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Njëjtë siç edhe te prerja e dy rrafsheve, këndi α ndërmjet të dy drejtëzave a dhe b mund ta gjejmë me shfrytëzimin e prodhimit skalar të vektorëve mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

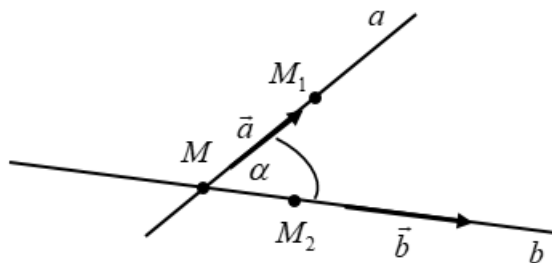


Figura 17

Përkufizimi 1: Këndi ndërmjet drejtëzave a dhe b është

$$\cos \alpha = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

ku vektorët e tyre mbajtës janë $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, përkatësisht $M_1(x_1, y_1, z_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2, z_2)$, janë pikat prej drejtëzave a dhe b përkatësisht

Pikëprerja $M(x, y, z)$ e drejtëzave a dhe b e fitojmë me zgjidhjen e sistemit të barazimeve të dhëna në formë parametrike

Shembulli 1 Për drejtëzat

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6}$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

me vektor $\vec{a} = (-2, 3, 6)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$ mbajtës dhe pika $M_1(0, 5, -15)$ dhe $M_2(2, 0, -1)$ të cilat shtrihen te drejtëzat a dhe b përkatësisht. Këndi α që e formojnë këto dy drejtëza e fitojmë e fitojmë nëpërmjet formulës

$$\cos \alpha = \frac{|(-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{21} \Rightarrow \alpha \approx 79^\circ.$$

Pikëprerjen $M(x, y, z)$ për drejtëzat a dhe b ($a \cap b = \{M\}$) do ta gjejmë me këtë mënyrë. Së pari i transformojmë barazimet e dhëna në formë parametrike:

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6} = t$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2} = k$$

$$\begin{aligned} a: x &= -2t, y = 3t + 5, z = 6t - 15 \\ b: x &= k + 2, y = -2k, z = 2k - 1 \end{aligned}$$

Fitojmë sistem prej tre barazimeve lineare me dy të panjohura

$$\begin{cases} k + 2 = -2t \\ -2k = 3t + 5 \\ 2k - 1 = 6t - 15 \end{cases}$$

Si zgjidhje e tij fitohet $t = 1, k = -4$. Atëherë $x = -2, y = 8, z = -9$ d.m.th., $M(-2, 8, -9)$

Në rastin e veçantë gjatë prerjes së dy drejtëzave $a \perp b$ dhe $\vec{a} \perp \vec{b}$ janë normale d.m.th.,. Atëherë vektorët mbajtës janë normal d.m.th., $\vec{a} \perp \vec{b}$. Prodhimi i tyre skalar është zero d.m.th., $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Me shfrytëzimin e formës së tyre koordinative kemi $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$

Barazimi

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

quhet **kusht për normalitet të drejtëzave** me mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Shembulli 1 Për drejtëzat

$$\begin{aligned} a: \frac{x-2}{-1} &= \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1} \\ b: \frac{x-3}{-1} &= z, y-3=0 \end{aligned}$$

vektorët mbajtës $\vec{a} = (-1, -1, -1), \vec{b} = (-1, 0, 1)$ dhe është i saktë kushti për normalitet $(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0$. Domethënë, drejtëzat priten a dhe b janë normale d.m.th., $a \perp b$

1

Cakto këndin α që e formojnë drejtëzat

$$\begin{aligned} a: \frac{x-1}{2} &= y-2 = \frac{z+3}{4} \\ b: \frac{x-6}{5} &= \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-2} \end{aligned}$$

Drejtëzat a janë reciprokisht normale? Pastaj, cakto pikëprerjen e tyre.

Drejtëzat janë paralele

Drejtëzat a dhe b le të jenë paralele ($a \parallel b$) Figura 18.

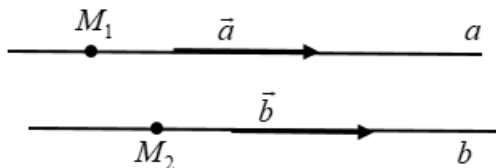


Figura 18

Vektorët mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ janë paralel $\vec{a} \parallel \vec{b}$ d.m.th., ato dy vektor janë kolinear.

Atëherë ekziston λ ashtu që $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Me shfrytëzimin e formës koordinative fitohet $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Barazimi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

quhet **kusht për paralelizëm të drejtëzave** me mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Shembulli 3

Drejtëzat

$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

janë paralele ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) dhe vlen kushti për paralelizëm të drejtëzave

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{-4}{-8}$$

Kur dy drejtëza priten ose janë paralele, ato shtrihen në një rrafsh. Kjo do të thotë se vektorët mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dhe vektori $\overrightarrow{M_1M_2}$ shtrihet te një rrafsh d.m.th., ato janë

komplanar, ku çdonjëra prej pikave $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ shtrihet nga një drejtëz **Figura 19**

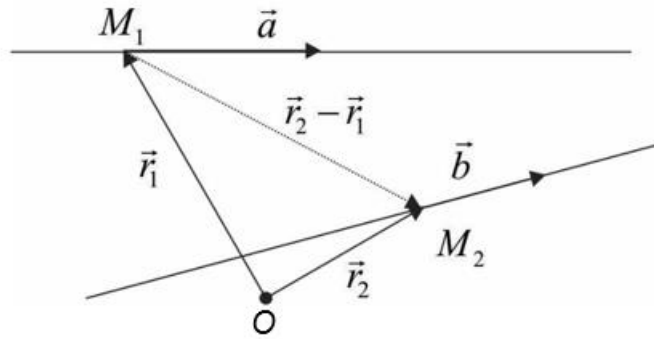


Figura 19

Duke e ditur prodhimin e përzier të tre vektorëve komplanar është zero d.m.th., $(\overline{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ me shfrytëzimin e formave koordinative të vektorëve fitohet:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Barazimi

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

quhet **kushti për komplanar** të dy drejtëzave me mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dhe pikat $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, të cilët shtrihen te ato përkatësisht.

Kushti për komplaritet është edhe **kushti për prerje të dy drejtëzave**.

Shembulli 4

a) Për drejtëzat prej shembullit 1 të cilat priten

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6}$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

me vektor mbajtës dhe vektori $\vec{a} = (2, 3, 6)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$, vlen kushti për komplaritet $\overline{M_1M_2} = (-1, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 14 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 56 - 30 - 42 + 24 - 20 = 0.$$

b) Për drejtëzat prej shembullit 2 të cilat janë paralele

$$a: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$b: \frac{x-3}{-1} = z, y-3=0$$

me vektor mbajtës dhe vektorin $\vec{a} = (-1, -1, -1), \vec{b} = (-1, 0, 1)$, vlen kushti për komplaritet $\overline{M_1 M_2} = (1, 0, -1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

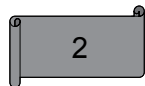
c) Për drejtëzat prej shembullit 3 të cilat janë paralele

$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

me vektor mbajtës dhe vektorin $\vec{a} = (3, 1, -4), \vec{b} = (6, 2, -8)$, vlen kushti për komplaritet $\overline{M_1 M_2} = (-1, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 48 - 6 - 8 + 48 = 0.$$



2

Janë dhënë vektorët

$$a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$b: x-2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

Vallë drejtëzat a dhe b shtrihen në një rrafsh?

Drejtëza aplanare

Nëse dy drejtëza nuk priten dhe nuk janë paralele, atëherë ato janë aplanare. Te Figura 20 janë dhënë dy drejtëza aplanare a dhe b . Pasi dy drejtëza të cilat priten ose janë paralele formojnë një rrafsh, atëherë për ato siç tani më përmendëm vlen kushti për komplaritet. Pra, prej këtu përfundimi logjik është se nëse dy drejtëza janë aplanare atëherë për ato nuk vlen kushti për komplaritet.

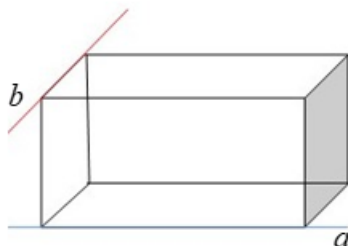


Figura 20

Përkufizimi 2: Dy drejtëza a dhe b

$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

$$b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

janë **aplanare**, nëse

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ku $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ janë vektorët e tyre mbajtës dhe pikat $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, shtrihen në drejtëzat përkatëse.

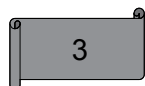
Shembulli 5 ➔ Për drejtëzat

$$a: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

$$b: -x = \frac{y+1}{-4} = z$$

me vektor mbajtës dhe vektori $\vec{a} = (2, 3, 1), \vec{b} = (-1, -4, 1)$, nuk vlen kushtiu për komplaritet $\overline{M_1 M_2} = (0, -2, 0)$. Drejtëzat a dhe b janë drejtëza aplanare

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 + 4 = 6 \neq 0.$$



Janë dhënë drejtëzat

$$a: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$$

$$b: x-2 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Kontrollo a formojnë rrafsh ose janë aplanare!

Detyra për punë të pavarur

1. Shyrto pozitën reciproke të drejtëzave:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \text{ dhe } \frac{x+3}{-4} = y-4 = \frac{z}{3};$$

$$b) \frac{x-4}{2} = y = \frac{z+1}{2} \text{ dhe } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{5}.$$

2. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(1, 2, -1)$ dhe është paralele me

$$\text{drejtëzat } \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

3. Janë dhënë drejtëzat $\frac{x-1}{2} = y-7 = \frac{z-3}{4}$ dhe $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{\lambda} = z+2$. Cakto parametrin ashtu që drejtëzat të formojnë rrafsh! Nëse priten, cakto këndin ndërmjet tyre dhe koordinatat e pikëprerjes së tyre!

4. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër prerjen e drejtëzave $x = \frac{y-2}{-1}, z+1=0$ dhe

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1} \text{ kalon nëpër pikën } B(-1, 0, 1).$$

5. Shkruaje barazimin e drejtëzës që është normale në drejtëzat $\frac{x-3}{-2} = y+1 = \frac{z}{2}$ dhe

$$x+1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2} \text{ është kalon nëpër pikën } C(2, 3, 4).$$

13. Largesat ndërmjet dy drejtëzave

Paraprakisht tani më treguam se pozita reciproke e dy drejtëzave në hapësirë është: drejtëzat priten, të jenë paralele ose të jenë aplanare. Kur dy drejtëza priten, është e qartë se largesa ndërmjet tyre është zero. Por, kur dy drejtëza janë paralele ose janë aplanare atëherë largesa ndërmjet tyre nuk është zero. T'i shqyrtojmë të dy rastet veçmas.

Largesat ndërmjet dy drejtëzave paralele

Largesat ndërmjet dy drejtëzave paralele është largesa më e shkurtër ndërmjet tyre, ndërsa ajo është gjatësia e normales të lëshuar prej çfarëdo pikë prej drejtëzës deri te drejtëza tjetër. Kjo do të thotë se largesa ndërmjet dy drejtëzave paralele sillet në largesë prej çfarëdo pikë prej njëre drejtëze deri te drejtëza tjetër. Ta nxjerrim formulën për largesën d prej pikës B deri te drejtëza a Figura 21.

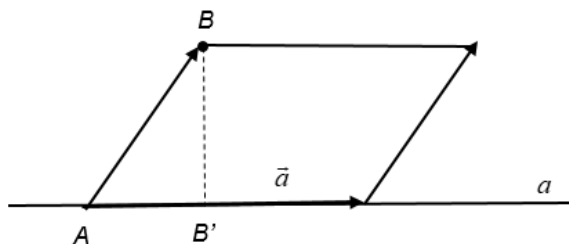


Figura 21

Pika $B \notin a$ Mbi vektorët $\vec{AB}$ dhe $\vec{a}$, konstruojmë paralelogram syprina e të cilit është $S = |\vec{a} \times \vec{AB}|$. Syprinën e paralelogramit mund ta njehsojmë me formulën $S = |\vec{a}| \cdot h$, ku $h = |\vec{BB'}|$. Me shfrytëzimin

e këtyre formulave për njehsimin e syprinës së paralelogramit fitohet se $|\vec{BB'}| = \frac{|\vec{a} \times \vec{AB}|}{|\vec{a}|}$

Përkufizimi 1: Largesat d prej pikës B deri te drejtëza a njehsohet sipas formulës

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{AB}|}{|\vec{a}|}$$

ku $\vec{a}$ është vektori mbajtës i drejtëzës a dhe pikës $A \in a$

Është e qartë kur pika $B \in a$, largesa prej pikës B deri te drejtëza a është $d = 0$.

Largesën mund ta fitojmë edhe në formën koordinative, përveç në formën vektoriale, nëse janë dhënë format koordinative për vektorin mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dhe koordinatat e pikave $A(x_1, y_1, z_1) \in a$ dhe $B(x_2, y_2, z_2)$. Atë do ta realizojmë nëpërmjet këtij shembulli.

Shembulli 1

Largesën prej pikës $B(1, -1, 0)$ deri te drejtëza $a: \frac{x-2}{3} = y-3 = \frac{z+1}{-1}$ do ta gjejmë në këtë mënyrë:

1. Vektori mbajtës i drejtëzës a është $\vec{a} = (3, 1, -1)$ me modul $|\vec{a}| = \sqrt{11}$ dhe pikë $A(2, 3, -1) \in a$
2. E gjejmë vektorin i cili është prodhim vektorial i vektorëve a dhe $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{a} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, -11);$$

3. Moduli i vektorit $|\vec{a} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{134};$

$$4. \text{ Largesë do të jetë } d = \frac{\sqrt{134}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{1474}}{11}$$

1

Njehso largesën prej pikës $B(2, 1, -2)$ deri te drejtëza $a: \frac{x-5}{-1} = y+3 = \frac{z+1}{-2}$.

Për ta njehsuar largesën ndërmjet të dy drejtëzave paralele a dhe b , ($a \parallel b$) të dhëna në formën

kanonike $a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$, $b: \frac{x-x_2}{a_1} = \frac{y-y_2}{a_2} = \frac{z-z_2}{a_3}$ do ta gjejmë nëpërmjet largesës

prej pikës $B(x_2, y_2, z_2) \in b$ deri te drejtëza në mënyrë të dhënë më lart.

Është e qartë se kur $a \equiv b$, largesa ndërmjet dy drejtëzave është $d = 0$.

2

Njehso largesën ndërmjet dy drejtëzave paralele

$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}.$$

Largesia ndërmjet dy drejtëzave aplanare

Largesia ndërmjet dy drejtëzave aplanare mund të njehsohet në shumë mënyra. Këtu do të prezantohet mënyra ku shfrytëzohet konstruksioni i paralelopipedit.

Le të jenë dhënë dy drejtëza aplanare a dhe b me vektor mbajtës $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ përkatësisht edhe pikat $A \in a$ dhe $B \in b$. Mbi vektorët $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\overrightarrow{AB}$ i konstruktojmë paralelepipedët si te Figura.

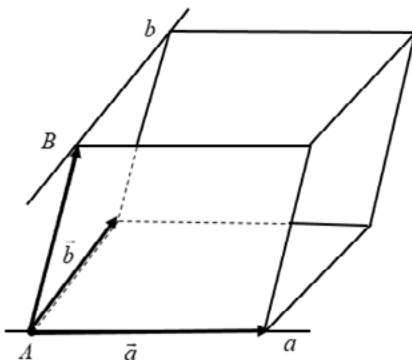


Figura 22

Largesia d ndërmjet drejtëzave aplanare a dhe b do të jetë lartësia e paralelopipedit. Vëllimin e paralelopipedit mund ta njehsojmë nëpërmjet prodhimit të përzier $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|$. Vëllimi njehsohet edhe nëpërmjet formulës $V = H \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$, ku $H = |\vec{a} \times \vec{b}|$ syprina e paralelogramit të konstruktuar mbi vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, që luan rol te baza e paralelopipedit. Prej këtyre dy formulave kemi se

$$V = H \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$d = H = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

Përkufizimi 2: Largesia d ndërmjet drejtëzave aplanare a dhe b njehsohet sipas formulës

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

ku $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektorët mbajtës së drejtëzave a dhe b përkatësisht edhe pikat $A \in a$ dhe $B \in b$.

Largesën mund ta fitojmë edhe në formën koordinative, përveç në formën vektoriale, nëse janë dhënë format koordinative për vektorët mbajtës $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dhe $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ të drejtëzave a dhe b përkatësisht edhe koordinatat e pikave $A(x_1, y_1, z_1) \in a$ dhe $B(x_2, y_2, z_2) \in b$. Këtë do ta realizojmë nëpërmjet këtij shembulli.

Shembulli 2

Ta njehsojmë largesën ndërmjet drejtëzave aplanare a dhe b ,

$$a: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

$$b: -x = \frac{y+1}{-4} = z$$

me vektorët mbajtës $\vec{a} = (2, 3, 1), \vec{b} = (-1, -4, 1)$ dhe pikave $A(0, 1, 0) \in a$ dhe $B(0, -1, 0) \in b$ nëpërmjet këtyre hapave:

1. E gjejmë prodhimin e përzier të vektorëve $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ në pajtim formulën:

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, 0) \text{ dhe } (\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

2. E gjejmë prodhimin vektorial të vektorëve $\vec{a}, \vec{b}$ në pajtim me formulën

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 11).$$

3. E njehsojmë largesën ndërmjet drejtëzave aplanare a dhe b :

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{6\sqrt{131}}{131}.$$

3

Njehso largesën ndërmjet drejtëzave aplanare:

$$a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$b: x-2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Le të jetë dhënë trekëndëshi $\triangle ABC$ me koordinatat e kulmeve $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6)$. Njehso largesën prej çdo kulmi të trekëndëshit deri te brinja e përballtë.

2. Njehso largesën ndërmjet drejtëzave paralele

$$a: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{2}$$

$$b: \frac{x-5}{8} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{4}.$$

3. Le të jetë dhënë paralelogrami $ABCD$ me koordinatat e kulmeve

$A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, 5, -6)$, $D(4, 2, -3)$. Njehso largesën ndërmjet të dy drejtëzave paralele të cilat shtrihen brinjët e paralelogramit.

4. Njehso largesën ndërmjet drejtëzave aplanare

$$a: \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$$

$$b: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = z-2.$$

5. Njehso largesën ndërmjet drejtëzave paralele:

$$a) \ a: x = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}, \ b: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{6};$$

$$b) \ a: \begin{cases} x+2y-2z-8=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}, \ b: \begin{cases} 3x-2y-2z-15=0 \\ 3x+y+4z-21=0 \end{cases};$$

$$c) \ a: \begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}, \ b: \frac{x-1}{2} = y-7 = \frac{z-3}{4}.$$

14. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Njehso vëllimin dhe lartësinë e tetraedrit $ABCD$ të dhënë me koordinatat e kulmeve

$$A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B(4, 3, 2), C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right), D(2, -3, -4).$$

2. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër pikat $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(3, -3, 3)$. Vallë pika $M(1, -1, 1)$ shtrihet te rrafshi?

3. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër prerjen e rrafsheve $3x + 2y - 5z + 10 = 0$ dhe $x + 3y + z - 2 = 0$ dhe kalon nëpër fillimin e koordinatave.

4. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër pikën $A(-1, 1, \frac{5}{6})$ dhe të boshtet koordinative pren segmente të cilat qëndrojnë si 3: 2:1.

5. Shkruaje barazimin e rrafshit që kalon nëpër pikat $A(0, 0, 2)$ dhe $B(6, 0, 0)$ dhe formojnë kënd $\frac{\pi}{6}$ me rrafshin Oxy
6. Për cilat vlera të parametrave a dhe b rrafshet $2x - 3y + az - 3 = 0$ dhe $8x - 12y + 20 + b = 0$ puthiten?
7. Shqyrto pozitën reciproke të drejtëzave $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ dhe $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$. Nëse drejtëzat priten atëherë njehso largesën prej fillimit të koordinatave deri te pikëprerja.
8. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër mesin e segmentit AB të dhënë me koordinatat e pikave të skajshme $A(1, -3, -2)$, $B(-3, 5, -6)$ dhe nëpër pikën $C(0, 0, 2)$. Sa është këndi ndërmjet të dy drejtëzave
9. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(1, 3, 2)$ dhe është normale në drejtëzën $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$
10. Njehso largesën ndërmjet drejtëzave $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = z-3$ dhe $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = z$

Njësia modulare 5 – Integrali i pacaktuar

(për të gjithë grupet e tjera)

1. Integrali i pacaktuar

Detyra i njehsimit diferencial është të merret me gjetjen e derivative të funksionit të dhënë $y = f(x)$. Njehsimi integral zgjidh problem të kundërt të problemit për gjetjen e derivatit. Ai problem është në realitet caktimi i funksionit derivati i të cilit është i ditur. Pikërisht për këtë shkak, njehsimi integral kuptohet si operacion invers i njehsimit diferencial.

Përkufizimi 1: Le të jetë dhënë funksioni f të përkufizuar në intervalin (a, b) . Çdo funksion diferenciable f i përkufizuar në intervalin (a, b) ashtu që

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b)$$

, quhet **funksion primitiv** për funksionin f .

Shembulli 1 Për funksionin $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, funksioni primitiv është $F(x) = \frac{x^4}{4}, x \in \mathbb{R}$, pasi

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Por nëse e shqyrtojmë edhe funksionin $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5, x \in \mathbb{R}$, atëherë vlen

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Prej këtu vijon teorema:

Teorema 1: Le të jetë $F(x)$ është funksioni primitiv $F(x)$ në intervalin (a, b) . Atëherë edhe funksioni $F(x) + C$ ku $C \in \mathbb{R}$ është çfarëdo konstante, është gjithashtu funksion primitiv për funksionin $F(x)$.

Vërtetim: Gjikimi te teorema vijon prej pasi $F(x)$ edhe $F(x) + C$ kanë derivate të parë të njëjtë i cili është i barabartë me funksionin $F(x)$.

$$(f(x) + c)' = (f(x))' = f(x).$$

■

Teorema 2: Le të jenë $F(x)$ dhe $G(x)$ funksione primitive të ndryshme të funksionit $F(x)$ në intervalin (a, b) . Atëherë për funksionin $G(x)$ vlen $G(x) = F(x) + C$ ku $C \in \mathbb{R}$

Vërtetim: Nëse $F(x)$ dhe $G(x)$ janë funksione primitive të ndryshme të funksionit $f(x)$ në intervalin (a, b) , atëherë vlen

$$f'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Le të jetë $H(x) = G(x) - f(x)$, prej ku vijon se

$$H'(x) = G'(x) - f'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Për $H'(x) = 0$ kemi se $H(x) = C$

pra sipas kësaj $C = G(x) - f(x)$ d.m.th., $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. ■

Operacioni për gjetjen e funksionit primitiv të funksionit të dhënë quhet **integrim**. Ky operacion është invers i diferencimit përkatësisht i gjetjes së derivatit të funksionit.

Por, te diferencimi vërejtëm se funksioni është njëvlerësisht i përcaktuar, që nuk është rast tek integrimi. Atë e vërejtëm te Shembulli 1

Prej teoremës 1 mund të përfundojmë se çdo funksion ka pafundësisht shumë funksione primitive.

Gjithashtu, prej teoremës 2 mund të përfundojmë se në vend të gjenden të gjitha funksionet primitive të funksionit të dhënë, mjafton të gjendet vetëm një, cilado prej tyre. Nëse gjendet vetëm një funksion primitiv, të gjitha të tjerat fitohen me shtuarjen e konstantes C .

Bashkësinë e të gjitha funksioneve primitive f , mund ta shënojmë si: $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$

Përkufizimi 2: Bashkësia prej të gjitha funksioneve primitive të funksionit të dhënë f quhet **integral i pacaktuar**.

Integrali i pacaktuar i funksionit f shënohet me:

$$\int f(x) dx.$$

Sipas kësaj, mund të shkruajmë se $\int f(x) dx = \{f(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ ose vetëm shkurtimisht $\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$

Te përkufizimi 2, f quhet **integrand** ose **funksioni nënintegral** por $f(x) dx$ quhet **shprehje nënintegral**.

Konstanta C pra te $\int f(x) dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$ quhet **konstanta e integrit**

Shembulli 2 Pasi $(a^x)' = a^x \ln a$, vijon se $\frac{a^x}{\ln a}$ është funksion primitiv i $a^x, a > 0, a \neq 1$. Pra

mund të shkruajmë se $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$

1 Gjej funksionin primitiv të funksionit:

$$a) f(x) = e^x; \quad b) f(x) = x^n.$$

Vërejtëm se funksioni i dhënë mund të ketë pafund shumë funksione primitive. Por, jo çdo funksion ka primitive. Mund të theksojmë se çdo funksion i vijueshëm ka primitive.

Nëse për funksionin e dhënë f i përkufizuar në intervalin (a, b) ekziston funksion primitiv, atëherë themi se funksioni f është **integrabil** në intervalin (a, b) .

Pjesa e matematikës e cila merret me caktimin e funksionit primitiv, d.m.th., me njehsimin e integraleve, si edhe zbatimi i tyre quhet **njehsimi integral**.

Nëse dëshirojmë gjeometrikisht ta sqarojmë konceptin e integralit të pacaktuar, atëherë pasi e përkufizuar si bashkësi prej funksioneve primitive, lirisht mund të themi se integrali i pacaktuar paraqet bashkësi prej lakoreve në rrafsh, të cilat janë grafikët e funksioneve primitive dhe quhen **lakore integrale**.

Për ta gjetur lakoren integrale e cila kalon nëpër pikën e dhënë $A(x_0, y_0)$, atëherë me zëvendësim të koordinatave të pikës në $A(x_0, y_0)$, do ta fitojmë konstantën e integrit, d.m.th., $y = f(x) + C$, prej ku

$$y_0 = F(x_0) + C, \text{ buradan } C = y_0 - F(x_0).$$

Atëherë lakorja integrale e kërkuar e cila kalon nëpër pikën e ka barazimin $y = f(x) + y_0 - F(x_0)$.

Do t'i shqyrtojmë këto shembuj:

Shembulli 3 Do të tregojmë se është funksion $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ primitiv funksioni

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Nëse njehsojmë derivatin prej funksionit $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, do të fitojmë:

$$(F(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Shembulli 4 Do ta caktojmë atë funksion primitiv f të $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ grafiku i të cilës kalon nëpër pikën $A(1,2)$.

Funksioni primitiv i funksionit $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ është $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, pasi

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Me zëvendësimin e koordinatave të pikës $A(1,2)$ në $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, kemi $F(1) = \frac{1^4}{4} + 2\sqrt{1} = \frac{9}{4}$

Domethënë lakorja integrale e kërkuar e cila kalon nëpër pikën $A(1,2)$ e ka barazimin,

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0), \text{ d.m.th. } y = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Cakto nga një funksion primitiv për funksionin:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0; & \text{b) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \text{c) } f(x) = \sin x; & \text{ç) } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{array}$$

2. Trego se $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$ është funksion primitiv i funksionit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

3. Kontrolllo a është e saktë:

a) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2 \ln^2 x} + C;$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx.$

c) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

ç) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

4. Cakto atë funksion primitiv f i grafiku i të cilës kalon nëpër pikën $A(0,2)$, nëse

a) $f(x) = 3x^2;$ b) $f(x) = \ln x, x > 0;$ c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. Vetitë themelore të integralit të pacaktuar dhe tabela e integraleve themelore

Prej përkufizimit të integralit të pacaktuar vijnë këto veti:

Teorema 1: Nëse funksioni f është integrabile në intervalin (a, b) , atëherë vlen:

1. Derivati i integralit të pacaktuar është i barabartë me funksionin nënintegral, d.m.th., nëse

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \text{ atëherë}$$

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in (a, b)$$

2. Diferenciali i integralit të pacaktuar është i barabartë me shprehjen nënintegral, d.m.th.,

$$\text{nëse } \int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R} \text{ atëherë}$$

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx, x \in (a, b)$$

3. Integrali i pacaktuar prej diferencialit të funksionit primitiv $F(x)$ është i barabartë me

$$f(x) + C, C \in \mathbb{R}, \text{ d.m.th., vlen:}$$

$$\int df(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b)$$

Vërtetim: 1. Funksioni f le të jetë funksion primitiv i funksionit në intervalin (a, b) , përkatësisht

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Atëherë kemi: $(\int f(x)dx)' = (f(x)+c)' = F'(x) = f(x)$

2. Funksioni është funksion primitiv i funksionit në intervalin (a,b) , përkatësisht

$$\int f(x)dx = f(x)+C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Atëherë kemi: $d(\int f(x)dx) = d(f(x)+c) = F'(x)dx = f(x)dx, \quad x \in (a,b)$

3. Funksioni le të jetë është funksion primitiv i funksionit në intervalin (a,b) , përkatësisht

$$\int f(x)dx = f(x)+C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Atëherë kemi: $\int df(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = f(x)+C, \quad x \in (a,b)$

Teorema 1 tregon se diferencimi dhe integrimi janë operacione inverse.

Gjatë njehsimit të integralit të pacaktuar, vlejnë vetitë e dhëna në këtë teoremë:

Teorema 2:

1. Nëse funksionet f dhe g janë integrabile në intervalin (a, b) , atëherë shuma e tyre $f+g$ dhe ndryshimi i tyre $f-g$ janë funksione integrabile në intervalin (a, b) dhe vlen

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \quad x \in (a,b)$$

2. Nëse funksioni f është integrabil në intervalin (a, b) dhe nëse $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atëherë edhe funksioni $k \cdot f$ është integrabile dhe vlen

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, \quad x \in (a,b)$$

Vërtetim: 1. Te njehsimi diferencial vlen se: $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$. Nëse këtë barazim e integrojmë nga të dy anët, fitojmë:

$$\int d(f(x) \pm g(x)) = \int (df(x) \pm dg(x)).$$

Me shfrytëzimin e 3. Prej teoremës 1, kemi:

$$\int (df(x) \pm dg(x)) = \int d(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x) = \int df(x) \pm \int dg(x)$$

4. Pasi vlen: $d(k \cdot \int f(x)dx) = kd(\int f(x)dx)$, ndërsa duke e shfrytëzuar 2. Prej teoremës 1, kemi:

$$d(\int k \cdot f(x)dx) = k \int f(x)dx$$

■

Vetitë të vërtetuara te teorema 2 janë të njohura si **veti themelore për integrim**.

Në bazë të përkufizimit të integralit të pacaktuar dhe tabelës së derivateve themelore, mund ta shkruajmë **tabelën e integraleve themelore**.

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	14. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C$	

Me shfrytëzimin e vetive themelore të integralit të pacaktuar dhe tabela e integraleve themelore, do të zgjidhim disa shembuj:

Shembulli 1 T'i zgjidhim këto integrale të pacaktuara:

$$\text{a) } \int x^6 dx; \quad \text{b) } \int (x^2 + 3x - 1) dx; \quad \text{c) } \int x^3 \sqrt{x} dx; \quad \text{ç) } \int (2^x + 5^x)^2 dx.$$

a) Me shfrytëzimin e tabelës me integrale themelore, d.m.th., integrali i dytë themelor, kemi:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

b) Me shfrytëzimin e tabelës me integrale themelore dhe rregulla për integrim të shumës dhe ndryshimit të funksioneve, kemi:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + 3 \frac{x^2}{2} + 3C_2 - x - C_3 = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + (C_1 + 3C_2 - C_3) = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

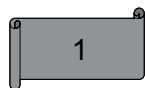
c) Së pari do të bëjmë transformimin e funksionit nënintegral, ndërsa pastaj do ta shfrytëzojmë integralin tabelar të dytë

$$\int x\sqrt[3]{x}dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{1+\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + C = \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C.$$

ç) Nëse e përshkruajmë ndryshe funksionin nën integral, do të fitojmë:

$$\begin{aligned}\int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C\end{aligned}$$

Për shkak të shënimit të thjeshtë, nuk do të shkruajmë më shumë konstante të rezultati, ndërsa drejtpërdrejt në fund do të shkruajmë vetëm një konstante.



1 Zgjidhi integralet e pacaktuara:

$$\text{a) } \int (1 + 2x + 4x^2) dx; \quad \text{b) } \int (1 - 3x) \cdot (x^2 + 1) dx; \quad \text{c) } \int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x - 4}{x} \right) dx.$$

Shembulli 2

Do t'i zgjidhim këto integrale të pacaktuara:

$$\text{a) } \int \left(x^4 - \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad \text{b) } \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

Me shfrytëzimin e tabelës së integraleve themelore, si edhe të rregullave të integrimit do të kemi:

a)

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{x^3} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

c)

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx =$$

$$= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C.$$

2

Zgjidhi integralet e pacaktuara:

a) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$; b) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$.

Shembulli 3

Do t'i zgjidhim këto integrale e pacaktuar:

a) $\int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx$; b) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; c) $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$

a) Me shfrytëzimin e tabelës së integraleve themelor, si edhe rregullat për integrim, do të kemi:

$$\int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx = 2 \int x dx - 3 \int \sin x dx + \int \cos x dx = 2 \frac{x^2}{2} - 3(-\cos x) + \sin x + C =$$

$$= x^2 + 3 \cos x + \sin x + C.$$

b) Me shfrytëzimin e tabelës së integraleve themelor, si edhe rregullat për integrim, do të kemi:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

c) Me shfrytëzimin e tabelës së integraleve themelor, si edhe rregullat për integrim, do të kemi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.\end{aligned}$$

3

Zgjidhi integralet e pacaktuara:

a) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$; b) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Detyra për punë të pavarur:

1. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int (x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^x) dx$; b) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx$; c) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$; ç) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$;
d) $\int a^x \left(2 - \frac{a^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$; dh) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$; e) $\int (2 + x^2)^3 dx$.

2. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$; b) $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$; c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
ç) $\int \left(\frac{x}{3} - 4 \sin x + 5 \cos x \right) dx$; d) $\int \frac{1}{\sin^2 x + \cos 2x} dx$;

3. Metoda e zëvendësimit

Për zgjidhjen e integralit të pacaktuar është e domosdoshme të zbatohen metoda të caktuara (teknika të integrit). Integralet më të thjeshta zgjidhen nëpërmjet zbatimit të tabelës dhe vetive themelore, të cilat tani më i shqyrtoam, ndërsa ai integrim është i pamundshëm të zbatohet në të gjitha rastet. Njëra prej metodave themelore të cilat shfrytëzohen për zgjidhjen e integraleve të pacaktuara më të përbërë është metoda e zëvendësimit të ndryshores ose metoda e substituit. Kjo metodë është për zëvendësimin e ndryshores x me ndryshore të re t , e cila do ta thjeshtësojë integralin fillestar duke vijuar tek integrali tabelar

Metoda e zëvendësimit është dhënë me këtë teoremë:

Teorema 1: Le të jetë f funksion integrabil në intervalin (a, b) dhe le të jetë φ dhe le të jetë funksion diferenciable që intervalin (α, β) e pasqyron në interval (a, b) . Atëherë vlen

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \text{ për } x = \varphi(t).$$

Vërtetim: Funksioni f është funksion primitiv i funksionit f . Atëherë sipas përkufizimit do të vlen $\int f(x) dx = f(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$. Do të përkufizojmë funksion $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$

Nëse e diferenciojmë funksionin Φ do të fitojmë $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$

Prej këtij fitojmë se funksioni Φ është funksion primitiv i funksionit $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

Kjo do të thotë se prej përkufizimit të integralit të pacaktuar do të kemi:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Nëse marrim parasysh se $x = \varphi(t)$, atëherë;

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = f(x) + C \quad \blacksquare$$

Me shfrytëzimin e metodës së zëvendësimit, pjesë prej funksionit nënintegral zëvendësohet me ndryshore të re. Patjetër të theksojmë se nuk ekziston rregull sipas të cilës do të bëhet zëvendësimi $x = \varphi(t)$. Gjithashtu, diferenciali i funksionit të vjetër patjetër të shprehet nëpërmjet diferencialit të ndryshores së re. Qëllimi është të fitohen një ose më shumë integrale tabelare të cilët lehtë zgjidhen. Pas zgjidhjes së integralit, është e nevojshme të kthehemi te ndryshorja fillestare, duke shfrytëzuar zëvendësimin.

Do ta shqyrtojmë këtë shembull:

Shembulli 1 T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int (5-2x)^4 dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{(x-2)^3}; \quad \text{c) } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \quad \text{r) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

a) Për zgjidhjen e këtij integrali mund ta shfrytëzojmë formulën e binomit dhe ta shkruajmë funksionin $(5-2x)^4$ nënintegral në formën e zbrërthyer. Por, kjo mënyrë merr më shumë kohë. Për këtë shkak do ta shfrytëzojmë metodën e zëvendësimit.

Fusim zëvendësim $t = 5 - 2x$, prej ku $dt = -2dx$ ose e shprehim diferencialin e funksionit me diferencialin e ndryshores së re do të kemi $dx = -\frac{dt}{2}$

$$\text{Prej këtu, } \int (5-2x)^4 dx = \int t^4 \left(\frac{-dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{(5-2x)^5}{10} + C.$$

b) Krejtësisht në mënyrë të ngjashme integrali i pacaktuar nën a) e shfrytëzojmë zëvendësimin $t = x - 2$, $dt = dx$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

c) Te ky shembull në mënyrë të ngjashme të shembujve paraprak, e shfrytëzojmë zëvendësimin

$$t = \frac{1}{x}, \quad dt = -\frac{1}{x^2} dx, \text{ , prej ku kemi } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

ç) Me shfrytëzimin e zëvendësimit $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$, kemi:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$



1 Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{5x+4}; \quad \text{b) } \int \sqrt[5]{(4-7x)^3} dx; \quad \text{c) } \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx; \quad \text{ç) } \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad \text{d) } \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$$

Shembulli 2

T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \sin ax dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}; \quad \text{c) } \int \sin^5 x \cos x dx.$$

a) Duke përdorur ndërrimin $t = ax$, $dt = a dx$, ne marrim:

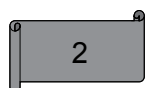
$$\int \sin ax dx = \frac{1}{a} \int \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos t + C = -\frac{\cos ax}{a} + C.$$

b) Nga turni $t = 3x + 2$, $dt = 3 dx$ merret:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x+2) + C.$$

c) Prej zëvendësimit $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)$ kemi:

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$



Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int \sin^3 6x \cdot \cos 6x dx$; b) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$; c) $\int \operatorname{tg} x dx$; ç) $\int 2e^x \cos(e^x) dx$.

Shembulli 3

T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

a) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$; b) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

a) Gjatë zgjidhjes së integralit e shfrytëzojmë zëvendësimin $\ln \frac{1+x}{1-x} = t$, prej ku $\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} dt$, ku kemi:

$$e^{\frac{x}{2}} = t, \quad \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = dt, \quad dx = \frac{2}{t} dt, \quad e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = t^2$$

b) Për zgjidhjen e këtij integrali do të shfrytëzojmë dy zëvendësime:

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C$$

– me zëvendësimin e parë integrali transformohet në:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t(t+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \\ &= 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \left(\frac{1+t}{t^2(1+t)} - \frac{t}{t^2(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t-t}{t(1+t)} \right) dt = \\ &= 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t}{t(1+t)} + \frac{t}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int \frac{1}{(1+t)} dt = (*), \end{aligned}$$

më tej me shfrytëzimin e zëvendësimit për integral $s = t + 1$, $ds = dt$, kemi $\int \frac{1}{(1+t)} dt$

$$(*) = 2 \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \ln|t| + \ln|s| \right) + C = (**),$$

prej ku duke u kthyer prapa me futjen e zëvendësimit, kemi:

$$(**) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - \ln \left| e^{\frac{x}{2}} \right| + \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C = -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C.$$

Vërejtje: Ndonjëherë është e nevojshme disa here të futet zëvendësim me ndryshore të re, që integrali silltet në tabelar.

Shembulli 4 Ta zgjidhim integralin e pacaktuar $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$

Së pari e shfrytëzojmë zëvendësimin $\ln x = t$, prej ku $\frac{1}{x} dx = dt$, ndërsa pastaj edhe njëherë fusim

zëvendësim $t = \ln t$, prej ku $\frac{1}{t} dt = du$

Me këtë për integralin kemi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln|t|| + C = \\ &= \ln|\ln|\ln|x|| + C. \end{aligned}$$

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int x(x^2 - 13)^{23} dx; \quad \text{b) } \int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x - 9)^7 dx; \quad \text{c) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 3x - 10}.$$

2. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int (x^2 - 3)\sqrt[5]{x^3 - 9x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}; \quad \text{c) } \int \frac{x^2}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

3. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx; \quad \text{c) } \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

4. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int \sin^3 x \cos^3 x dx; \quad \text{b) } \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx; \quad \text{c) } \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx; \quad \text{ç) } \int \frac{1}{\sin x} dx.$$

4. Metoda e integritit parcial

Metoda e zëvendësimit të ndryshores nuk është i mjaftueshëm që të njehsohen integralet e pacaktuar në klasën e gjerë të funksioneve. Shpesh funksioni nën integral është shkruar në formë të prodhimit të funksionit dhe diferencialit të funksionit tjetër, por poashtu nuk mund të futet zëvendësim të ndryshores për të sjellë integralin në tabelar.

Për këtë shkak i qasemi metodës tjetër për zgjidhjen e integralit të pacaktuar, ndërsa ajo është **metoda e integritit parcial** ose metoda e **integrimi sipas pjesëve**.

Formula për integrimin parcial është dhënë në këtë teoremë:

Teorema 1: Nëse funksionet $u(x)$ dhe $v(x)$ janë funksione diferenciable në intervalin (a, b) , atëherë vlen formula për integrim parcial,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Vërtetim: Le të jetë $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, funksion primitiv i funksionit $u(x)v'(x)$ në intervalin (a, b) . Prej përkufizimit të funksionit primitiv vijon se funksioni f është i vijueshëm dhe për këtë vlen $f'(x) = u(x)v'(x)$, $x \in (a, b) \setminus A$, $A \subset (a, b)$ është bashkësi diskrete. Për shkak të diferencibilitetit të funksioneve $u(x)$ dhe $v(x)$ vijon se edhe funksioni $u(x)v(x)$ është i vijueshëm në intervalin (a, b) : Prej këtij vijon se edhe funksioni $G(x) = u(x)v(x) - f(x)$ është i vijueshëm në intervalin (a, b) . Nëse e diferencojmë, kemi:

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x).$$

Vijon se funksioni $G(x)$ është funksion primitiv i funksionit $u'(x)v(x)$ në intervalin (a, b) dhe poashtu vlen:

$$f(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Prej këtij fitohet formula: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$. ■

Formulën për integrim parcial mund ta shkruajmë edhe në formën:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Zgjedhja për funksionet $u(x)$ dhe $v(x)$ nuk kryhet sipas rregullave të caktuara, ndërsa në mënyrë intuitive

Nëse zgjedhja për funksionet $u(x)$ dhe $v(x)$ është e gabuar, në vend që ta thjeshtësojë integralin, do ta bën më të ndërlikuar për zgjidhje në lidhje me fillestarin.

Shembulli 1 T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int x e^{-x} dx; \quad \text{b) } \int \ln x dx.$$

a) Për zgjidhjen e integralit do të shfrytëzojmë integrimin parcial në këtë mënyrë.

Se si u do ta zgjedhim $u = x$. Me njehsim të derivatit të parë, d.m.th., diferencim kemi $du = dx$. Mbetja prej shprehjes nënintegral është $e^{-x} dx$, domethënë $dv = e^{-x} dx$. Prej këtui me integrim kemi $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$.

Me zëvendësim te formula për integrim parcial do të kemi:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

b) Për zgjidhjen e integralit do të shfrytëzojmë integrim parcial në këtë mënyrë: Se si do ta zgjedhim

$u = \ln(x)$. Me njehsim të derivatit të parë, d.m.th., diferencim kemi $du = \frac{1}{x} dx$. Mbetja prej shprehjes nënintegral është dv , domethënë $dv = dx$. Prej këtui me integrim kemi $v = \int dx = x$

Me zëvendësimin te formula për integrim parcial do të kemi:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

1 Zgjidhi integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int x^2 e^x dx; \quad \text{b) } \int x^2 \ln x dx; \quad \text{c) } \int \frac{x}{e^x} dx.$$

Shembulli 2 T'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

$$\text{a) } \int e^{x+\ln x} dx \quad \text{b) } \int (x^2 + x) \ln(x+1) dx.$$

Edhe të dy integralet do t'i zgjidhim me metodën e integrimit parcial:

a) Nëse $u = x$, $du = dx$, $dv = e^x dx$, $v = \int e^x dx = e^x$ me zëvendësim te formula për integrim parcial kemi:

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

b) Nëse tek integrali fillestar së pari e shfrytëzojmë metodën e zëvendësimit. Me zëvendësim $x + 1 = t \Rightarrow dx = dt$ kemi: $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx = \int ((t-1)^2 + t-1) \ln t dt = \int (t^2 - t) \ln t dt$.

Më tej me shfrytëzimin e metodës së integritit parcial, për $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$, kemi $dv = (t^2 - t) dt \Rightarrow v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$

$$\begin{aligned} \int (t^2 - t) \ln t dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt + \frac{1}{2} \int t dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{9} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2(x+1) - 3)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2x-1)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + C. \end{aligned}$$

2

Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x \ln(x^2 - 1) dx$; b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Shembulli 3

Do t'i zgjidhim integralet e pacaktuar:

a) $\int x \sin x dx$; b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; c) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

Shfrytëzojmë metodën e integritit parcial.

a) Nëse $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$ me zëvendësimin te formula për integrim parcial kemi:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

b) Nëse $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ me zëvendësim te formula për integrim kemi

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Integrali i fundit zgjidhet me metodën e zëvendësimit. Me shfrytëzimin e zëvendësimit fitohet:
 $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

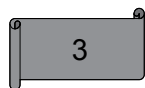
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \int \frac{1}{t} dt = x \operatorname{tg} x + \ln |t| + C = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$$

c) E realizojmë mënyrën e njëjtë si edhe të dy integralet paraprak d.m.th.,
 $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \Rightarrow v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ Vërejmë se integrali i fundit zgjidhet me zëvendësim. Prandaj me shfrytëzimin e zëvendësimit $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ kemi:

$$v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2 \sin^2 x}$$

Me zëvendësim të formula për integrim parcial kemi:

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C.$$



Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x^2 \sin x dx$; b) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; c) $\int (x^2 + 5x + 6) \cos x dx$.

Vërejtje: Ndonjëherë është e nevojshme shfrytëzimi i metodës së integrimit parcial disa here, deri sa integrali sillet në integral tabelar.

I atillë është shembulli:

Shembulli 4

Ta zgjidhim integralin e pacaktuar $\int e^{-x} \sin x dx$

Nëse me zëvendësim të formula për integrim parcial kemi:

$$u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx, \quad dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

Vërehet se është e nevojshme të zbatohet përsëri integrimi parcial.

Nëse $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$, $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$ me zëvendësim të formula për integrim parcial kemi:

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = \\ &= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \right) = \\ &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

Te ky integral kemi situatë ku integrali fillestar i njëjtë paraqitet edhe prej anës së djathtë, ndërsa me shenjë të kundërt d.m.th.,

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx.$$

Nëse te barazimi i integralit të pacaktuar prej anës së djathtë e hedhim prej anës së majtë, kemi: 4.

$$2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x + C$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

4

Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int e^x \cos x dx$; b) $\int \cos(\ln x) dx$; c) $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x^2 e^{-x} dx$; b) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x \ln^2 x dx$ b) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

3. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int x^4 \cos x dx$; b) $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

4. Zgjidhi integralet e pacaktuar:

a) $\int e^{2x} \cos 2x dx$; b) $\int e^x \cos x dx$.

5. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Të zgjidhen integralet e pacaktuar:

a) $\int \sqrt[4]{x^3} dx$

b) $\int \frac{2}{x^5} dx$

c) $\int (3+x^3)^3 dx$

ç) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

d) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

dh) $\int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx.$

2. Të zgjidhen integralet e pacaktuar:

a) $\int \sqrt{3x-4} dx$

b) $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$

c) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$

ç) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[4]{x+5}} dx$

d) $\int \frac{2x-3}{1-x} dx$

dh) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

3. Të zgjidhen integralet e pacaktuar:

a) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

b) $\int (x^2-3)\sqrt[5]{x^3-9x} dx$

c) $\int \frac{x}{5+x^4} dx$

ç) $\int \frac{dx}{\frac{x}{e^2} + e^x}$

d) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

e) $\int \operatorname{ctg} x dx$

f) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$

g) $\int \frac{1}{\sin x} dx.$

4. Të zgjidhen integralet e pacaktuar:

a) $\int \frac{x^3}{x+3} dx$

b) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$

c) $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 3x dx$

ç) $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

5. Të zgjidhen integralet e pacaktuar:

a) $\int x \ln^2 x dx$

b) $\int x \ln(x^2-1) dx$

c) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

ç) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

d) $\int x^4 \cos x dx.$

Njësia modulare 6 – Integrali i caktuar **(për të gjitha drejtimet)**

1. Koncepti për integral të caktuar

Koncepti integral i caktuar është koncept fundamental në matematikë dhe shkencat e tjera teknike. Së pari të vërejmë cili problem dhe cila ide ka sjellë deri te koncepti integral. Duhet të theksojmë se metoda për njehsimin e integralit ekziston shumë para metodave për njehsimin diferencial. Dihet se matematikani antik Arkimedi në shekullin III p.e.r. e ka shfrytëzuar metodën për njehsimin e integraleve. Ai e ka pasur të ditur se parabola e ndan sipërfaqen e drejtkëndëshit kulmet e të cilit janë ta parabola, ndërsa dy të tjerët shtrihen te boshti x , në dy sipërfaqe që qëndrojnë 2 : 1. Thelbësore deri te koncepti i integralit, ka ndikuar problem për caktimin e syprinës së trapezit të lakuar. Së pari do ta paraqesim idenë, përkatësisht metodën deri tek e cila kanë ardhur pavarësisht njëri nga tjetri matematikani i madh gjerman Lajbnic dhe matematikani anglez Njutoni të cilët kanë jetuar në gjysmën e dytë të shekullit XVII dhe gjysmës së parë të shekullit XVIII. Përkufizimi të cilin do ta japim e ka dhënë matematikani gjerman Riman në shekullin XIX, ndërsa shenjë të cilën do ta shfrytëzojmë e ka futur matematikani francez Furie në shekullin XIX.

Me trapez të lakuar e nënkuptojmë pjesën prej rrafshit i cili gjendet ndërmjet boshtit x , grafiku i dhënë i funksionit jonegativ $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ dhe drejtëzave $x = a$ dhe $x = b$ dhe të cilat janë paralele me boshtin y . Detyra jonë është ta caktojmë syprinën e trapezit të lakuar (figura 1). Ideja është ta ndajmë intervalin $[a, b]$ në shumë nënintervale, me të cilat sipërfaqen e trapezit të lakuar do ta ndajmë në drejtkëndësha, me të cilët përafërsisht do ta njehsojmë syprinën e trapezit të lakuar.

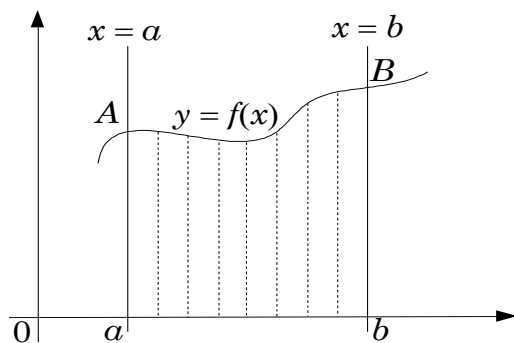


Figura 1

Përkufizimi 1: Me ndarje të segmentit $[a, b]$ nënkuptojmë bashkësi të fundshme prej pikave $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ ashtu që:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Domethënë këtë segment e ndajmë në numër të fundshëm të segmenteve. T'i shqyrtojmë pikat $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = b$ (figura 2)

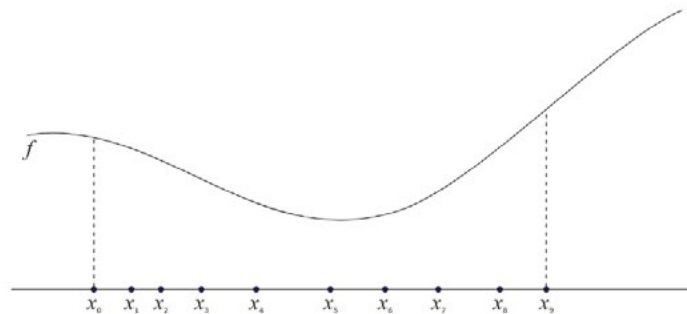


Figura 2

Me $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ e shënojmë gjatësinë e segmentit i . Domethënë këto janë gjatësitë e të gjithë segmenteve. Edhe e fusim konceptin diametër të ndarjes që është e barabartë, e ndonjë segment d.m.th. $d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_{x_i}$

Vijimisht. Do të tregojmë se një ndarje e segmentit P_1 është më e mire nëse P_2 vlen $P_1 \subset P_2$ d.m.th., ndarja P_1 përmban numër më të madh të pikave, nga ndarja P_2 . Kjo do të thotë se fusim edhe ndonjë pikë për shembull ajo le të jetë pika x_4 ndërmjet pikave x_3 dhe x_4 atëherë ndarja e re do të jetë më e mire nga ndarja paraprake. (figura 3)

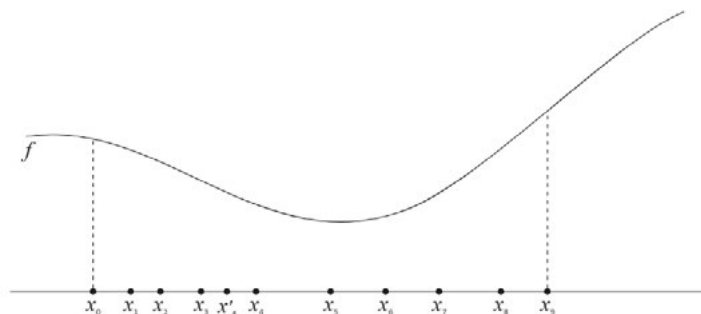


Figura 3

Domethënë është më e mire deri sa përmban më shumë pika prej ndonjë ndarje tjetër. Tani në çdonjë ndarje të këtyre segmenteve do të zgjedhim nga një pikë: $\zeta_i \in (x_i, x_{i+1})$. Te Shembulli jonë ato janë pikat $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_9$ (figura 4). Në këto pika do ta njehsojmë vlerën e funksionit $y = f(\zeta_i)$. Pasi funksioni f është i vijueshëm në çdo pikë të intervalit $[a, b]$, ekziston $f(\zeta_i)$. Domethënë $y_1 = f(\zeta_1), \dots, y_9 = f(\zeta_9)$ do t'i shënojmë këto vlera të grafikut të funksionit (figura 4).

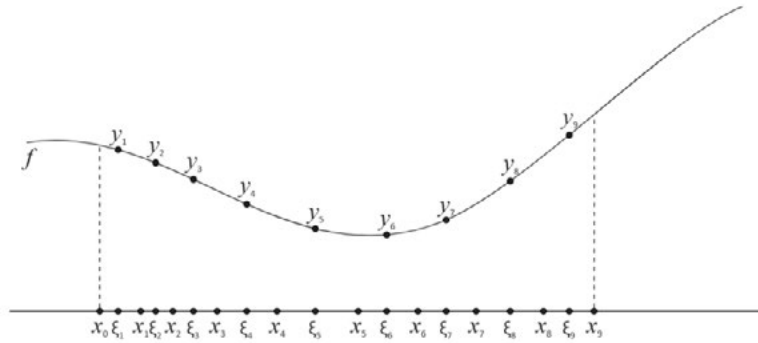


Figura 4

Tani për çdo segment do të konstruktojmë drejtkëndësh me brinjë ξ_i dhe $f(\xi_i)$. Te Shembulli jonë do të konstruktojmë nëntë drejtkëndësha të kështillë (figura 5).

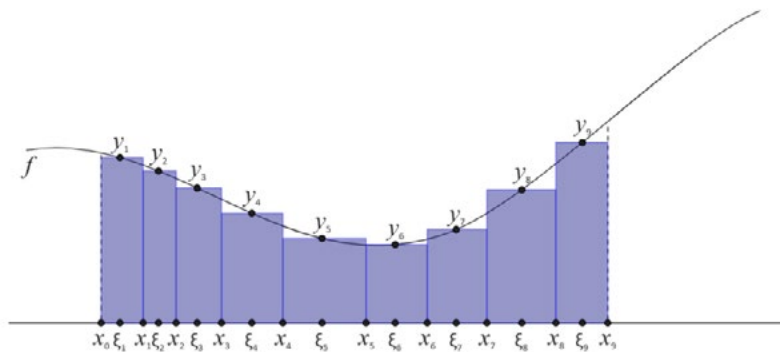


Figura 5

Kemi se gjatësia e drejtkëndëshit është e barabartë me gjatësinë e segmentit përkatës, ndërsa gjerësia e drejtkëndëshit është e barabartë me vlerën e funksionit në pikat ξ_i . Drejtkëndëshat t'i shënojmë me Π_i . Është e qartë se syprina e çdo drejtkëndëshi do të jetë e barabartë me:

$$P(\Pi_i) = f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

Shuma e syprinave e të gjitha këtyre drejtkëndëshave mund të shkruhet në këtë mënyrë:

$$P(S) = f(\xi_1) \Delta_{x_1} + f(\xi_2) \Delta_{x_2} + \dots + f(\xi_n) \Delta_{x_n}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

Është e qartë se kjo syprinë varet prej zgjedhjes së pikave ξ_i . Nëse zhvendosim ndonjërin prej pikave ξ_i atëherë do të ndryshojë edhe syprina e drejtkëndëshit përkatës. Por atë që duhet ta vërtetojmë është se syprina e kësaj trapeze të lakuar është përafërsisht e barabartë me shumën e syprinave të drejtkëndëshave.

Të vërejmë çka do të ndodhë nëse tani e shtojmë pikën x'_4 dhe në intervalin prej x_3 deri te x'_4 zgjedhim pika ξ'_4 dhe në këtë pikë do ta caktojmë edhe vlerën e funksionit y'_4 . Tani për segmentin x_3 prej deri te x'_4 do të konstruktojmë drejtkëndësh. Në vend të drejtkëndëshit të segmenti x_3 deri te x'_4 do të kemi dy drejtkëndësha prej x_3 deri te x'_4 dhe prej x'_4 deri te x_4 (figura 6)

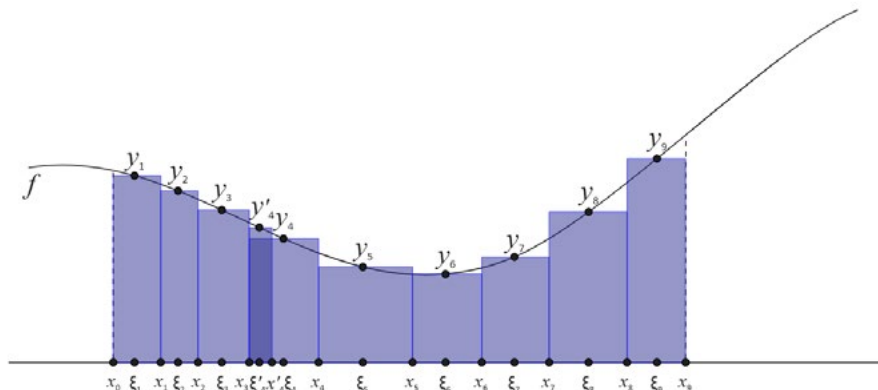


Figura 6

Të vërejmë çka mund të përfundohet nëse te ndarja ekzistuese fusim edhe një pikë. Së pari mund të vërejmë se shuma e syprinave e të gjithë drejtkëndëshave ka vlerë më të përafërt (më të saktë) me vlerën e syprinës së trapezit të lakuar. Tjetër çka mund të përfundohet është se diametri i ndarjes së re (ndarje më e mirë) është më e vogël ose e barabartë me diametrin e ndarjes paraprake. Me fjalë të tjera sa më shumë pika fusim te ndarja gjatësia maksimale e segmenteve është aq më e vogël dhe e vogël, ndërsa syprina e të gjithë drejtkëndëshave është më afër deri te syprina e trapezit të lakuar.

Në mënyrë intuitive tani është e qartë, se sado që diametrik i ndarjes është më i vogël, d.m.th., nëse diametrik i ndarjes tenton kah zero atëherë shuma e syprinave të këtyre drejtkëndëshave do të afrohet në mënyrë arbitrare afër deri te syprina e trapezit të lakuar. Kjo na çon deri te përkufizimi.

Përkufizimi 2: Le të jetë funksioni i dhënë $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, le të jetë P çfarëdo ndarje e segmentit $[a, b]$ dhe le të jenë ξ_i çfarëdo pika të zgjedhura, nga njëra prej çdo nënsegmenti. Shuma

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_{x_i}$$

quhet **shuma e integralit të Rimanit** për funksionin f për ndarjen e dhënë P dhe zgjedhja e pikave ξ_i .

Përkufizimi 3: Funkzioni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ është integrabile në kuptimin e Rimanit, në segmentin $[a, b]$ nëse ekziston numër real ashtu që të vlen:

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I$$

përkatesisht nëse vlen:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P)(\forall \xi_i)(d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f) - I| < \varepsilon)$$

Numrin I e shënojmë me

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

dhe paraqet **integral i caktuar** prej funksionit prej kufirit a deri te kufiri b .

Kufirin a e quajmë **kufiri i poshtëm i integralit**, derisa b **kufiri i lartë i integralit**. Funkcioni $F(x)$ quhet **funksioni nënintegral**, derisa dx është diferencial i të panjohurës x , përkatesisht e paraqet gjatësinë e nënsegmenteve te ndarja P .

Integrali i caktuar në realitet shërben për njehsimin e syprinës së trapezit të lakuar, ndërsa ka edhe zbatime të tjera në teknikë dhe inxhinieri. Është shumë e rëndësishme të dimë se integrali në realitet është shuma prej shumë mbledhësve të pafundshëm. Prej këtij edhe shënimi për integral është “i zgjatur $\mathcal{S}$ ” që në realitet paraqet shumë. Të përfundojmë, integrali i caktuar është vlera kufitare e shumës prej shumë mbledhësve të pafundshëm.

Në vazhdim do të përmendim teoremë pa e vërtetuar, e cila është vetia e funksioneve integrabile dhe integraleve të caktuara:

Teorema 1: Funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione integrabile në intervalin $[a, b]$ dhe le të jetë $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atëherë funksioni $\alpha f(x) + \beta g(x)$ është integrabil në intervalin $[a, b]$ dhe vlejné këto veti:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

Teorema e fundit vërtetohet thjesht me zbatimin direkt të përkufizimit për integral të caktuar

Shembulli 1 Ta njehsojmë integralin $\int_0^1 dx$

Funksioni $f(x) = 1$ është i vijueshëm në intervalin $[0, 1]$, prej ku vijon se $\int_0^1 dx$ ekziston. Për të njehsuar integralin mund ta zgjedhim këtë ndarje

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Gjatësia e çdonjërit prej segmenteve, për shembull është $\frac{1}{n}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pikat ξ_i i zgjedhim të jenë të barabarta me vlerën e kufirit të djathtë të segmenteve, për shembull

për segmentin i zgjedhim $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$. Për shumën përkatëse $\xi_i = \frac{i+1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ kemi:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Pasi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = 1$, mund të përfundojmë se $\int_0^1 dx = 1$.

Shembulli 2 Ta njehsojmë integralin $\int_0^1 x dx$.

Funksioni $f(x) = x$ është i vijueshëm në intervalin $[0, 1]$, prej ku vijon $\int_0^1 x dx$ se ekziston.

Për ta njehsuar integralin mund të zgjedhim këtë ndarje:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Gjatësia e çdo segmenti prej segmenteve është $\frac{1}{n}$ dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Pikat ξ_i i zgjedhim të jenë të barabarta me vlerë të kufirit të djathtë të segmenteve, për shembull për

segmentin i $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ zgjedhim $\xi_i = \frac{i+1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Për shumën përkatëse kemi:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Pasi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$

Prej ku mund të përfundojmë se $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Njehsimi i integralit të caktuar sipas përkufizimit mund të jetë më e komplikuar.

Te mësimi i ardhshëm do të jepet formula e Njuton-Lajbnic-it që e lehtëson njehsimin e integralit të caktuar.

2. Teorema themelore e njehsimit integral

Këtu do ta shqyrtojmë teoremën themelore të njehsimit integral të njohur edhe si formula e Njuton-Lajbnic-it. Do t'i shqyrtojmë edhe vetitë e integralit të caktuar.

Kur e përkufizuam integralin e caktuar supozuam se është dhënë funksioni $f(x)$ që është i vijueshëm dhe jonegativ në intervalin $[a, b]$. Gjithashtu treguam se me integral të caktuar e kuptojmë syprinën e trapez-it të lakuar, i cili është caktuar me grafikun e funksionit $f(x)$ boshti x dhe drejtëzat $x = a$ dhe $x = b$ (figura 7).

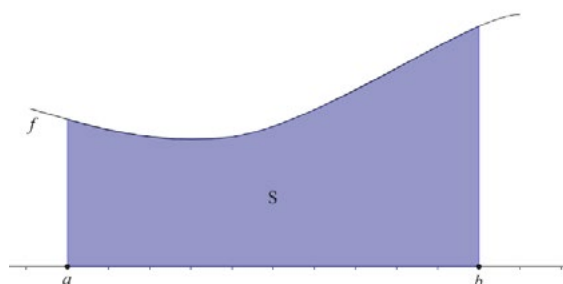


Figura 7

Sipas përkufizimit integrali paraqet shumë prej më tepër syprinave të vogla të pafundshme të drejtkëndëshave:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Për $x \in [a, b]$ le ta përkufizojmë funksionin $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Për këtë funksion vlen se është i vijueshëm në intervalin $[a, b]$ dhe është funksion primitiv $f(x)$ i funksionit në intervalin $[a, b]$.

Kjo do të thotë se funksioni mund të jetë përkufizuar edhe si $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, ku konstanta C është e çfarëdoshme

Barazimi i fundit do të thotë se integrali i caktuar prej a deri te x funksioni $f(t)$ (ky funksion është i njëjtë $f(x)$ vetëm me tjetër shënim të ndryshores) është funksion i cili e mat syprinën e këtij trapezit të lakuar kur $x \in [a, b]$ (figura 8).

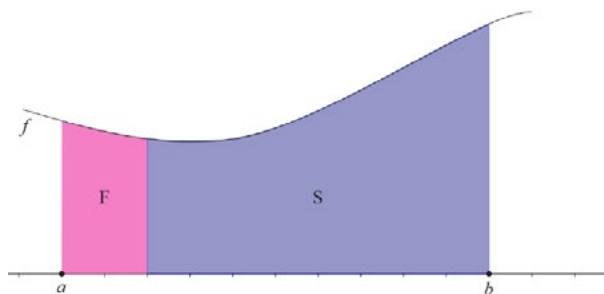


Figura 8

Me f është caktuar syprina e pjesës prej trapezit të lakuar kur $x \in [a, b]$. Qartë vërehet derisa x e zmadhojmë do të zmadhohet edhe syprina F , nëse x e zvogëlojmë do të zvogëlohet edhe syprina f (figura 9).

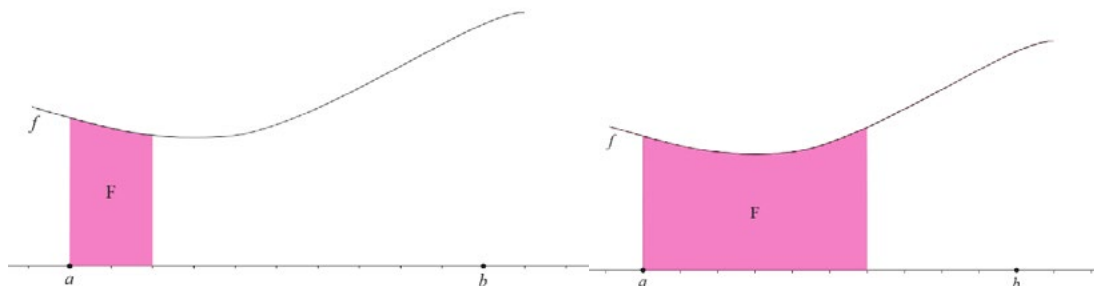


Figura 9

Prej këtui mund të përfundojmë se funksioni $f(x)$ është rritës. Ngel ta caktojmë vlerën e konstantes C . Për këtë qëllim do të vendojmë $x = a$ edhe fitojmë:

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C.$$

Është e qartë se integrali $\int_a^a f(t)dt$ do të jetë i barabartë me 0, pasi në vend të trapezit të lakuar do të kemi segment (figura 10).

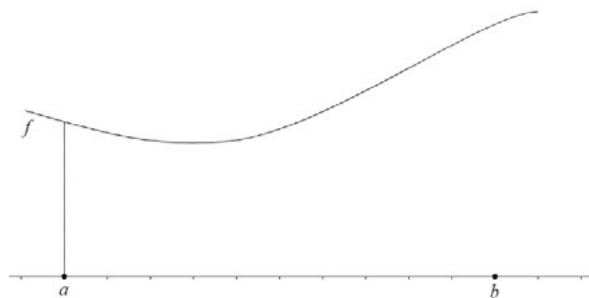


Figura 10

Nga ana tjetër, nëse vendojmë se $x = b$, kemi se:

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = S + C,$$

që do të thotë se syprina f do të jetë e barabartë me syprinën e gjithë trapezit të lakuar S (figura 7).

Nëse zëvendësojmë se $C = F(a)$ kemi

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Formula e fundit është e njohur si **formula e Njuton-Lajbnic**. Me këtë e vërtetuar këtë teoremë.

Teorema 1: (Teorema e Njuton-Lajbnic) Nëse funksioni f është i vijueshëm në intervalin $[a, b]$ dhe nëse f është çfarëdo funksion i tij primitiv, atëherë vlen barazimi:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Kjo teoremë quhet **teorema themelore e njehsimit integral**, ndërsa barazimi (1) **rregulla themelore e njehsimit të integrimit** ose **formula e Njuton-Lajbnic**.

Formula Njuton-Lajbnic e jep lidhjen ndërmjet integralit të pacaktuar dhe integralit të caktuar dhe me këtë në masë të madhe lehtësohet njehsimi i integralit të caktuar. Për ta njehsuar integralin e caktuar të funksionit f në intervalin $[a, b]$ mjafton të gjejmë funksionin e tij primitiv f dhe ta njehsojmë rritjen e tij te segmenti $[a, b]$. Domethënë njehsimin e integralit të caktuar e sjellim në gjetjen e ndonjë funksioni primitiv që është ekuivalente me njehsimin e integralit të pacaktuar

Shembulli 1 ➔ Të njehsojmë $\int_a^b x^n dx, n \in \mathbb{Z}, 0 \notin [a, b]$

Do të shqyrtojmë dy raste:

Kur $n \neq -1$, në këtë rast $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, funksioni $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ është primitiv për funksionin x^n pra kemi

Për $n = -1$, kemi $\int_a^b \frac{dx}{x}$, pasi për $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ kemi: $x > 0$

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$



Njihso integralin e caktuar $\int_1^2 x^3 dx$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Shembulli 2

T'i zgjidhim integralet e caktuara:

Për zgjidhjen e integraleve të caktuar do ta shfrytëzojmë formulën e Njuton-Lajbnic.

b) Me zgjidhjen e integralit përkatës së pacaktuar kemi:

$$\text{a) } \int_0^2 (3-2x) dx \quad \text{b) } \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx.$$

Prej këtu për integralin e caktuar do të kemi:

$$\text{a) } \int_0^2 (3-2x) dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{2 \cdot 0^2}{2} \right) = 6 - 4 = 2.$$

b) Së pari e zgjidhim integralin përkatës së pacaktuar

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \ln |x| + e^x + C.$$

Prej këtu për integralin e caktuar do të kemi:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \left(\ln |x| + e^x \right) \Big|_1^3 = \ln 3 + e^3 - e.$$

c) Së pari e zgjidhim integralin përkatës së pacaktuar

$$\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C.$$

Prej këtu për integralin e caktuar do të kemi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

2

Zgjidhi integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x} \right) dx; \quad \text{b) } \int_0^1 x^2 (x^3 + 1) dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \cos x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Zgjidhi integralet e caktuara:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^{\frac{1}{2}} x dx, & \text{b) } \int_1^{\sqrt{e}} x^2 dx, & \text{c) } \int_0^1 e^x dx, \\ \text{ç) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx, & \text{d) } \int_0^{\pi} \sin x dx, & \text{dh) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx, \\ \text{e) } \int_0^1 \sqrt{x} dx, & \text{f) } \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx. & \end{array}$$

2 Zgjidhi integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x^4 + x^{-2} + 2}{x^3} dx; \quad \text{b) } \int_0^1 (x-3)^3 dx; \quad \text{c) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - 3 \right) dx; \quad \text{ç) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx.$$

3. Njehso integralin e caktuar:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 x^7 dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$$

3. Integrimi me zëvendësim tek integrali i caktuar

Sipas formulës së Njuton-Lajbnic-it njehsimin e integralit të caktuar e sjellim në gjetjen e ndonjë funksioni primitiv që është ekuivalente me njehsimin e integralit të pacaktuar. Tek integrali i pacaktuar tanimë e shqyrtoam metodën e integrimit me zëvendësim, i cili silllet te formula:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Këtu do ta fusim zëvendësimin $x = \varphi(t)$

Shembulli 1 T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx.$$

a) E fusim zëvendësimin $t = x + 2$ prej ku $dx = dt$. Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshimi edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilat janë për ndryshoren Kufijtë e rinj janë ku $x = -1 \Rightarrow t = -1 + 2 = 1$ edhe kur $x = 1 \Rightarrow t = 1 + 2 = 3$. Me futjen e zëvendësimit dhe kufijtë e rinj të njehsuar për ndryshoren e re të future, integralin e zgjidhim si

$$\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx = \int_1^3 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20.$$

b) E fusim zëvendësimin $x + 1 = t$, $dx = dt$. Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshim edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = -2 \Rightarrow t = -2 + 1 = -1$ dhe kur $x = 0 \Rightarrow t = 0 + 1 = 1$. Prej këtu kemi:

$$\int_{-2}^0 e^{x+1} dx = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}.$$

c) E fusim zëvendësimin $2x = t$, $dx = 2dt$. Me zëvendësimin e future do të ndodhë edhe te kufijtë e integralit të caktuar që është te ndryshorj. Kufijtë e rinj janë kur $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 = 0$ dhe kur

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Prej këtu kemi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = 2.$$

1

Njehso integralin e caktuar:

$$\text{a) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx; \quad \text{b) } \int_1^2 e^{2x+1} dx; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx.$$

Shembulli 2

T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_4^5 \frac{dx}{x-3}; \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}; \quad \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx.$$

a) Me futjen e zëvendësimit $t = x - 3$, $dx = dt$ do të ndodhë ndryshim edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = 4 \Rightarrow t = 4 - 3 = 1$ dhe kur $x = 5 \Rightarrow t = 5 - 3 = 2$. Prej këtu kemi:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

b) E fusim zëvendësimin $t = 2x + 1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshim edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ dhe kur $x = 2 \Rightarrow t = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Prej këtu kemi:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

c) Për ta zgjidhur integralin $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$, duhet ta transformojmë duke shfrytëzuar se $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. E

fusim zëvendësimin $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-\sin x} dt$ Me futjen e zëvendësimit do të ndodhë ndryshim edhe te kufijtë e integralit të caktuar, të cilët janë për ndryshoren. Kufijtë e rinj janë kur $x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$ dhe kur $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Prej këtu kemi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = -\ln |t| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{(4x-3)^2}; \quad \text{c) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctgx} dx.$$

Shembulli 3

T'i zgjidhim integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^3 \sqrt{1+x} dx; \quad \text{b) } \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

a) E fusim zëvendësimin $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 0$, $t = 1$ edhe $x = 3$, $t = 2$. Dhe kemi:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = 2 \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}.$$

b) E fusim zëvendësimin $t = \sqrt[3]{1-x}$, $t^3 = 1-x$, $dx = -3t^2$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 1$, $t = 0$ edhe $x = 9$, $t = -2$. Dhe kemi:

$$\begin{aligned} \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx &= \int_0^{-2} (1-t^3) t (-3t^2) dt = \int_0^{-2} (3t^6 - 3t^3) dt = \left(\frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} \right) \Big|_0^{-2} = \frac{3(-2)^7}{7} - \frac{3(-2)^4}{4} \\ &= 3 \cdot 16 \left(-\frac{8}{7} - \frac{1}{4} \right) = \frac{48 \cdot (-39)}{28} = -66,85. \end{aligned}$$

$$\text{a) } \int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} dx; \quad \text{b) } \int_2^4 \sqrt{2x-3} dx; \quad \text{c) } \int_0^1 x \sqrt[5]{x+2} dx; \quad \text{ç) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\cos x} dx.$$

Shembulli 4

T'i zgjidhim integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx; \quad \text{b) } \int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx.$$

a) E fusim zëvendësimin $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = 0$, $t = 1$ edhe $x = 1$, $t = 2$. Dhe kemi:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

b) E fusim zëvendësimin $x^2 - 5x + 6 = t$, $(2x - 5) dx = dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë E fusim zëvendësimin $x = -1$, $t = 12$ edhe $x = 0$, $t = 6$. Dhe kemi:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int_{12}^6 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{12}^6 = \ln 6 - \ln 12 = \ln \left(\frac{6}{12} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

4

Njihso integralet e caktuara

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx.$$

Shembulli 5

T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{b) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx.$$

a) E fusim zëvendësimin $x - 1 = t^2$, $dx = 2t dt$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë $x = 1$, $t = 0$ dhe $x = 2$, $t = 1$. Dhe kemi

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

b) E fusim zëvendësimin $t^6 = e^x + 3$, $6t^5 dt = e^x dx$. Gjithashtu duhet t'i ndryshojmë edhe kufijtë të integralit të caktuar. Kufijtë e rinj janë $x = 0$, $t = \sqrt[6]{4}$ dhe $x = \ln(2)$, $t = \sqrt[6]{5}$. Dhe kemi

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3}}{\sqrt[3]{e^x + 3}} dx = 6 \int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6 dt = \frac{6}{7} e^7 \Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7} (5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}).$$

5 Njehso integralin e caktuar $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 2} dx$

Në vazhdim do të japim disa veti të cilat mund t'i shfrytëzojsh për zgjidhje më të lehtë të integraleve të caktuar.

1) Funkzioni $f(x)$ le të funksion tek, d.m.th. $f(-x) = -f(x)$ ta njehsojmë tani integralin:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Do ta shqyrtojmë së pari integralin $\int_{-a}^0 f(x) dx$. E fusim zëvendësimin $t = -x$, $dt = -dx$, pra patjetër

t'i ndryshojmë edhe kufijtë e integralit $x = -a$, $t = a$ dhe $x = 0$, $t = 0$ Kemi

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{funksioni tek}}{=} \int_a^0 -f(t)(-dt) = \int_a^0 f(t) dt \underset{\text{me ndryshimin e kufijve}}{=} - \int_0^a f(x) dx$$

dhe nëse zëvendësojmë tek integrali i parë kemi:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Prej këtui mund të përfundojmë se nëse funksioni nën integral është tek, ndërsa intervali i integrit simetrik në lidhje me zeron, vlera e integralit është e barabartë me zero.

Shembulli 6 Të vërtetojmë se $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.

Funksioni $f(x) = x^3$ është funksion tek pasi $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Pasi intervali i integrit është simetrik në lidhje me zeron, vlera e integralit është zero. Për këtë integral lehtë kontrollohet se është i barabartë me zero:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

2) Ta shqyrtojmë tani edhe veti tjetër që gjithashtu do të na ndihmon në zgjidhjen e integraleve të caktuar. Le të jetë $f(x)$ funksioni çift, d.m.th., $f(-x) = f(x)$ ta njehsojmë tani integralin:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Së pari do ta shqyrtojmë integralin $\int_{-a}^0 f(x) dx$. Me futjen e zëvendësimit $t = -x$, $dt = -dx$, është e nevojshme t'i ndryshojmë edhe kufijtë e intervalit $x = -a$, $t = a$ dhe $x = 0$, $t = 0$, kemi

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{funksioni çift}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_a^0 -f(x) dx \underset{\text{me ndryshimin e kufijve}}{=} \int_0^a f(x) dx.$$

Nëse zëvendësojmë tek integrali i parë kemi:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Formula e fundit gjeometrisht mund ta interpretojmë në këtë mënyrë: deri sa funksioni është çift grafiku i tij është simetrik në lidhje me boshtin y , prandaj syprina e figurës ndërmjet drejtëzave $x = -a$ dhe $x = 0$ është e barabartë me syprinën e figurës ndërmjet drejtëzave $x = 0$ dhe $x = a$ prej ku vijon formula e sipërme.

Shembulli 7 Të vërtetojmë se $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$

Funksioni $f(x) = x^2$ është çift pasi $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Pasi intervali i integrimit është simetrik në lidhje me zeron, për vlerën e integralit kemi:

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

6

Njehso integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_{-2}^2 \frac{x^5}{2} dx; \quad \text{b) } \int_{-3}^3 2x^4 dx.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Njihso këto integrale të caktuar:

$$a) \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx,$$

$$b) \int_0^1 (3x+1)^2 dx,$$

$$c) \int_0^1 \frac{dx}{(3x+2)^2},$$

$$ç) \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3},$$

$$d) \int_1^4 \sqrt{x} dx,$$

$$dh) \int_2^{10} \sqrt{2x+5} dx,$$

$$e) \int_0^1 \sqrt[5]{(5x+1)^2} dx,$$

$$f) \int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx,$$

$$g) \int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx,$$

$$h) \int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx,$$

$$i) \int_0^1 e^{2x+1} dx,$$

$$j) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x+2}}{\sqrt[3]{e^x+2}} dx$$

$$k) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x;$$

$$l) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx;$$

$$ll) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx.$$

2. Njihso këto integralet e caktuara:

$$a) \int_{-1}^1 x^7 dx; \quad b) \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx$$

4. Integrimi parcial i integralit të caktuar

Njehsimin e integralit të caktuar e sjellim në gjetjen e ndonjë funksioni primitiv që është ekuivalent me gjetjen e integralit të pacaktuar. Integrimi parcial më së shpeshti shfrytëzohet kur funksioni nënintegral është logaritmike, eksponenciale ose trigonometrike. Tek integrali i pacaktuar tani më e shqyrtoam metodën e integrimit parcial:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Kjo formulë përshtatet për integralin e caktuar dhe e ka formën :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Shembulli 1

T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_0^2 x e^x dx; \quad \text{b) } \int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx; \quad \text{c) } \int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx.$$

a) Me shfrytëzimin e integritit parcial $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, kemi:

$$\int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2e^2 - 0e^0) - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

b) Me shfrytëzimin e integritit parcial $u = x^2 - 5 \Rightarrow du = 2x dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, kemi:

$$\int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (x^2 - 5) e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

Për ta zgjidhur integralin $\int_0^1 x e^{-2x} dx$, kemi: $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, përsëri duhet ta zbatojmë integrimin parcial, ku:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

nëse këtë e zëvendësojmë tek integrali i parë do të kemi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) - \frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} \end{aligned}$$

c) Me shfrytëzimin e integrimit parcial $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3)dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, kemi:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = (x^2 + 3x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx.$$

Për ta zgjidhur integralin $\int_0^1 (2x + 3)e^x dx$, kemi: $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, përsëri duhet ta zbatojmë integrimin parcial, ku:

$$\int_0^1 (2x + 3)e^x dx = (2x + 3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1,$$

nëse këtë e zëvendësojmë tek integrali i parë do të kemi:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - (3e - 1) = 2.$$

1 Njehso këto integrale të caktuar:

$$\text{a) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{b) } \int_1^2 (x^2 + 2x + 1)e^x dx.$$

Shembulli 2 T'i njehsojmë integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{b) } \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx; \quad \text{ç) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

a) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $v = 2\sqrt{x}$.

Kemi:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \ln 4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 = 4 \cdot (\ln 4 - 1).$$

b) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $u = \ln 2x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Kemi:

$$\begin{aligned}\int_2^4 x^3 \ln(2x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{x^4}{16} \Big|_2^4 = \frac{1}{4} (4^4 \ln 8 - 2^4 \ln 4) - \frac{1}{16} (4^4 - 2^4) = 184 \ln 2 - 15.\end{aligned}$$

c) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $u = \ln(x+1)$, $du = \frac{dx}{x+1}$, $dv = dx$, $v = x$.

Kemi:

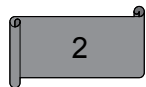
$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = ((e-1) \ln e) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= e-1 - \left[\int_0^{e-1} \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} \right] = e-1 - \left[x \Big|_0^{e-1} - (\ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \right] = e-1 - [(e-1-0) - (\ln e - \ln 1)] = \\ &= e-1-e+1+\ln e = 1.\end{aligned}$$

ç) Nëse e zbatojmë rregullën për integrimin parcial kemi: $u = x \Leftrightarrow du = dx$

$$dv = \sin x dx \Leftrightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Kemi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$



Njehso integralet e caktuara:

$$\text{a) } \int_1^e x^2 \ln x; \quad \text{b) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{c) } \int_0^{e-1} (x^2 + x) \ln(x+1) dx; \quad \text{ç) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Shembulli 3

Ta njehsojmë integralin e caktuar: $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

Prej integritit parcial kemi $u = \ln^2 x$, $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $dv = \frac{1}{x^2} dx$, $v = -\frac{1}{x}$. Kemi

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx,$$

Për ta zgjidhur integralin $\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$, kemi: përsëri duhet ta zbatojmë integrimin parcial, ku:

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = \frac{1}{x^2} dx, \quad v = -\frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1,$$

nëse këtë e zëvendësojmë tek integrali i parë do të kemi:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{2}{e} + 1 \right) = -\frac{5}{e} + 2.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Të njehsohen këto integrale:

a) $\int_0^1 (2x+1) e^x dx;$

b) $\int_1^2 (3x+5) e^{-x} dx;$

c) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx;$

ç) $\int_0^1 (x^2 - 2) e^x dx;$

d) $\int_1^e \ln x dx;$

dh) $\int_1^e x^2 \ln x dx;$

e) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$

f) $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx;$

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

5. Syprina e figurës së rrafshët

Prej përkufizimit të integralit të caktuar vërejtëm se ai paraqet syprinën e trapezit të lakuar i cili është përcaktuar me grafikun e funksionit jonegativ $f(x)$ dhe boshtin e intervalit $[a, b]$ (figura 11)

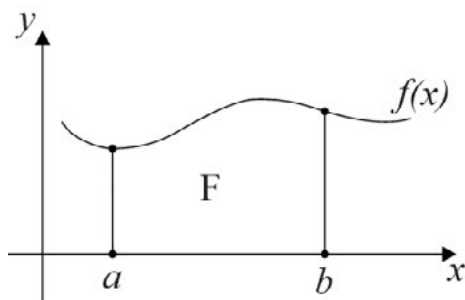


Figura 11

Domethënë për syprinën e trapezit të lakuar prej figurës 11 kemi se

$$P(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

Në rastin kur funksioni është negativ, vlera e integralit të caktuar do të jetë negative (figura 12).

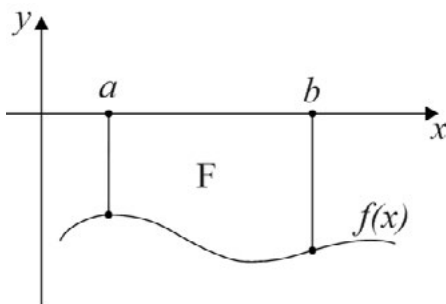


Figura 12

Domethënë për ta njehsuar, syprinën e figurës në rastin kur funksioni është negativ $f(x)$, vlerën e integralit të caktua do ta vendojmë në shenjë të vlerës absolute, për të fituar numër pozitiv, pasi syprina nuk mund të jetë negative.

$$P(F) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Shembulli 1

Ta njehsojmë syprinën e figurës, të kufizuar me lakoren $y = \frac{1}{x}$, boshtin e abshisës

dhe drejtëzat $x = 1$ dhe $x = 3$ Te Figura 13 janë paraqitur lakorja dhe të dy drejtëzat:

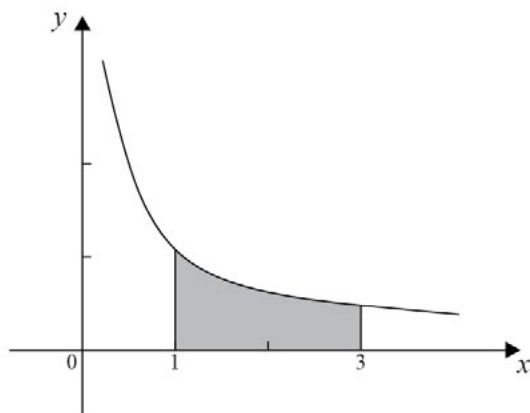


Figura 13

Sipas sqarimit paraprak, për ta njehsuar syprinën e pjesës së ngjyrosur kemi:

$$P = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Të shqyrtojmë tani se si do ta njehsojmë syprinën e figurës e cila është kufizuar me grafikët e funksioneve $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ të intervalit $[a, b]$ te Figura 14.

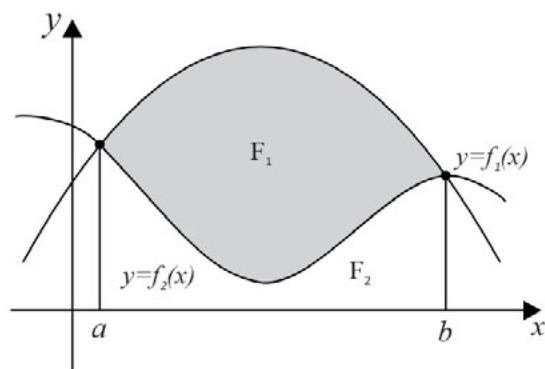


Figura 14

Nëse me F_1 e shënojmë trapezin e lakuar nën grafikun e funksionit $f_1(x)$ por me F_2 e paraqesim trapezin e lakuar nën grafikun e funksionit $f_2(x)$ mund të paraqitet si ndryshim të trapezit të lakuar F me trapezin e lakuar F_1 . Prej ku mund të përfundojmë se syprina e figurës F është e barabartë F_1 me ndryshimin a syprinës së trapezit të lakuar dhe trapezit të lakuar F_2 , d.m.th.,

$$P(F) = P(F_1) - P(F_2) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

Shembulli 2

Ta paraqesim syprinën e figurës (figura 15) të kufizuar me parabolat.
 $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$

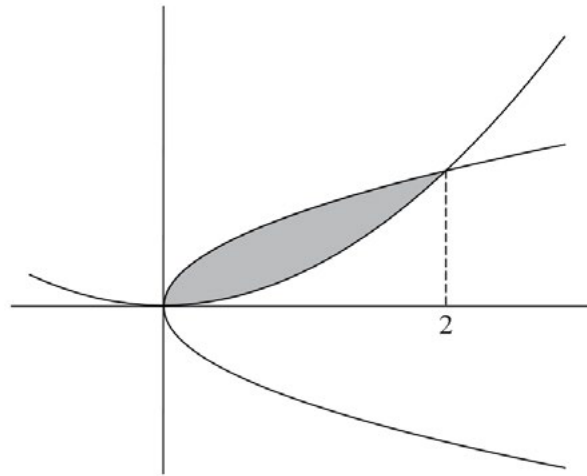


Figura 15

Parabolat të cilat e kufizojnë figurën syprinë të cilës duhet të caktohet janë paraqitur te Figura 15. Së pari igjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integrit. Prej $y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}, y > 0$

atëherë $\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2}, 2x = \frac{x^4}{4}$ Prej $x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$. Domethënë pikëprerjet

janë $A(0, 0), B(2, 2)$ Syprina e trapezit të lakuar të kufizuar me lakoren $y^2 = 2x$ është $F_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx$.

Pra syprina e trapezit të lakuar që e kërkojmë $x^2 = 2y$ është $F_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$, d.m.th., $F = F_1 - F_2$

$$F = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} \right) \bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Shembulli 3

Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 16) të kufizuar me parabolën $y = x^2$ dhe drejtëzën $x + y = 2$.

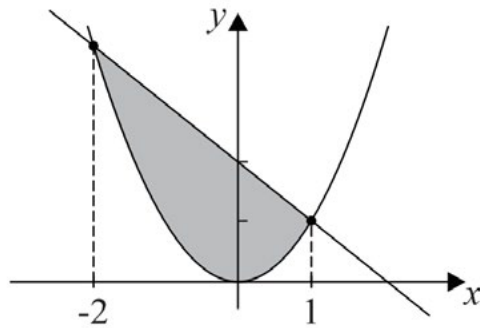


Figura 16

Së pari i gjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integralit sipas të cilit integrojmë. E zëvendësojmë te $y = x^2$ te $x + y = 2$ dhe e fitojmë barazimin katror $x + x^2 = 2$. Me zgjidhjen e barazimit katror $x^2 + x - 2 = 0$ fitohet se zgjidhjet e tij janë $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Domethënë pikëprerjet janë $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$. Syprina e figurës që e kërkojmë është:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Shembulli 5 Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 17) të kufizuar me parabolën $y = 2 - x^2$ dhe drejtëzën $y = x$

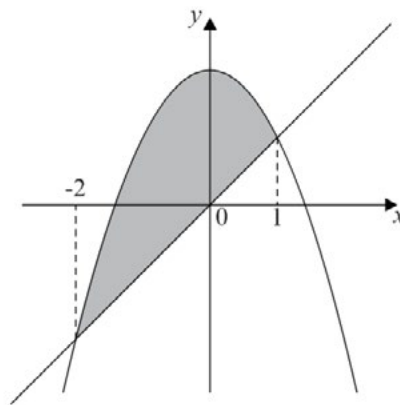


Figura 17

Së pari i gjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integralit. I zëvendësojmë $y = x$ te $y = 2 - x^2$ dhe e fitojmë barazimin katror

$x^2 + x - 2 = 0$. Me zgjidhjen e barazimit katror fitohet se zgjidhjet e tij janë $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Domethënë pikëprerjet janë $A(-2, -2)$, $B(1, 1)$

Syprina e figurës që e kërkojmë është:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Shembulli 5 Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 18) të kufizuar me parabola $y = 2x^2 + 1$ dhe $y = x^2 + 10$

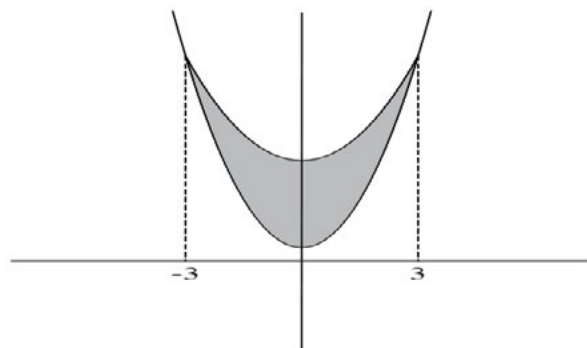


Figura 18

Së pari i gjejmë koordinatat e pikëprerjeve që i përcaktojnë kufijtë e integrimit. Nëse i barazojmë barazimet kemi $2x^2 + 1 = x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 3$ Syprinën e figurës që e kërkojmë është:

$$F = \int_{-3}^3 (x^2 + 10 - 2x^2 - 1) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 36.$$

Gjatë zgjidhjes shfrytëzojmë se edhe të dy funksionet janë çift (simetrike në lidhje me boshtin y)

Shembulli 6 Ta njehsojmë syprinën e figurës (figura 19) të kufizuar me lakoret $y = e^x$, $y = e^{-x}$ dhe drejtëzën $x = 2$

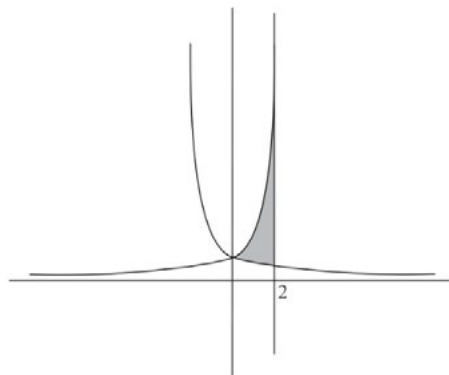


Figura 19

Prej figurës 19 mund të vërehet sipërfaqja në të cilën lëviz prej 0 deri te 2 dhe se lakorja e sipërme është $y = e^x$ lakorja e poshtme është $y = e^{-x}$. Pikëprerjet e të dy lakoreve mund t'i fitojmë edhe prej :

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Prej këtu për syprinën kemi:

$$F = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^{-0}) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2.$$

Shembulli 7

Të njehsohet syprina e figurës (figura 20) të kufizuar me lakoret $y = 2 - x^2$ ve $y^3 = x^2$.

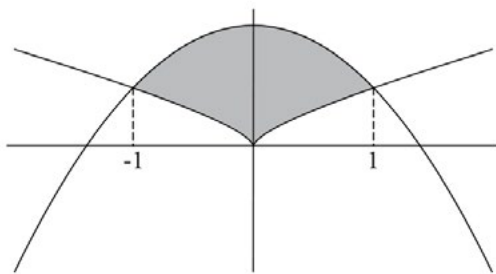


Figura 20

E gjejmë prerjen e të dy lakoreve dhe i fitojmë pikëprerjet $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ Prej figurës 20 vërejmë

$$\text{se } F = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \bigg|_{-1}^1 = 2\frac{2}{15}.$$

Detyra për punë të pavarur

1. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = x^2$ dhe $y = \sqrt{x}$.
2. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = x^2 + x + 3$ dhe drejtëzën $y = x + 7$
3. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = \ln(x)$ dhe $y = \ln^2(x)$.
4. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = \frac{1}{1+x^2}$ dhe $y = \frac{x^2}{2}$.
5. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ dhe $y = 0$, $x = e$.
6. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakore $y = \frac{1}{x^2}$ drejtëzat $y = x$.
7. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakore $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ drejtëzën $x = 1$.

6. Detyra për përsëritje të njësisë modulare

1. Zgjidhi integralet e pacaktuara:

$$\text{a) } \int_1^2 \sqrt[4]{x^3} dx,$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx,$$

$$\text{c) } \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + x^3 \right) dx,$$

$$\text{ç) } \int_0^1 (2x^4 + 3x^2 + 1) dx$$

2. Me zbatimin e formulës së Njuton-Lajbnicit, njehso integralet:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\text{b) } \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

$$c) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\zeta) \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx.$$

3. Me ndihmën e integrimit me zëvendësim njehso integralet:

$$a) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx;$$

$$b) \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

4. Me ndihmën e integrimit me zëvendësim njehso integralet:

$$a) \int_0^1 \frac{2x+3}{e^x} dx;$$

$$b) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

5. Me metodën e integrimit parcial njehso integralet:

$$a) \int_1^2 x \ln(2x^2 - 1) dx;$$

$$b) \int_1^2 (2x-1) \ln x dx.$$

6. Me metodën e integrimit parcial njehso integralet:

$$a) \int_0^{e-2} \ln(x+2) dx$$

$$b) \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

7. Njehso integralet:

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

8. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = 2x^2 + 1$ dhe $y = x^2 + 10$

9. Njehso syprinën e figurës së kufizuar me lakoret $y = 2x - x^2$ dhe drejtëzës $x + y = 0$

Zgjidhje:

Njësia modulare 1 – Njehsimi diferencial

1.

1. a) $\Delta L = 2m, \Delta P = 10m^2$,
b) $\Delta L = 1m, \Delta P = 10m^2$.
2. a) $\Delta f = \frac{1}{11}$,
b) $\Delta f = 2$,
c) $\Delta f = 3$,
c) $\Delta f = 2$.
3. a) $y' = 4$,
b) $y' = 2x$ za $x_0 = 2, y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$,
c) $y' = 2(x - 2)$ za $x_0 = 5, y'(5) = 2 \cdot (5 - 2) = 6$,
c) $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ za $x_0 = 1, y'(1) = 2$.
4. a) $y'_+(3) = 1, y'_-(3) = -1$
b) $y'_+(-2) = 1, y'_-(-2) = -1$,
c) $y'_+(0) = 0, y'_-(0)$ nuk ekziston pasi për $x < 0$, funksioni nuk është përkufizuar
ç) $y'_+(5) = \infty, y'_-(5) = -\infty$

2.

1. a) $y' = 5x^4$, b) $y' = \frac{7}{3}x^3\sqrt{x}$, c) $y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, ç) $y' = -\frac{5}{x^6}$,
2. a) $y' = \frac{11}{2}x^4\sqrt{x}$, b) $y' = -\frac{7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$, c) $y' = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$, ç) $y' = -\frac{1}{5x^5\sqrt{x}}$.

3.

1. a) $f'(x) = 4x$, b) $f'(x) = -\frac{1}{8\sqrt[4]{x^3}}$, c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, c) 2
2. a) $f'(x) = 4x + 5$, b) $f'(x) = x^2 - x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}$,
c) $f'(x) = 1 + x + x^2$, c) $f'(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$3. \quad \text{a) } f'(x) = 14x^2\sqrt{x} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}; \quad \text{b) } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4. \quad \text{a) } f'(x) = \frac{1}{x} + e^x - 5, \quad \text{b) } f'(x) = 2^x \ln 2 + 5 \cdot 4^x \ln 4,$$

$$5. \quad \text{a) } f'(x) = x(2 \ln x + 1), \text{b) } f'(x) = x^2 e^x (3+x)$$

$$6. \quad \text{a) } f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}, \quad \text{b) } f'(x) = \frac{-3x^2-2x+3}{(x^2+1)^2},$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{1-3 \ln x}{x^4}, \quad \text{g) } f'(x) = \frac{x(2-x)}{x^2}.$$

4.

$$1. \quad \text{a) } y' = 5(2x^2 + 5x - 6)^4 (4x + 5), \quad \text{b) } y' = 8(x^5 + 2x)^7 (5x^4 + 2),$$

$$\text{c) } y' = 5(5x^5 + 3x^3 + 1)^4 (25x^4 + 9x^2), \quad \text{g) } y' = 6m(mx + n)^5.$$

$$2. \quad \text{a) } y' = 12x^2 - 16x - 35, \quad \text{b) } y' = (x+2)(x^2 - 3x + 1)^2 (8x^2 - 3x - 16).$$

$$3. \quad \text{a) } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{b) } y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}}.$$

$$4. \quad \text{a) } y' = 2e^{2x+5}, \quad \text{b) } y' = xe^{\sqrt{x}} \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right).$$

5.

$$1. \quad \text{a) } y' = -\frac{2xy}{x^2+2y}, \quad \text{b) } y' = -\frac{x+2y}{2x+y}, \text{c) } y' = -\frac{2+y^2}{1+2xy}, \quad \text{g) } y' = -\frac{3x^2+y^3}{3xy^2}.$$

$$2. \quad \text{a) } y' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \right), \quad \text{b) } y' = 2x^{2x} (\ln x + 1),$$

$$\text{c) } y' = \left(\frac{1+x^2}{x} \right)^x \left[\ln \left(\frac{1+x^2}{x} \right) + \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \right], \quad \text{g) } y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1-\ln x}{x^2} \right).$$

6.

$$1. \quad \text{a) } dy = (1-x) \cdot e^{-x} dx \quad \text{b) } dy = (1-x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$2. \quad \text{a) } 1,0001; \quad \text{b) } 0,001; \quad \text{c) } 3,00005.$$

7.

1. a) $y' = 2t^2$; b) $y' = \frac{t+5}{t}$.

2. a) $y' = \frac{3(e^t + e^{-t})}{5(e^t - e^{-t})}$; b) $y' = \frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[6]{t}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$.

8.

1.

a) barazimi i tangjentës $2x - y + 1 = 0$

barazimi i normales $x + 2y - 7 = 0$

b) barazimi i tangjentës $24x - y + 33 = 0$

barazimi i normales $x + 24y + 362 = 0$

2. Pikat e prerjes janë $A(2, 0)$ dhe $B(-2, 0)$

$A(2, 0)$

barazimi i tangjentës $4x + y - 8 = 0$

barazimi i normales $x - 4y - 2 = 0$

$B(-2, 0)$

barazimi i tangjentës $4x - y + 8 = 0$

barazimi i normales $x + 4y + 2 = 0$

3. Pikat e prerjes janë $A(3, 8)$

barazimi i tangjentës $6x - y - 10 = 0$

barazimi i normales $x + 6y - 51 = 0$

4. Pikat e prerjes janë $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ dhe $B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{27}\right)$

$A\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

barazimi i tangjentës $x - 2y + 9 = 0$

barazimi i normales $8x + 4y + 9 = 0$

$B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{27}\right)$

barazimi i tangjentës $27x - 54y + 10 = 0$

barazimi i normales $108x + 54y + 5 = 0$

9.	1. a) $y'' = 4e^{2x-3}$, b) $y'' = \frac{2(x^2 + 2x) - (2x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^2}$, c) $y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$, ç) $y'' = 4$, d) $y'' = -\frac{3}{16x^4\sqrt{x}}$, e) $y'' = 3x^2 - 2x + 2$, f) $y'' = x(6 \ln x + 5)$. 2. a) $y'' = 6(1 - x)$, b) $y'' = \frac{2(2x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 10x + 3)}{(x + 1)^3}$.
10.	2. a) rritet për çdo $x \in \mathbb{R}$, nuk ka vlera ekstreme b) minimum për $x = \frac{5}{2}$, $y_{\min} = -3\frac{1}{4}$, . c) maksimum për $x = 1$, $y_{\max} = \frac{1}{5}$, minimum për $x = 3$, $y_{\min} = -5\frac{2}{5}$, . ç) $y' = 3(x - 2)^2 > 0$, rritet për çdo $x \in \mathbb{R}$, nuk ka vlera ekstreme . d) minimum për $x = \frac{3}{4}$, $y_{\min} = -\frac{27}{256}$. dh) dy minimume për $x = 1$, $y_{\min} = 2$ dhe $x = -1$, $y_{\min} = 2$, e) maksimum për $x = -2$, $y_{\max} = 4e^{-2}$, minimum për $x = 0$, $y_{\min} = 0$ është minimum . f) minimum për $x = 1$, $y_{\min} = 1$. g) maksimum për $x = 1$ $y_{\max} = \frac{1}{3}$, minimum për $x = -1$, $y_{\min} = -1$, . h) maksimum për $x = -7$, $y_{\max} = -14$, minimum për $x = -1$, $y_{\min} = -2$ i) maksimum për $x = \frac{\pi}{4}$, $y_{\max} = \sqrt{2}$, minimum për $x = \frac{5\pi}{4}$, $y_{\min} = -\sqrt{2}$. 3. a) $a = 1$; b) $a = \frac{1}{2}$ 4. $a = 2$, $b = -3$.
11.	1. a) Për $x \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$ funksioni është konkav, ndërsa për $x \in \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ funksioni është konveks b) Funksioni është konkav në $(-\infty, 0)$ dhe $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, ndërsa konveks në $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ c) Funksioni është konkav në $(-\infty, 0)$ dhe $(1, \infty)$, ndërsa konveks në $(0, 1)$

ç) Funkzioni është konkav në $(-\infty, -1)$ dhe $(1, \infty)$, ndërsa konveks në $(-1, 1)$

2. (nën a $y = \frac{x}{x+1}, x \neq -1$ detyra të shtohet) $x \neq -1$)

a) nuk ka pika të infleksionit, .

b) pika të infleksionit janë $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0)$ dhe $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

3.

a) Funkzioni është konkav në $(-1, 0)$ dhe $(1, \infty)$, ndërsa konveks në $(-\infty, -1)$ dhe $(1, 0)$. Pikë të infleksionit janë, $(0, 0)$

b) Funkzioni është konkav në $(-1, 0)$, ndërsa konveks në $(-\infty, -1)$. Nuk ka pikë të infleksionit

c) Funkzioni është konkav në $(-\infty, -3.41)$ dhe $(-0.58, \infty)$, ndërsa konveks në $(-3.41, -0.58)$. Pikë të infleksionit janë, $(-3.41, 0.38)$ dhe $(-0.58, 0.19)$

ç) Funkzioni është konkav në $(2, \infty)$, ndërsa konveks në $(-\infty, 2)$. Pikë e infleksionit është, $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

d) Funkzioni është konkav në $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \infty\right)$, ndërsa konveks në $\left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ Pikë e infleksionit është, $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

dh) (te detyrat $y = x \ln^2 x, x > 0$) Funkzioni është konkav në $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, ndërsa konveks në $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Pikë e infleksionit është, $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

13.

1. $a = 7.5, b = 7.5, a \cdot b = 56.25$

2. $a = 108, b = 72, 2a^2 + 3b^2 = 38880$

3. $a = 5, b = 2, P = 10$

4. $a = 7.06, b = 5.06, h = 1.47, V = 58.12$

5. Trekëndësh barabrinjës me brinjë $a = 5, S = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

6. Kubi me brinjë $a = 7.94, S = 378$

7. $P = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

8. $r = 6\sqrt{2}, H = 24, s = 18\sqrt{2}, P = 288\pi$

Njësia modulare 2 – Njehsimi integral

1. 1. a) $F(x) = \ln x$ b) $F(x) = \sqrt{x} + 3$

4. a) $F(x) = x^3 + 2$ b) $F(x) = e^x + 1$

2.

1. a) $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}^x}{\ln \sqrt{3}} + C$; b) $x + \ln|x| + C$; c) $\sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C$;

$$\text{в) } \frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C; \quad \text{д) } 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3} + C;$$

d) $8x + 4x^3 + 6\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C.$

3.

1. a) $\frac{(x^2-13)^{24}}{48} + C$; b) $\frac{(x^3-x^2+x-9)^8}{8} + C$; c) $\ln|x^2+3x-10| + C$.

2. a) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3-9x)^6} + C$; b) $-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + C$; c) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27} + C$.

3. a) $\ln|e^x + x| + C$; b) $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C$; c) $\frac{2}{3}\sqrt{\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]^3} + C$.

4.

1. a) $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$; b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+C$.

2. a) $\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$; **b)** $\frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{2} x^2 + C$.

6.

1.

a) 2 b) $8\frac{2}{3}$ c) $e-1$ ç) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$

2. a) $\ln 2 - \frac{5}{4}$; b) $-\frac{65}{4}$; c) $\ln \frac{3}{2} - 3$; ç) $e^4 - e + \frac{14}{3}$.

3. a) 0 ; b) $\frac{256}{21}$.

7.

a) 20

b) 7

c) $\frac{1}{10}$

ç) $\frac{3}{8}$

$$d) \frac{14}{3}$$

$$e) 32\frac{2}{3}$$

$$f) 1.61$$

$$g) 13\frac{1}{3}$$

$$g) \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$h) \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$i) \frac{1}{2}e(e^2 - 1)$$

$$j) 6\sqrt[6]{7} - \frac{18\sqrt[6]{3}}{7}$$

8.

$$a) 1+e$$

$$b) \frac{11e-14}{e^2}$$

$$c) 2$$

$$c) -\frac{3}{e}$$

$$d) 1$$

$$e) \frac{1}{9}(1+2e^3)$$

$$f) \frac{2e\sqrt{e}}{9}$$

$$g) \ln 2 - \frac{1}{2}$$

9.

$$1. \frac{1}{3}$$

$$2. \frac{32}{3}$$

$$3. 3-e$$

$$4. \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

$$5. \frac{1}{3}$$

$$6. \frac{7}{6}$$

$$7. e + \frac{1}{e} - 2.$$

10.

$$1. \frac{4ab^2\pi}{3}$$

2. $\frac{\pi}{3}$

3. π

4. $\frac{2\pi}{3}$

5. $\frac{44\pi}{3}$

Njësia modulare 3 – Matricat (për të gjitha drejtimet)

1.

1. a) $-2\sin 2x$; b) $pq(q-p)$; c) $2p^2$; ç) 0 ; d) $nmp+2nm+2mp+2np$; e) 0 .

2. a) 6 ; b) -127 ; c) 15 .

3. a) $x_1 = -1, x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$; b) $x_1 = 0, x_2 = 6$; c) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2\frac{1}{2}$; ç) $x = 0$.

4. a) $[-2, 2]$; b) $(-\infty, -6] \cup [-3, +\infty)$.

2.

2.a) 0 , b) 0 , c) 0 , ç) 0 .

4.a) 5 ; b) 4 ; c) -7 .

3.

1. a) $(1, 3, -2)$; b) nuk ka zgjidhje; c) pafund shumë zgjidhje; ç) $(1, 5, 1)$.

2. a) $(0, 0, 0)$; b) $M = \{(-t, 10t, 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3. a) $m \neq 1$ ve $m \neq -2$ zgjidhje të vetme, $m = 1$ shumë të pafundshme, $m = -2$ nuk ka zgjidhje;
b) $m \neq -8$ zgjidhje të vetme ve $m = -8$ pafund shumë zgjidhje.

4. a) $(1, -\frac{1}{2}, 1)$; b) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

4.

1. $x = -1, y = 2, z = -3, u = 4$;

2. $A^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

3. Për $a = 2c$ gjatë çfarëdo c .

4. a) A është matricë trekëndore lart dhe poshtë, matricë skalare dhe simetrike;
b) B është matricë trekëndore lart dhe poshtë, matricë diagonale dhe simetrike;
c) C është matricë trekëndore lart;

ç) A është matricë trekëndore lart dhe poshtë, matricë skalare d.m.th., matricë njësi e rendit 3;

5.

$$1.a) \begin{bmatrix} 28 & -9 & 12 & -6 \\ 4 & -12 & 15 & 6 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} -25 & 2 \\ 9 & 6 \\ -12 & -6 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}; \quad c) \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & -12 \\ 15 & 22 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$3.a) \begin{bmatrix} -4 & -98 & 135 \\ 12 & 7 & -38 \\ -21 & -54 & 92 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 18 & 44 & -66 \\ -4 & 183 & -159 \end{bmatrix}; \quad c) \begin{bmatrix} -283 & 52 & 38 \\ 196 & -124 & -206 \\ 240 & 32 & 112 \end{bmatrix}.$$

5. DA, BC, CD, CA.

6.

$$1.a) A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}; \quad b) B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad c) C^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$2.a) A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad b) B^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix}; \quad c)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{43} \begin{bmatrix} 10 & 13 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -47 & 31 & 27 \end{bmatrix}.$$

7.

$$1.a) X = \begin{bmatrix} 70 & 63 \\ 42 & 847 \end{bmatrix}; \quad b) X = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 15 & -19 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}.$$

$$2.a) X = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 37 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad b) X = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 30 & 25 & 91 \\ 0 & 50 & -40 \\ 0 & 25 & 25 \end{bmatrix}.$$

8.

1.(1, 3,-2); 2. (2,-1,3); 3. (3,-2,1); 4. (1,5,1).

9.

1.(1, 3,-2); 2. (2,-1,3); 3. (3,-2,1); 4. (1,5,1);

5. nuk ka zgjidhje; 6. Pafund shumë zgjidhje

10.

1. a) b^2 ; b) 40;

3. $(\frac{3}{2}, \frac{9}{10}, -\frac{7}{10})$.

4. a) $\begin{bmatrix} -10 & -11 & -30 \\ -3 & -2 & 27 \\ 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; ç) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.
5. a) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 22 & 14 \\ -29 & 18 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
7. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.
8. (1,0,-2).
9. a) Për $a \neq 1$, $a \neq -2$ të caktuar, për $a = 1$ të papërcaktuar dhe për $a = -2$ kundërthënës .
b) Për $a \neq 0$ i caktuar me zgjidhje $(1 - a, a, 0)$; c) për $a = 0$ i pacaktuar.
10. a) kundërthënës; b) i pacaktuar; c) pacaktuar; ç) $(0, 0, 0)$; d) $(\frac{-5}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-4}{11})$; e) $(1, 0, -4)$.

Njësia modulare 4 Gjeometria analitike në hapësirë

1.

1.a) $5\sqrt{3}$; b) 21; c) $10(5\sqrt{3} - 6)$.

2. 110, 89° .

5.a) 17; b) $\sqrt{14}, \sqrt{29}$; c) 33° .

6.a) 45° ; b) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

7. (0,3,6), (0,-3,-6).

2.

1.a) 8; b) 16; c) 80.

2. $4\sqrt{2}$.

3. 15 njësi katrore.

5. a) $(-9, -11, -3)$; b) $(-18, -22, -6)$; c) $(-90, -110, -30)$.

6. $\sqrt{13}$.

7. 0,8689.

3.

3. $12\sqrt{2}$;

4. 343 njësi kubike.

5. $\frac{3\sqrt{41}}{41}$ njësi

6. $S_1(\frac{35}{12}, 0, 0), S_2(\frac{5}{12}, 0, 0)$.

7. $m_1 = 2, m_2 = -4$.

4.

1. $5x + 2y - 3z - 58 = 0; P, Q \notin \Sigma, R \in \Sigma$.

2. $x - 3z - 11 = 0$.

3. a) kalon nëpër fillimin e koordinatave; b) paralel me boshtin z ; c) kalon nëpër boshtin y ; ç) barazimi në rrafshin Oyz ; d) paralele me boshtin x

4. $x = 5$.

5. $3x - z = 0$.

5.

1. a) $\vec{r} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) - 10 = 0$; b) $\vec{r} \cdot (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) - 4 = 0$.

2. $\vec{r} \cdot (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - 5 = 0$.

3. $\vec{r} \cdot (-\frac{15\sqrt{538}}{538}, \frac{13\sqrt{538}}{538}, \frac{12\sqrt{538}}{538}) = 0$.

4. a) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 = 0$; b) $\frac{\sqrt{14}}{14}x - \frac{\sqrt{14}}{7}y + \frac{3\sqrt{14}}{14}z - \frac{\sqrt{14}}{7} = 0$.

5. a) jo; b) jo; c) po.

6. a) $p = \frac{5}{6}, \vec{n}_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; b) $p = 3, \vec{n}_0 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

6.

1. a) $a = 10, b = -\frac{20}{3}, c = -4$; b) $a = -\frac{15}{7}, b = -3, c = -\frac{15}{4}$.

2. $x - 6y - 2z + 2 = 0$;

3. a) $x + y + z - 6 = 0$; b) $15x + 4y + 4z + 35 = 0$.

4. $m = 1$.

5. $m = 14$.

6. $m = -7$.

7. $V = 45$.

7.

1. a) $13x - 7y - 2z + 1 = 0$; b) $15x - 3z - 19 = 0$.

2 a) pikat nuk janë komplanare; b) $2x + y - z - 3 = 0$.

3. $3x + 6y - 2z - 15 = 0$; asnjë

8.

1. a) nuk puthiten; b) paralele, c) priten nën këndin $\alpha \approx 16^\circ$

2. $x+3y+2z=0$.

3. $2x-3y-5z-5=0$.

4. $x-y+z-11=0$.

9.

1. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2. $A(0,0,-\frac{1}{3}), B(0,0,\frac{5}{9})$.

3. $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

4. $\frac{26\sqrt{278}}{139}$.

5. $A(0,8,0), B(0,-10,0)$.

10.

1. $\frac{x-1}{-1} = \frac{z+2}{2}, y-2=0; x=1-t, y=2, z=2t-2$.

2. $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+5}{-2} = z+7; x=3-3t, y=-5-2t, z=t-7$.

3. $110x+10z+7=0$.

4. $3x-y-2z=0$.

5. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4}$.

6. $\frac{x+1}{-1} = y-2 = \frac{z+3}{11}, \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{9}, \frac{x}{2} = y-4 = \frac{z-6}{2}$.

7. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{10}, \frac{x+2}{6} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+6}{-1}, \frac{x+3}{7} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{10}, \frac{x-5}{6} = \frac{y+6}{-8} = \frac{z-4}{-1}$.

11.

1. $M(\frac{16}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{20}{9}), \alpha \approx 22^\circ$.

2. Drejtëza shtrihet te rrafshi.

3. $\Sigma: x+2y+z=0, M(\frac{6}{7}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{6})$.

4. $\Sigma: x-2y+z=0$.

5. $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-4}{-3}, M(1,1,1)$.

12.

1.a) paralele; b) aplanare.

2. $x-1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$.

3. $\lambda = -2, \alpha \approx 60^\circ, M(-3,5,-5)$.

4. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. 5. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{-7}$.
13. 1. $\frac{28\sqrt{17}}{17}, \frac{14\sqrt{13}}{13}, \frac{28\sqrt{89}}{89}$. 2. $\frac{2\sqrt{30}}{3}$. 3. $\sqrt{13}, \frac{\sqrt{10010}}{35}$. 4. $\frac{37\sqrt{166}}{166}$. 5. a) $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.
14. 1. $\frac{85}{12}$. 2. $x - z = 0$. 3. $8x - 17y = 0$. 4. $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ 5. $x \pm \sqrt{2}y + 3z - 6 = 0$. 6. $a = 5, b = -12$. 7. $\sqrt{42}$. 8. $x + 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{6}, \alpha \approx 53^\circ$. 10. $\frac{13\sqrt{2}}{6}$.

Njësia modulare 5 – Integrali i pacaktuar

2. 1. a) $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}^x}{\ln \sqrt{3}} + C$; b) $x + \ln x + C$; c) $\sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C$; ç) $\frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C$;	3. 1. a) $\frac{(x^2-13)^{24}}{48} + C$; b) $\frac{(x^3-x^2+x-9)^8}{8} + C$;
--	--

d) $\frac{2a^x}{\ln a} + \operatorname{ctgx} + C;$ $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3} + C;$ $8x + 4x^3 + 6\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C.$ 2.a) $-\cos x - \sin x + C;$ b) $-\operatorname{ctgx} + \cos x + C;$ c) $\operatorname{tgx} - \operatorname{ctgx} + C;$ ç) $\frac{x^2}{6} + 4\cos x + 5\sin x + C;$ d) $-\operatorname{ctgx} + C.$	e) b) $\ln x^2 + 3x - 10 + C.$ f) 2. a) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3 - 9x)^6} + C;$ b) $-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + C;$ c) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3 + 27} + C.$ 3. a) $\ln e^x + x + C;$ b) $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C;$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]^3} + C.$ 4. a) $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C;$ b) $\ln \sin^2 x + 3 + C;$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{4}{7}\sqrt{\sin^7 x} + \frac{2}{11}\sqrt{\sin^{11} x} + C;$ r) $\ln\left \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right + C$
4. 1. a) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C;$ b) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + C.$ 2. a) $\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C;$ b) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + C.$ 3. a) $\sin x(x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x(4x^3 - 24x) + C;$ b) $\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\ln 1-x^2 + C.$ 4. a) $\frac{\cos 2x + \sin 2x}{4}e^{2x} + C;$	
5. 1. a) $\frac{4x^4\sqrt{x^3}}{7} + C$ b) $-\frac{1}{2x^4} + C$ c) $27x + \frac{27x^4}{4} + \frac{9x^7}{7} + \frac{x^{10}}{10} + C$ ç) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{24}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$ d) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$ e) $\frac{x^2}{2} - 2\operatorname{arctgx} + C$ f) $-\operatorname{ctgx} - x + C$ 2. a) $\frac{2\sqrt{(3x-4)^3}}{9} + C$ b) $-\frac{2}{15\sqrt{(5x-2)^3}} + C$ c) $\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan x\sqrt{\frac{2}{3}} + C$	

$$\zeta) \frac{4}{11} \sqrt[4]{(x+5)^{11}} - \frac{40}{7} \sqrt[4]{(x+5)^7} + 32 \sqrt[4]{(x+5)^3} + C \quad \text{d) } -2x + \ln|x-1| + C$$

$$3. \text{ a) } -\frac{1}{2(1+x^2)} + C \quad \text{b) } \frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3-9x)^6} + C \quad \text{c) } \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{5}} + C$$

$$\zeta) -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C \quad \text{d) } \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C \quad \text{f) } \ln |\sin x| + C$$

$$\text{e) } \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C \quad \text{f) } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$4. \text{ a) } \frac{(x+3)^3}{3} - \frac{3(x+3)^2}{2} + 3(x+3) + \ln|x+3| + C$$

$$\text{b) } \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C \quad \text{c) } -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C$$

$$\zeta) \frac{1}{2 \sin^2 x} + \ln |\cos x| + C$$

$$5. \text{ a) } \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C \quad \text{b) } \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\text{c) } -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C \quad \zeta) -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C$$

$$\text{d) } \sin x (x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x (4x^3 - 24x) + C$$

Njësia modulare 6 – Integrali i caktuar

1.

$$1. \text{ a) } 2 \quad \text{b) } 8 \frac{2}{3} \quad \text{c) } e - 1$$

$$\zeta) 1 \quad \text{d) } 2 \quad \text{e) } \frac{1}{2}$$

$$\text{f) } \frac{2}{3} \quad \text{g) } \frac{3}{5}$$

2.

1.

$$\text{a) } 20 \quad \text{b) } 7$$

$$\text{c) } \frac{1}{10} \quad \zeta) \frac{3}{8}$$

$$\text{d) } \frac{14}{3} \quad \text{e) } 32 \frac{2}{3}$$

	f) 1.61 g) $13\frac{1}{3}$ 2. a) $\ln 2 - \frac{5}{4}$; b) $-\frac{65}{4}$; c) $\ln \frac{3}{2} - 3$; g) $e^4 - e + \frac{14}{3}$. 3. a) 0; b) $\frac{256}{21}$.
3. 1. a) $1+e$ b) $\frac{11e-14}{e^2}$ c) 2 g) $-\frac{3}{e}$ d) 1 dh) $\frac{1}{9}(1+2e^3)$ e) $\frac{2e\sqrt{e}}{9}$ f) $\ln 2 - \frac{1}{2}$ 2. a) 0; b) $\frac{256}{21}$.	4. 1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{32}{3}$ 3. $3-e$ 4. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $\frac{7}{6}$ 7. $e + \frac{1}{e} - 2$.

