Наум Целакоски
Верица Бакева
Боривоје Миладиновиќ
Јово Стефановски

МАТЕМАТИКА

за III година

средно стручно образование

за сите струки

ПРЕДГОВОР

Оваа книга ќе ти помогне при изучувањето на математиката во трета година на средното стручно образование. Биди активен и редовен во работата, а тоа ќе ти помогне самостојно да стекнуваш знаења што ќе ти донесе задоволство и успех во учењето.

Книгата е поделена на четири тематски целини. На почетокот на секоја тема е дадена нејзината содржина од наставните единици.

Воочи ги ознаките на наставните единици и согледај ја нивната порака.

Потсети се! — Наставните единици почнуваат со нешто што ти е познато . Треба да се потсетиш и да ги решиш дадените барања. Тоа ќе ти го олесни изучувањето на нивните содржини.

А , ***Б*** , ... — Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции). Во секој дел е обработен некој нов поим.

1 , **2** , **3** , ... — Со ваквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш на часот самостојно или со помош на твојот наставник.

● Оваа ознака се однесува на прашање на кое треба да дадеш одговор.

■ Кај оваа ознака е дадена информација или објаснување на новиот поим.

Запомни! — Ова те упатува на тоа што е важно за новиот поим. Потруди се тоа да го разбереш и запомниш.

Воочи! — Оваа порака те упатува на што треба да посветиш поголемо внимание.

(1), (2), (3), ... — На крајот на секоја наставна единица се дадени задачи. Со редовно и самостојно решавање на овие задачи подобро ќе го разбереш изученото. Твоите одговори спореди ги со одговорите и решенијата што се дадени на крајот од учебников.

1 — Кај оваа ознака се дадени задачи за самопроверка на темата. Овие задачи решавај ги самостојно и со тоа ќе провериш како си ги постигнал програмските цели.

Кога ќе наидеш на тешкотии при изучувањето на определени содржини, не се откажувај, обиди се повторно, биди упорен.

Ќе нѐ радува ако оваа книга ти овозможи да постигнеш солиден успех.

Од авторите

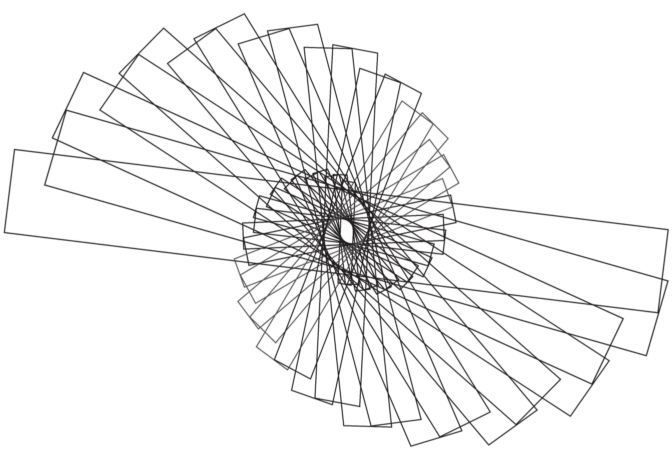
ТЕМА 1

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

За реализација на темата може да се користат апликациите:

- Geogebra (Експоненцијална функција: поим, својства, график)
- KmPlot (Експоненцијална функција: поим, својства, график; Логаритамска функција: поим, својства, график)



1 СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ РЕАЛЕН БРОЈ

Потсети се!

- Бројот 9 може да се запише како
$3 \cdot 3 = 3^2$.
- Дали сите броеви може да се запишуваат како записот на бројот 9?
- За записот 5^3 велиме дека е краток запис на производот $5 \cdot 5 \cdot 5$.
- Напиши краток запис на производот
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

А Овде ќе повториме накратко за тоа што сте учеле порано во врска со поимот степен на број.

Нека a е кој било реален број. Производот $a \cdot a$ кратко го запишуваме со симболот a^2; производот $a \cdot a \cdot a$ со симболот a^3; итн.

- Запиши го кратко производот
$a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$, каде што има n множители.
- Симболот a^n го викаме ***степен*** и претставува краток запис за производ од n исти множители.

- Бројот a се вика ***основа*** на степенот a^n, а n се вика ***степенов показател***, или кусо ***показател*** кој ни покажува колку пати основата се множи сама со себе.
- Степенот a^n има смисла за секој реален број a и секој природен n. Ако $a = 0$, тогаш

$0^n = 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Воопшто, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n} = a^n$, при што $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$.

1 Претстави ги во вид на степен производите:

а) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$; б) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; в) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$; г) $(x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y)$.

2 Претстави ги во вид на производ од еднакви множители степените:

а) 3^1; б) $(-2)^3$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; г) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$.

По дефиниција, степенот на бројот a со показател 1 е самиот тој број, т.е. $a^1 = a$.

На пример: $(-5)^1 = -5$; $(x-1)^1 = x-1$; $(a+b)^1 = a+b$.

3 Пресметај: а) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$; б) $(-3) \cdot (-3)^2$; в) $a^m \cdot a^n$.

Решение. а) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2 = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64 = 2^6$; б) $(-3) \cdot (-3)^2 = (-3) \cdot 9 = -27 = (-3)^3$;

в) $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m}$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}$, $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m+n}$, т.е. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

- Воочи, степени со исти основи се множат така што основата a се препишува, а степеновите показатели се собираат.

4 Ако a и b се кои било реални броеви, а m и n се природни броеви, докажи:

а) $a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n;$ б) $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n};$ в) $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^n;$ г) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m},\ b \neq 0.$

Запомни!

Ако a и b се кои било реални броеви и $m,n \in \mathbb{N}$, тогаш операциите со степение a^m и a^n се изведуваат според следните правила:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n,\ a \neq 0$
- $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$
- $(a\cdot b)^m = a^m b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, b \neq 0$

5 Дали може да се примени правилото за делење на степени со исти основи во изразите:

а) $a^5 : a^5;$ б) $a^3 : a^7,\ (a \neq 0)?$

Решение. Не, зошто со примена на правилото $a^m : a^n = a^{m-n}$ би добиле

а) $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0;$ б) $a^3 : a^7 = a^{3-7} = a^{-4}$, а ознаките a^0 и a^{-4} немаат смисла како степен.

Затоа има потреба од проширување на поимот степен со показател нула и цел негативен број. Бидејќи $a^5 : a^5 = \dfrac{a^5}{a^5} = 1$ и $a^3 : a^7 = \dfrac{a^3}{a^7} = \dfrac{1}{a^4}$, се прифаќа следнава дефиниција

Дефеницијa. $a^0 \overset{def}{=} 1$ и $a^{-n} \overset{def}{=} \dfrac{1}{a^n}$, за секој $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$.

На пример: а) $2^0 = 1;\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1;\ (a+2)^0 = 1, a \neq -2;\ \left(\sqrt{2}\right)^0 = 1.$

б) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9};\ (-5)^{-2} = \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{25};\ (-2a)^{-3} = \dfrac{1}{(-2a)^3} = -\dfrac{1}{8a^3}, a \neq 0.$

6 Покажи дека за $n,m \in \mathbb{Z}^-$ важи $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Решение. Од $m,n \in \mathbb{Z}^-$ следува дека броевите $k = -m$ и $l = -n$ се природни броеви и за нив важи својството $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$. Тогаш: $a^m \cdot a^n = \dfrac{1}{a^{-m}} \cdot \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^k \cdot a^l} = \dfrac{1}{a^{k+l}} = a^{-(k+l)} = a^{-k+(-l)} = a^{m+n}.$

Се покажува дека за степен со показател цел број важат истите правила како за степен со природен показател.

На пример: а) $2^{-3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + (-2)^{-2} = \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2};$

б) $\dfrac{x^{-2}(xy)^3}{(xy)^{-2}y^4} = \dfrac{x^{-2}x^3y^3}{x^{-2}y^{-2}y^4} = x^{-2+3-(-3)} \cdot y^{2-(-2)-4} = x^3 y.$

Б Проширувајќи го поимот степен со показател нула и цел негативен број, покажавме дека за нив важат истите правила коишто важат за степен со показател природен број. Сега ќе извршиме уште едно проширување на поимот степен, воведувајќи степен со показател рационален број, а при тоа проширување треба да важат истите правила како и за степен со показател природен број.

Дефиниција. Ако $a \in \mathbb{R}^+$ и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (каде што $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$), тогаш

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m}.}$$

Притоа $a^{\frac{m}{n}}$ се вика ***степен со рационален показател***.

На пример: а) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$ $\quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8;$ $\quad 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3.$

б) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4;$ $\quad 0,01^{0,5} = 0,01^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,01} = 0,1;$ $\quad 100^{-0,5} = 100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}.$

- Ако $m = 1$, тогаш $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, за $m = -1$: $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$

7 Пресметај: а) $9^{0,5}$; б) $1000^{\frac{1}{3}}$; в) $125^{\frac{1}{3}}$; г) $625^{\frac{1}{4}}$.

- Познато е дека записот на рационален број $\frac{m}{n}$ не е еднозначен. На пример, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \ldots$

  Усвоената дефиниција за степенот $a^{\frac{m}{n}}$ не зависи од тоа со која дропка, еднаква на $\frac{m}{n}$ е запишан рационалниот показател на степенот. Според тоа важи:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}} = \sqrt[nk]{a^{mk}},\ a \in \mathbb{R}^+,\ m \in \mathbb{Z},\ n,k \in \mathbb{N}.}$$

Според тоа:

За секој рационален број $r = \frac{m}{n}$ и секој позитивен реален број a, степенот a^r е еднозначно определен.

На пример: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2,$ а за $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ имаме $8^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$ Значи, $8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2}{6}}$ итн.

- Операциите со степени чии показатели се рационални броеви се изведуваат според истите правила што важат за операциите со степени чии показатели се природни броеви.

За секои $a,b\in\mathbb{R}^+$ и секои $\frac{m}{n},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, каде што $m,p\in\mathbb{Z},\ n,q\in\mathbb{N}$ важи:

$$1^0.\ a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};\qquad 2^0.\ a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};\qquad 3^0.\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot q}};$$

$$4^0.\ (a\cdot b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}};\qquad 5^0.\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

8 Изврши ги назначените операции:

а) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}:x^{-1,5}$; в) $\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}$; г) $\left(x^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Решение. б) $x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}:x^{-1,5}=x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}=x^{\frac{3+2+6}{4}}=x^{\frac{11}{4}}=\sqrt[4]{x^{11}}$;

в) $\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=a^{-1}=\frac{1}{a}$.

9 Изврши ги назначените операции:

а) $x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}:x^{-\frac{1}{2}}$; б) $\left(x^2\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}$; в) $x^{0,5}\cdot(xy)^{\frac{1}{2}}:\left(x^{\frac{2}{3}}y^{0,5}\right)$.

В Познато е дека за секој реален број a можеме да најдеме децимални дропки r_n и s_n, такви што $r_n\le a\le s_n$ и $s_n-r_n=\frac{1}{10^n}$. Броевите r_n се приближуваат со недостиг до бројот a, а броевите s_n се приближуваат со вишок до бројот a, со точност $\frac{1}{10^n}$.

На пример, за бројот $\pi=3,14159...$ приближувањата со точност $0,0001$ се $r_n=3,1415$ и $s_n=3,1416$. Со користење на приближувањата на реалните броеви ќе дојдеме идеја како може да се дефинира степен со показател ирационален број, а притоа да ги запазиме својствата на степените со реални показатели.

Последователните приближувањата r_n и s_n на бројот $\sqrt{2}$ со точност $0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001;\ 0,00001$ и соодветните вредности на 2^{r_n} и 2^{s_n} ќе ги прикажеме во следната табела.

r_n	1	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	$\longrightarrow \sqrt{2}$
s_n	2	1,5	1,42	1,415	1,4143	1,41422	
2^{r_n}	2	2,6390	2,6573	2,6647	2,6651	2,6651	$\longrightarrow 2^{\sqrt{2}}$
2^{s_n}	4	2,8284	2,6758	2,6665	2,6653	2,6651	

Од табелата согледуваме: колку се поточни приближувањата на $\sqrt{2}$ со броевите r_n и s_n, толку се поблиску броевите 2^{r_n} и 2^{s_n}. Значи, се приближуваме кон некој реален број $2^{\sqrt{2}}$.

- Според тоа за секој реален број x (рационален или ирационален) и секој позитивен реален број a, еднозначно е определен степенот a^x.

Запомни!

Ако $a,b\in\mathbb{R}^+$ и $x,y\in\mathbb{R}$, тогаш важат следниве својства:

- $a^x>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$
- $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
- $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$
- $\left(a^x\right)^y=a^{x\cdot y}$
- $\left(a\cdot b\right)^x=a^xb^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$
- Ако $a>1$ и $x<y$, тогаш $a^x<a^y$
- Ако $0<a<1$ и $x<y$, тогаш $a^x>a^y$

На пример: $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}=\left(4^{-1}\right)^{-\sqrt{2}}=4^{(-1)\cdot(-\sqrt{2})}=4^{\sqrt{2}}$; $\quad (2)^{1-\sqrt{3}}\cdot 2^{1+\sqrt{3}}=(2)^{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}=2^2=4.$

10 Спореди ги броевите $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$.

Решение

Бидејќи $\sqrt{3}<1,8,$ тогаш $2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}$, а поради $2^{1,8}=2^{\frac{9}{5}}=\sqrt[5]{2^9}=\sqrt[5]{512}$, следува дека $2^{\sqrt{3}}<\sqrt[5]{512}$.

Од друга страна, пак, $\sqrt{2}>1,4,$ па $3^{\sqrt{2}}>3^{1,4}$, а поради $3^{1,4}=3^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{3^7}=\sqrt[5]{2187}$ следува дека $3^{\sqrt{2}}>\sqrt[5]{2137}$. Најпосле, од $\sqrt[5]{512}<\sqrt[5]{2187}$ заклучуваме дека $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

Задачи

1 Пресметај: а) $\left(\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{4}{3}\right)^0\right)^{-1}$; б) $4^{-\frac{1}{2}}+8^{-\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{4}}$.

2 Спореди ги степените: а) $\sqrt[7]{2^5}$ и $\sqrt[7]{2^6}$;

б) $\sqrt[3]{5^4}$ и $\sqrt[4]{5^7}$; в) $\pi^{\sqrt{2}}$ и $\pi^{\sqrt{3}}$;

г) $3^{\sqrt[3]{6}}$ и $3^{\sqrt[3]{8}}$; д) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

3 Упрости ги изразите: а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{8}}\cdot 4^{\sqrt{2}}\cdot 8^{\sqrt{8}}$;

б) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}}\cdot 4^{\sqrt{12}}$; в) $\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{8}}$.

4 Докажи го идентитетот:

а) $\left(\left(\sqrt[4]{4}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-3\sqrt{8}}=\dfrac{1}{64}$; б) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}}=81.$

2

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА. СВОЈСТВА НА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Вредноста на степенот a^x, $a>0$ е еднозначно определена за секој рационален број x, а исто така е еднозначно определен ако x е ирационален број.
- Значи, степенот a^x, $a>0$ е еднозначно определен за секој реален број x.

А Според досега кажаното, за кој било даден реален број $a>0$, степенот a^x е еднозначно определен за секој реален број x. Тоа ни овозможува да дефинираме едно пресликување

$f: x \to a^x$ или $f(x)=a^x, (a>0, a\neq 1)$

од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$.

Запомни!

Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ зададена со формулата $f(x)=a^x, a>0$ и $a\neq 1$, се вика ***експоненцијална функција*** со основа a.

- Ограничувањето $a>0$ е воведено поради тоа што при услов $a<0$ степенот a^x за некои вредности на показателот x не е реален број. На пример за $a=-9$ и $x=\frac{1}{2}$ имаме $(-9)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-9}=3i\notin\mathbb{R}$.
- Второто ограничување $a\neq 1$ е потребно, бидејќи ако $a=1$, тогаш функција $f(x)=1^x$ $(=1)$ е константна, а константните функции не ги сметаме за експоненцијални.

1 Кои од функциите се експоненцијални:

а) $y=3{,}1^x$; б) $y=x^2$; в) $y=\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)^0\right)^x$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$?

Одговор. Само функциите а) и г) се експоненцијални.

2 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; в) $y=3^x$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Решение. За функциите прво формираме табели, при што за аргументот x даваме цели броеви заради полесно одредување на вредноста на функцијата.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

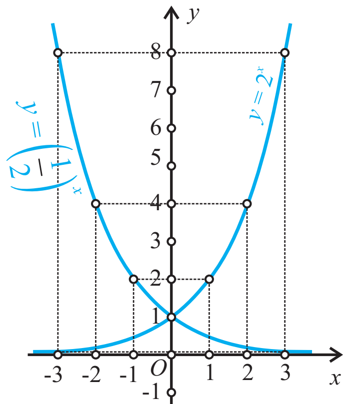
Графиците на функциите а) и б) се прикажани на црт.1, а в) и г) на црт.2.

Да разгледаме некои својства на функцијата $y=2^x$.

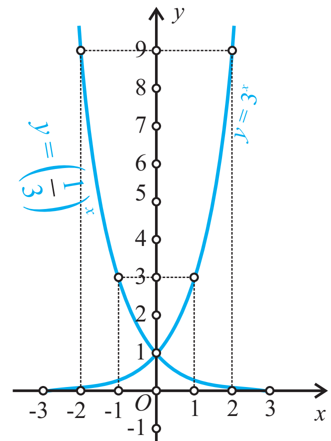
1. Функцијата е дефинирана за сите реални броеви: $D_f=\mathbb{R}$.

2. Вредностите на функцијата се позитивни реални броеви, т.е. $V_f=\mathbb{R}^+$.

3. За $x=0,\ y=a^0=1,$ т.е. графикот минува низ точката $(0,1)$.



црт. 1



црт. 2

Потсети се!

- Функцијата $f(x)$ монотоно расте во доменот D, ако со зголемување на аргументот x се зголемува и вредноста на функцијата, т.е. ако
$$x_1,x_2\in D \text{ и } x_1<x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)<f(x_2).$$
- Функцијата $f(x)$ монотоно опаѓа во D, ако со зголемување на аргументот x се намалува вредноста на функцијата, т.е. ако
$$x_1,x_2\in D \text{ и } x_1<x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)>f(x_2).$$

4. Функцијата $y=2^x$ монотоно расте, бидејќи со зголемување на аргументот x и вредноста на функцијата се зголемува.

Функцијата $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ монотоно опаѓа, бидејќи со зголемување на аргументот x вредноста на функцијата се намалува.

5. Воочи, кога x неограничено се намалува (налево од нулата) вредноста на функцијата останува позитивна и постојано се намалува, меѓутоа нејзината вредност никогаш не може да е еднаква на нула, т.е.ако „x се стреми кон $-\infty$, тогаш 2^x се стреми кон 0”. Ова накратко го запишуваме: ако $x\to-\infty$, тогаш $2^x\to 0$, а ако $x\to+\infty$, тогаш $\left(\frac{1}{2}\right)^x\to 0.$

Графикот на функцијата се доближува до x-оската, но никогаш не ја сече ниту ќе ја допре.

Затоа велиме дека x-оската е ***асимптота*** на кривата $y=2^x$, односно $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Воочи!

- Функциите $y=2^x$ и $y=3^x$, $\left(y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$ имаат исти својства.
- Графиците на функциите $y=a^x$ и $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, $\left(y=2^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\ y=3^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$ се симетрични во однос на y-оската, т.е. ако точката $A(x_1, y_1)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=a^x$, $a>0$, тогаш точката $B(-x_1, y_1)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Б Некои својства на експоненцијалната функција $y=a^x$, $a>0$ и $a\neq 1$.

1. Функцијата е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f=\mathbb{R}$.

2. Множеството вредности на функцијата е $\mathbb{R}^+$, т.е. $V_f=\mathbb{R}^+$. Значи, $y>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Овие својства следуваат од дефиницијата на функцијата.

3. За $x=0$, $y=a^0=1$, т.е. графикот ја сече y-оската во точката $(0,1)$.

4. а) За $a>1$, функцијата a^x монотоно расте, т.е. $x_1, x_2\in D_f$ и $x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$.

б) За $0<a<1$ функцијата a^x монотно опаѓа, т.е. $x_1, x_2\in D_f$ и $x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$.

5. x-оската е асимтота на експоненцијалната функција.

4 Искажи ги својствата на функциите $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (црт. 1) и $y=3^x$ (црт. 2).

Задачи

1 Која од функциите е растечка, а која опаднувачка:

а) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$; в) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{-x}$; г) $y=\left(\frac{1}{0{,}5}\right)^x$?

2 Во ист координатен систем нацртај го графикот на функциите:

а) $y=\left(\frac{1}{0{,}25}\right)^x$ и $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; б) $y=10^x$ и $y=10^{-x}$.

3 Со помош на графикот на функцијата $y=2^x$, нацртај го графикот на функцијата $y=3\cdot 2^x$ и $y=-2^x$.

3

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- $2^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.
- $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$; $3^{x-2} = \dfrac{3^x}{3^2}$.
- $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x$;
  Од $2^x = 3^x \Rightarrow x = 0$.
- $9^x = 3^{2x}$, $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$.
- Функцијата $y = f(x)$ е ***инјективна*** ако за секој $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_1 \neq x_2$, следува $f(x_1) \neq f(x_2)$.

1 Одреди ги нулите на функцијата $y = 2^x - 16$.

- $2^x - 16 = 0$; $2^x = 2^4$; $x = 4$.

Равенка во која непознатата е во експонентот на барем еден степен, чија основа е позитивен реален број различен од 1 се вика ***експоненцијална равенка***.

2 Која од равенките е експоненцијална:
а) $\sqrt{3^x} + 1 = 2^x$; б) $x^{\sqrt{3}} - 1 = 2^{\sqrt{5}}$;
в) $4^x = 2^x - 3$?

Експоненцијалните равенки ќе ги решаваме во множеството на реалните броеви.
За решавање на експоненцијалните равенки не постои општ метод. Некои видови на експоненцијални равенки со примена на идентични трансформации се запишуваат во одреден вид од каде што може да се одреди решението на равенката.

А Експоненцијални равенки кои може да се доведат во следниот вид $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, $a > 0$ и $a \neq 1$, ќе ги решаваме врз основа на монотоност и инјективност на експоненцијалните функции, т.е. со примена на еквиваленцијата $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)$.

3 Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $2^{x-3} = 16$; б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} = \dfrac{16}{81}$; в) $100 \cdot 10^{2x-2} = \sqrt[9]{1000^{x+1}}$; г) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+5}$.

Решение

а)
$$2^{x-3} = 16$$
$$2^{x-3} = 2^4$$
$$x - 3 = 4$$
$$x = 7.$$

б)
$$10^{2+2x-2} = \left(10^3\right)^{\frac{x+1}{9}}$$
$$10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}}$$
$$2x = \frac{x+1}{3}$$
$$x = \frac{1}{5}$$

в)
$$9^{-3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$$
$$3^{-6x} = 3^{-(x+5)}$$
$$-6x = -x - 5$$
$$x = 1.$$

4 Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $\frac{3^{x-1}}{3}=\frac{5^{x-1}}{5}$; б) $\frac{4^x}{4}=\frac{5^{2x-1}}{5}$; в) $2^{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=1$; г) $4^x=2^{\frac{x+1}{x}}$.

Решение

а) $\frac{3^{x-1}}{3}=\frac{5^{x-1}}{5}$

$3^{x-1-1}=5^{x-1-1}$

$x-2=0$

$x=2.$

в) $2^{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=1$

$\frac{x+1}{x}-x-1=0$

$x+1-x^2-x=0$

$x^2=1,\quad x=1$ или $x=-1.$

Б **5** Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^x=21$; б) $3^{x+2}-3^{x-2}=240$; в) $2^{2x+2}-2^{2x+1}-2^{2x}=256$;

г) $2^x+2^{x-1}=3^x$; д) $5^x+5^{x-1}=6^x$.

Решение

а) $3^x\cdot3^2-3^x\cdot3+3^x=21;$

$3^x(9-3+1)=21;$

$3^x=3;$

$x=1;$

г) $2^x+\frac{2^x}{2}=3^x;$

$2^x\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^x;$

$\frac{2^x}{3^x}=\frac{2}{3};\quad x=1;$

Задачи

Реши ги експоненцијалните равенки:

1 а) $2^{x-1}=1024$; б) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,2x}=\frac{64}{125}$; в) $\sqrt[x-1]{a^{x+1}}=\sqrt[x-2]{a^{x+2}}$.

2 а) $5^{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$; б) $3^{x^2-3x+3,5}=27\sqrt{3}$.

3 а) $(2^{x+2})^{x+1}=64$; б) $2^{x+2}\cdot3^{x+2}=36\cdot6^{2x-1}$.

4 а) $4^{x+1}+4^x=320$; б) $5^x+3\cdot5^{x-2}=140$.

5 а) $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-2}-3^{x-3}$; б) $3\cdot4^x+\frac{1}{3}\cdot9^{x+2}=6\cdot4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot9^{x+1}$.

4 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ

Потсети се!

- Равенката од видот $ax^2+bx+c=0$ за $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ е квадратна равенка која се решава според формулата
$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
- Решенијата на квадратната равенка $6x^2-5x-6=0$ се $x_{1/2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}$, т.е. $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=-\dfrac{2}{3}$.
- Равенката $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x}-2$ се сведува на квадратна равенка $2x^2+3x-2=0$ чии решенија се $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-2$.

А **1** Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $7^{2x}-8\cdot 7^x+7=0$; б) $9^x-3^x-6=0$;

в) $3^{4x}-5\cdot 9^x-36=0$.

- Равенките ќе ги решиме со воведување на смена, т.е. ќе ги сведеме на квадратни.

б) $\left(3^x\right)^2-3^x-6=0$. Со смена $3^x=y$ равенката е од видот $y^2-y-6=0$;

$y_{1/2}=\dfrac{1\pm 5}{2}$; $y_1=3$ или $y_2=-2$.

За $y_1=3$ имаме $3^x=3$, па $x=1$. За $y_2=-2$ равенката $3^x=-2$ нема решение. Зошто?

Според тоа равенката има само едно решение $x=1$.

Б **2** Реши ги експоненцијалните равенки кои со соодветна смена се сведуваат на квадратни:

а) $5^x-5^{3-x}=20$; б) $3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$; в) $5^x-5=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^x}$.

Решение

а) $5^x-\dfrac{5^3}{5^x}=20$. Со смена $5^x=y$ равенката е од видот $y-\dfrac{125}{y}=20$ или $y^2-20y-125=0$;

$y_{1/2}=\dfrac{20\pm 30}{2}$; $y_1=25$ или $y_2=-5$. За $y_1=25$ имаме $5^x=25$, па $x=2$. За $y_2=-5$, равенката $5^x=-5$ нема решение.

- Воочи, равенката $a^x=b$, $a>0$ и $b<0$ нема решение.

б) Дадената равенка е еквивалентна со $3\left(\sqrt[x]{9}\right)^2-10\sqrt[x]{9}+3=0$. Со смена $\sqrt[x]{9}=y$, равенката е од видот: $3y^2-10y+3=0$, чии решенија се $y_1=3$ или $y_2=\dfrac{1}{3}$.

За $y=3$ имаме $\sqrt[x]{9}=3$ или $3^{\frac{2}{x}}=3$, т.е. $x=2$. За $y=\dfrac{1}{3}$ имаме $x=-2$.

в) Воведуваме смена $5^x=y$, па добиваме $y-5=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{y}$, т.е. $5y^2-26y+5=0$, од каде што $y_1=5$, $y_2=\dfrac{1}{5}$, т.е. $x_1=1$, $x_2=-1$.

Задачи

Реши ги експоненцијалните равенки:

1 а) $4^x + 7 \cdot 2^x = 44$; б) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$.

2 а) $4^{x-1} = 2^{x+3} - 28$; б) $5 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 4^{x+1} = 32$.

3 а) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$; б) $5^x - 3 = \sqrt{9-5^x}$.

4 а) $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x$.

5 ПОИМ ЗА ЛОГАРИТАМ И ЛОГАРИТМИРАЊЕ

Потсети се!

- $2^5 = x \;\Rightarrow\; x = 32$.
  Вредноста на степенот се одредува со операцијата степенување.
- $x^5 = 32 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[5]{32}$.
  Основата на степенот се одредува со операцијата коренување.

А **1** Одреди го x од равенството:
а) $2^x = 32$; б) $2^x = 7$.

Одговор

а) $2^x = 2^5$ следува $x = 5$.
б) Не постои рационален број кој е решение на равенката.

Одредувањето на степеновиот показател од равенката $a^x = b$ во општ случај во множеството на рационалните броеви не е возможно.
Во претходните лекции рековме дека степенот a^x, $a > 0$ е еднозначно определен во множеството на реалните броеви. Според тоа, равенката

$$a^x = b,\; a > 0,\; a \neq 1 \text{ и } b > 0$$

има единствено решение во множеството на реалните броеви.

- Решението на равенката се вика ***логаритам на бројот*** b ***за основа*** a, а се означува

$$x = \log_a b.$$

- Операцијата со која се одредува вредноста на логаритамот се вика ***логаритмирање***.

Дефиниција. ***Логаритам*** на позитивен реален број b, при основа a $(a \neq 1,\; a > 0)$ е реален број x, со кој треба да се степенува основата a, за да се добие бројот b. Значи:

$$\log_a b = x \overset{def}{\Leftrightarrow} a^x = b,\;\; a > 0,\; a \neq 1,\; b > 0.$$

Од дефиницијата следува $\log_a b = x$ ако и само ако $a^x = b$, т.е. равенствата $\log_a b = x$ и $a^x = b$ се еквивалентни. Во едното равенство застапена е операцијата степенување, а во другото операцијата логаритмирање. Оттука следува точноста на равенството:

$$\log_a\left(a^x\right) = x.$$

Во записот $\log_a b$, a се вика ***основа***, а b-***логаритманд*** или ***нумерус***.

2 Следните равенства запиши ги во логаритамска форма:

а) $3^2 = 9$; б) $2^4 = 16$; в) $2^{-5} = \frac{1}{32}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$.

Одговор

а) $\log_3 9 = 2$; б) $\log_2 16 = 4$; в) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$; г) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$.

Од дефиницијата $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ следува дека логаритам од 0 и кој било негативен број не постои во множеството на реални броеви.

Во понатамошното разгледување ќе сметаме дека логаритмандот е секогаш позитивен и кога тоа не е експлицитно речено.

Ако во равенката $a^x = b$ го замениме x со $\log_a b$, ќе добиеме:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b,}$$

кој се вика ***основен логаритамски идентитет***. Оттука следува дека ***степенувањето е инверзна операција на логаритмирањето***.

Со примена на основниот логаритамски идентитет имаме:

$$2^{\log_2 3} = 3; \qquad 6^{\log_6 5} = 5; \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

3 Пресметај: а) $4^{\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 4}$; в) $2^{1+\log_2 5}$.

Решение

Со примена на основниот логаритамски идентитет и правилата за степенување имаме:

а) $4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^2 = 3^2 = 9$; в) $2^{1+\log_2 5} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 5} = 2 \cdot 5 = 10$.

4 Провери ја точноста на равенствата:

а) $\log_3 27 = 3$; б) $\log_{10} 0,01 = -2$; в) $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$; г) $\log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2}$.

Решение

Со примена на дефиницијата за логаритамот имаме:

а) $\log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$; г) $\log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 8^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5 Пресметај: а) $\log_{10} 100$; б) $\log_6 1$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 64$; г) $\log_a \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$.

Решение

Од дефиницијата имаме:

а) $\log_{10} 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100 = 10^2, \; x = 2,$ т.е. $\log_{10} 100 = 2;$

б) $\log_6 1 = x \Leftrightarrow 6^x = 1, \; x = 0,$ т.е. $\log_6 1 = 0;$

г) $\log_a \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = x \Leftrightarrow a^x = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a^x = a^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a^x = a^{\frac{5}{6}}, \; x = \frac{5}{6}.$

6 Одреди ја основата a, ако:

а) $\log_a 25 = 2;$ б) $\log_a 64 = 3;$ в) $\log_a \sqrt{3} = -\frac{1}{4};$ г) $\log_a \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}.$

Решение

Од дефиницијата имаме: б) $\log_a 64 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a^3 = 4^3, \; a = 4.$

7 Одреди го x од равенството: а) $\log_3 x = 2;$ б) $\log_{2\sqrt{5}} x = 2;$ в) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = 2.$

8 Докажи ги идентитетите:

а) $\log_a a = 1;$ б) $\log_a 1 = 0;$ в) $\log_a a^n = n;$ г) $\log_{a^m} a = \frac{1}{m};$ д) $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}.$

Доказ

а) Нека $\log_a a = x.$ Тогаш $a^x = a, \; x = 1,$ т.е. $\log_a a = 1.$

г) $\log_{a^m} a = x \Leftrightarrow \left(a^m\right)^x = a \Leftrightarrow a^{m\cdot x} = a \Leftrightarrow m \cdot x = 1, \; x = \frac{1}{m},$ т.е. $\log_{a^m} a = \frac{1}{m}.$

Запомни!

Ако $a > 0$ и $a \neq 1,$ тогаш се точни равенствата:

- $\log_a a = 1;$
- $\log_a 1 = 0;$
- $\log_a a^n = n;$
- $\log_{a^m} a = \frac{1}{m};$
- $\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}.$

9 Пресметај ја вредноста на изразот

а) $\log_2 128;$ б) $\log_{\sqrt{10}} 1000;$ в) $\log_{\sqrt{3}} 81;$ г) $2\log_2 8 + \frac{1}{2}\log_3 81.$

Решение

Со примена на претходните равенства имаме: а) $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7;$

в) $\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8;$ г) $2\log_2 8 + \frac{1}{2}\log_3 81 = 2\log_2 2^3 + \frac{1}{2}\log_3 3^4 = 2\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 = 8.$

Задачи

1 Следниве равенства запиши ги во логаритмиска форма:

а) $6^2 = 36$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$; в) $7^0 = 1$; г) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2}$.

2 Пресметај ја вредноста на логаритамот:

а) $\log_4 8$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; в) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\log_{0,1} \sqrt[3]{100}$.

3 Одреди го x од равенката:

а) $\log_2 x = 6$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$; в) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$; г) $\log_{\sqrt{8}} x = -8$.

4 За која основа:

а) логаритам од 64 е 3; б) логаритам од 625 е 4;

в) логаритам од $\frac{1}{256}$ е 8; г) логаритам од $\frac{1}{128}$ е -7?

5 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3\log_5 25 + 2\log_3 27 - \log_2 8$; б) $\log_3 81 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \cdot \log_4 16$.

6 Пресметај: а) $\log_2(\log_2 256)$; б) $\log_4(\log_2 16) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3 27\right)$.

7 Пресметај: а) $2 \cdot 5^{\log_5 4} - 5 \cdot 3^{\log_3 2}$; б) $5^{2+\log_5 6}$; в) $3^{4-\log_3 27}$.

6 ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА. СВОЈСТВА НА ЛОГАРИТАМСКАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Која операција е инверзна на операцијата степенување?
- Ако $2^3 = 8$, колку е $\log_2 8$?
- Ако $y = \log_2 x$, колку е x?
- x - оската е асимптота на функцијата $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- Функцијата $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f : x \in \mathbb{R}$.

А Во претходната лекција рековме дека $\log_a b$, $a > 1$, $a \neq 0$ има смисла за секој позитивен реален број b.

Според тоа, за секоја позитивна вредност на променливата x еднозначно е одреден реален број $\log_a x$.

На тој начин може да се дефинира едно пресликување $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Дефиниција. Функцијата $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ зададена со формулата $f(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$ се вика ***логаритамска функција*** со основа a.

На пример, логаритамски функции се $f\left(x\right) = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

1 Кои од функциите се логаритамски:

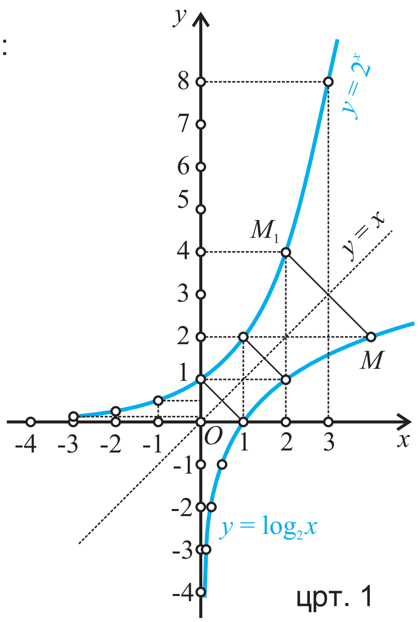
а) $y=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}x;$ б) $y=\log_{0,1}x;$ в) $y=x\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}.$

Одговор. Само функцијата $y=x\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$ не е логаритамска.

2 Нацртај го графикот на функцијата $y=\log_2 x$. Испитај ги својствата на функцијата.

Решение. Функцијата ќе ја претставиме табеларно:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	–3	–2	–1	0	1	2	3



црт. 1

Графикот на функцијата е прикажан на црт.1. Рековме дека операциите степенување и логаритмирање се инверзни меѓу себе. Тоа значи дека на функцијата $y=\log_2 x$ инверзна е функцијата $y=2^x$.

- До инверзната функција доаѓаме врз основа на дефиницијата за логаритамот.

Од $y=\log_2 x$ следува $x=2^y$. Со замена на местата на променливите x и y добиваме функција $y=2^x$ која е инверзна на логаритамската функција.

- Инверзните функции го имаат својството: ако точката $M(x_o, y_o)$ припаѓа на графикот на едната функција, тогаш точката $M_1(y_o, x_o)$ припаѓа на графикот на другата, инверзна, функција.

- Графиците на инверзните функции се симетрични една на друга во однос на симетралата на I и III квадрант, т.е. во однос на правата $y=x$ (црт. 1).

Б Некои својства на функцијата $y=\log_2 x$.

- Од дефиницијата на логаритамската функција следува:

1. $D_f=\mathbb{R}^+$, т.е. $x\in(0,+\infty)$. **2.** $V_f=\mathbb{R}$, т.е. $x\in(-\infty,+\infty)$.

3. За $x=1$, $y=\log_2 1=0$, графикот ја сече x-оската во точката $(1, 0)$, т.е. $x=1$ е нула на логаритамската функција.

- Дали графикот ја сече y-оската? Зошто?

4. Знак на функцијата: $y > 0$ за $x \in (1, +\infty)$, а $y < 0$ за $x \in (0, 1)$.

5. Функцијата $y = \log_2 x$ монотоно расте.

6. y-оската е асимптота на кривата.

3 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ и на $y = \log_3 x$. Испитај ги нивните својства.

Решение. Функциите $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ се заемно инверзни, а тоа значи ако точката $A(x_o, y_o)$ припаѓа на графикот на едната функција, тогаш точката $A_1(y_o, x_o)$ припаѓа на графикот на инверзната функција.

Табела за функцијата $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Табелата на инверзната функцијата $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ е:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	-2	-1	0	1	2

■ Функциите $y = 3^x$ и $y = \log_3 x$ се заемно инверзни.

Табела за функцијата $y = 3^x$

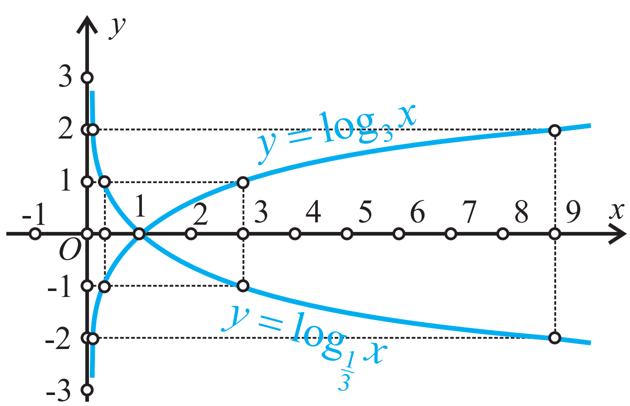
x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Табела за функцијата $y = \log_3 x$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$	-2	-1	0	1	2

● Разгледај ги табелите на инверзните функции. Што заклучуваш?

Графиците на функциите $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ се претставени на црт. 2.



црт. 2

■ Својства на функцијата $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ се:

1. $D_f = (0, +\infty)$.

2. $V_f = (-\infty, +\infty)$.

3. $x = 1$ е нула на функцијата, т.е. ако $x = 1$, тогаш $y = 0$.

4. $y > 0$ за $x \in (0,\ 1)$; $y < 0$ за $x \in (1,\ +\infty)$.

5. Функцијата монотоно опаѓа.

6. y-оската е асимптотата на графикот на функцијата, т.е. ако $x \to 0$, тогаш $\log_{\frac{1}{3}} x \to +\infty$.

● Искажи ги својствата на функцијата $y = \log_3 x$.

Воочи!

Графикот на функциите $y=\log_a x$ и $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ се симетрични во однос на x-оската, т.е. ако точката $M(x_o, y_o)$ припаѓа на функцијата $y=\log_a x$, тогаш точката $M_1(x_o, -y_o)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=\log_{\frac{1}{a}} x$.

B Некои својства на логаритамската функција $y=\log_a x$ се:

1. $D_f=\mathbb{R}^+$;

2. $V_f=\mathbb{R}$;

3. $x=1$ е нула на функцијата, т.е. графикот ја сече x-оската во точката $(1, 0)$.

4. Знак на функција:
за $a>1$, $y>0$ за $x\in(1,\infty)$, $y<0$ за $x\in(0, 1)$.
за $0<a<1$, $y>0$ за $x\in(0, 1)$, $y<0$ за $x\in(1,\infty)$.

5. За $a>1$ функцијата монотоно расте. За $0<a<1$ функцијата монотоно опаѓа.

6. y-оската е асимптота на функцијата.

4 Одреди ја дефиниционата област на функциите:

а) $y=\log_2(2x-3)$; б) $y=\log_4(3x-x^2)$; в) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4)$.

Решение

а) $2x-3>0,\ x>\frac{3}{2}$, т.е. $x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$; б) $3x-x^2>0,\ x(3-x)>0;\ x\in(0,3)$.

5 Кој број е поголем: а) $\log_3 5$ или $\log_3 7$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ или $\log_{\frac{1}{2}}\pi$?

Решение

а) Функцијата $y=\log_3 x$, монотоно расте, па од $x_1<x_2$ следува $\log_3 x_1<\log_3 x_2$. Бидејќи $5<7$, следува $\log_3 5<\log_3 7$.

6 Одреди меѓу кои цели броеви се наоѓа: а) $\log_{\frac{1}{2}} 15$; б) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{5}$; в) $\log_5 35$.

Решение

а) Бидејќи $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16,$ од $\log_{\frac{1}{2}}16<\log_{\frac{1}{2}}8,$

значи $-4<\log_{\frac{1}{2}}15<-3.$

в) Бидејќи $5^0=1,\ \ 5^2=25,\ \ 5^3=125,$ значи $\log_5 25<\log_3 125,$ т.е. $2<\log_5 35<3.$

Задачи

1 Нацртај го графикот на функцијата и испитај ги нејзините својства:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x;$; б) $y=\log_3 x;$ в) $y=\log_{10} x.$

2 Одреди ја дефиниционата област на функциите:

а) $y=\log_2(-x);$ б) $y=\log_2(1-x);$ в) $y=\log_3(x^2-4);$ г) $y=\log_3(x^2-3x-4).$

3 Кои од функциите се растечки: а) $y=\log_{0,1}x;$ б) $y=\log_4 x;$ в) $y=\log_{\sqrt{3}}x$?

4 Користејќи ги својствата на логаритамската функција, одреди кој број е поголем:

а) $\log_2 3$ или $\log_2\sqrt{2};$ б) $\log_3\frac{1}{5}$ или $\log_3 0,5;$

в) $\log_2\sqrt{3}$ или $\log_2\pi;$ г) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{9}$ или $\log_{\frac{1}{5}}\frac{3}{13}.$

5 Одреди кој од броевите a или b е поголем, ако:

а) $\log_3 a>\log_3 b;$ б) $\log_{\frac{1}{3}} a>\log_{\frac{1}{3}} b;$ в) $\log_{\sqrt{2}} a>\log_{\sqrt{2}} b;$ г) $\log_{0,2}a<\log_{0,2}b.$

6 За кои вредности на a се точни неравенствата:

а) $\log_a 7<\log_a 3;$ б) $\log_a 2,5>\log_a 1,5;$ в) $\log_a\frac{1}{2}>\log_a\frac{1}{3}$?

7 Одреди меѓу кои цели броеви се логаритмите:

а) $\log_2 3;$ б) $\log_2 9;$ в) $\log_{\frac{1}{2}}7;$ г) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}.$

7 ОСНОВНИ ПРАВИЛА ЗА ЛОГАРИТМИРАЊЕ

Операцијата логаритмирање има некои својства што ги нема ниту една друга операција. Тие својства се однесуваат на логаритмирање на алгебарските изрази.
Логаритмирањето на изразите го вршиме според следните правила (теореми):

А

Теорема 1. Логаритамот на производ од два позитивни броја со основа a е еднаков на збирот од нивните логаритми при истата основа, т.е.

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N, \text{ за } a > 0,\ a \neq 1 \text{ и } M, N > 0.$$

Доказот ќе го изведеме на два начини:

Прв начин. Според основниот логаритамски идентитет имаме $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$.
Оттука следува дека

$$M \cdot N = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}.$$

Според дефиницијата за логаритам имаме:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

Втор начин. Нека $m = \log_a M$ и $n = \log_a N$. Оттука следува:

$$M = a^m, \text{а } N = a^n, \text{ па}$$

$$M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ т.е. } \log_a(M \cdot N) = \log_a a^{m+n} = m + n = \log_a M + \log_a N.$$

- Оваа теорема важи и за повеќе од два множители, т.е.

$$\log_a\left(M \cdot N \cdot P \cdot Q\right) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \log_a Q.$$

Теорема 2. Логаритамот на количникот од два позитивни броја со основа a е еднаков на разликата од логаритмите на деленикот и делителот, т.е.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \ a > 0,\ a \neq 1 \text{ и } M > 0,\ N > 0.$$

Доказ. Нека $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$. Со делење на соодветните страни на равенствата имаме:

$$\frac{M}{N} = \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = a^{\log_a M - \log_a N}.$$

- Според дефиницијата на логаритамот имаме $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$
- Правилата за логаритмирање важат при која било основа што е позитивен број и различна од еден, па од тие причини при логаритмирањето на изразите основата не ја запишуваме.

1 Логаритмирај ги изразите: а) $x = 2ab$, б) $x = \frac{2a}{b}$; в) $x = \frac{4abc}{3pq}$.

Решение

- в) $\log x = \log 4abc$ - $\log 3pq = \log 4 + \log a + \log b + \log c$ - $(\log 3 + \log p + \log q)$.

Теорема 3. Логаритамот на степен на позитивен број е еднаков на производот од показателот на степенот и логаритамот на неговата основа, т.е.

$$\log_a M^n = n \cdot \log_a M,\ a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0,\ n \in \mathbb{R}.$$

Доказ. Ако $M > 0$, тогаш $M = a^{\log_a M}$. Со степенување на равенството со n добиваме

$M^n = \left(a^{\log_a M}\right)^n = a^{n\log_a M}$, т.е. $\log_a M^n = \log_a a^{n\cdot\log_a M} = n\cdot\log_a M$.

Последица. $\log_a \sqrt[m]{M^n} = \log_a M^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\log_a M$.

2 Логаритмирај ги изразите: а) $x = 3a^3b$; б) $x = \sqrt[3]{a^2b}$; в) $x = \dfrac{2a\sqrt[3]{3ab}}{3b^2c}$; г) $x = \sqrt{\dfrac{2ab^2}{3xy^3}}$.

Решение

в) $\log x = \log 2a\sqrt{3ab} - \log 3b^2c = \log 2 + \log a + \dfrac{1}{3}(\log 3 + \log a + \log b) - \log 3 - 2\log b - \log c =$

$= \log 2 + \left(\dfrac{1}{3} - 1\right)\log 3 + \left(1 + \dfrac{1}{3}\right)\log a + \left(\dfrac{1}{3} - 2\right)\log b - \log c = \log 2 - \dfrac{2}{3}\log 3 + \dfrac{4}{3}\log a - \dfrac{5}{3}\log b - \log c.$

Б **3** Одреди го x од равенството $\log_a x = 3\log_a 2 - \log_a 4$.

Решение

- $\log_a x = \log_a 2^3 - \log_a 4$ или $\log_a x = \log_a \dfrac{8}{4}$, т.е. $\log_a x = \log_a 2$. Користејќи го својството $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, следува дека $x = 2$.

За решавање на задачи од типот на претходната, користи ги правилата (формулите):

$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$	$\log_a M - \log_a N = \log_a \dfrac{M}{N}$
$n\log_a M = \log_a M^n$	$\dfrac{m}{n}\log_a M = \log_a \sqrt[n]{M^m}$

- Одредувањето на изразот ако е даден неговиот логаритам се вика ***антилогаритмирање***.

4 Одреди го x од равенствата:

а) $\log x = 2\log b + 3\log a$;

б) $\log x = 2\log a - 5\log b - 3\log c$;

в) $\log x = \dfrac{3}{2}\log b - \dfrac{2\log a}{3}$;

г) $\log x = \log a + \dfrac{1}{2}\left[\log(a+b) - \dfrac{1}{3}\log(a-b) + 2\log c\right]$.

Решение

б) $\log x = \log a^2 - \log b^5 - \log c^3 = \log \frac{a^2}{b^5 \cdot c^3}$, па $x = \frac{a^2}{b^5 \cdot c^3}$;

г) $\log x = \log a + \frac{1}{2}\log \frac{(a+b)}{\sqrt[3]{a-b}} \cdot c^2 = \log a + \log \sqrt{\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}} = \log a \cdot \sqrt{\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}}$, па $x = ac \cdot \sqrt{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a-b}}}$.

Задачи

1 Ако се знае дека $\log_{10} 3 \approx 0{,}47712$, а $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$, пресметај: а) $\log_{10} 6$; б) $\log_{10} 12$; в) $\log_{10} 648$.

Логаритмирај ги следниве изрази:

2 а) $x = 5a^2b^3$; б) $x = \frac{8a^2b^3}{5c}$; в) $x = \frac{a^2+2}{b-3}$.

3 а) $x = a\sqrt{a}$; б) $x = \frac{a^2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b^2}}$; в) $x = \frac{8a^4\sqrt{b}}{b^2\sqrt[3]{a}}$.

4 а) $x = 2(a+b)^3$; б) $x = 8a^3(a-b)^2$; в) $x = \frac{2(a+1)^2}{a^2-4}$.

5 а) $x = a\sqrt{a\sqrt{a}}$; б) $x = \frac{2a^2b\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$.

6 а) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; б) $x = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{5(a-b)^2}}$.

Одреди го x ако неговиот логаритам е:

7 $\log x = 2\log m + 4\log n - 3\log a - 5\log b$.

8 $\log x = \log 5 + 2\log 4 - \log 8 - 3\log n - 2\log m$.

9 $\log x = \frac{2}{3}\log(a-2b) - \frac{1}{3}\log(a+2b)$.

10 $\log x = 2\log(a+b) - \frac{2}{3}\log(a-b) + 2\log a$.

11 Пресметај: а) $\log_6 4 + \log_6 9$; б) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; в) $\log_{10} 500 - \log_{10} 5$; г) $\log_5 \frac{1}{4} - \log_5 0{,}01$.

8 ВРСКА МЕЃУ ЛОГАРИТМИТЕ ПРИ РАЗЛИЧНИ ОСНОВИ

Потсети се!

- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a \neq 1$ и $a > 0$.
- Кој број е поголем:

а) $\log_7 13$ или $\log_7 15$;

б) $\log_8 100$ или $\log_2 5$?

А **1** Со кој број треба да се помножи $\log_3 x$ за да се добие $\log_5 x$.

Решение

- Од основниот логаритамски идентитет имаме $3^{\log_3 x} = x$. Со логаритмирање на изразот со основа 5 ќе добиеме:

$$\log_5\left(3^{\log_3 x}\right) = \log_5 x.$$

Со примена на правилото за логаритам на степен имаме $\log_3 x \cdot \log_5 3 = \log_5 x$. Значи, бараниот број е $\log_5 3$.

Одредувањето на бараниот множител ни го овозможува следнава

Теорема. $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ за $\begin{cases} a > 0 \text{ и } a \neq 1 \\ c > 0,\ c \neq 1 \text{ и } x > 0. \end{cases}$

Теоремата претставува формула за премин на логаритамот со една основа во логаритам со друга основа.

***Доказ*:** Ако основниот логаритамски идентитет $a^{\log_a x} = x$ го логаритмираме при основа c имаме

$\log_c \left(a^{\log_a x} \right) = \log_c x$, т.е. $\log_a x \cdot \log_c a = \log_c x$ или $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}$.

Воочи!

$\log_a x = \dfrac{1}{\log_c a} \cdot \log_c x = m \cdot \log_c x$, каде што $m = \dfrac{1}{\log_c a}$ е константа која не зависи од x.

2 Пресметај без калкулатор:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$; б) $\log_5 3 \cdot \log_3 25$; в) $\log_3 8 \cdot \log_4 81$; г) $\dfrac{\log_2 7}{\log_4 7}$.

Решение

Со примена на претходната теорема, премин на друга основа, во овој случај нека $c = 5$, имаме: а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 2} \cdot \dfrac{\log_5 4}{\log_5 3} = \dfrac{\log_5 2^2}{\log_5 2} = \dfrac{2\log_5 2}{\log_5 2} = 2.$

3 Докажи ги идентитетите:

а) $\log_c x = \dfrac{1}{\log_x c}$, $c, x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; б) $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x$; в) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$.

Решение

а) $\log_c x = \dfrac{\log_x x}{\log_x c} = \dfrac{1}{\log_x c}$; б) $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{\log_x a^n} = \dfrac{1}{n} \log_a x$;

в) $\log_{a^n} x^n = \dfrac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \dfrac{n \log_a x}{n \log_a a} = \log_a x.$

4 Докажи дека вредноста на дропката: а) $\dfrac{\log_x 2}{\log_x 3}$; б) $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$; в) $\dfrac{\log_5 x}{\log_4 x}$ не зависи од x $(x > 0,\ x \neq 1)$.

Решение

а) $\dfrac{\log_x 2}{\log_x 3} = \dfrac{\dfrac{\log_3 2}{\log_3 x}}{\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}} = \log_3 2.$

До исто тврдење ќе дојдеш ако основата на премин е кој било позитивен број.

5 Пресметај: а) $\log_2 \sqrt[3]{a}$, ако $\log_a 8 = b$; б) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, ако $\log_a 9 = b$;

в) $\log_{90} 120$, ако $\log_5 2 = a$ и $\log_5 3 = b$; г) $\log_{30} 8$, ако $\log_{10} 2 = a$ и $\log_{10} 3 = b$.

Решение

б) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \log_3 a = \frac{1}{3} \log_{3^2} a^2 = \frac{2}{3} \log_9 a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_a 9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{b} = \frac{2}{3b}$;

г) $\log_{30} 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 30} = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 10 \cdot 3} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 10 + \log_{10} 3} = \frac{3 \log_{10} 2}{1+b} = \frac{3a}{1+b}$.

Б Воочи во досегашниото разгледување видовме дека основата на логаритамот може да биде кој било позитивен реален број различен од еден.

Дефиниција. Множеството на логаритмите на сите позитивни реални броеви при една иста основа a $(a > 0, a \neq 1)$ се вика ***логаритамски систем при основа а***.

- Во математиката најчесто се употребуваат два логаритамски системи:

1. ***Декаден (Бригсов)*** логаритамски систем, кој го сочинуваат логаритмите на сите позитивни броеви со основа 10 (десет), го означуваме $\log_{10} x = \lg x$.

2. ***Природен (Неперов)*** логаритамски систем чија основа е ирационалниот број $e \approx 2{,}71828...$ се означува $\log_e x = \ln x$.

Во елементарната математика се користи декадниот, додека во вишата математика и техничките науки се користи Неперовиот логаритамски систем.

6 Одреди ја врската меѓу декадниот и природниот логаритам за ист позитивен број x.

- Во формулата $\log_a x = \frac{1}{\log_c a} \cdot \log_c x$ заменуваме $a = e, c = 10$ па добиваме $\ln x = \frac{1}{\lg e} \cdot \lg x$, т.е. $\lg x = \lg e \cdot \ln x$.

Задачи

1 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\log_2 3 \cdot \log_9 16$; б) $\log_2 \sqrt{5} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$; в) $\lg 56$, ако $\lg 2 = a$, а $\lg 7 = b$.

2 Пресметај:

а) $\log_3 8 \cdot \log_4 81$; б) $\frac{\log_3 \sqrt{5}}{\log_{27} \sqrt{5}}$; в) $\log_{35} 28$, ако $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

3 Докажи го равенството

а) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 = 1$;

б) $\log_3 12 = 1 + \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_3 6$.

4 Докажи дека:

а) $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = 0$; б) $3\log_b a + 2\log_b \frac{1}{a} = \log_b a$.

9

ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Кои равенки ги дефинираме како експоненцијални?
- Одреди го x од равенството $\lg_3 x = 2$.

■ Ако M и N се позитивни броеви, тогаш за нив важат следниве формули:

$$\log_a M + \log_a N = \log_a M \cdot N$$

$$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$n \log_a M = \log_a M^n$$

$$\frac{m}{n} \log_a M = \log_a \sqrt[n]{M^m}; \ a > 0, a \neq 1; \ m, n \in \mathbb{N}.$$

А Равенките во кои непознатата се наоѓа во логаритмандот или во основата на барем еден логаритам се викаат ***логаритамски равенки***.

Такви се равенките: $\lg\left(x^2+1\right) = 2$, $\lg_x 9 = \frac{1}{2}$, $\lg_{\frac{1}{2}}(x-3) = 1$ и $\lg_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+3\right) = 1$.

1 Кои од следниве равенки се логаритамски:

а) $\lg(x+2) - \lg(x-1) = \lg 3$;

б) $\log_{\frac{1}{5}} 5 = x$; в) $\log_5 x = 3$;

г) $x^2 - (1+\lg 7)\cdot x = \lg 7$; д) $x^{3-\log x} = 100$?

Одговор. Логаритамски равенки се а), в) и д).

■ Логаритамските равенки исто како и експоненцијалните ќе ги решаваме во множеството на реалните броеви. За решавањето на логаритамските равенки не постои општ метод, па затоа ќе решаваме само некои видови логаритамски равенки.

■ При решавање на логаритамските равенки ќе ги користиме правилата за логаритмирање и својствата на логаритамската функција.

Запомни!

Решение на логаритамска равенка е реален број за којшто равенката преминува во точно бројно равенство, при што логаритмандот и основата на логаритамот за тој број се позитивни броеви.

Б **2** Реши ги равенките:

а) $\log_2(x-3) = 3$; б) $\log_3\left(x^2-2x+6\right) = 2$; в) $\log_{x-2}(2x-1) = 2$.

Решение

■ Равенките од видот $\log_a(f(x)) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) > 0$ се решаваат со примена на дефиницијата за логаритам, т.е. се решава равенката $f(x) = a^b$.

а) $\log_2(x-3) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x-3$, $x = 11$. За $x = 11$ логаритмандот $x-3 = 11-3 = 8 > 0$, значи $x = 11$ е решение на равенката.

в) Решението на равенката треба да го задоволува ограничувањето:

$$x-2>0,\quad x-2\neq 1,\quad 2x-1>0,\quad \text{т.е.}\quad x>2 \quad \text{и} \quad x\neq 3.$$

Со примена на дефиницијата за логаритам имаме:

$$2x-1=(x-2)^2;\quad x^2-4x+4-2x+1=0;\quad x^2-6x+5=0.$$

Решенијата на оваа равенка се $x_1=5$ или $x_2=1$, од кои само $x=5$ го задоволува ограничувањето. Значи $x=5$ е решение на дадената равенка.

Воопшто равенката од видот $\log_{g(x)}(f(x))=h(x)$ е еквивалентна со конјункцијата

$$f(x)=(g(x))^{h(x)} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1. \end{cases}$$

Често пати решавањето на системот неравенки $f(x)>0$, $g(x)>0$ и $g(x)\neq 1$, т.е. одредување на дефиниционото множество D на логаритамската равенка не е едноставно. Од тие причини равенката може да се решава и без одредување на множеството D, но во тој случај задолжително се утврдува кои од решенијата ги задоволуваат условите на ограничувањата, т.е. се проверува кои се решенијата на дадената равенка.

3 Реши ги равенките:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=-2;$ б) $\log(x^2-5x+15)=2;$ в) $\log_{(x+2)}(2x+12)=2.$

Задачи

Реши ги логаритамските равенки:

1 а) $\log_{\frac{1}{2}} x=2;$ б) $\log_2(x+1)=\frac{1}{2}.$

2 а) $\log_2(2x-1)=3;$ б) $\lg(x^2-5x+3)=0,47712.$

3 а) $\log_{x+5}(3x-5)=1;$ б) $\log_{x-2}(x^3-56)=3.$

4 а) $\log_2(\log_3 x)=1;$ б) $\log_3(\log_5(x-1))=0.$

10 ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ ШТО СЕ РЕШАВААТ СО АНТИЛОГАРИТМИРАЊЕ

Потсети се!

- $2\log x=\log x^2$
- $\log x+\log y=\log x\cdot y$
- $\log x-\log y=\log\frac{x}{y}$

А Логаритамските равенки кои со идентични трансформации можат да се доведат во равенка од видот

$$\log_a(f(x))=\log_a(\varphi(x)),\quad a>0,\quad a\neq 1,$$

која има смисла за оние вредности на x за кои $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$. Равенката се решава со користење на еквиваленцијата

$$\log_a(f(x))=\log_a(\varphi(x))\Leftrightarrow f(x)=\varphi(x).$$

1 Одреди го решението на логаритамските равенки:

а) $\lg(2x-3)-\lg(x+2)=\lg 3-\lg 2$; б) $\lg(4x+5)=2\lg(x+2)$.

Решение

а) Од $2x-3>0$ и $x+2>0$ следува $x>\frac{3}{2}$ и $x>-2$, т.е. дефиниционото множество D на равенката е $D=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

Со примена на правила за антилогаритмирање имаме $\lg\frac{2x-3}{x+2}=\lg\frac{3}{2}$, т.е. $\frac{2x-3}{x+2}=\frac{3}{2}$, па $x=12$. Бидејќи $12\in D$, $x=12$ е решение на дадената равенка.

б) Од $4x+5>0$ и $x+2>0$ следува дека $x>-\frac{5}{4}$ и $x>-2$, т.е. дефиниционото множество D на равенката е $\left(-\frac{5}{4},+\infty\right)$. Со примана на правилата за антилогаритмирање добиваме $(x+2)^2=4x+5\Leftrightarrow x^2=1$, т.е. $x_1=1$, $x_2=-1$, а притоа $x_1,x_2\in D$.

2 Реши ја равенката: а) $\log(x-7)=-\log 3$; б) $\log(35-x^3)=3\log(5-x)$.

Б **3** Реши ја логаритамската равенка:

а) $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$; б) $\log(x+2)+\log(x-2)=2-\log 4$.

Решение

Од $x+14>0$ и $x+2>0$ следува дека дефиниционото множество е $D=(-2,+\infty)$.

Со примана на правилата за антилогаритмирање добиваме $\log_2(x+14)(x+2)=6$, односно $(x+14)(x+2)=2^6$, т.е. $x^2+16x-36=0$, од каде што $x_1=18\in D$, $x_2=-2\notin D$.

4 Реши ги равенките:

а) $\log(x-9)+2\log\sqrt{2x-1}=2$; б) $\log\sqrt{2x-3}+\log\sqrt{x-5}=\log 30-1$.

Задачи

Реши ги логаритамските равенки:

1. а) $\log(x+5)=\log(x^2+5)$; б) $\log x^2-\log x^3=\log 27$.
2. а) $\lg(x+2)-\lg(x-1)=\lg 3$; б) $\lg\sqrt{x+6}+\frac{1}{2}\lg(x+1)=\lg 6$.
3. а) $2\lg(x+3)+\lg x^2=2$; б) $\log_2(x+1)+\log_2(3x-1)=5$.
4. а) $\lg(x+3)-\lg(x-2)=2-\lg 20$; б) $\lg(\log_4(x^2-5))=0$.

11

ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ ШТО СЕ РЕШАВААТ СО ВОВЕДУВАЊЕ НА НОВА ПРОМЕНЛИВА

Потсети се!

- $\log_7 3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 7}$; $\log_2 x = \dfrac{1}{\log_x 2}$.
- Од $x^3 = y$ по логаритмирањето добиваме $3\lg x = \lg y$.
- Од $x^{\lg x} = 10$ по логаритмирањето со основа 10 добиваме $\lg x \cdot \lg x = \lg 10$.

А Логаритамски равенки кои со идентични трансформации може се доведат во равенка од видот

$$F\left(\log_a\left(f\left(x\right)\right)\right) = 0, \quad a \neq 1, \ a > 0$$

се решаваат со воведување на смена.

1 Реши ја равенката:

а) $\lg^2(x) - 5\lg x - 6 = 0$;

б) $5\lg x + \dfrac{2}{\lg x} = 7$.

Решение

а) $D = (0, +\infty)$, а бидејќи $\lg^2 x = (\lg x)^2$ со смената $\lg x = t$ се добива равенката $t^2 - 5t - 6 = 0$ чии решенија се $t_1 = 6$, $t_2 = -1$. За $t_1 = 6$ следува дека $\lg x = 6$, па $x = 10^6$, а за $t_2 = -1$ следува дека $\lg x = -1$, па $\lg x = -1$, $x = 10^{-1}$.

б) Од $x > 0$ и $\lg x \neq 0$, т.е. $x \neq 1$ следува $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, а по смената $\lg x = t$ ја добиваме равенката $5t^2 - 7t + 2 = 0$, од каде што $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{2}{5}$. Значи, $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{\frac{2}{5}}$.

2 Реши ја равенката: а) $4 - \lg x = 3 \cdot \sqrt{\lg x}$; б) $\lg x - \dfrac{12}{\lg x + 1} = 0$.

Б **3** Реши ја равенката: а) $\log_5 x + \log_x 5 = \dfrac{5}{2}$; б) $x^{\lg x - 1} = 100$.

Решение

а) Од $x > 0$ и $x \neq 1$ следува дека $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$, од својството $\log_x 5 = \dfrac{1}{\log_5 x}$ имаме $\log_5 x + \dfrac{1}{\log_5 x} = \dfrac{5}{2}$. Со смената $\log_5 x = y$ добиваме $y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}$, т.е. $2y^2 - 5y + 2 = 0$, од каде што $y_1 = 2$, $y_2 = \dfrac{1}{2}$. Од $\log_5 x = 2$ добиваме $x_1 = 25$, а од $\log_5 x = \dfrac{1}{2}$ добиваме $x_2 = \sqrt{5}$.

- Равенката може да ја решиме и ако поминеме во логаритам со основа c, $c > 0$ и $c \neq 1$, т.е. $\dfrac{\log_c x}{\log_c 5} + \dfrac{\log_c 5}{\log_c x} = \dfrac{5}{2}$. Воведуваме сме $\log_c x = y$ и $\log_c 5 = m$ и добиваме

$\frac{y}{m}+\frac{m}{y}=\frac{5}{2}$, т.е. $2y^2-5my+2m=0$, од каде што $y_1=2m$, $y_2=\frac{m}{2}$.

Од $\log_c x=2\log_c 5$ добиваме $x_1=25$, а од $\log_c x=\frac{\log_c 5}{2}$ добиваме $x_1=\sqrt{5}$.

- Равенките во кои непознатата се наоѓа во основата и експонентот ќе ги решиме со логаритмирање.

б) Од $x^{\log x-1}=100$, $x>0$ по логаритмирањето со основа 10 имаме $(\lg x-1)\lg x=\lg 100$.

Нека $\lg x=y$. Тогаш имаме $(y-1)y=2$, т.е. $y^2-y-2=0$, од каде што $y_1=2$, $y_1=-1$, па $x_1=10^2=100$, $x_2=10^{-1}=\frac{1}{10}$.

4 Реши ја равенката: а) $\log_2 x+\log_x 2=2,5$; б) $x^{\log x}=100x$.

Задачи

Реши ги равенките:

1 а) $(2-\lg x)(1-2\lg x)+1=0$; б) $\frac{2}{2+\lg x}+\frac{1}{4\lg x}=1$.

2 а) $\log_7 x-6\log_x 7+1=0$; б) $0,1\cdot x^{\lg x-2}=100$.

12 ЛОГАРИТАМСКО-ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Во логаритмандот на даден логаритамски израз може да има и степен во чиј експонент се наоѓа x.
Пример. $\log_3(2^x-5)$.
- Може во степеновиот показател да има логаритам со непознат логаритманд.
Пример. $3^{2\lg x-4}$.

A **1** Реши ја дадената равенка:

а) $\log_3(2^x-7)=2$;

б) $\log_{2\sqrt{5}}(4^x+2^x)=2$.

- Дадените равенки се познати по името логаритамско-експоненцијални равенки.

Решение

а) Дефиниционото множество на равенката е $2^x-7>0$, т.е. $2^x>7$ или $x>\log_2 7$, па имаме: $2^x-7=3^2$, $2^x=16$, т.е. $x=4$.

б) $4^x+2^x>0$ за секој реален број, значи $D=\mathbb{R}$. Со примената на дефиницијата за логаритам имаме $4^x+2^x=(2\sqrt{5})^2$, па со смената $2^x=y$ добиваме $y^2+y-20=0$, од каде што $y_1=-5$, $y_2=4$. Равенката $2^x=-5$ нема решение, а од $2^x=4$ следува дека $x=2$, значи решение на равенката е $x=2$.

2 Реши ја логаритамско-експоненцијалната равенка:

а) $\log_2(9-2^x)=3-x$; б) $\log_{2\sqrt{3}}(4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}})=2$.

Б **3** Реши ја равенката: а) $3^{2\lg x-4}=3\sqrt{3}$; б) $3^{\lg x+1}+12\cdot 3^{-\lg x}=13$.

Решение. а) Равенката е дефинирана за $x>0$, таа се сведува на $3^{2\lg x-4}=3^{\frac{3}{2}}$, $2\lg x-4=\frac{3}{2}$, т.е. $\lg x=\frac{11}{4}$. Оттука следува дека $x=10^{\frac{11}{4}}$.

б) $D=\mathbb{R}^+$, равенката се сведува на $3^{\lg x+1}+\frac{12}{3^{\lg x}}=13$, па со смената $3^{\lg x}=y$ добиваме $3y+\frac{12}{y}=13$, т.е. $3y^2-13y+12=0$, од каде што $y_1=3$, $y_2=\frac{4}{3}$. Понатаму имаме:

$3^{\lg x}=3$, $\lg x=1$, $x_1=10$. $3^{\lg x}=\frac{4}{3}$, $\lg x=\lg_3\frac{4}{3}$, $x_2=10^{\lg_3\frac{4}{3}}$.

4 Реши ја равенката:

а) $2^{\log_3 x+2}=2^{\log_3 x}+96$; б) $4^{\log_2 x+\log_2 x^2}+25^{\log_2 x+\log_2 x^2}=2\cdot 10^{\log_2 x+\log_2 x^2}$.

Забелешка. Често пати дадена логаритамска равенка можеме да ја трансформираме во експоненцијална и обратно, експоненцијалната во логаритамска.

Пример **1.** Реши ја логаритамска равенка $x^{\lg x-2}=1000$ со трансформирање во експоненцијална равенка.

Решение. Равенката е дефинирана за $x>0$. Со смената $\lg x=y$, односно $x=10^y$ ја добиваме експоненцијалната равенка $\left(10^y\right)^{y-2}=10^3$, т.е. $y^2-2y-3=0$, од каде што $y_1=-1$, $y_2=3$. Од $\lg x=y$ добиваме $x_1=10^{-1}$, $x_2=10^3$.

Пример **2.** Реши ја експоненцијалната равенка $4^x-2\cdot 2^x-3=0$ со трансформирање во логаритамска равенка.

Решение. Воведуваме смена $2^x=y$, т.е. $x=\log_2 y$. За $y>0$ и ја добиваме логаритамската равенка $4^{\log_2 y}-2\cdot 2^{\log_2 y}-3=0$, т.е. $2^{\log_2 y^2}-2\cdot 2^{\log_2 y}-3=0$. Сега со примена на основниот логаритамски идентитет $a^{\log_a b}=b$ добиваме $y^2-2y-3=0$, од каде што $y_1=-1$, $y_2=3$. Значи, $x=\log_2 3$ е решение на равенката.

Задачи

Реши ги равенките:

1 а) $\log_5\left(3^x-2\right)=2$; б) $\log_2\left(4^x-3\right)=x+1$.

2 а) $5^{2\lg x-1}=5^{\lg x}\sqrt[3]{5}$; б) $9^{\log_3 x}+3=4\cdot 3^{\log_3 x}$.

3 $\log_2\left(2^x+1\right)\cdot\log_2\left(2^{x+1}+2\right)=2$; Упатство $\log_2\left(2^{x+1}+2\right)=\log_2\left(2\cdot\left(2^x+1\right)\right)=$

$=\log_2 2+\log_2\left(2^x+1\right)$. Потоа воведи смена $\log_2\left(2^x+1\right)=y$.

1 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Графикот на функцијата $y=a^x$ ја сече y-оската во точката:

А. $(0,0)$; Б. $(0,1)$; В. $(1,0)$; Г. $(1,1)$.

2 Изразот $b^{\log_b x}$ е еднаков на изразот:

А. b^x; Б. $\log_b x$; В. b; Г. x.

3 Решение на равенката $8^x=1$ е:

А. 0 Б. -7 В. 8 Г. $\frac{1}{8}$.

4 Вредноста на изразот $\log_2 3\cdot\log_3 4$ е:

А. -1; Б. -2; В. 2; Г. $\frac{1}{2}$.

5 Вредноста на изразот $\left(\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^0\right)^{-1}$ е:

А. $\frac{5}{2}$; Б. $-\frac{5}{2}$; В. $\frac{2}{5}$; Г. $-\frac{2}{5}$.

6 Множеството вредности на функцијата $y=a^x$ за $a>0, a\neq 1$ е ____________________.

7 Еквиваленцијата $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ е точна само ако за основата a е исполнет условот __________________________.

8 Антилогаритам на изразот $\log_a x-\log_a y, a>0, a\neq 1, x>0, y>0$ е ____________________.

9 Графиците на функциите $y=\log_{\frac{1}{10}} x$ и $y=\log_{10} x$ се симетрични една на друга во однос на ____________________.

10 Вредност на $\log\sqrt[3]{100}$ е ____________________.

11 Докажи го идентитетот $\left(\left(\sqrt[6]{9}\right)^{\sqrt[3]{3}}\right)^{-2\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{9}$.

12 Реши ја експоненцијалната равенка $25^x-4\cdot 5^x=5$.

13 Реши ја равенката $\lg\left(\log_2\left(\log_3 x\right)\right)=0$.

14 Пресметај ја вредноста на изразот $\log_5 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5$.

15 Реши ја равенката $\log_2\left(3\cdot 2^x-4^x\right)=\log_9 3^2$.

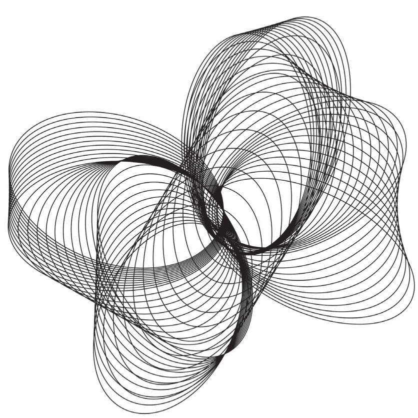
ТЕМА 2

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

За реализација на темата може да се користат апликациите:

- Geogebra (Дефиниции на тригонометриски функции во правоаголен триаголник; Проширување на поимот за агол: мерење на агли; Тригонометриски функции од произволен агол; Графици на тригонометриските функции)
- KmPlot (Тригонометриски функции од произволен агол; Менување на тригонометриските функции: парност, периодичност; Графици на тригонометриските функции)



1 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Потсети се!

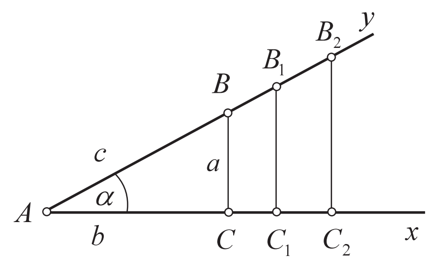
- Што е размер?
- За кои триаголници се вели дека се слични?
- При кои услови два правоаголни триаголници се слични?

А На цртежот е претставен остар агол $\alpha = xAy$. Нека на кракот Ay точките $B, B_1, B_2, \ldots$ се произволни. Од точките $B, B_1, B_2\ldots$ повлекуваме нормали на кракот Ax и добиваме правоаголни триаголници $ABC, AB_1C_1, AB_2C_2\ldots$

За сите овие триаголници аголот α е заеднички агол, што значи дека секој од нив е сличен со ΔABC.

- Од сличноста на триаголниците следува пропорционалност на нивните соодветни страни, т.е.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \ldots \text{ и } \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \ldots$$



Воочи!

Односот на страните во сличните триаголници за еден ист агол не зависи од големините на нивните страни.

Според досега кажаното:

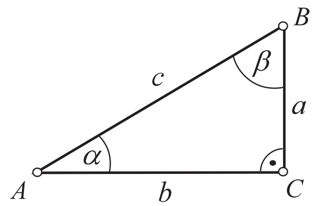
- Во сите правоаголни триаголници со остар агол α, односот на спротивната катета на аголот α и хипотенузата е еден ист број (вредноста на размерот $a:c$, каде што $a = \overline{BC}$, $c = \overline{AB}$).
- Тој број, т.е. количникот $\frac{a}{c}$ се вика ***синус*** од аголот α и се означува со $\sin\alpha$.
- Во сите правоаголни триаголници со остар агол α, односот на налегнатата катета на тој агол α и хипотенузата е еден ист број (вредноста на размерот $b:c$, каде што $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$).
- Тој број, т.е. количникот $\frac{b}{c}$ се вика ***косинус*** од аголот α и се означува со $\cos\alpha$.

Запомни!

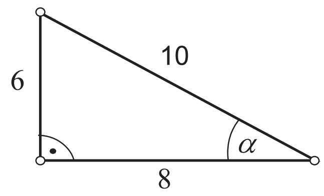
Синус од остар агол во правоаголен триаголник е односот на спротивната катета на тој агол и хипотенузата.

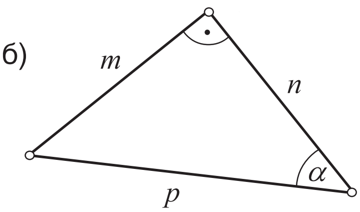
Косинус од остар агол во правоаголен триаголник е односот на налегнатата катета на тој агол и хипотенузата.

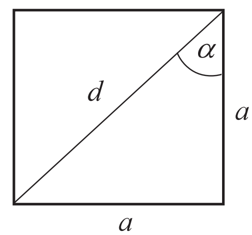
- За правоаголниот триаголник од цртежот имаме: $\sin\alpha=\frac{a}{c}$; $\sin\beta=\frac{b}{c}$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}$; $\cos\beta=\frac{a}{c}$.



1 Одреди ги $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ од цртежот, според дефиницијата.

а) 

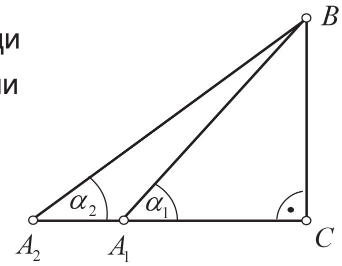
б) 

в) 

- а) $\sin\alpha=\frac{6}{10}=0,6$; б) $\cos\alpha=\frac{n}{p}$; в) Искористи дека $d=a\sqrt{2}$.

Б На цртежот се дадени правоаголните триаголници A_1CB и A_2CB со заедничка катета BC, различни агли $\alpha_1\neq\alpha_2$ и различни хипотенузи $\overline{A_1B}\neq\overline{A_2B}$.

Поради тоа $\frac{\overline{CB}}{\overline{A_1B}}\neq\frac{\overline{CB}}{\overline{A_2B}}$, односно $\sin\alpha_1\neq\sin\alpha_2$.



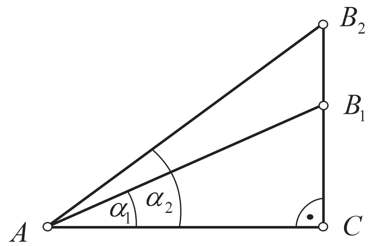
- Значи, ако $\alpha_1\neq\alpha_2$, тогаш $\sin\alpha_1\neq\sin\alpha_2$, т.е. ако $\sin\alpha_1=\sin\alpha_2$, тогаш $\alpha_1=\alpha_2$.

Од сето погоре изнесено може да се заклучи дека:

- Синус на кој било остар агол α е одреден број.
- Со менување на аголот α се менува и $\sin\alpha$, т.е. $\sin\alpha$ е функција од аголот α.

Аналогно, на цртежот се дадени правоаголните триаголници ACB_1 и ACB_2, со заедничка катета AC, различни агли $\alpha_1\neq\alpha_2$ и различни хипотенузи $AB_1\neq AB_2$.

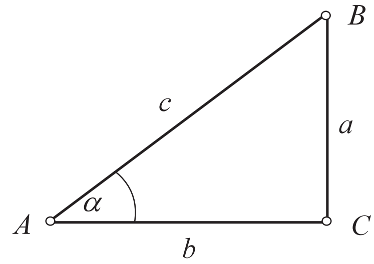
Очигледно е дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB_1}}\neq\frac{\overline{AC}}{\overline{AB_2}}$, односно $\cos\alpha_1\neq\cos\alpha_2$.



- Значи, ако $\alpha_1\neq\alpha_2$, тогаш $\cos\alpha_1\neq\cos\alpha_2$, т.е. ако $\cos\alpha_1=\cos\alpha_2$, тогаш $\alpha_1=\alpha_2$.

- Косинус на кој било остар агол α е одреден број.
- Со менување на аголот α се менува и $\cos\alpha$, т.е. $\cos\alpha$ е функција од аголот α.

В Меѓу катетите a и b на правоаголниот триаголник ABC, даден на цртежот, може да се формираат и следниве размери $a:b$ и $b:a$.



- Вредностите на тие размери остануваат исти во сите правоаголни триаголници со зададен остар агол α, а се менуваат кога аголот α ќе се промени.

- Со размерите $a:b$ и $b:a$ се определени две други функции. Количникот $a:b$ се нарекува ***тангенс*** од аголот α којшто лежи спроти катетата a во ΔABC, а количникот $b:a$ е ***котангенс*** на тој агол; тие се означуваат со $\mathbf{tg}\alpha$, односно $\mathbf{ctg}\alpha$.

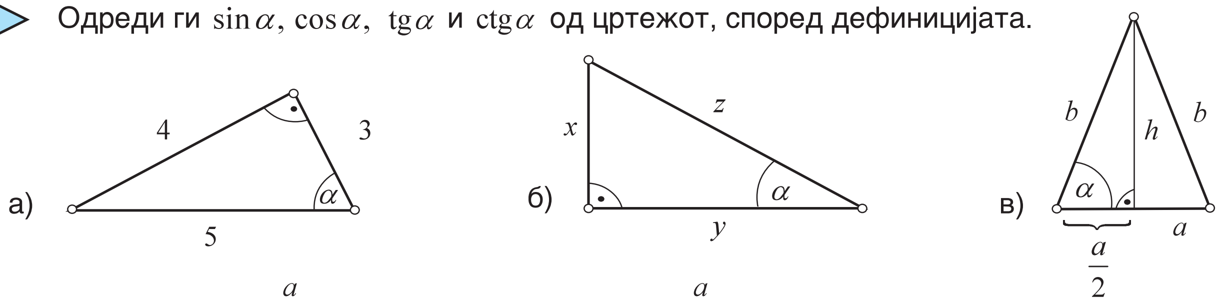
Запомни!

Тангенс од остар агол во правоаголен триаголник е односот на спротивната и налегнатата катета на тој агол.

Котангенс од остар агол во правоаголен триаголник е односот на налегнатата и спротивната катета на тој агол.

- За правоаголниот триаголник од цртежот имаме: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

2 Одреди ги $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ од цртежот, според дефиницијата.



- в) $\sin\alpha = \dfrac{h}{b}$, $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{b} = \dfrac{a}{2b}$, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2h}{a}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{h} = \dfrac{a}{2h}$.

- ***Забелешка***. Вообичаено е за функцијата косинус да се вели дека е ***кофункција*** на синус, но и дека синус е кофункција на косинус. Исто така за функцијата котангенс се вели дека е кофункција на тангенс, а тангенсот е кофункција на котангенс.

Запомни!

Функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$ се викаат ***основни тригонометриски функции***. Врз основа на овие функции е изградена посебна математичка дисциплина која се вика ***тригонометрија***.

- Името тригонометрија потекнува од двата грчки збора: **trigonon,** што значи триаголник и **metria**, што значи мера.

Тригонометријата денес наоѓа широка примена. Таа е особено значајна, па дури и незаменлива во механиката, астрономијата, навигацијата и техниката.

Задачи

1 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аглите α и β на правоаголниот триаголник, ако a и b се катети, а c е хипотенуза на триаголникот:

а) $a=3,\ b=4;$ б) $a=8,\ c=10;$

в) $b=15,\ c=17;$ г) $a=12,\ b=35.$

2 Конструирај го остриот агол α ако е дадена вредноста на тригонометриската функција:

а) $\sin\alpha=\frac{5}{7};$ б) $\cos\alpha=0,6;$

в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3};$ г) $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}.$

3 Одреди ја приближно висината на дрво, чија сенка е долга $5\ \mathrm{m}$, а сончевите зраци со земјата зафаќаат агол од $50°$.

4 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник, ако неговите катети се одне-суваат како $8:15$.

2 ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАВИСНОСТИ ОД ОСТАР АГОЛ

Потсети се!

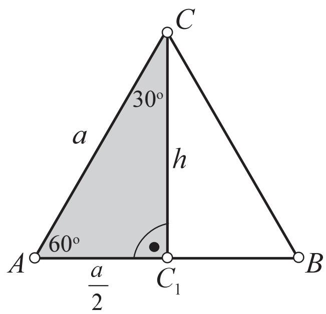
- За дефиниција на тригонометриски функции од остар агол во правоаголен триаголник.
- Висината во рамностран триаголник со страна a е $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Дијагоналата на квадрат со страна a е $d=a\sqrt{2}$.
- За кои агли се вели дека се комплементни?

A **1** Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од 30°, 60°, 45°.

Проследи го решението

На цртежот ΔABC е рамностран триаголник со страна a, а $CC_1=h$ е неговата висина.

Од ΔAC_1C и дефиницијата за тригонометриските функции имаме:



$$\sin 30°=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2},\quad \cos 30°=\frac{h}{a}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

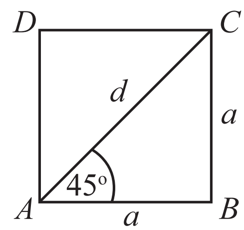
$$\operatorname{tg}30°=\frac{\frac{a}{2}}{h}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{ctg}30°=\frac{h}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}.$$

Воочи!

$$\cos 60^{\circ} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2},\ \sin 60^{\circ} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \operatorname{ctg} 30^{\circ} = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 60^{\circ} = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2 На цртежот е даден квадрат со страна a и дијагонала $d = a\sqrt{2}$. Одреди ги: $\sin 45^{\circ}$, $\cos 45^{\circ}$, $\operatorname{tg} 45^{\circ}$, $\operatorname{ctg} 45^{\circ}$.



Решение

$$\sin 45^{\circ} = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{\circ}, \quad \operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{a}{a} = 1 = \operatorname{ctg} 45^{\circ}.$$

3 Одреди ја вредноста на изразот:

а) $2\cos 30^{\circ} + 3\operatorname{ctg} 60^{\circ} - \operatorname{tg} 60^{\circ} - \operatorname{ctg} 30^{\circ}$; б) $\left(1 - \sin 60^{\circ}\right)\left(1 + \sin 60^{\circ}\right)$.

в) $1 + \operatorname{tg} 45^{\circ} \cdot \left(\sin 45^{\circ} - \cos 45^{\circ}\right)$.

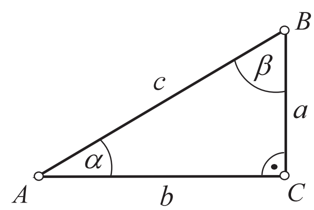
Решение

б) $\left(1 - \sin 60^{\circ}\right)\left(1 + \sin 60^{\circ}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Потсети се!

- Како се викаат два агла чијшто збир изнесува 90°?
- Колку степени изнесува збирот на острите агли α и β во правоаголен триаголник?
- Колку е β ако е даден аголот α?

Б **4** На цртежот е претставен правоаголен ΔABC со катети a и b, хипотенуза c и остри агли α и β.



Запиши ги вредностите на:

а) $\sin\alpha$ и $\cos\beta$; б) $\cos\alpha$ и $\sin\beta$; в) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$; г) $c\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$.

■ Аглите α и β се комплементни т.е. $\alpha + \beta = 90^{\circ}$, па $\beta = 90^{\circ} - \alpha$.

Спореди ја вредноста на тригонометриската функција од даден остар агол и соодветната кофункција од неговиот комплементен агол.

Одговор

а) $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$; б) $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$; в) $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \text{ctg}\,\beta$; г) $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \text{tg}\,\beta$.

Запомни!

Вредноста на секоја тригонометриска функција од еден остар агол е еднаков со соодветната кофункција од неговиот комплементен агол, т.е.

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha);\quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{tg}\,\alpha = \text{ctg}(90^\circ - \alpha);\quad \text{ctg}\,\alpha = \text{tg}(90^\circ - \alpha)$$

На пример: $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$; $\cos 25^\circ = \sin 65^\circ$; $\text{tg}\,60^\circ = \text{ctg}\,30^\circ$; $\text{ctg}\,50^\circ = \text{tg}\,40^\circ$.

Вредностите на функциите од $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ често се користат па заради полесно помнење ги запишуваме во следната табела.

	30°	45°	60°
sin	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

5 Одреди го остриот агол α ако: а) $\cos(\alpha + 10^\circ) = \cos 40^\circ$; б) $\sin(\alpha - 20^\circ) = \cos 30^\circ$;

в) $\text{ctg}(\alpha + 20^\circ) = \text{ctg}\,50^\circ$; г) $\text{tg}(2\alpha + 10^\circ) = \text{ctg}\,50^\circ$.

Решение

а) $\alpha + 10^\circ = 40^\circ$, $\alpha = 30^\circ$; б) Равенството е точно ако аглите $\alpha - 20^\circ$ и 30° се комплементни агли, т.е. $\alpha - 20^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, $\alpha = 80^\circ$; в) $\alpha + 20^\circ = 50^\circ$, $\alpha = 30^\circ$; г) $2\alpha + 10^\circ + 50^\circ = 90^\circ$, $2\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 15^\circ$.

6 Одреди го остриот агол α ако: а) $\sin(\alpha + 15^\circ) = \sin 50^\circ$; б) $\cos(\alpha + 35^\circ) = \sin 40^\circ$;

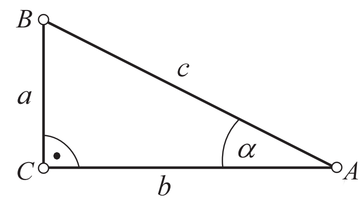
в) $\text{tg}\,70^\circ = \text{tg}(\alpha + 15^\circ)$; г) $\text{tg}\,40^\circ 30' = \text{ctg}(2\alpha - 20^\circ)$.

B **7** Ако е α кој било остар агол, докажи дека:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$; в) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{ctg}\,\alpha$; г) $\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$.

Проследи го доказот

Нека α е остар агол во правоаголниот триаголник ABC.



- Според дефиницијата:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

- а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1;$ б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha;$

  в) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha;$ г) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1.$

На пример, за $\alpha = 60^\circ$, имаме: $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$

8 Провери дека: а) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1;$ б) $\sin^2 45^\circ +^2 45^\circ = 1;$ в) $\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = 1.$

- Ако е дадена вредноста на една функција, тогаш со примена на формулата $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ може да ги одредиме вредностите на другите функции.

9 Ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, одреди ги вредностите на другите функции.

- Дадената вредност на $\sin\alpha$, ќе ја замениме во равенството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, т.е.

  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$, па $\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}.$

Воочи!

Од $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, следува: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, т.е. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

10 Одреди ги вредностите на $\sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, ако: а) $\cos\alpha = \frac{24}{25};$ б) $\sin\alpha = \frac{8}{17}.$

а) Прво ќе го одредиме $\sin\alpha$, т.е. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{25^2-24^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{7^2}{25^2}} = \frac{7}{25}.$

Потоа, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24};$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{7}{24}} = \frac{24}{7}.$

- Со користење на равенството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ некои изрази може да се упростат, т.е. да се запишат во поедноставен вид.

11 Упрости го изразот: а) $3 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$, б) $(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)$.

Решение

- а) $3-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 3-\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right) = 3-1 = 2.$
- б) $(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha) = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$

12 Упрости го изразот: а) $(1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha)$; б) $\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\alpha}$.

13 Одреди го $\operatorname{ctg}\alpha$, ако $\operatorname{tg}\alpha = 2,5$.

■ Од $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ следува дека $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, па $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2,5}=0,4$.

Воочи!

Од $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, следува $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, т.е.

функциите тангенс и котангенс од ист агол се реципрочни.

14 Одреди ги вредностите на $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, ако $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$.

Проследи го решението

Прво ќе го одредиме $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{15}{8}$. Од $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ имаме дека $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{8}{15}$, т.е.

$\sin\alpha=\frac{8\cdot\cos\alpha}{15}$. Ако оваа вредност за $\sin\alpha$ ја замениме во равенството $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ќе

добиеме: $\left(\frac{8\cdot\cos\alpha}{15}\right)^2+\cos^2\alpha=1$, $\frac{64\cos^2\alpha}{225}+\cos^2\alpha=1$. Множејќи го равенството со 225 добиваме

$64\cos^2\alpha+225\cos^2\alpha=225$; $289\cos^2\alpha=225$; $\cos^2\alpha=\frac{225}{289}$, од каде што $\cos\alpha=\sqrt{\frac{225}{289}}=\frac{15}{17}$.

На крај $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{15^2}{17^2}}=\sqrt{\frac{17^2-15^2}{17^2}}=\sqrt{\frac{2\cdot32}{17^2}}=\sqrt{\frac{8^2}{17^2}}=\frac{8}{17}$.

15 Одреди ги вредностите на $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$, ако $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$.

Запомни!

Ако α е кој било остар агол, тогаш се точни равенствата:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

кои се викаат ***основни тригонометриски идентитети***.

Со помош на основните тригонометриски идентитети може да се докажуваат точноста на некои равенства.

16 Покажи дека е точно равенството: $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

Ваквите равенства се нарекуваат ***тригонометриски идентитети***, бидејќи во нив се среќаваат тригонометриски функции и се точни за секоја вредност на аголот $\alpha : 0 < \alpha < 90^{\circ}$.

Нивната точност може да се покаже на два начина:

1. Се трансформираат и левата и десната страна на равенството, се додека не се дојде до очигледно вистинито равенство;

2. Се трансформира само едната страна на равенството и се настојува да се дојде до другата.

Даденото равенство ќе го докажеме на двата начини.

1. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \Leftrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right) = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right) \Leftrightarrow \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

2. Ќе ја трансформираме левата страна на равенството, па имаме:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \sin^2\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right) = \sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Забелешка. При користење на овој начин на докажување, може да се трансформира десната страна на равенството и да се добие левата. За ова равенство, обиди се тоа да го направиш сам.

Задачи

Одреди ја вредноста на изразот (1 - 3):

1 а) $3\sin 60^{\circ} - 2\cos 30^{\circ}$;

б) $(\operatorname{tg}45^{\circ} + \operatorname{tg}60^{\circ})(\operatorname{tg}45^{\circ} - \operatorname{tg}60^{\circ})$.

2 а) $\dfrac{(\sin 30^{\circ} + \cos 60^{\circ})^2}{\operatorname{tg}45^{\circ} + \operatorname{ctg}45^{\circ}}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}45^{\circ} - \operatorname{tg}45^{\circ}}{\sin 60^{\circ} - \cos 60^{\circ}}$.

3 а) $\sin^2 30^{\circ} + \cos^2 45^{\circ} + \operatorname{tg}^2 60^{\circ}$;

б) $2\sin^2 60^{\circ} + \cos^2 30^{\circ} + \operatorname{ctg}^2 30^{\circ}$.

Одреди го острият агол α (4 - 5):

4 а) $\sin 23^{\circ}16' = \cos\alpha$; б) $\cos 27^{\circ}23' = \sin\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}15^{\circ}$; г) $\operatorname{ctg}5^{\circ}45' = \operatorname{tg}\alpha$.

5 а) $\sin(\alpha + 10^{\circ}) = \sin 30^{\circ}$;

б) $\cos(\alpha - 15^{\circ}) = \cos 23^{\circ}15'$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha + 20^{\circ}) = \operatorname{ctg}15^{\circ}20'$;

г) $\operatorname{ctg}(\alpha - 15^{\circ}) = \operatorname{tg}15^{\circ}23'$;

д) $\operatorname{tg}(\alpha - 20^{\circ}) = \operatorname{ctg}(\alpha + 20^{\circ})$;

ѓ) $\sin(\alpha + 10^{\circ}) = \cos(10^{\circ} + \alpha)$.

6 Упрости го изразот:

а) $\dfrac{\sin 15^{\circ}}{\cos 75^{\circ}} + \dfrac{\operatorname{ctg}62^{\circ}}{\operatorname{tg}28^{\circ}}$; б) $\dfrac{\sin 40^{\circ}\cdot\cos 50^{\circ}}{\cos^2 50^{\circ} + \sin^2 40^{\circ}}$; в) $\dfrac{3\sin 70^{\circ} - 2\cos 20^{\circ}}{2\sin 20^{\circ} + \cos 70^{\circ}}$; г) $\dfrac{4\operatorname{tg}5^{\circ} - 2\operatorname{ctg}85^{\circ}}{4\operatorname{tg}5^{\circ} + \operatorname{ctg}85^{\circ}}$.

Одреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции (7 - 8) ако е:

7 а) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; б) $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$; в) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8 а) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{21}{20}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{9}{40}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$.

Користејќи ги основните тригонометриски идентитети, упрости ги изразите (9 - 12).

9 а) $\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

б) $\cos\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$.

10 а) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

11 а) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin^2\alpha$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

12 а) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 - 2\operatorname{tg}\alpha$;

б) $(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2 - 2\operatorname{ctg}\alpha$.

Докажи ги тригинометриските идентите (13-15).

13 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha - 1} = -2\operatorname{ctg}\alpha$.

14 а) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2 = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

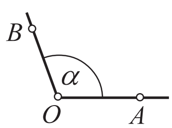
б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

15 а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

3 ПРОШИРУВАЊЕ НА ПОИМОТ АГОЛ. МЕРЕЊЕ АГЛИ

Потсети се!



- На цртежот е претставен агол $\alpha = 110°$
- Полуправите OA и OB се краци на аголот.
- Внатрешната област на аголот е означена со кружен лак.
- Аголот α можеме да го означиме со $\measuredangle AOB = 110°$ или $\measuredangle BOA = 110°$.
- Еден степен (1°) е 90-ти дел од правиот агол.

А Според дефиницијата за агол со која си се запознал досега, големината на аголот мерен во степени може да е најмал 0° а најголем 360°.

При изведувањето на операциите со аглите може да се добие агол што е поголем од 360° или агол што е изразен со негативен број степени.

1 Дадени се аглите $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 250^\circ$.

Пресметај: а) $\gamma - (\alpha + \beta)$; б) $\beta - \alpha$; в) $\alpha - \beta$; г) 5γ.

Решение

а) $\gamma - (\alpha + \beta) = 250^\circ - (43^\circ + 75^\circ) = 250^\circ - 118^\circ = 132^\circ$.

б) $\beta - \alpha = 75^\circ - 43^\circ = 32^\circ$;

в) $\alpha - \beta = 43^\circ - 75^\circ = -32^\circ$;

г) $5\gamma = 1250^\circ$.

■ За потребите на тригонометријата, физиката, механиката и други науки треба да се изврши проширување на поимот за агол, т.е. да се определат иваквите агли.

За таа цел, аголот AOB ќе го дефинираме како фигура при која краците се сметаат како подреден пар (OA, OB).

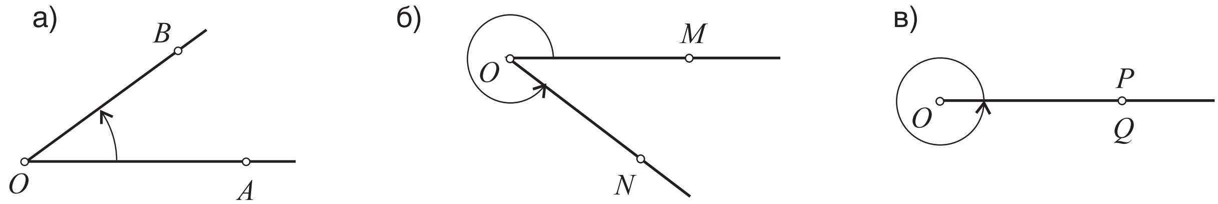
Запомни!

Агол при кој едниот крак е земен за почетен (т.е. за прв), а другиот за краен (т.е. за втор) се вика ***насочен*** или ***ориентиран*** агол.

■ ***Насочен*** или ***ориентиран агол*** може да се добие кога една полуправа ротира околу почетната точка од некоја почетна положба, земена како прв крак на аголот, до крајната положба, земена како втор крак на аголот.

■ Ако ротацијата на полуправата OA е во спротивна насока од движењето на стрелките на часовникот, тогаш таа опишува ***позитивно насочен агол*** (или ***позитивен агол***).

На цртежот се прикажани позитивни агли:

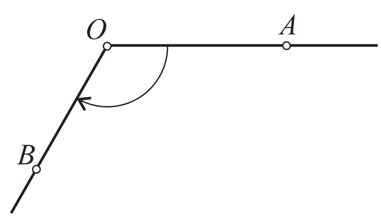


При геометриско претставување на ориентираните агли, насоката на аголот ја назначуваме со стрелка од првиот кон вториот крак на аголот.

● Кој е прв, а кој втор крак на аглите дадени на цртежот?

■ На цртежот в) полуправата OP по ротацијата се поклопила со својата почетна положба, со што е определен позитивен агол $\measuredangle POQ = +360° = 360°$.

(*Знакот „+" понатаму нема да го запишуваме.*)

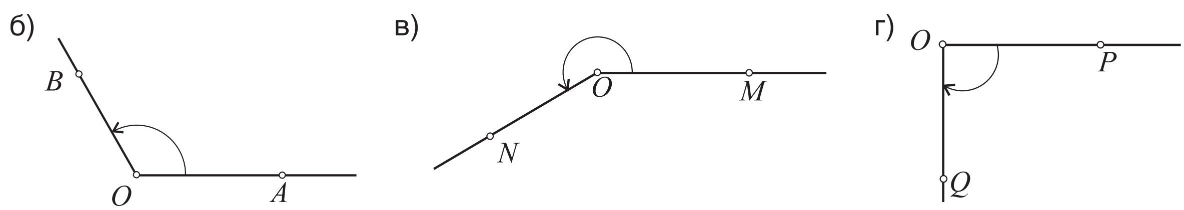


■ Ако полуправата OA ротира во насоката на движењето на стрелките на часовникот, тогаш таа ќе опише ***негативен агол***.

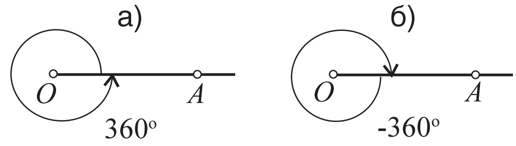
На цртежот е претставен негативен агол $\measuredangle AOB = \alpha = -120°$.

2 Нацртај ги ориентираните агли: а) $30°$; б) $120°$; в) $210°$; г) $270°$; д) $-90°$.

Решение



Ако при ротација на полуправата OA околу својот почеток, земена како прв крак на аголот се совпадне со својата почетна положба тогаш е формиран агол од 360°, црт а) или -360°, црт б), во зависност во која насока ротира полуправата OA.



3 Конструирај го аголот: а) $\beta = 5\alpha$; б) $\gamma = -3\alpha$; ако аголот $\alpha = 250^\circ$.

Решение

а) $\beta = 5 \cdot 250 = 1250^\circ$; б) $\gamma = -750^\circ$. Аголот $\beta = 1250^\circ$ е поголем од 360°.

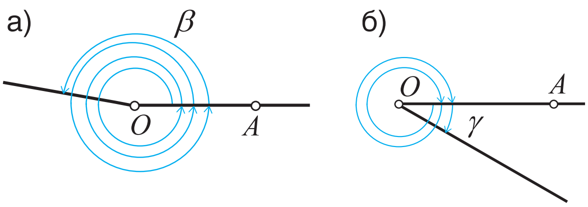
Аглите поголеми од 360°, односно помали од -360° ќе се добијат ако првиот крак продолжи да ротира во истата насока.

Добиените агли β и γ може да се запишат во следниов вид.

$$\beta = 1250^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 170^\circ, \text{ а } \gamma = -\left(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ\right).$$

Овој запис за аголот β ни покажува дека почетниот крак, полуправата OA, прави три полни завртувања и уште формира агол од 170° (црт. а).

За аголот γ, почетниот крак, полуправата OA, прави две полни завртувања во негативната насока и уште 30° во истата насока, т.е. $\gamma = -\left(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ\right) = 2 \cdot \left(-360^\circ\right) - 30^\circ$ (црт. б).



Аглите

$\beta = 3 \cdot 360^\circ + 170^\circ$ и $\gamma = 2 \cdot \left(-360^\circ\right) + \left(-30^\circ\right)$

се запишани во општ вид.

Запомни!

Кој било агол φ може да се запише во општ вид на следниот начин:

Ако $\varphi > 0$, тогаш $\varphi = k \cdot 360^\circ + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $0 \le \alpha < 360^\circ$.

Ако $\varphi < 0$, тогаш $\varphi = k \cdot 360^\circ + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, $-360^\circ < \alpha \le 0$.

Бројот k означува полни завртувања на првиот крак на аголот што ротира во позитивна или негативна насока.

4 Аглите: а) 890°; б) -650°; в) 1500°; г) -2500°, запиши ги во општ вид и конструирај го аглите.

5 Одреди ја големината на аголот што го опишува: а) часовната стрелка; б) минутната стрелка за едно денонокие. Запиши го аголот во општ вид.

Б

Досега како мерна единица на агол се користеше степен. Еден степен $\left(1^{\circ}\right)$ е деведесеттиот дел од правиот агол ($1^{\circ}=\frac{1}{90}$ од правиот агол).

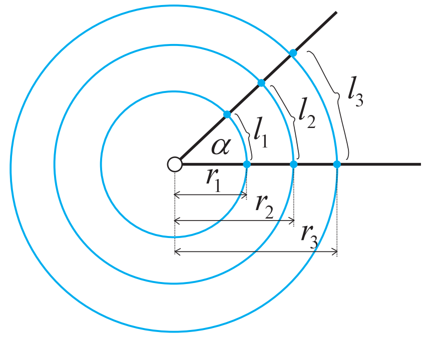
Постојат и други единици за мерење на агли, а една од нив е радијан.

Запомни!

Еден ***радијан*** $(1\ \mathrm{rad})$ е централен агол чии краци, од кружницата отсекуваат лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата. Се означува $1\ \mathrm{rad}$.

Од дефиницијата за радијан имаме:

агол от $\alpha=1\,\mathrm{rad},$ ако $r_1=l_1,\ \ r_2=l_2,\ \ r_3=l_3,$ итн. (црт.), значи централниот агол $\alpha=1\,\mathrm{rad}$ не зависи од големината на радиусот на кружницата.



- Од тоа што периметарот на кружницата со радиус r е $L=2\pi r$ и од условот $l=r$ следува дека полн централен агол (т.е. агол од 360°) има $\frac{L}{l}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi=2\cdot 3{,}14...=6{,}28...$ радијани, значи,

$$\boxed{360^{\circ}=2\pi\ \mathrm{rad}.}$$

Таа е основна врска меѓу мерните единици степен и радијан за мерење агли.

- Од основната врска помеѓу мерните единици степен и радијан, т.е. од $360^{\circ}=2\pi\ \mathrm{rad}$ следува

$$\boxed{180^{\circ}=\pi\ \mathrm{rad}.}$$

- Оттука пак добиваме $1^{\circ}=\frac{\pi}{180}=\frac{3{,}1415}{180}=0{,}0174\ \mathrm{rad},$ а

$$\boxed{\alpha^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\ \mathrm{rad}.}$$

6 Аголот: а) 150°; б) 45°; в) 240°; г) -120°; д) $-65^{\circ}30'$ Изрази го во радијани.

Решение

Користејќи ја формулата $\alpha^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\ \mathrm{rad}$ имаме:

а) $150^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot 150=\frac{5\pi}{6}\ \mathrm{rad};$ г) $-120^{\circ}=\frac{\pi}{180}\cdot(-120)=-\frac{2\pi}{3}\ \mathrm{rad};$

д) $-65^{\circ}30'=\frac{\pi}{180}\cdot\left(-65+\frac{30}{60}\right)=\frac{\pi}{180}\cdot\left(-\frac{131}{2}\right)=-1{,}14319...\approx-1{,}14\ \mathrm{rad}.$

Во решавањето на задачата д) минутите се претворени во степени, т.е. $30' = \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} = 0,5^{\circ}$ па $65^{\circ}30' = 65,5^{\circ}$; понатаму операциите се извршуваат како со реални броеви.

7 Аглите: а) 30°; б) -60°; в) 90°; г) -240°; д) $\alpha = 120^{\circ}45'$; ѓ) $-135^{\circ}25'$; изрази ги во радијани.

Од релацијата $180^{\circ} = \pi$ rad, следува $1\ \text{rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{3,14...} = 57,295795^{\circ}... \approx 57^{\circ}17'44,6''$, т.е.

$$1\ \text{rad} \approx 57^{\circ}17'44'', \quad \text{а} \quad \alpha\ \text{rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi}\cdot\alpha$$

8 Аглите: а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $-\frac{8\pi}{3}$; г) $-2,53$ rad; изрази ги во степени.

Решение. а) $\frac{3\pi}{4} = \frac{180^{\circ}}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{3\cdot180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$; в) $-\frac{8\pi}{3} = -\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{180^{\circ}}{\pi} = -480^{\circ}$. Аголот $-\frac{8\pi}{3}$ може да се претвори во степени со замената на π со 180°, т.е. $-\frac{8\pi}{3} = -\frac{8\cdot180^{\circ}}{3} = -8\cdot60^{\circ} = -480^{\circ}$;

г) $-2,53\ \text{rad} = -\frac{180}{\pi}\cdot2,53 \approx -144,9583222^{\circ} \approx -\left(144^{\circ} + 0,958^{\circ}\cdot60\right) = -\left(144^{\circ} + 57,48'\right) =$

$= -\left(144^{\circ} + 57' + 0,48'\cdot60\right) = -\left(144^{\circ} + 57' + 28''\right) = -144^{\circ}57'28''$.

9 Изрази ги во степени аглите: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{3}$; в) $0,56$ rad; г) $-1,7$ rad.

Воочи!

- Ако аголот што е искажан во радијани и го содржи бројот π, тогаш мерната единица rad не се запишува. На пример: $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, -\frac{2\pi}{3}$ итн.
- Ако аголот не го содржи бројот π, тогаш задолжително се запишува мерната единица rad, на пример: $2,35$ rad; $0,75$ rad; $-3,45$ rad итн.

Задачи

1. Запиши ги аглите во општ вид:
   а) 450°; б) -164°; в) 3000°; г) -1000°.

2. Пресметај во степени и радијани колкав агол ќе опише минутната стрелка на часовникот за:
   а) 5 min; б) 30 min; в) 1 час.

3. Радиусот на кружницата е 36 cm. Одреди ја должината на лакот чиј централен агол е $\frac{7\pi}{9}$ радијани.

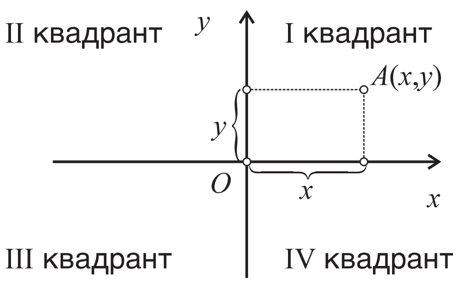
4. Изрази ги во радијани аглите:
   а) 36°; б) 108°; в) 210°;
   г) $212^{\circ}24'$; д) $345^{\circ}36'$.

5. Изрази ги во степени аглите дадени во радијани: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{8}$; д) 4 rad.

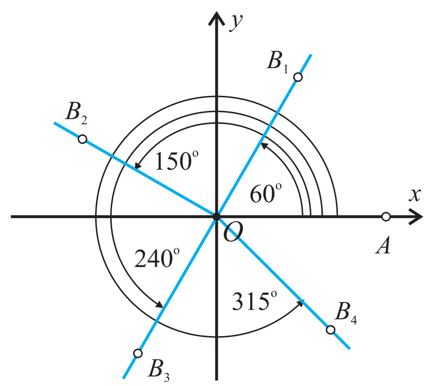
4 ТРИГОНОМЕТРИСКА КРУЖНИЦА. СИНУС И КОСИНУС ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Потсети се!

- Координатниот систем xOy ја дели рамнината на четири квадранти
- Секоја точка A во рамнината е определена со своите координати, т.е. подредениот пар реални броеви (x, y).



А **1** Нацртај ги аглите: 60°, 150°, 240° и 315° во координатен систем xOy, така што темето на аголот да е во координатниот почеток, а првиот (т.е. почетниот) крак да се совпадне со позитивниот дел на x-оската.



Првиот крак на аголот, т.е. позитивниот дел на x-оската, го опишува бараниот агол.

$$\measuredangle AOB_1 = 60°;\ \measuredangle AOB_2 = 150°;\ \measuredangle AOB_3 = 240°;\ \measuredangle AOB_4 = 315°$$

Воочи, вториот крак (т.е. крајниот крак) на аголот од 60° е во првиот квадрант, на аголот 150° е во вториот квадрант итн.

- Ако првиот крак ротира во негативната насока, тогаш тој опишува негативен ориентиран агол.
- Воопшто, ориентираниот агол чие теме е во координатниот почеток, а првиот крак се совпаѓа со позитивниот дел на x-оската велиме дека е во оној квадрант во кој квадрант се наоѓа вториот крак, при услов тој да не лежи на x-оската, односно на y-оската.
- Аголот од $60°$ е во првиот квадрант, аголот од $150°$ е во вториот квадрант, аголот од $240°$ е во третиот квадрант и аголот од $315°$ е во четвртиот квадрант.
- Аголот -60° е во четврти квадрант,

  аголот -120° е во трети квадрант,

  аголот -300° е во први квадрант.

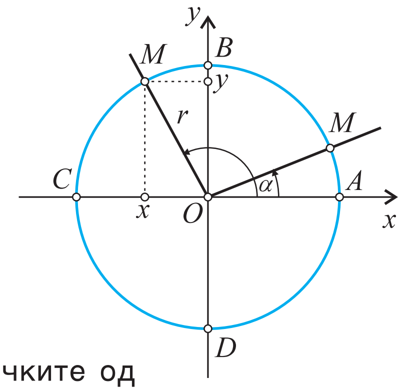
2 Одреди го интервалот на аголот што го опишува подвижниот крак во:
а) I квадрант; б) II квадрант; в) III квадрант; г) IV квадрант,
ако тој ротира во позитивна насока.

3 Колкав е аголот ако:

а) тој е позитивен, а вториот крак му е во првиот квадрант и лежи на симетралата од првиот квадрант;

б) аголот е негативен, вториот крак му е во четвртиот квадрант и лежи на симетралата од четвртиот квадрант?

Да нацртаме кружница со центар во координатниот почеток и со радиус $r = 1,$ т.е. со единичната отсечка на бројната оска.



- Вториот крак на аголот чие теме е во координатниот почеток, а првиот крак се совпаѓа со позитивниот дел на x-оската, ја сече кружницата само во една точка. Важи и обратното, ако M е произволно избрана точка од кружницата, тогаш може да се определи агол α чиј еден крак е позитивниот дел на x-оската, а другиот крак е определен со точките O и M.
- Ако аголот α се менува од 0° до 360° тогаш меѓу точките од кружницата и аглите може да се воспостави обратно еднозначно соодветство.

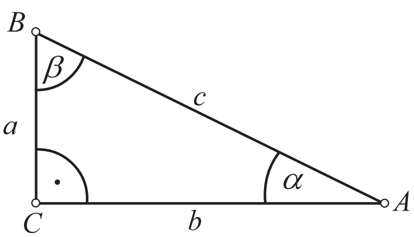
На пример координатите на точките во кои кружницата ги сече координатните оски се: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ и $D(0,-1)$.

Запомни!

Кружницата со центар во координатниот почеток и радиус со должина 1 се вика ***тригонометриска кружница***.

Потсети се!

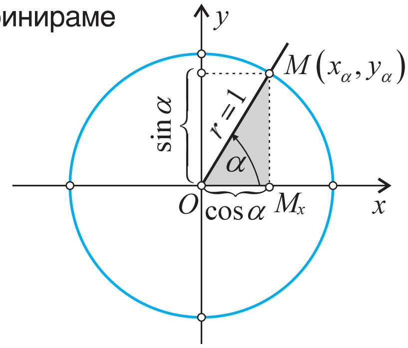
- На цртежот ΔABC е правоаголен. Страните $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ се катети, а $\overline{AB} = c$ е хипотенуза на триаголникот.



- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{спротивната катета}}{\text{хипотенузата}}.$

- $\cos\beta = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{налегнатата катета}}{\text{хипотенузата}}.$

Б Тригонометриската кружница ни овозможува да ги дефинираме тригонометриските функции од произволен агол.



Нека аголот α е во првиот квадрант, а неговиот втор крак ја сече кружницата во точката M со координати $M(x_\alpha, y_\alpha)$.

Од ΔOM_xM имаме:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{M_xM}}{\overline{OM}} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha; \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OM_x}}{\overline{OM}} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha.$$

Според тоа координатите на точката M, во која вториот крак од аголот α ја сече тригонометриската кружница се $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

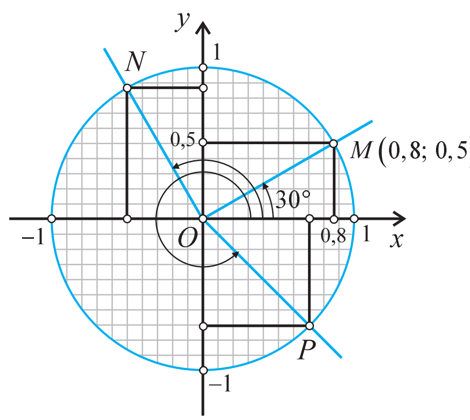
Запомни!

Синусот од произволен агол е еднаков на ординатата на точката во која вториот крак на аголот ја сече тригонометриската кружница, т.е. $\sin\alpha = y_\alpha$.
Косинусот од произволен агол е еднаков на апсцисата на точката во која вториот крак на аголот ја сече тригонометриската кружница, т.е. $\cos\alpha = x_\alpha$.

Од оваа дефиниција следува дека функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ се дефинирани за секој агол α, $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$.

4 Претставувајќи ја тригонометриската кружница на милиметарска хартија одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е: а) 30°; б) 120°; в) 315°.

Решение. Воочи ги координатите на точките во кои вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница.



а) За аголот $\alpha = 30^0$, точката $M(0,8;\ 0,5)$, значи $\sin 30^0 = 0,5; \cos 30^0 = 0,8$.

б) За аголот $\alpha = 120^0$, точката $N(-0,5;\ 0,8)$, па $\cos 120^0 = -0,5; \sin 120^0 = 0,8$.

в) За аголот $\alpha = 315^0$, точката P е со координати $P(0,7;\ -0,7)$, значи $\cos 315^0 = 0,7$, а $\sin 315^0 = -0,7$.

Вредностите на функциите од некои агли коишто ги читаме од тригонометриската кружница се приближни броеви.

5 Одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е:
а) 0°; б) 90°; в) 180°; г) 270°; д) 360°.

Подвижните краци на аглите α и $\varphi = \alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ се совпаѓаат, па и точките M_α и $M_{\alpha+2k\pi}$ во кои ја сечат тригонометриската кружница се совпаѓаат, што значи

$$\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

6 Одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е:
а) 450^o; б) 1080^o; в) -540^o; г) 1350^o.

Потсети се!

Нека е дадена точката M со координати $M(x, y)$.

- Ако точката M е во I или IV квадрант, тогаш апцисата $x > 0$, а ако точката M е во II или III квадрант, тогаш $x < 0$.
- Ако точката M е во I или II квадрант, тогаш ординатата $y > 0$, а ако точката M е во III или IV квадрант, тогаш $y < 0$.
- Во кој квадрант се наоѓа точката: $M(-3,2),\ N(-2,-3),\ P(3,-1)$ и $Q(3,2)$?

B Решавајќи ги претходните две задачи забележа дека тригонометриските функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ за некои агли се позитивни, а за некои негативни.

7 Одреди го знакот на функцијата $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е:
а) 60^o; б) 135^o; в) 270^o; г) 300^o.

Решение. Нацртај ги аглите во тригонометриска кружница:

а) Аголот $\alpha = 60^0$ е во првиот квадрант, а бидејќи координатите на точките во првиот квадрант се позитивни, т.е. $x > 0$ и $y > 0$, следува дека $\cos 60^0 > 0$ и $\sin 60^0 > 0$.

б) Аголот $\alpha = 135^0$ е во вториот квадрант, па $x < 0,\ y > 0$, т.е. $\cos 120^0 < 0$, а $\sin 120^0 > 0$.

в) Вториот крак на аголот $\alpha = 270^0$ се совпаѓа со негативниот дел на y-оската, па точката $M(0,-1)$ е пресечна точка на овој крак со тригонометриската кружница. Значи $\cos 270^0 = 0$, а $\sin 270^0 = -1 < 0$.

8 Одреди во кој квадрант е аголот ако:
а) $\sin\alpha > 0$; б) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$.

- Знаците на тригонометриските функции најчесто ги претставуваме во табела.

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+

Задачи

1 Нацртај ориентиран агол α:

а) 65^0; б) 110^0; в) 180^0;
г) 290^0; д) 360^0.

2 Во кој квадрант е аголот:

а) 85^0; б) 175^0; в) 280^0;
г) 185^0; д) 359^0?

3 Ако $0<\alpha<90^0$, во кој квадрант е аголот:

а) $90^0+\alpha$; б) $180^0-\alpha$; в) $90^0-\alpha$;
г) $270^0-\alpha$; д) $360^0-\alpha$?

4 Во правоаголен координатен систем дадени се точките:
$A(-1,3)$; $B(2,-3)$; $C(2,0)$; $D(0,-3)$ и $E(-1,-5)$. Нацртај ориентиран агол чиј втор крак минува низ дадената точка. Во кој квадрант е секој од добиените агли?

5 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако вториот крак од аголот α минува низ точката:

а) $A(3,0)$; б) $B(-3,0)$; в) $C(0,2)$;
г) $D(0,-3)$; д) $E(-1,0)$.

7 Одреди го знакот на функцијата без да ја одредиш нејзината вредност:

а) $\sin 35^0$; б) $\cos 125^0$; в) $\sin 170^0$;
г) $\cos 250^0$; д) $\cos 300^0$; ѓ) $\sin 320^0$.

8 Одреди го знакот на изразот:

а) $\sin 130^0\cdot\cos 210^0$; б) $\sin 30^0\cdot\cos 180^0$;
в) $\sin 90^0\cdot\cos 100^0$; г) $\dfrac{\sin 309^0\cdot\sin 90^0}{\cos 205^0\cdot\cos 180^0}$;
д) $\dfrac{\sin 120^0\cdot\cos 100^0}{\cos 200^0\cdot\cos 300^0}$.

9 Во кој квадрант е аголот α, ако:

а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$; б) $\cos\alpha\cdot\sin\alpha>0$?

10 Ако аголот $0<\alpha<90^0$, одреди го знакот на изразот:

а) $\sin\left(180^0+\alpha\right)$;
б) $\cos\left(360^0-\alpha\right)$;
в) $\cos\left(90^0+\alpha\right)\cdot\sin\left(90^0+\alpha\right)$;
г) $\cos\left(180^0+\alpha\right)\cdot\sin\left(270^0+\alpha\right)$.

6 Нацртај тригонометриска кружница на милиметарска хартија и одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ за аголот α:

а) 45^o; б) 150^o; в) 210^o;
г) 225^o; д) 310^o; ѓ) 360^o;
е) -240^o; ж) -210^o.

5

ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Потсети се!

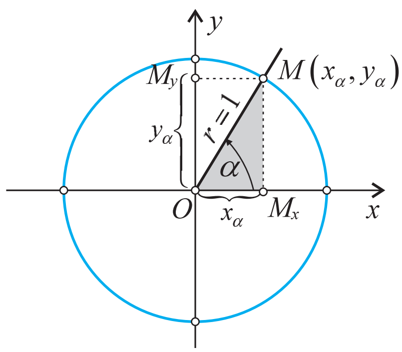
Нека a и b се катети, а c хипотенуза на правоаголен триаголник и α е агол спроти a.

- ***Тангенс*** од остар агол α во правоаголен триаголник е односот на спротивната и налегнатата катета на тој агол, т.е. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$.
- ***Котангенс*** од остар агол α во правоаголен триаголник е односот на налегнатата и спротивната катета на тој агол, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$.
- $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

  ако α е остар агол.

А Порано ги дефиниравме функциите тангенс и котангенс од остар агол (види во потсети се). Во оваа лекција ќе ги дефинираме функциите тангенс и котангенс од произволен агол.

Нека аголот α е во вториот квадрант, а вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница во точката M со координати $M(x_\alpha, y_\alpha)$.



Запомни!

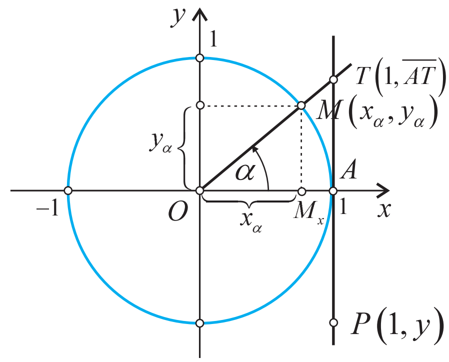
Тангенс од произволен агол α $\left(\alpha\neq 90^\circ+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$ е еднаков на количникот од ординатата и апсцисата на точката M што е пресек на вториот крак од аголот α со тригонометриската кружница, т.е. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, $x_\alpha\neq 0$.

Котангенс од произволен агол α $\left(\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$ е еднаков на количникот од апсцисата и ординатата на точката M што е пресек на вториот крак од аголот α со тригонометриската кружница, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$, $y_\alpha\neq 0$.

- Вредноста на количникот $\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, односно $\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$ не се менува ако наместо точката M се земе која било точка M_1 која лежи на вториот крак од аголот и е различна од темето на аголот.

Ова тврдење следува од сличноста на триаголниците, бидејќи односот на нивните страни не зависи од големината на страните.

Тангентата на тригонометриската кружница во пресечната точка со позитивната насока на x-оската чија насока се совпаѓа со насоката на ординатната оска се вика ***тангенсна оска***.



- На цртежот правата AT е тангенсна оска.
- Точките на тангенсната оска се со координати $\left(1, y\right)$.
- Ако вториот крак OT на аголот α не лежи на ординатната оска, тогаш тој (или неговото продолжение) ја сече тангенсната оска само во една точка (во нејзиниот позитивен или негативен дел).

Од ΔOM_xM имаме: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{M_xM}}{\overline{OM_x}} = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$. Од сличноста на ΔOAT и ΔOM_xM имаме $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{M_xM}}{\overline{OM_x}}$, т.е. $\dfrac{\overline{AT}}{1} = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$ односно $\overline{AT} = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$. Од $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$ и $\overline{AT} = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$ следува $\operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha$ е еднаков на ординатата на точката во која вториот крак од аголот ја сече тангенсната оска.

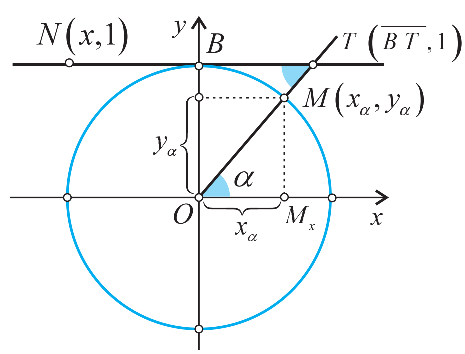
Запомни!

Тангенс од произволен агол $\alpha \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right)$ е ординатата y_t на точката во која вториот крак на аголот α или неговото продолжение ја сече тангенсната оска, т.е.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = y_t.}$$

Б На сличен начин ќе постапиме и за функцијата котангенс од произволен агол.

Тангентата на тригонометриската кружница во пресечната точка со позитивната насока со y-оската чија насока се совпаѓа со насоката на апсцисната оска се вика ***котангенсна оска***.



- На цртежот правата BT е котангенсна оска.
- Точките на котангенсната оска се со координати $(x, 1)$.
- Ако вториот крак OT на аголот α не лежи на апсцисната оска, тогаш тој (или неговото продолжение) ја сече котангенсната оска само во една точка (во нејзиниот позитивен или негативен дел).

Од ΔOM_xM имаме $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OM_x}{M_xM} = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$. Од сличноста на ΔOM_xM и ΔOTB имаме $\frac{\overline{OM_x}}{\overline{MM_x}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{OB}}$, т.е. $\frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\overline{BT}}{1} = \overline{BT}$. Од $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$ и $\frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \overline{BT}$ следува дека $\operatorname{ctg}\alpha = \overline{BT}$.

Значи, $\operatorname{ctg}\alpha$ е еднаков на апсцисата на точката во која вториот крак од аголот α ја сече котангенсната оска.

Запомни!

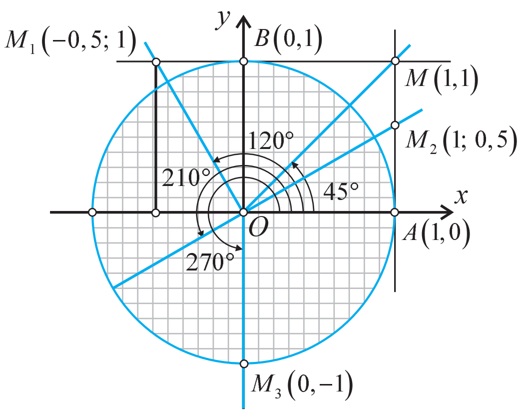
Котангенс од произволен агол $\alpha\left(\alpha \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right)$ е апсцисата x_t на точката во која вториот крак на аголот или неговото продолжение ја сече котангенсната оска, т.е.

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = x_t.}$$

1 Одреди ги вредностите на:

а) $\operatorname{tg}0°$; б) $\operatorname{ctg}45°$; в) $\operatorname{tg}135°$;

г) $\operatorname{ctg}120°$; д) $\operatorname{tg}210°$; ѓ) $\operatorname{ctg}270°$.



Решение. Кружницата ќе ја нацртаме на милиметарска хартија и ќе ги одредиме координатите на точките во кои вториот крак од аголот или неговото продолжение ја сече тангенсната, односно котангенсната оска.

а) Вториот крак на аголот $\alpha = 0°$ ја сече тангенсната оска во точката $A(1,0)$, па според дефиницијата $\operatorname{tg}0° = 0$.

б) Вториот крак на аголот $\alpha = 45°$ ја сече котангенсната оска во точката $M(1,1)$, па $\operatorname{ctg}45° = 1$, бидејќи четириаголникот $OAMB$ е квадрат со страна $r = 1$.

в) За аголот $\alpha = 120°$, $M_1(-0,5;\ 1)$, па $\operatorname{ctg}120° = -0,57$. г) $\operatorname{tg}210° = 0,5$. д) $\operatorname{ctg}270° = 0$.

2 Со помош на тригонометриска кружница нацртана на милиметарска хартија одреди ги вредностите на функциите:

а) $\operatorname{ctg}90°$; б) $\operatorname{tg}45°$; в) $\operatorname{tg}150°$; г) $\operatorname{ctg}240°$; д) $\operatorname{tg}315°$; ѓ) $\operatorname{ctg}315°$.

Вториот крак на аголот α односно $\varphi = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ или на неговото продолжение ја сече тангенсната, односно котангенсната оска во иста точка, па

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Воочи, вредностите на функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ за некои агли се позитивни, а за некои агли се негативни.

- Знакот на функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ зависи од тоа во кој квадрант е аголот α, т.е. точката во која вториот крак на аголот или неговото продолжение ја сече тангенсната, односно котангенсната оска.

- При дефинирањето на функцијата тангенс од произволен агол имавме услов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Условот е потребен затоа што ако $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ тогаш вториот крак од аголот α нема да ја сече тангенсната оска. Тоа значи дека функцијата тангенс за аглите од видот $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(90^\circ + k\pi)$ не постои, т.е. не е дефинирана.

  Од исти причини при дефинирање на функцијата котангенс има услов $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Запомни!

Функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ (односно $\operatorname{ctg}\alpha$) не е дефинирана за аглите чијшто втор крак на аголот се совпаѓа со y-оската (односно со x-оската).

3 Одреди го знакот на изразот без да ја определуваш неговата бројна вредност:

а) $\operatorname{tg}130°$; б) $\operatorname{tg}220°$; в) $\operatorname{ctg}300°$; г) $\operatorname{ctg}200°$;

д) $\operatorname{tg}320° : \operatorname{ctg}120°$; ѓ) $\operatorname{ctg}220° \cdot \operatorname{tg}60°$.

- Во следната табела е прикажан знакот на тригонометриските функции во секој од квадрантите.

	I квадрант $\alpha \in (0, 90°)$	II квадрант $\alpha \in (90°, 180°)$	III квадрант $\alpha \in (180°, 270°)$	IV квадрант $\alpha \in (270°, 360°)$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

4 Одреди го знакот на изразите:

а) $\sin120° \cdot \operatorname{ctg}130°$; б) $\operatorname{tg}200° \cdot \cos320°$; в) $\frac{\sin100° \cdot \cos200°}{\operatorname{tg}300° \cdot \operatorname{ctg}150°}$.

Решение. а) Аглите $120°$ и $130°$ се во вториот квадрант, а $\sin120° > 0,\ \operatorname{ctg}130° < 0$, па $\sin120° \cdot \operatorname{ctg}130° < 0$; б) $\operatorname{tg}200° > 0,\ \cos320° > 0$, па $\operatorname{tg}200° \cdot \cos320° > 0$.

5 Во кој квадрант е аголот, ако: а) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha > 0$; б) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha < 0$; в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} < 0$?

Задачи

1 Одреди ја вредноста на функцијата со помош на тригонометриската кружница:

а) $\operatorname{tg}60^\circ$; б) $\operatorname{ctg}150^\circ$; в) $\operatorname{tg}180^\circ$;
г) $\operatorname{tg}240^\circ$; д) $\operatorname{ctg}300^\circ$.

2 Одреди го знакот на функцијата без да ја одредиш нејзината вредност:

а) $\operatorname{tg}70^\circ$; б) $\operatorname{ctg}30^\circ$; в) $\operatorname{tg}150^\circ$;
г) $\operatorname{ctg}225^\circ$; д) $\operatorname{tg}350^\circ$.

3 Одреди го знакот на производот:

а) $\sin15^\circ\cdot\operatorname{tg}150^\circ$; б) $\cos100^\circ\cdot\operatorname{ctg}100^\circ$;
в) $\operatorname{tg}200^\circ\cdot\sin300^\circ$.

4 Ако $0<\alpha<90^\circ$, одреди го знакот на изразот:

а) $\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180+\alpha)$;

б) $\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)$;

в) $\dfrac{\sin(270^\circ-\alpha)\cdot\cos(180-\alpha)}{\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ)\cdot\cos(\alpha+270^\circ)}{\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)}$.

5 Во кој квадрант е аголот ако:

а) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha<0$; б) $\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha>0$;

в) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}>0$?

6 ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАВИСНОСТИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Потсети се!

За остар агол α важат равенствата:

а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$,

кои се викаат основни тригонометриски идентитети.

A **1** Докажи дека за кој било агол α важат равенствата:

а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

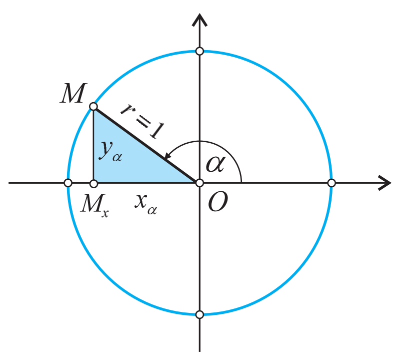
в) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

г) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, $\alpha\neq(k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Доказ. Нека α е кој било агол.

а) Нека $M(x_\alpha,y_\alpha)$ е точка во која вториот крак од аголот α ја сече тригонометриската кружница, т.е. $\sin\alpha=y_\alpha$, а $\cos\alpha=x_\alpha$. Од ΔOMM_x имаме:

$(y_\alpha)^2+(x_\alpha)^2=\overline{OM}^2$, т.е. $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$, па



$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.}$$

б) Од дефиницијата $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, следува дека

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

в) Од дефиницијата $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$, следува дека

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

г) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq (k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Воочи, ***основните тригонометриски идентитети*** од остар агол важат и за произволен агол, за кој се дефинирани функциите, вклучени во равенството.

- Од $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, следува

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

- Од $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, следува дека $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ од ист агол за кој двете функции се дефинирани се реципрочни, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

2 Одреди ги вредностите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, ако $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $180° < \alpha < 270°$.

Решение. Од $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, следува $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; $\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$,

па $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$ (земен е знакот минус бидејќи $180^0 < \alpha < 270^0$ и $\sin\alpha < 0$);

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{5}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Забелешка. *При решавањето на задачите од овој вид задолжително се задава условот во кој квадрант е аголот. Изборот на знакот „плус” или „минус” пред коренот зависи од знакот на бараната функција во соодветниот квадрант.*

3 Одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции, ако:

а) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha \in (90°, 180°)$; в) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4 Нека $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $90° < \alpha < 180°$. Одреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции.

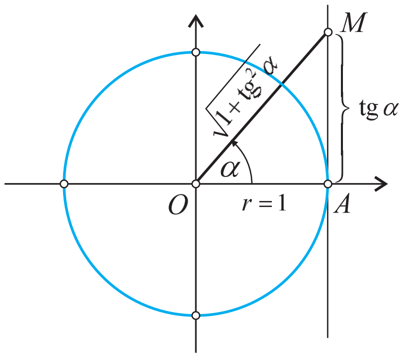
Решение. Од $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, следува $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

Ако двете страни на идентитетот $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ги поделиме со $\cos^2\alpha\neq 0$, ќе добиеме

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \text{т.е. } \operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \text{т.е. } \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \text{па}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{25},\ \text{а } \cos\alpha=-\frac{4}{5}.\ \text{Од } \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ следува } \sin^2\alpha=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2,\ \sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

■ Ако е дадена вредноста на функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$, тогаш функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ може да се одредат со формулите (види цртеж):



$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Пред коренот се зема знак соодветен на знакот на функцијата за дадениот агол.

5 Одреди ја вредноста на изразот $\dfrac{10\cos\alpha+5\sin\alpha}{7\operatorname{ctg}\alpha-6\operatorname{tg}\alpha}$, ако е $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{24}{7}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Со примена на основните тригонометриски идентитети некои изрази може да се упростат.

6 Упрости го изразот: а) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$.

Решение. а) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos^2}{\cos^2\alpha}=\sin\alpha.$

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\dfrac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}.$

■ Равенство во кое има тригонометриски функции се вика ***тригонометриски идентитет***, ако е точно за сите вредности на аголот α за кои изразите од левата и десната страна на равенството се дефинирани.

7 Докажи го идентитетот:

а) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

в) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Решение. Со примена на некои основни идентитети и алгебарски трансформации имаме:

б) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$

в) $\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\frac{1-\sin\alpha+\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

Задачи

1 Одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции, ако:

а) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right);$

б) $\cos\alpha=-\frac{20}{29},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

3 Пресметај ја вредноста на изразот

$\frac{3\cos\alpha+\sin\alpha}{3\operatorname{ctg}\alpha-4\operatorname{tg}\alpha}$, ако $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ 90^\circ<\alpha<180^\circ.$

2 Одреди ја вредноста на другите функции

ако: а) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi;$

б) $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{9}{40},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

4 Упрости го изразот: а) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha};$

б) $\frac{\sin\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin\alpha+1};$ в) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

5 Докажи го идентитетот водејќи сметка за допуштените вредности на аголот α:

а) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha};$

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha;$

в) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=1-2\sin^2\alpha;$

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha.$

6 Докажи го идентитетот:

а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha);$

б) $\frac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha};$

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1-\cos\alpha;$

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1.$

7 СВЕДУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

Потсети се!

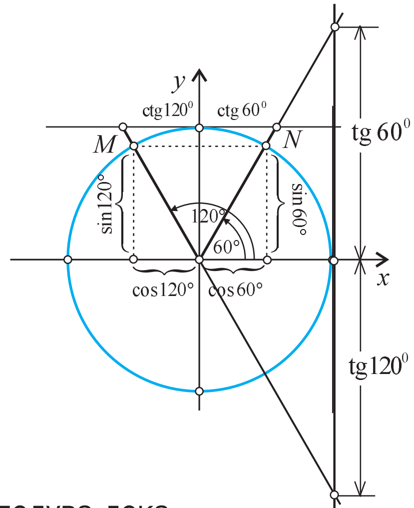
- Во табелата се дадени вредностите на тригонометриските функции за 30^0, 45^0 и 60^0.

	30^0	45^0	60^0
$\sin a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} a$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} a$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Знакот на секоја тригонометриска функција за секој квадрант е даден во табелата.

	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.
$\sin a$	+	+	−	−
$\cos a$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} a$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} a$	+	−	+	−

А **1** Одреди ги вредностите на тригонометриските функции за аголот од 120°, без да користиш калкулатор.



Решение. Бараните вредности ќе ги одредиме со помош на тригонометриската кружница.

- Вторите краци на аглите од 60° и 120° ја сечат тригонометриската кружница во точките N и M. Тие се симетрични во однос на y-оската, т.е. имаат еднакви ординати, па

$$\sin 120^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Од симетричноста на точките M и N во однос на y-оската следува дека нивните апсциси се спротивни, т.е. $\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$.

Функциите $\operatorname{tg} 120^0$ и $\operatorname{tg} 60^0$, односно $\operatorname{ctg} 120^0$ и $\operatorname{ctg} 60^0$, исто така, имаат спротивни вредности (види го цртежот), па $\operatorname{tg} 120^0 = -\operatorname{tg} 60^0 = -\sqrt{3}$, а $\operatorname{ctg} 120^0 = -\operatorname{ctg} 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Бидејќи $120^0 = 180^0 - 60^0$, имаме:

$$\sin 120^0 = \sin\left(180^0 - 60^0\right) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^0 = \cos\left(180^0 - 60^0\right) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 - 60^0\right) = -\operatorname{tg} 60^0 = -\sqrt{3} \text{ и } \operatorname{ctg} 120^0 = \operatorname{ctg}\left(180^0 - 60^0\right) = -\operatorname{ctg} 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Агол што е во вториот, третиот или четвртиот квадрант може соодветно да се запише како $180^0 - \alpha$ (или $\pi - \alpha$), $180^0 + \alpha$ (или $\pi + \alpha$) и $360^0 - \alpha$ (или $2\pi - \alpha$), каде што α е остар агол, т.е. $0^0 < \alpha < 90^0$ $\left(0^0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. На пример, $150^0 = 180^0 - 30^0$ или $150^0 = \pi - \frac{\pi}{6}$; $240^0 = 180^0 + 60^0$ или $240^0 = \pi + \frac{\pi}{3}$ итн.

2 Пресметај $\cos 210^0$, $\sin 210^0$, $\operatorname{tg} 210^0$, $\operatorname{ctg} 210^0$.

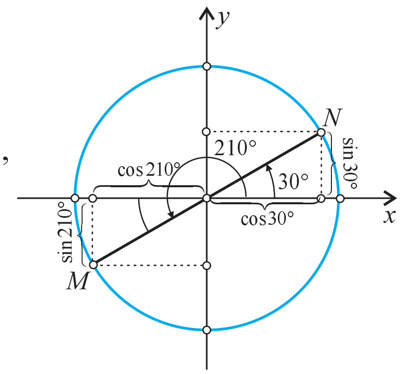
- Вториот крак на дадениот агол е во третиот квадрант, па $210^0 = 180^0 + 30^0$.

Решение. Точките M и N се симетрични во однос на координатниот почеток, па нивните координати се спротивни, т.е. $\cos 210^0 = \cos\left(180^0 + 30^0\right) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin 210^0 = \sin\left(180^0 + 30^0\right) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 210^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 + 30^0\right) = \frac{\sin\left(180^0 + 30^0\right)}{\cos\left(180^0 + 30^0\right)} = \frac{-\sin 30^0}{-\cos 30^0} = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 210^0 = \operatorname{ctg}\left(180^0 + 30^0\right) = \operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3}.$$



Запомни!

$\sin\left(180^0 - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos\left(180^0 - \alpha\right) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\left(180^0 - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(180^0 - \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha,$
$\sin\left(180^0 + \alpha\right) = -\sin\alpha$	$\cos\left(180^0 + \alpha\right) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\left(180^0 + \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(180^0 + \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$
$\sin\left(360^0 - \alpha\right) = -\sin\alpha$	$\cos\left(360^0 - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}\left(360^0 - \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(360^0 - \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha,$

каде што α е остар агол, т.е. $0^0 < \alpha < 90^0 \left(0^0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

За примена на овие формули доволно е да го запомниш следното правило.

- При сведувањето тригонометриска функција од агол што е од видот $180^0 \pm \alpha$ или $360^0 \pm \alpha$ на функција од остриот агол α, функцијата останува иста, земена со знакот „$+$" или „$-$" соодветно на знакот на дадената функција за дадениот агол, односно во дадениот квадрант.

На пример,

$\operatorname{tg}135^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 - 45^0\right) = -\operatorname{tg}45^0 = -1$ (аголот од 135^0 е во II квадрант, па $\operatorname{tg}135^0 < 0$);

$\operatorname{ctg}340^0 = \operatorname{ctg}\left(360^0 - 20^0\right) = -\operatorname{ctg}20^0$ (IV квадрант, $\operatorname{ctg}340^0 < 0$);

$\cos150^0 = \cos\left(180^0 - 30^0\right) = -\cos30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin160^0 = \sin\left(180^0 - 20^0\right) = \sin20^0$.

3 Упрости го дадениот израз ако $0^0 < \alpha < 90^0$:

а) $\operatorname{tg}\left(180^0 - \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(360^0 - \alpha\right) + \sin\left(180^0 + \alpha\right)$; б) $\dfrac{\cos\left(180^0 - \alpha\right) + \sin\left(180^0 - \alpha\right)}{\cos\left(360^0 - \alpha\right) + \sin\left(180^0 + \alpha\right)}$.

Решение. а) $\operatorname{tg}\left(180^0 - \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(360^0 - \alpha\right) + \sin\left(180^0 + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha - \left(-\operatorname{tg}\alpha\right) - \sin\alpha = -\sin\alpha$;

б) $$\frac{\cos\left(180^0 - \alpha\right) + \sin\left(180^0 - \alpha\right)}{\cos\left(360^0 - \alpha\right) + \sin\left(180^0 + \alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{-\left(\cos\alpha - \sin\alpha\right)}{\cos\alpha - \sin\alpha} = -1.$$

Потсети се!

- Два агли чиј збир е 90^0 се викаат комплементни агли.
- На секој остар агол α, комплементниот агол е $90^0-\alpha$.
- $\sin\alpha=\cos\left(90^0-\alpha\right),\quad \cos\alpha=\sin\left(90^0-\alpha\right),$
  $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(90^0-\alpha\right),\quad \operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(90^0-\alpha\right).$
- $\sin 30^0=\cos 60^0,\quad \operatorname{tg}50^0=\operatorname{ctg}40^0.$

Б Ако α е остар агол, тогаш који било друг агол од 0^0 до 360^0 можеме да го запишеме на еден од следните начини:

$$90^0\pm\alpha\ \left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)\ \text{или}\ 270^0\pm\alpha\ \left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right).$$

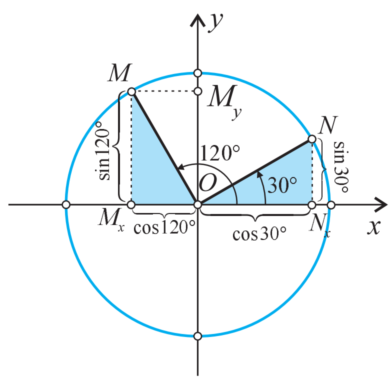
На пример,

$120^0=90^0+30^0,\quad 210^0=270^0-60^0,$

$315^0=270^0+45^0$ итн.

4 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од 120^0, сведувајќи ги на остар агол запишан како збир 90^0+30^0.

Решение. На тригонометриската кружница се претставени аглите $120^0=90^0+30^0$ и 30^0. Од складноста на триаголниците OM_yM и ON_xN следува дека $\overline{OM_y}=\overline{ON_x}$ и $\overline{OM_x}=\overline{N_xN}$.



Од $\sin 120^0>0,\ \cos 120^0<0$, следува дека:

$$\sin 120^0=\overline{OM_y}=\overline{ON_x}=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^0=-\overline{OM_x}=-\overline{N_xN}=-\sin 30^0=-\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}120^0=\frac{\sin 120^0}{\cos 120^0}=\frac{\cos 30^0}{-\sin 30^0}=-\operatorname{ctg}30^0=-\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}120^0=\frac{\cos 120^0}{\sin 120^0}=\frac{-\sin 30^0}{\cos 30^0}=-\operatorname{tg}30^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Воочи дека ако аголот е од видот $90^0\pm\alpha$ или $270^0\pm\alpha$, тогаш при сведувањето, функцијата преминува во соодветна кофункција на остриот агол α (т.е. синус во косинус и обратно, а тангенс во котангенс и обратно).

На пример, $\cos 150^0=\cos\left(90^0+60^0\right)=-\sin 60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, бидејќи $\cos 150^0<0$;

$\operatorname{tg}240^0=\operatorname{tg}\left(270^0-30^0\right)=\operatorname{ctg}30^0=\sqrt{3}$, бидејќи $\operatorname{tg}240^0>0$.

Воопшто.

Ако аголот е од видот $90^0\pm\alpha$ или $270^0\pm\alpha$, тогаш при сведувањето, функцијата преминува во соодветна кофункција на остриот агол α со знак „+” или „–” соодветно на знакот на дадената функција за дадениот агол, односно во дадениот квадрант.

5 Одреди ја вредноста: а) $\sin 330^0$; б) $\cos 225^0$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Бараната вредност ќе ја одредиме со сведување на дадената функција од произволен на остар агол. Аголот можеме да го изразиме како 360^0-30^0 или 270^0+60^0. Сосема е сеедно како ќе го изразиме дадениот агол, резултатот е ист.

а) $\sin 330^0=\sin\left(360^0-30^0\right)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$ или $\sin 330^0=\sin\left(270^0+60^0\right)=-\cos 60^0=-\frac{1}{2}$;

б) $\cos 225^0=\cos\left(270^0-45^0\right)=-\sin 45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}135^0=\operatorname{tg}\left(90^0+45^0\right)=-\operatorname{ctg}45^0=-1$.

6 Функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ сведи ги на функции од остар агол, ако аголот α е:
а) 115^0; б) 200^0; в) 320^0.

а) $\cos 115^0=\cos\left(90^0+25^0\right)=-\sin 25^0$; $\sin 115^0=\sin\left(180^0-65^0\right)=\sin 65^0$.

7 Без калкулатор, одреди ја вредноста на функцијата:

а) $\operatorname{tg}150^0$; б) $\operatorname{ctg}210^0$; в) $\sin 225^0$; г) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

8 Функциите $\sin 75^0$, $\cos 35^0$, $\operatorname{tg}83^0$, $\operatorname{ctg}23^0$ изрази ги преку соодветните функции од комплементниот агол.

$\sin 75^0=\sin\left(90^0-15^0\right)=\cos 15^0$; $\operatorname{ctg}23^0=\operatorname{ctg}\left(90^0-67^0\right)=\operatorname{tg}67^0$.

9 Упрости го изразот $\left(0<\alpha<90^0\right)$:

а) $\sin\left(90^0+\alpha\right)+\cos\left(180^0+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(360^0-\alpha\right)$;

б) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{1+\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}$; в) $\dfrac{\sin\left(360^0-\alpha\right)}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\left(90^0+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(90^0+\alpha\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(90^0+\alpha\right)}$.

Решение. а) $\sin\left(90^0+\alpha\right)+\cos\left(90^0+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(360^0-\alpha\right)=$
$=\cos\alpha+\left(-\cos\alpha\right)+\operatorname{ctg}\alpha+\left(-\operatorname{ctg}\alpha\right)=0$;

б) $$\frac{\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{1+\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\left(-\operatorname{tg}\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=-\cos\alpha;$$

в) $$\frac{\sin\left(360^0-\alpha\right)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\left(90^0+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(90^0+\alpha\right)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(90^0+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=-\cos\alpha.$$

10 Докажи го идентитетот $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(2\pi-\alpha)\right]^2=2.$

Решение. $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(2\pi-\alpha)\right]^2=$

$=[\cos\alpha+\sin\alpha]^2+[-\sin\alpha+\cos\alpha]^2=\cos^2\alpha+2\sin\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=$

$=2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=2\cdot 1=2.$

Задачи

1 Одреди ја вредноста на тригонометриската функција: а) $\cos 135^0$; б) $\operatorname{ctg} 240^0$; в) $\operatorname{tg} 315^0$.

2 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $\sin 330^0+\cos 210^0-\operatorname{tg} 225^0-\operatorname{ctg} 150^0$;

б) $\sin\frac{5\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$; в) $2\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}-2\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{11\pi}{6}$.

3 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$, ако $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\operatorname{tg}\beta-\sin\alpha}{\cos\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$, ако $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Упрости го изразот $(4-7)$:

4 а) $2\sin 40^0+\cos 130^0-\sin 160^0-\cos 110^0$; б) $\sin 160^0\cdot\cos 110^0+\sin 250^0\cdot\cos 340^0+\operatorname{tg} 110^0\cdot\operatorname{tg} 340^0$.

5 $\frac{\cos^2\left(360^0-\alpha\right)+\sin^2\left(270^0+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(90^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\left(270^0+\alpha\right)}$, $0<\alpha<90^0$.

6 $\frac{\sin\left(360^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(270^0-\alpha\right)}{\cos\left(360^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(180^0+\alpha\right)}$.

7 $\frac{\sin\left(180^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg} 130^0\cdot\cos 320^0\cdot\sin 90^0}{\cos\left(90^0+\alpha\right)\cdot\sin 140^0\cdot\operatorname{ctg} 50^0\cdot\cos 180^0}$.

Докажи го идентитетот $(8-10)$:

8 $\frac{\cos\left(270^0+\alpha\right)\cdot\sin\left(180^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90^0-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(270^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(90^0-\alpha\right)\cdot\sin\left(90^0-\alpha\right)}=\sin\alpha$.

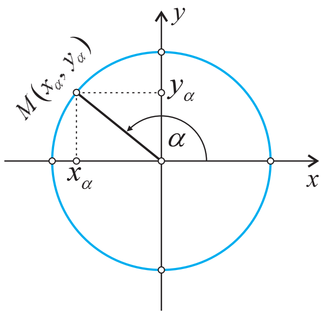
9 $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}=-\cos\alpha$.

10 $\frac{\cos\left(180^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(180^0-\alpha\right)}{\cos\left(270^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(270^0+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha$.

8 МЕНУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Потсети се!

- За знакот на функциите синус и косинус од аглите во секој од квадрантите.
- Нека аголот α е во втори квадрант.



$$\sin\alpha = y_\alpha$$
$$\cos\alpha = x_\alpha$$

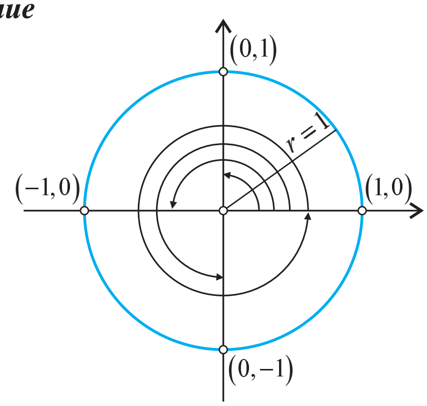
- Синус од произволен агол е ординатата на точката во која вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница.
- Косинус од произволен агол е апсцисата на точката во која вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница.

Заради полесно помнење, вредностите на функциите ги запишуваме во табела.

За функцијата $f(x)$ дефинирана во множеството D_f ја прифаќаме следнава

А **1** Одреди ги вредностите на функциите синус и косинус од 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Решение



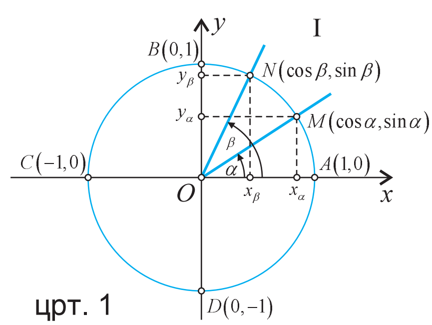
Воочи, вториот крак од дадените агли се совпаѓа со x-оската или y-оската.
Од дефиницијата на функциите од произволен агол следува:
$\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$ итн.

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

Дефиниција. а) Функцијата $f(x)$ монотоно расте во D_f ако за кои било $x_1,\ x_2 \in D_f$ и $x_2 > x_1$, следува $f(x_2) > f(x_1)$. б) Функцијата $f(x)$ монотоно опаѓа, во D_f ако за кои било $x_1,\ x_2 \in D_f$ и $x_2 > x_1$, следува $f(x_2) < f(x_1)$.

Нека α и β се остри агли и притоа $\alpha < \beta$ (црт. 1)
Според дефиницијата на тригонометриски функции од произволен агол, имаме:

$$\cos\alpha = x_\alpha \quad \text{и} \quad \cos\beta = x_\beta$$
$$\sin\alpha = y_\alpha \quad \text{и} \quad \cos\beta = y_\beta$$



црт. 1

Очигледно е дека:

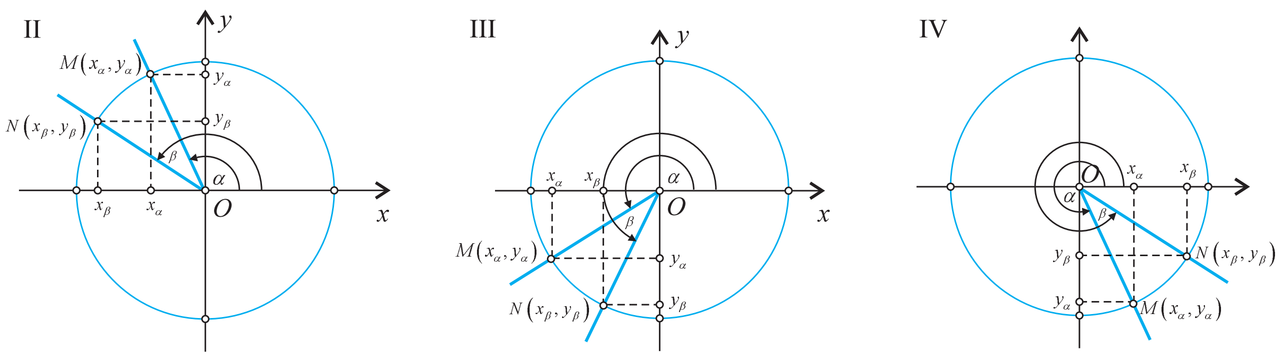
$$x_\alpha > x_\beta, \quad \text{а} \quad \cos\alpha > \cos\beta,$$

$$y_\alpha < y_\beta, \quad \text{и} \quad \sin\alpha < \sin\beta.$$

Според дефиницијата за монотоност на функциите имаме:

- Ако аголот α расте во I квадрант од 0° до 90°, тогаш функцијата $\cos\alpha$ опаѓа од 1 до 0, а функцијата $\sin\alpha$ расте од 0 до 1.

Воочи ги менувањата на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α се менува во другите квадранти (црт. 2), при што $\alpha < \beta$.



црт. 2

Нека $(x_\alpha, y_\alpha), (x_\beta, y_\beta)$ се координати на точките во кои вториот крак на аглите α и β ја сече тригонометриската кружница.

II квадрант	III квадрант	IV квадрант
$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = y_\alpha \\ \sin\beta = y_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y_\alpha > y_\beta \text{ па} \\ \sin\alpha > \sin\beta \end{array};$	$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = y_\alpha \\ \sin\beta = y_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y_\alpha > y_\beta \text{ па} \\ \sin\alpha > \sin\beta \end{array};$	$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = y_\alpha \\ \sin\beta = y_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y_\alpha < y_\beta \text{ па} \\ \sin\alpha < \sin\beta \end{array}$
$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_\alpha \\ \cos\beta = x_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_\alpha > x_\beta \text{ па} \\ \cos\alpha > \cos\beta \end{array};$	$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_\alpha \\ \cos\beta = x_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_\alpha < x_\beta \text{ па} \\ \cos\alpha < \cos\beta \end{array};$	$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_\alpha \\ \cos\beta = x_\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_\alpha < x_\beta \text{ па} \\ \cos\alpha < \cos\beta \end{array}$

- Од дефиницијата за монотоност на функција следува дека, ако аголот α расте во:

II квадрант од 90° до 180° тогаш функцијата $\sin\alpha$ опаѓа од 1 до 0.

III квадрант од 180° до 270° тогаш функцијата $\sin\alpha$ опаѓа од 0 до -1.

IV квадрант од 270° до 360° тогаш функцијата $\sin\alpha$ расте од -1 до 0,

II квадрант од 90° до 180° тогаш функцијата $\cos\alpha$ опаѓа од 0 до -1.

III квадрант од 180° до 270° тогаш функцијата $\cos\alpha$ расте од -1 до 0.

IV квадрант од 270° до 360° тогаш функцијата $\cos\alpha$ расте од 0 до 1.

2 Спореди ги броевите:

а) $\sin 5^\circ$ и $\sin 85^\circ$;　　б) $\cos 130^\circ$ и $\cos 150^\circ$;

в) $\sin 220^\circ$ и $\sin 260^\circ$;　　г) $\cos 300^\circ$ и $\cos 310^\circ$.

3 Одреди го знакот на разликата:

а) $\sin 100^\circ - \sin 130^\circ$;　　б) $\cos 15^\circ - \cos 85^\circ$;　　в) $\cos 215^\circ - \cos 220^\circ$.

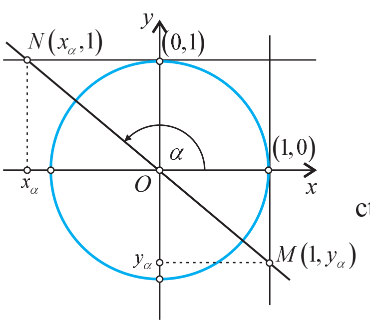
Решение

а) Аглите 100° и 130° се во II квадрант. Функцијата $\sin\alpha$ во II квадрант опаѓа, значи $\sin 100^\circ > \sin 130^\circ$, т.е. $\sin 100^\circ - \sin 130^\circ > 0$;

в) Аглите 215° и 220° се во III квадрант. Функцијата $\cos\alpha$ во III квадрант расте, значи $\cos 215^\circ < \cos 220^\circ$, т.е. $\cos 215^\circ - \cos 220^\circ < 0$.

Потсети се!

- За знакот на функциите тангенс и котангенс од аглите во секој квадрант.
- Нека аголот α е во вториот квадрант.



$\mathrm{tg}\,\alpha = y_\alpha$

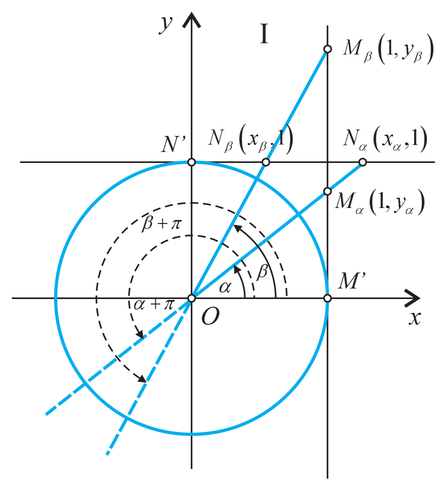
$\mathrm{ctg}\,\alpha = x_\alpha$

$\mathrm{tg}\,0^\circ = \mathrm{tg}\,90^\circ = 0$

$\mathrm{ctg}\,90^\circ = \mathrm{ctg}\,270^\circ = 0$

- $\mathrm{tg}\,\alpha$ за аглите $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ не постои, т.е. не е дефиниран.
- $\mathrm{ctg}\,\alpha$ за аглите $\alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ не постои, т.е. не е дефиниран.

Б Нека аглите α и β се во првиот квадрант и нека $\alpha < \beta$, црт. 3.



црт. 3

- Од дефиницијата на функцијата тангенс од произволен агол имаме:

$\mathrm{tg}\,\alpha = y_\alpha$, $\mathrm{tg}\,\beta = y_\beta$ и $y_\alpha < y_\beta$ следува дека $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$, односно со зголемувањето на аголот α вредноста на функцијата $\mathrm{tg}\,\alpha$ се зголемува, т.е. функцијата $\mathrm{tg}\,\alpha$ расте.

На пример: $\mathrm{tg}\,80^\circ = 5,7$; $\mathrm{tg}\,88^\circ = 28,6$; $\mathrm{tg}\,89^\circ30' = 114,57$; $\mathrm{tg}\,89^\circ55' = 687,55$ итн.

Воочи, ако аголот α се стреми кон 90°, тогаш ординатите на точките од тангенсната оска неограничено растат, т.е. $\mathrm{tg}\,\alpha$ „се стреми кон $+\infty$".
Според тоа, ако:

α расте од 0° до 90°, тогаш $\mathrm{tg}\,\alpha$ расте од 0 до $+\infty$.

- Од дефиницијата за $\mathrm{ctg}\,\alpha$ (црт. 3) имаме:
  $\mathrm{ctg}\,\alpha = x_\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\beta = x_\beta$ и $x_\alpha > x_\beta$ повлекува $\mathrm{ctg}\,\alpha > \mathrm{ctg}\,\beta$.
  Значи со зголемување на аголот вредноста на функцијата $\mathrm{ctg}\,\alpha$ се намалува, т.е. функцијата $\mathrm{ctg}\,\alpha$ опаѓа.

На пример: $\mathrm{ctg}\,0^\circ1' = 3437,75$; $\mathrm{ctg}\,0^\circ10' = 343,77$; $\mathrm{ctg}\,0^\circ50' = 68,75$; $\mathrm{ctg}\,1^\circ5' = 52,88$.

Воочи, ако аголот α е во првиот квадрант и се стреми кон нула, тогаш функцијата $\mathrm{ctg}\,\alpha$ неограничено расте, т.е. $\mathrm{ctg}\,\alpha$ „се стреми кон $+\infty$".
Според тоа, ако:

α расте од 0° до 90°, тогаш $\mathrm{ctg}\,\alpha$ опаѓа од $+\infty$ до 0.

Ако аголот α е во вториот квадрант, тогаш $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ и $c\,\mathrm{tg}\,\alpha < 0$.

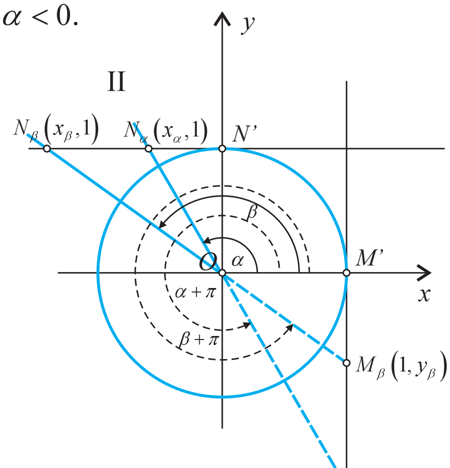
- Од два негативни броја поголем е оној што има помала апсолутна вредност.
  На пример: $-5 < -3$, бидејќи $|-5| > |-3|$.

Од цртежот 4 воочи, ако аголот се зголемува, т.е. $\alpha < \beta$, тогаш $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$, а $\mathrm{ctg}\,\alpha > \mathrm{ctg}\,\beta$, т.е. функцијата $\mathrm{tg}\,\alpha$ расте, а $\mathrm{ctg}\,\alpha$ опаѓа.

На пример: $\mathrm{tg}\,90^\circ1' = -3437,75$; $\mathrm{tg}\,90^\circ5' = -687,5$;

$\mathrm{tg}\,90^\circ15' = -229,18$; $\mathrm{ctg}\,179^\circ = -57,29$;

$\mathrm{ctg}\,179^\circ40' = -171,88$; $\mathrm{ctg}\,179^\circ55' = -687,55$.



црт. 4

- Ако аголот α е во вториот квадрант и ако α се стреми кон 90°, тогаш $\mathrm{tg}\,\alpha \to -\infty$, а ако α се стреми кон 180°, тогаш $\mathrm{ctg}\,\alpha \to -\infty$.

Запомни!

Ако аголот α расте од 90° до 180°, тогаш:

$\mathrm{tg}\,\alpha$ расте од $-\infty$ до 0, а $\mathrm{ctg}\,\alpha$ опаѓа од 0 до $-\infty$.

При дефинирањето на тригонометриските функции тангенс и котангенс од произволен агол рековме дека подвижниот крак на аглите α и $\varphi = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ се совпаѓаат што значи дека

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Според ова својство функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ ги имаат истите својства за аглите што се во I и III квадрант односно во II и IV квадрант, т.е. ако α од 180^0 до 270^0 функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ расте од 0 до $+\infty$, а $\operatorname{ctg}\alpha$ опаѓа од $+\infty$ до 0.

- Како се менуваат функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ ако α расте од 270^0 до 360^0?

- Менувањето на тригонометриските функции може да се прикажат во следната табела.

α	0	I кв.	$\frac{\pi}{2}$	II кв.	π	III кв.	$\frac{3\pi}{2}$	IV кв.	2π
$\sin\alpha$	0	$0 \nearrow 1$	1	$1 \searrow 0$	0	$0 \searrow -1$	-1	$-1 \nearrow 0$	0
$\cos\alpha$	1	$1 \searrow 0$	0	$0 \searrow -1$	-1	$-1 \nearrow 0$	0	$0 \nearrow 1$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$0 \nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow 0$	0	$0 \nearrow +\infty$	$\parallel$	$-\infty \nearrow 0$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\parallel$	$+\infty \searrow 0$	0	$0 \searrow -\infty$	$\parallel$	$+\infty \searrow 0$	0	$0 \searrow -\infty$	$\parallel$

Ознаката „||” значи дека функцијата за тој агол на постои.

4 Одреди го знакот на разликата:

а) $\operatorname{tg}200^\circ - \operatorname{tg}210^\circ$; б) $\operatorname{ctg}130^\circ - \operatorname{ctg}140^\circ$; в) $\operatorname{ctg}15^\circ - \operatorname{ctg}51^\circ$; г) $\operatorname{tg}320^\circ - \operatorname{tg}310^\circ$.

Решение

а) Функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ постојано расте во дефинираното множество, па од $200^\circ < 210^\circ$ следува $\operatorname{tg}200^\circ < \operatorname{tg}210^\circ$, т.е. $\operatorname{tg}200^\circ - \operatorname{tg}210^\circ < 0$.

б) Функцијата $\operatorname{ctg}\alpha$ постојано опаѓа во дефинираното множество, па од $130^\circ < 140^\circ$ следува $\operatorname{ctg}130^\circ > \operatorname{ctg}140^\circ$ т.е. $\operatorname{ctg}130^\circ - \operatorname{ctg}140^\circ > 0$.

5 Одреди го знакот на изразот: а) $\operatorname{tg}120^\circ \cdot \operatorname{ctg}210^\circ \cdot (\operatorname{tg}120^\circ - \operatorname{tg}130^\circ)$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}200^\circ - \operatorname{ctg}190^\circ}{\sin150^\circ - \sin160^\circ}$; в) $\dfrac{\cos210^\circ \cdot \operatorname{tg}300^\circ}{\operatorname{ctg}300^\circ - \operatorname{ctg}310^\circ}$.

Задачи

1 Кој број е поголем:

а) $\sin 25^\circ$ или $\sin 15^\circ$; б) $\cos 130^\circ$ или $\cos 120^\circ$; в) $\sin 20^\circ$ или $\sin 320^\circ$;

г) $\operatorname{tg} 38^\circ$ или $\operatorname{tg} 62^\circ$; д) $\operatorname{ctg} 280^\circ$ или $\operatorname{ctg} 300^\circ$?

2 Одреди го знакот на разликата:

а) $\sin 10^\circ - \sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ - \cos 25^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 150^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 230^\circ - \operatorname{ctg} 260^\circ$.

3 Подреди ги по големина почнувајќи од најмалиот:

а) $\sin 126^\circ$, $\sin 123^\circ$, $\sin 212^\circ$, $\sin 225^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 48^\circ, \operatorname{tg} 52^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ, \operatorname{tg} 154^\circ, \operatorname{tg} 142^\circ$.

4 Одреди го знакот на количникот:

а) $\dfrac{\sin 48^\circ - \sin 64^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ}$;

б) $\dfrac{1-\sin\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, ако $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5 Одреди го знакот на изразот:

а) $\dfrac{\operatorname{ctg} 320^\circ - \operatorname{tg} 214^\circ}{\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 165^\circ}$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{ctg} 173^\circ}{\sin 38^\circ - \cos 110^\circ}$.

6 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sin 0^\circ + \sin 90^\circ$; б) $\cos 0^\circ \cdot \cos 180^\circ$; в) $\cos 180^\circ - \sin 270^\circ$;

г) $\dfrac{\sin 2\pi + \cos 2\pi}{\operatorname{tg}\pi - \cos\pi}$; д) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2} + \sin\dfrac{3\pi}{2}}{2\cos\pi}$.

9 ГРАФИЦИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Потсети се!

- За дефиниција на радијан.
- Радијан е должинска единица за мерење на агол.
- На централниот агол од 180° му соодветствува должинска мера од $\pi = 3{,}14159...\ \text{rad}$.

А Досега тригонометриските функции ги разгледувавме како функции од агли мерени во степени или радијани.

- На секој централен агол соодвестува кружен лак зафатен од краците на аголот, т.е. радијанската мера на аголот, искажана како реален број.

- Записот $\sin 5$ претставува вредност на синусот од агол чија радијанска мера е 5 радијани, т.е. $\sin 5 = \sin(5\ \text{rad})$, $\operatorname{tg} 1{,}5 = \operatorname{tg}(1{,}5\ \text{rad})$ итн.

- Понатаму, во оваа тема, аргументите на функциите ќе ги разгледуваме во множеството на реалните броеви.

Запомни!

Функциите $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, се викаат тригонометриски функции од реален аргумент.

Тригонометриските функции имаат некои карактеристични својства.

- Функцијата $f(x)$ е ***периодична*** со период $T\,(T \neq 0)$ ако за секоја допуштена вредност на аргументот е точно равенството

$$\boxed{f(x+T) = f(x)}$$

Најмалиот позитивен број T (ако таков постои) се вика ***основен период***.

Во досегашното разгледување на тригонометриските функции рековме дека:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha;\ \ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha;\ \ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha;\ \ \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg}\alpha;\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Оттука следува дека тригонометриските функции се периодични.

Запомни!

Тригонометриските функции синус, косинус, тангенс и котангенс се периодични со општ период $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Основниот период за $y = \sin x$ и $y = \cos x$ е 2π (360°), а за $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ е π (180°).

1 Одреди ја вредноста на тригонометриските функции од негативен агол.

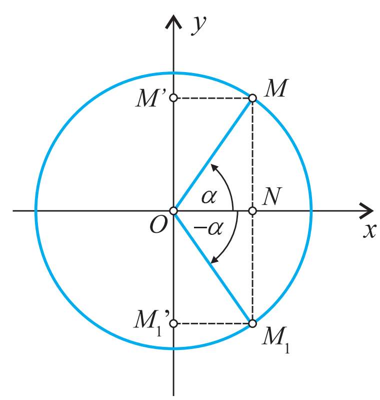
Решение

- Точката M од кружницата (црт. 1) е симетрична на точката M_1 во однос на x-оската, па $\sphericalangle(ON, OM) = \alpha = |-\alpha|$. Ако точката M е со координати $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, тогаш координатите на точката M_1 се $(\cos\alpha, -\sin\alpha)$.

Оттука следува $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha,}$

а вредностите $\sin(-\alpha)$ и $\sin\alpha$ се спротивни броеви, т.е.

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.}$$



црт. 1

- $\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$ и
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$

2 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции за агол α, ако:

а) $\alpha=-30^{\circ}$; б) $\alpha=-45^{\circ}$; в) $\alpha=-120^{\circ}$; г) $\alpha=-210^{\circ}$.

Решение

а) $\sin(-30^{\circ})=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}(-45^{\circ})=-\operatorname{tg} 45^{\circ}=-1$;

в) $\cos(-120^{\circ})=\cos 120^{\circ}=\cos(180^{\circ}-60^{\circ})=-\cos 60^{\circ}=-\frac{1}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}(-210^{\circ})=-\operatorname{ctg} 210^{\circ}=-\operatorname{ctg}(180^{\circ}-30^{\circ})=-\operatorname{ctg} 30^{\circ}=-\sqrt{3}$.

3 Одреди го знакот на изразот:

а) $\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)$; б) $\dfrac{\sin^2(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)}$.

За функциите кои ги имаат некои од претходните својства велиме дека се парни или непарни.

Дефиниција

Множеството $D\,(D\subseteq\mathbb{R})$ е симетрично множество ако $x\in D$ и $-x\in D$.

Функцијата $f(x)$, $x\in D$ (D е симетрично множество) е:

парна, ако $f(-x)=f(x)$,

непарна, ако $f(-x)=-f(x)$, за секој $x\in D$.

- Графикот на парна функција е симетричен во однос на y-оската, а графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.
- Функцијата $f(x)$ која не ги исполнува претходните услови не е ниту парна ниту непарна.

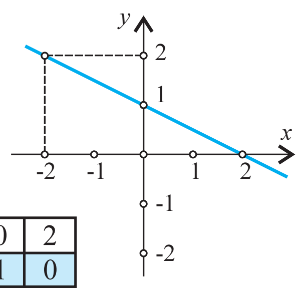
Запомни!

Тригонометриската функција $\cos x$ е парна $(\cos(-x)=\cos x)$, а функциите $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ се непарни $(\sin(-x)=-\sin x,\ \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x)$.

Потсети се!

- Нацртај го графикот на функцијата $y=-\frac{1}{2}x+1$.

x	-2	0	2
y	2	1	0



Б

4 Нацртај го графикот на функцијата $y=\sin x$.

Пополни ја таблицата на функцијата $y=\sin x$, ако $x\in\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$.

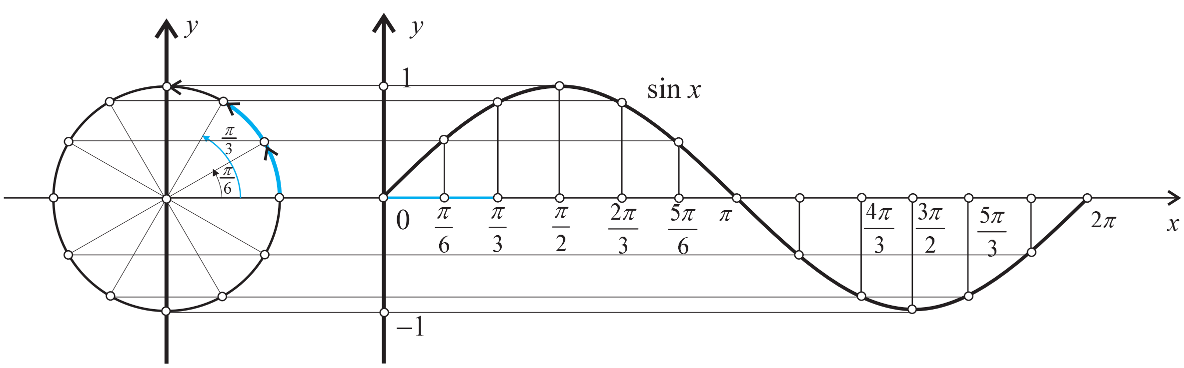
Решение

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Графикот на дадената функција можеме да го нацртаме со нанесување на точките дадени во табелата. Меѓутоа, нанесувањето на тие точки не е лесно, бидејќи добиените вредности на нивните координати се ирационални броеви.

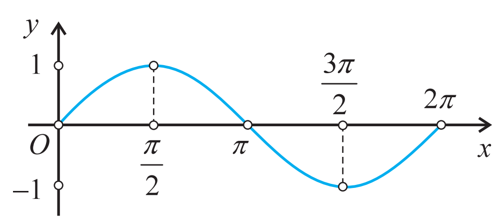
Од тие причини, графикот ќе го нацртаме со помош на тригонометриската кружница на следниот начин.

- Цртаме тригонометриска кружница со радиус $r=1,$ при што единицата 1 е мерен број на единичната отсечка (којашто е произволно избрана) за дадениот координатен систем.
- Должината на кружницата ќе ја претставиме на бројна оска, при што за $r=1$ имаме $L=2r\pi=6{,}283185...,$ т.е. $2\pi\approx 6,$ а при одредувањето на точките на x-оската ќе земеме дека $\frac{\pi}{3}\approx 1.$



- Кривата, т.е. графикот на функцијата $y=\sin x$ се вика ***синусоида***.
- Понатаму, заради практичност и брзо цртање, графикот на функцијата $y=\sin x$ за $x\in\left[0,2\pi\right]$ ќе го цртаме со помош на карактеристични точки на функцијата, т.е. точките во кои функцијата има нули, минимум и максимум, како на цртежот.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



- Функцијата $y=\sin x$ ги има следниве својства:

1. Дефинирана е за секој реален број, т.е. за секој $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$.

2. Ограничена е: $-1 \le \sin x \le 1$.

3. Периодична е со основен период $T = 2\pi$, т.е. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

4. Нули на функцијата, т.е. пресеци на нејзиниот график со x-оската се: $... - \pi, 0, \pi, 2\pi, ...$, т.е. $y = 0$ за $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

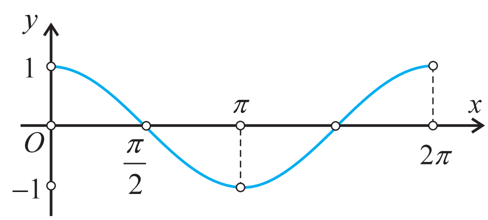
5. Максимална вредност на функцијата е 1, а се добива за $x \in \left\{..., -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, ...\right\}$, т.е. $y_{\max} = 1$, за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

6. Минимална вредност на функцијата е -1, а се добива за $x \in \left\{..., -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, ...\right\}$, т.е. $y_{\min} = -1$, за $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2 Нацртај го графикот на функцијата $y = \cos x$ на интервалот $[0, 2\pi]$.

Графикот ќе го нацртаме само со помош на карактеристичните точки.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



Функцијата $y = \cos x$ ги има следниве својства:

1. Дефинирана е за секој реален број.

2. Ограничена е: $-1 \le \cos x \le 1$.

3. Периодична е со основен период $T = 2\pi$, т.е. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Нули на функцијата, т.е. пресеци на нејзиниот график со x-оската се: $...-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$, т.е. $y = \cos x = 0$, за $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

5. Максимална вредност на функцијата $y = \cos x$ е 1, ако $x \in \{..., -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$, т.е. $y_{\max} = 1$ за $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

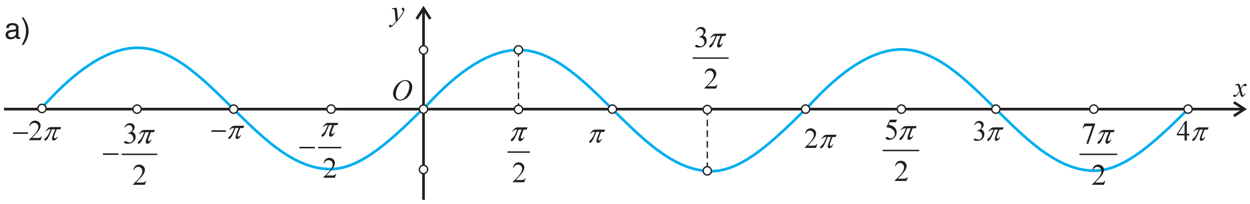
6. Минимална вредност на функцијата $y = \cos x$ е -1 ако $x \in \{..., -\pi, \pi, 3\pi, ...\}$, т.е. $y_{\min} = -1$ за $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Кривата, т.е. графикот на функцијата $y = \cos x$ се вика ***косинусоида***.

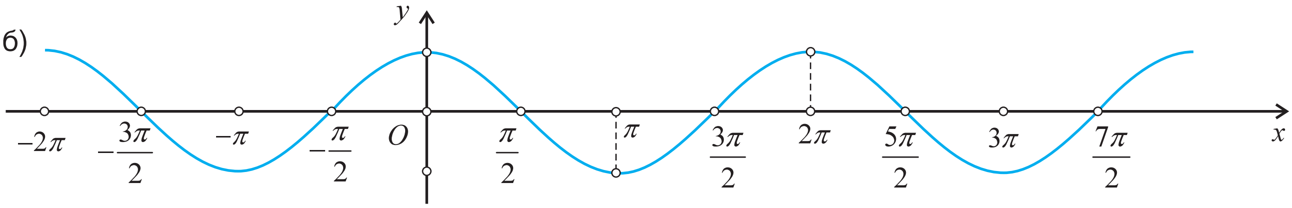
В Својството на периодичност ни овозможува лесно да го нацртаме графикот на $\sin x$, односно на $\cos x$, и кога аголот x е негативен и кога тој е поголем од 2π. Имено, делот од графикот во секој од интервалите $...,[-4\pi,-2\pi],[-2\pi,0],[0,2\pi],[2\pi,4\pi],...$ ќе биде ист како оној во интервалот $[0,2\pi]$.

Во продолжение, на цртеж а) и цртеж б) се дадени „комплетните” графици на функциите $y=\sin x$, односно $y=\cos x$.

а)



б)



- Бидејќи $\sin(-x)=-\sin x$, значи функцијата $y=\sin x$ е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.
- Функцијата $y=\cos x$ е парна $(\cos(-x)=\cos x)$ па графикот е симетричен во однос на y-оската.
- Согледај дека графиците на синусот и косинусот се претставени со иста крива; тие се разликуваат само со својата положба во однос на координатниот систем.

Воочи, графикот на функцијата $y=\cos x$ може да се добие ако графикот на функцијата $y=\sin x$ го „поместиме” налево по x-оската за $\frac{\pi}{2}$.

6 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$, на интервалот $[-2\pi,4\pi]$. Што забележуваш?

10 ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИТЕ $y=a\sin(x+c)$ И $y=a\cos(x+c)$

А Функцијата $\sin x$ ограничена е: $-1\le\sin x\le 1$. И функцијата $a\sin x$ е ограничена, т.е. $-|a|\le a\sin x\le|a|$, $|a|\in\mathbb{R}$. Истото важи и за функцијата $a\cos x$: $-|a|\le a\cos x\le|a|$. Графикот на функцијата $y=a\sin x$ и $y=a\cos x$ се наоѓа меѓу правите $y=a$ и $y=-a$.

1 Нацртај го графикот на функциите:

а) $y=2\sin x$; б) $y=\frac{1}{2}\cos x$; в) $y=-2\cos x$.

а) Графикот на функцијата $y=2\sin x$ ќе го нацртаме на следниот начин:

1. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin x$;

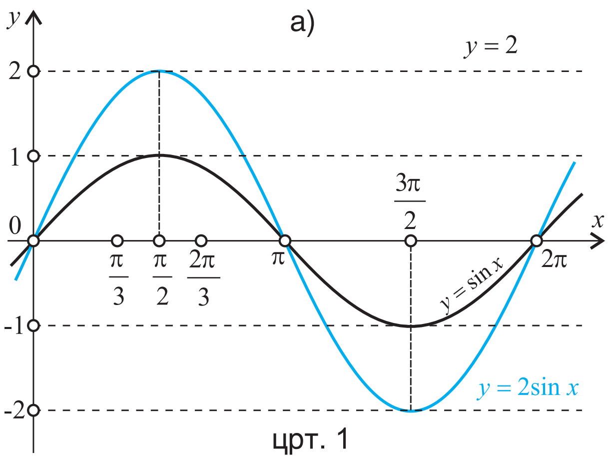
2. Го цртаме графикот на функцијата $y=2\sin x$, така што амплитудата на претходниот график ја зголемуваме двапати, т.е. максимумот и минимумот е 2 (црт. 1).

б) Графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\cos x$ ќе го нацртаме на следниот начин:

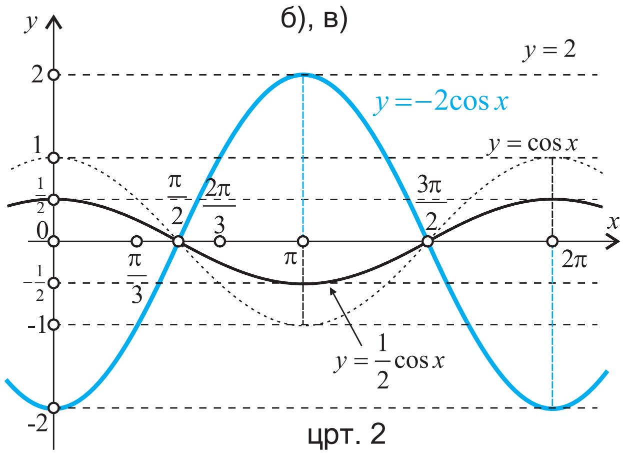
1. Го цртаме графикот на функцијата $y=\cos x$;

2. Го цртаме графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\cos x$, така што амплитудата на претходниот график ја намалуваме двапати (црт. 2).

в) Графикот на функцијата $y=-2\cos x$ е нацртан така што амплитудата на основната функција $y=\cos x$ е помножена со -2 (црт. 2).



црт. 1



црт. 2

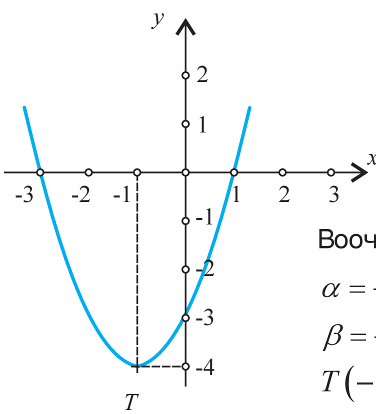
2 Графички претстави ги функциите:

а) $y=\frac{1}{2}\sin x$; б) $y=-2\sin x$; в) $y=2\cos x$; г) $y=-\frac{1}{2}\cos x$.

Потсети се!

- Како се црта графикот на функцијата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.
- Нацртај го графикот на функцијата $y=(x+1)^2-4$.

Графикот е нацртан со поместување на графикот на функција $y=x^2$ за 1 по x-оската влево и за 4 по y-оската надолу.



Воочи, $a=1,\ -\alpha=1$, т.е.

$\alpha=-1<0$;

$\beta=-4<0$;

$T(-1,-4)$.

Б Функцијата $y=\sin(x+c)$ има исти својства **1°**, **2°**, **3°** како и функцијата $y=\sin x$.

- Нулите на функцијата се одредуваат со решавање на равенката $x+c=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- Максимумот на функцијата го добиваме од равенката $x+c=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- Минимумот на функцијата го добиваме од равенката $x+c=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- Бројот c покажува за колку треба да се помести графикот на функцијата $y=\sin x$, по x-оската. Ваквото поместување се вика ***фазно поместување***. За колку треба да се помести графикот, тоа е всушност решение на равенката $x+c=0$, т.е. $x=-c$.
- Графикот на функцијата $y=\sin(x+c)$ ќе го нацртаме со помош на графикот на функцијата $y=\sin x$ со паралелно поместување на истиот налево за вредноста на $|c|$ ако $c>0$, или надесно ако $c<0$.

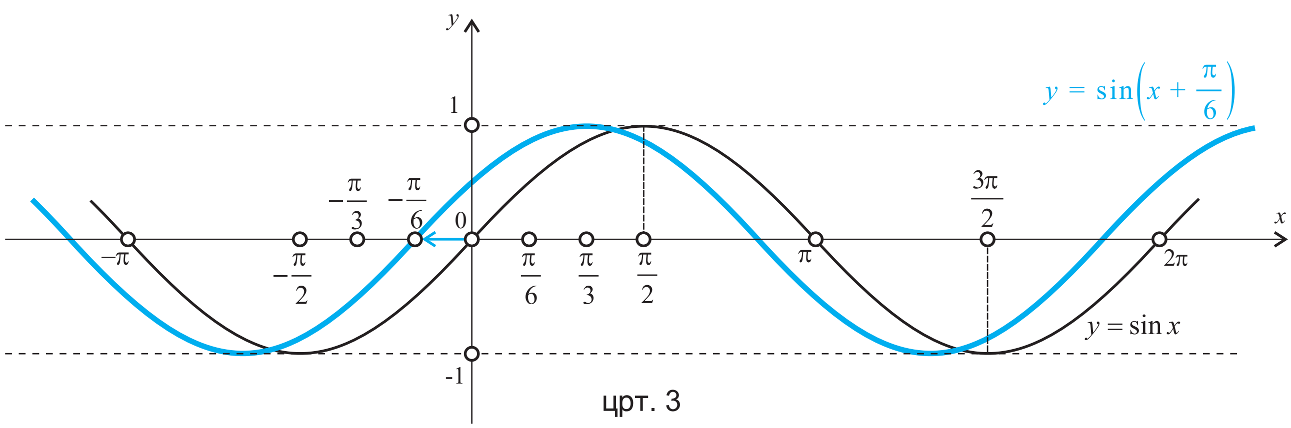
3 Графички претстави ја функцијата:

а) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение

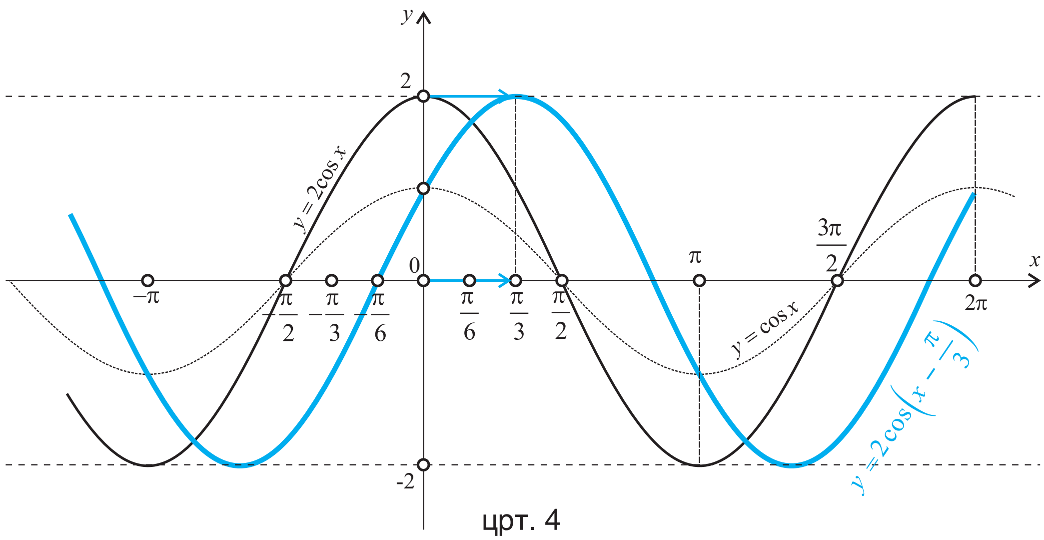
Во дадениов случај имаме $x+\frac{\pi}{6}=0$, т.е. $x=-\frac{\pi}{6}$ е почетна фаза.

а) Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin x$, а потоа со паралелно поместување на тој график за $\frac{\pi}{6}$ налево $\left(c=\frac{\pi}{6}>0\right)$ се добива графикот на функцијата $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ (црт. 3).



црт. 3

б) Графикот на функцијата $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ќе го нацртаме со поместување на графикот на функцијата $y=2\cos x$ за $\frac{\pi}{3}$ надесно, бидејќи од $x-\frac{\pi}{3}=0$ следува $x=\frac{\pi}{3}$ е почетна фаза (црт. 4).



црт. 4

4 Нацртај го графикот на функциите: а) $y=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Задачи

Графички претстави ги функциите:

1 а) $y=-\sin x$; б) $y=\frac{1}{2}\sin x$; в) $y=-\frac{1}{2}\cos x$; г) $y=3\cos x$.

2 а) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; в) $y=\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

3 а) $y=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$; б) $y=-\frac{3}{2}\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

11 ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИТЕ $y=a\sin bx$ и $y=a\cos bx$

А Функцијата $y=\sin bx$ ги има следниве својства:

1. ***Дефинирана*** е за секој реален број x.

2. Функцијата е ***ограничена***: $-1\le \sin bx\le 1$.

3. Функцијата $y=\sin bx$ е ***периодична*** со основен период $\frac{2\pi}{|b|}$, бидејќи

$$\sin b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)=\sin\left(bx+b\cdot\frac{2\pi}{b}\right)=\sin(bx+2\pi)=\sin bx.$$

4. Функцијата е ***непарна***, бидејќи $\sin(-bx)=-\sin bx$.

5. ***Нулиѿе*** на функцијата ги добиваме од равенката:

$$\sin bx = 0 \text{ за } bx = k\pi, \text{ т.е. за } x = \frac{k\pi}{b},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

6. ***Максимумоѿ*** го добиваме од равенката:

$$\sin bx = 1 \text{ за } bx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ т.е. за } x = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

7. ***Минимумоѿ*** го добиваме од равенката:

$$\sin bx = -1 \text{ за } bx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ т.е. за } x = \frac{1}{b}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Воочи дека бројот b го менува периодот: $T = \frac{2\pi}{|b|}$ е основен период.

1 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y = \frac{3}{2}\sin 2x$; б) $y = \sin\frac{x}{2}$.

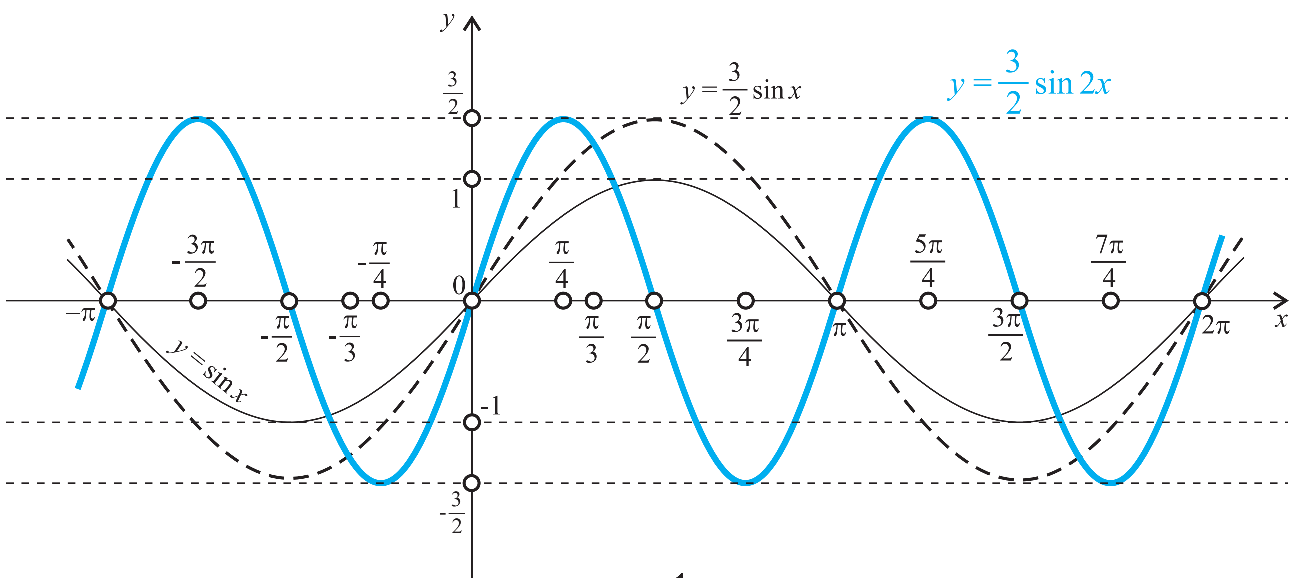
а) Графикот на функцијата $y = \frac{3}{2}\sin 2x$ ќе го нацртаме на следниов начин:

1. Го цртаме графикот на функцијата $y = \sin x$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y = \frac{3}{2}\sin x$.

3. Периодот на функцијата $y = \frac{3}{2}\sin 2x$ е $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Значи, во однос на синусоидата, графикот на функцијата $y = \frac{3}{2}\sin 2x$ е „збиен” во правец на x-оската, при што периодот 2π на синусоидата ќе биде „збиен” на интервалот $(0, \pi)$ (црт. 1).



црт. 1

Б **2** Нацртај го графикот на функцијата: а) $y = 2\cos\frac{x}{2}$; б) $y = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Решение

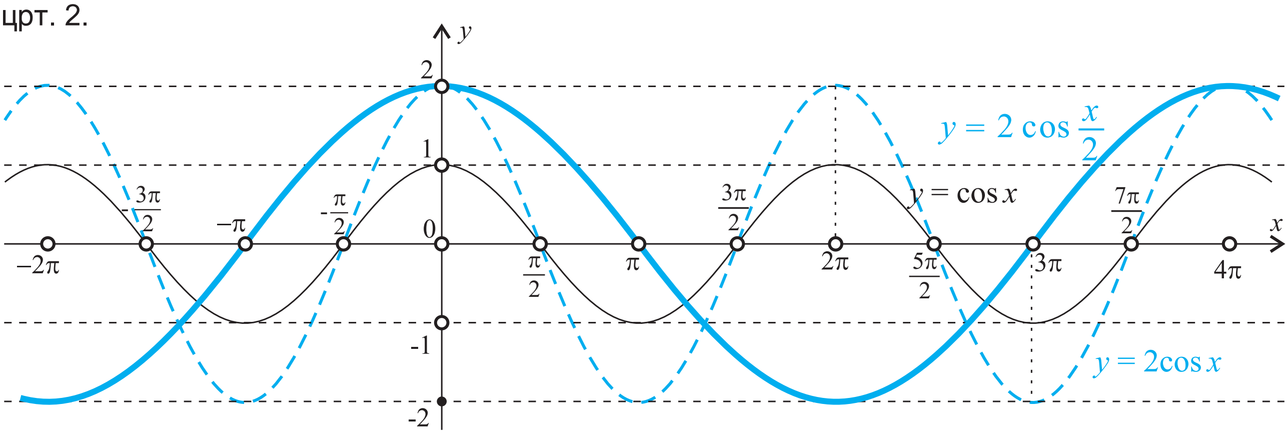
а) Графикот на функцијата $y = 2\cos\frac{x}{2}$ ќе го нацртаме на следниов начин.

1. Го цртаме графикот на функцијата $y = \cos x$.

2. Го цртаме графикот $y = 2\cos x$.

3. Периодот на функцијата е $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$.

Значи, во однос на графикот $y = 2\cos x$, графикот $y = 2\cos\frac{x}{2}$ ќе биде „растегнат" во правец на x-оската, при што периодот 2π на косинусоидата ќе биде растегнат на интервалот $(0, 4\pi)$ црт. 2.



црт. 2

Својствата на функцијата $y = 2\cos\frac{x}{2}$ се:

1. $D_f = \mathbb{R}$.

2. $V_f = [-2, 2]$.

3. Функцијата е парна, бидејќи $2\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\cos\frac{x}{2}$.

4. $y = 0$ за $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. $y_{max} = 2$ за $x = 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. $y_{min} = -2$ за $x = 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

7. Функцијата е периодична со основен период 4π.

Задачи

Нацртај го графикот на функцијата:

1 а) $y = \sin 3x$; б) $y = \sin\frac{x}{3}$; в) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; г) $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$.

2 а) $y = \cos 3x$; б) $y = \cos\frac{x}{3}$; в) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}$; г) $y = -\frac{3}{2}\cos\frac{2x}{3}$.

12 ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИТЕ $y=a\sin(bx+c)$ И $y=a\cos(bx+c)$

- Функцијата $y=a\sin(bx+c)$, може да се напише во следниов вид:

$$y=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)..$$

- Бројот a ја одредува амплитудата на функцијата.
- Бројот $|b|$ ја одредува фреквенцијата (зачестеноста), т.е. периодот на функцијата; $T=\frac{2\pi}{|b|}$ е основен период
- Бројот $\frac{c}{b}$ е фазно поместување.

Според тоа графикот на фунцкијата $y=a\sin(bx+c)$ ќе го нацртаме на следниов начин:

1. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin x$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin bx$, така што периодот $(0,2\pi)$ на синусоидата го сместуваме („збиваме” или „растегаме”) во период $\left(0,\frac{2\pi}{|b|}\right)$.

3. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)$, така што претходниот график го поместуваме по x-оската за вредноста на $\left|\frac{c}{b}\right|$, налево ако $\frac{c}{b}>0$, или надесно ако $\frac{c}{b}<0$.

4. Амплитудата на претходната функција ја зголемуваме, односно ја намалуваме a пати.

1 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=-\frac{3}{2}\sin\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение

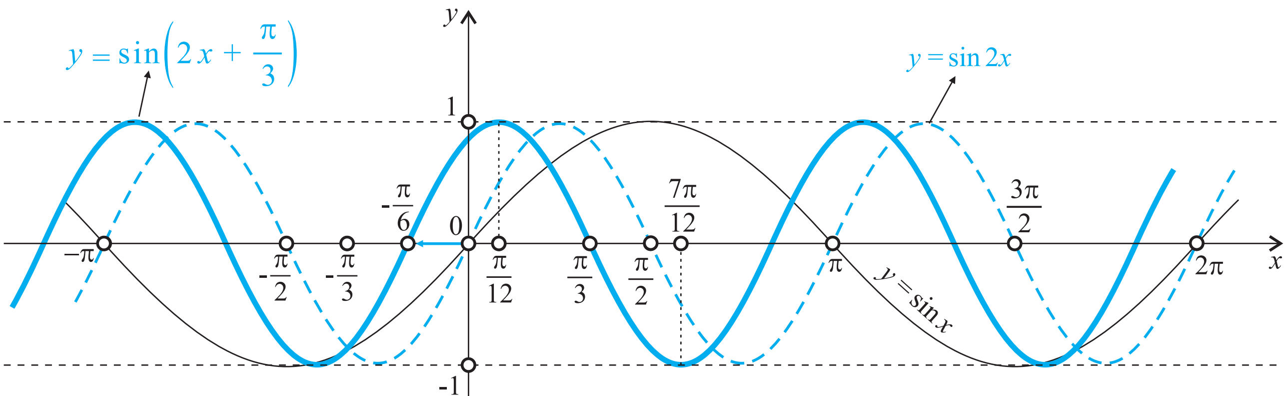
а) За функцијата $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, $a=1,\ b=2,\ c=\frac{\pi}{3}$.

1. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin x$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin 2x$, така што периодот 2π на синусоидата го „збиваме” во интервалот од $(0,\pi)$, т.е. основен период $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

3. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, така што графикот на претходната функција го поместуваме за $\frac{\pi}{6}$ налево.

Графикот на дадената функција е прикажан на црт.1.



црт. 1

2 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y = 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \frac{1}{2}\cos(3x - \pi)$.

Решение

а) За дадената функција $y = 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ имаме $a = 3,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{\pi}{4}$;

- $a = 3,$ значи графикот е меѓу правите $y = 3$ и $y = -3.$
- Периодот на функцијата е $T = 4\pi.$
- Фазното поместување е $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{2}.$

Графикот на дадената функција ќе го нацртаме на следниов начин.

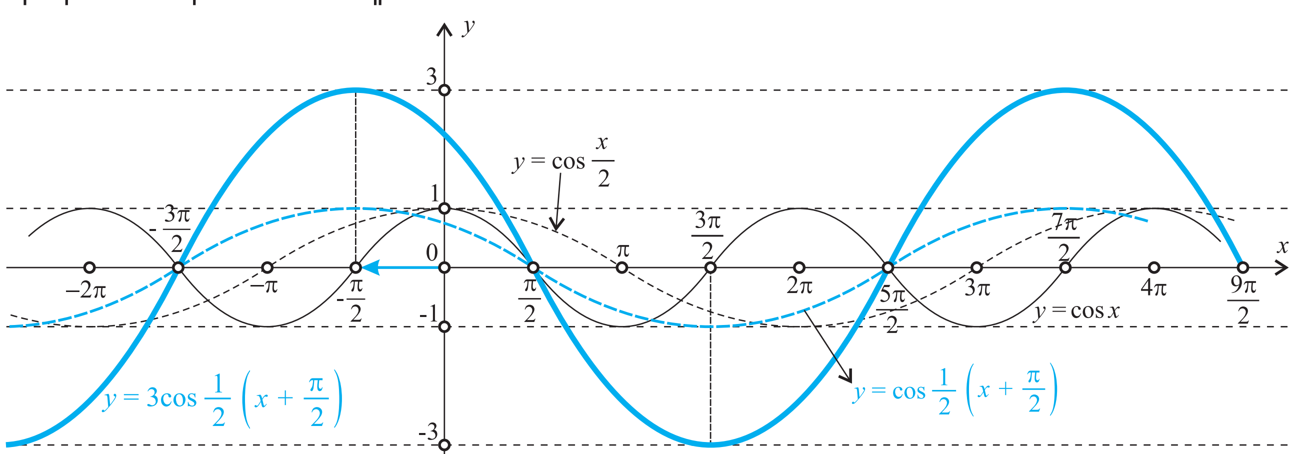
1. Го цртаме графикот на фунцкијата $y = \cos x.$

2. Го цртаме графикот на функцијата $y = \cos\frac{x}{2}$, така што претходниот график што е во интервалот $(0, 2\pi)$ го „растегаме” во интервалот $(0, 4\pi).$

3. Го цртаме графикот на функцијата $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ така што претходниот график го поместуваме за $\frac{\pi}{2}$ (фазно поместување) налево.

4. Бараниот график на функцијата $y = 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ го добиваме така што амплитудата ја зголемуваме за 3 пати.

Графикот е прикажан на црт.2.



црт. 2

■ Графикот на секоја тригонометриска функција може да се нацрта и со одредување на карактеристичните точки на функцијата, т.е. со одредување на нулите на функцијата, на точките во кои функцијата има минимум, односно максимум.

■ За функцијата $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ имаме:

Нули: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$:

$$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$k=0,\ x=-\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{12};$$

$$k=1,\ x=\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{12};$$

$$k=-1,\ x=-\frac{2\pi}{3}=-\frac{8\pi}{12};$$

max: $y=1$:

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$k=0,\ x=\frac{\pi}{12};$$

$$k=-1,\ x=\frac{11\pi}{12};$$

$$k=1,\ x=\frac{13\pi}{12};$$

min: $y=-1$:

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$k=0,\ x=\frac{7\pi}{12};$$

$$k=1,\ x=\frac{19\pi}{12};$$

$$k=-1,\ x=-\frac{5\pi}{12}.$$

Графикот на функцијата е прикажан на црт. 3.

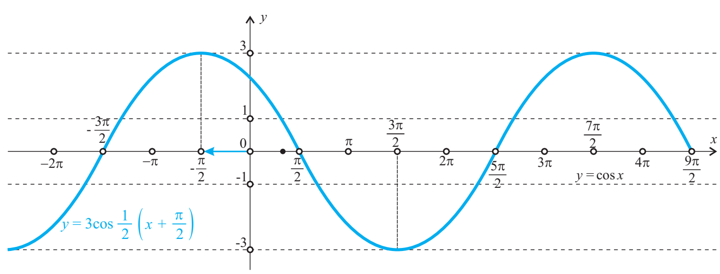
црт. 3

■ б) За функцијата $y=3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

1. Нулите се: $x\in\left\{-\frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\dots\right\}$.

2. $y_{\max}=3$ за $x\in\left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\dots\right\}$.

3. $y_{\min}=-3$ за $x\in\left\{-\frac{5\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\dots\right\}$.



црт. 4

Графикот на функцијата е прикажан на црт. 4.

Задачи

Нацртај го графикот на функцијата:

1 а) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\sin\left(\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.

2 а) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=-\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

13

ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИТЕ $y = a\sin(bx+c)+d$ и $y = a\cos(bx+c)+d$

Бројот d ги зголемува $(\text{ако } d>0)$, ги намалува $(\text{ако } d<0)$ ординатите на секоја точка од графикот на функцијата $y=a\sin(bx+c)+d$ или $y=a\cos(bx+c)+d$.
Графикот се црта така што графикот на функцијата $y=a\sin(bx+c)$ или $y=a\cos(bx+c)$ го поместуваме за вредноста на d по y-оската: нагоре ако $d>0$, а надолу ако $d<0$.

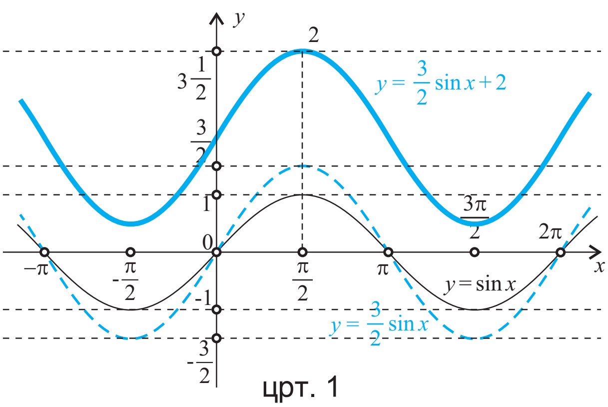
1 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=\frac{3}{2}\sin x+2$; б) $y=-2\cos x+1$.

Решение

а) **1.** Го цртаме графикот $y=\sin x$.

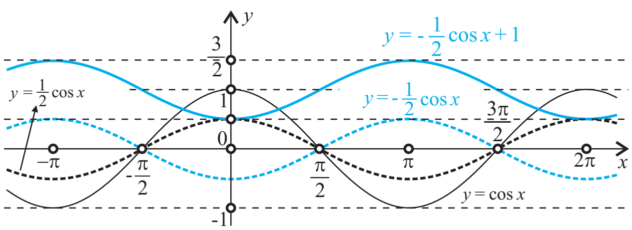
2. Го цртаме графикот $y=\frac{3}{2}\sin x$.

3. $d=2$, па претходниот график го поместуваме за 2 единици по y-оската нагоре (црт. 1).



црт. 1

б) Графикот на функцијата $y=-\frac{1}{2}\cos x+1$ е претставен на црт. 2.



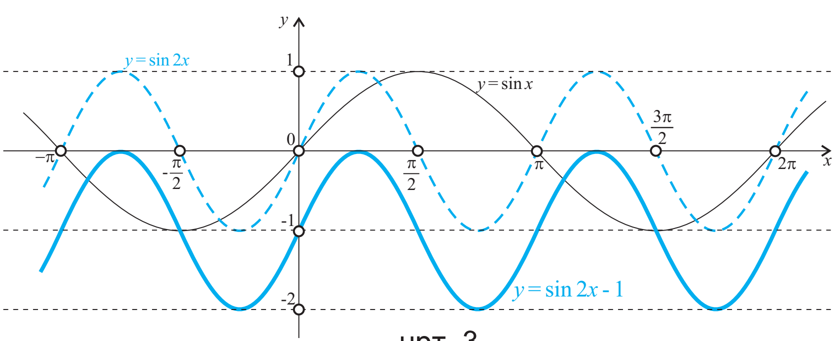
црт. 2

2 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=-\frac{3}{2}\sin 2x-1$; б) $y=2\cos x-1$.

3 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=\sin 2x-1$; б) $y=2\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$.

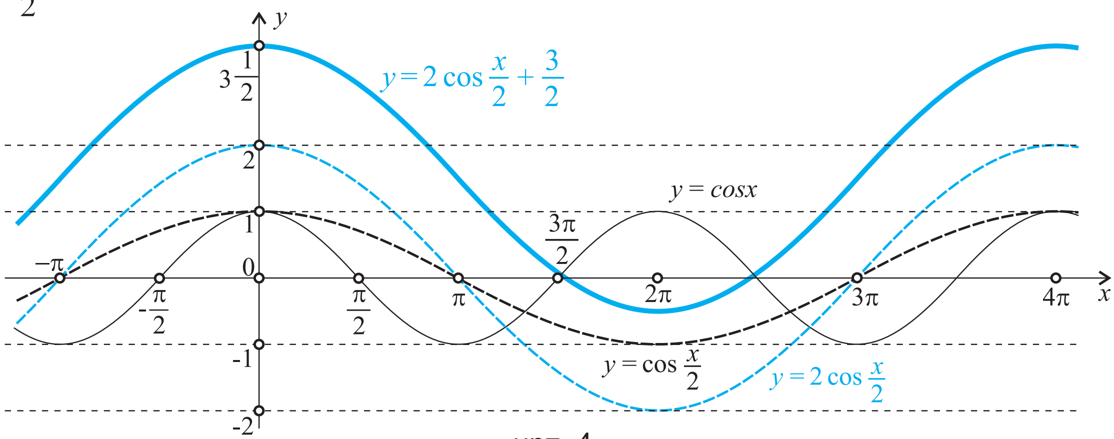
Решение

а) Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin 2x$, а потоа тој график вертикално го поместуваме по y-оската за $d=-1$, надолу (црт.3).



црт. 3

б) Го цртаме графикот на функцијата $y=2\cos\frac{x}{2}$, а потоа по y оската, нагоре го поместуваме за $d=1\frac{1}{2}$, црт. 4.



црт. 4

4 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=2\sin\frac{x}{2}-2$; б) $y=-\cos 2x-1$.

5 Нацртај го графикот на функциите: а) $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1$; б) $y=\frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$.

Решение

а) За функцијата $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1$, $a=2$; $b=2$; $c=\frac{\pi}{2}$; и $d=-1$.

- Периодот на функцијата е $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.
- Фазно поместување $\frac{c}{b}=\frac{\pi}{4}$.
- Графикот на функцијата ќе го нацртаме на следниот начин.

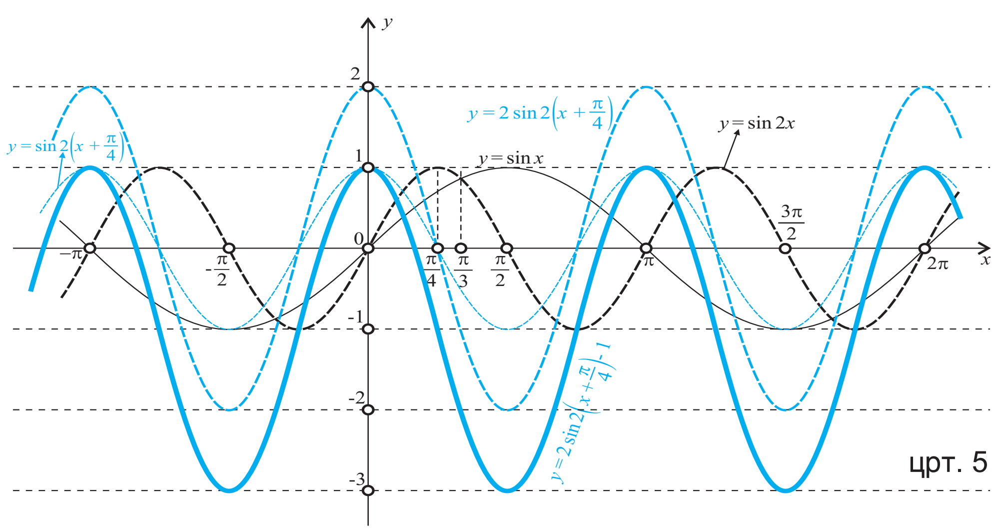
1. Го цртаме графикот на $y=\sin x$ (црт. 5).

2. Го цртаме графикот на $y=\sin 2x$.

3. Го цртаме графикот на $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Го цртаме графикот $y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Го цртаме графикот $y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ (црт. 5).



црт. 5

б) Го цртаме графикот на функцијата $y=\frac{3}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, со помош на графикот на функцијата $y=\frac{3}{2}\cos x$ кој го поместуваме за $\frac{\pi}{6}$ надесно. Така добиениот график го поместуваме по y-оска за $d=-1$ надолу. Графикот на функцијата нацртај го сам.

Задачи

Графички претстави ги функциите:

1 а) $y=-2\sin x+1$;

б) $y=\frac{1}{2}\cos x-2$.

2 а) $y=3\sin\frac{x}{2}-1$;

б) $y=-2\cos 2x+1$.

3 а) $y=-\frac{3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$;

б) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

14 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y=a\operatorname{tg}(bx+c)+d$

Потсети се!

- Функцијата $y=\operatorname{tg}x$ е дефинирана за секој реален број $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
- Функцијата $y=\operatorname{tg}x$ е периодична со основен период π.
- Функцијата $y=\operatorname{tg}x$ е непарна, т.е. $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$.
- Ако аголот α е во првиот квадрант и се стреми кон $90^{\circ}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, тогаш функцијата $\operatorname{tg}\alpha\to+\infty$.
- Ако аголот α е во вториот квадрант и се стреми кон $90^{\circ}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, тогаш функцијата $\operatorname{tg}\alpha\to-\infty$.

А **1** Нацртај го графикот на функцијата $y=\operatorname{tg}x$.

Решение

- За функцијата ќе составиме табела за некои вредности на аргументот $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

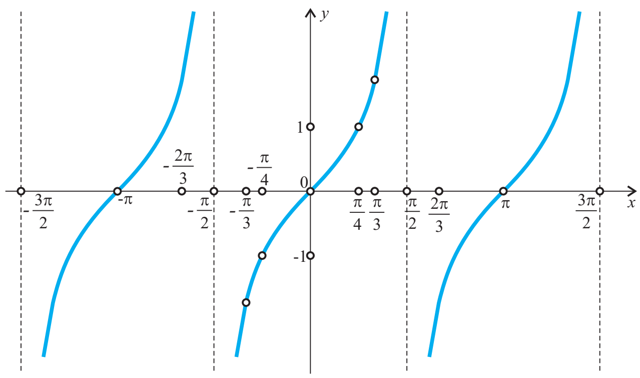
x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg}x$	$-\sqrt{3}=-1,73$	-1	$-0,58$	0	$0,58$	1	$\sqrt{3}=1,73$

Користејќи го својството:

Ако $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha\to\frac{\pi}{2}$, тогаш $\operatorname{tg}\alpha\to+\infty$.

Од својството на непарност на функцијата $(\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x)$ имаме, ако $\alpha\in\left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha\to-\frac{\pi}{2}$, тогаш $\operatorname{tg}\alpha\to-\infty$. Според тоа ќе го нацртаме графикот на функцијата $y=\operatorname{tg}x$ во интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Бидејќи функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е периодична со основен период π, графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ ќе го добиеме така што графикот што е во интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ќе го поместиме во секој нареден интервал со должина π, влево и вдесно.



■ Воочи, функцијата $y = \operatorname{tg} x$ не е дефинирана за $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Графикот се вика ***тангенсоида***.

■ Својства на функцијата $y = \operatorname{tg} x$.

1. Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е дефинирана за секој реален број $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Функцијата е ***неограничена***: $-\infty < \operatorname{tg} x < +\infty$.

3. Функцијата е ***периодична***, со основен период π: $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Бидејќи $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е ***непарна***, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

5. ***Нулите*** на функцијата се во точките $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x \in \{\ldots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$.

6. Функцијата $y = \operatorname{tg} x$ ***расте*** во секој интервал $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k\pi + 1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$.

7. Правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ се вертикални ***асимптоти*** на графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$.

2 Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Решение

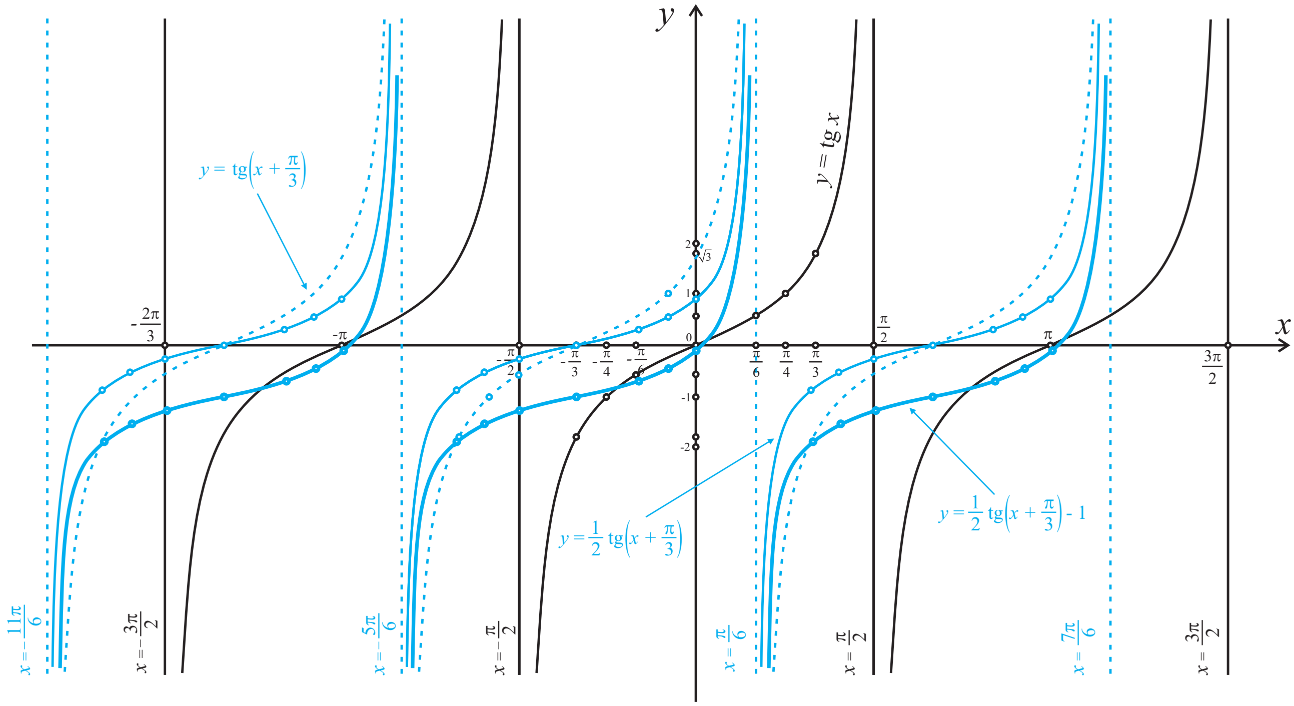
■ Графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ ќе го нацртаме на следниот начин:

1. Го цртаме графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ во интервал $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (асимптотите) и графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ ги поместуваме за $\frac{\pi}{3}$ по x-оската влево, со што го добиваме графикот $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3. Ординатите на точките од претходниот график ги множиме со $\frac{1}{2}$, (ги намалуваме два пати) со што го добиваме графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ ќе го добиеме така што претходниот график ќе го поместиме по y-оската за вредноста $d = -1$ надолу.



3 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$; б) $y=-\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$.

Задачи

1 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $y=\operatorname{tg}x$, $y=2\operatorname{tg}x$ и $y=0{,}5\operatorname{tg}x$.

2 Нацртај график на функцијата: а) $y=-2\operatorname{tg}x$; б) $y=0{,}5\operatorname{tg}(-x)$.

3 Нацртај график на функцијата: а) $y=1+\operatorname{tg}x$; б) $y=1-\operatorname{tg}x$.

4 Нацртај график на функцијата: а) $y=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y=-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

2 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 $\sin 120^0$ е:

А $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; Б $-\dfrac{1}{2}$; В $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; Г $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2 $\cos 210^0$ е:

А $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; Б $-\dfrac{1}{2}$; В $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; Г $\dfrac{1}{2}$.

3 $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$ е:

А $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; Б $-\sqrt{3}$; В -1; Г $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 Ако α е остар агол, тогаш $\sin\left(180^0+\alpha\right)$ е:

А $\sin\alpha$; Б $\cos\alpha$; В $-\sin\alpha$; Г $-\cos\alpha$.

5 Ако α е остар агол, тогаш $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ е:

А $-\sin\alpha$; Б $-\cos\alpha$; В $\sin\alpha$; Г $\cos\alpha$.

6 $\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\pi$ е:

А -2; Б 0; В 1; Г 2;

7 Во тригонометриска кружница синус од произволен агол е ________________ на точката во која вториот крак на аголот ја сече ____________________________________.

8 Тангентата на тригонометриската кружница повлечена низ пресечната точка со позитивната насока на x-оската се вика ____________________________________.

9 Косинусот од произволен агол во тригонометриска кружница е позитивен ако вториот крак од аголот е во ________________ или ____________________ квадрант.

10 Неравенството $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha<0$ е точно ако аголот α е во ______________________ или ___________________ квадрант.

11 Нека $\cos\alpha=-\frac{5}{13}\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$. Пресметај ја вредноста на $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

12 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $\frac{2\sin\pi-2\sin30^0}{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{ctg}45^0}$; б) $\sin150^0+\cos240^0-\operatorname{tg}315^0$.

13 Докажи го идентитетот $\frac{\sin\left(270^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(180^0+\alpha\right)}{\cos\left(360^0-\alpha\right)}=-\operatorname{tg}\alpha$.

14 Дадена е функцијата $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. а) Нацртај го гарфикот на функцијата; б) Одреди ги нулите, точките на максимумот, односно минимумот на функцијата.

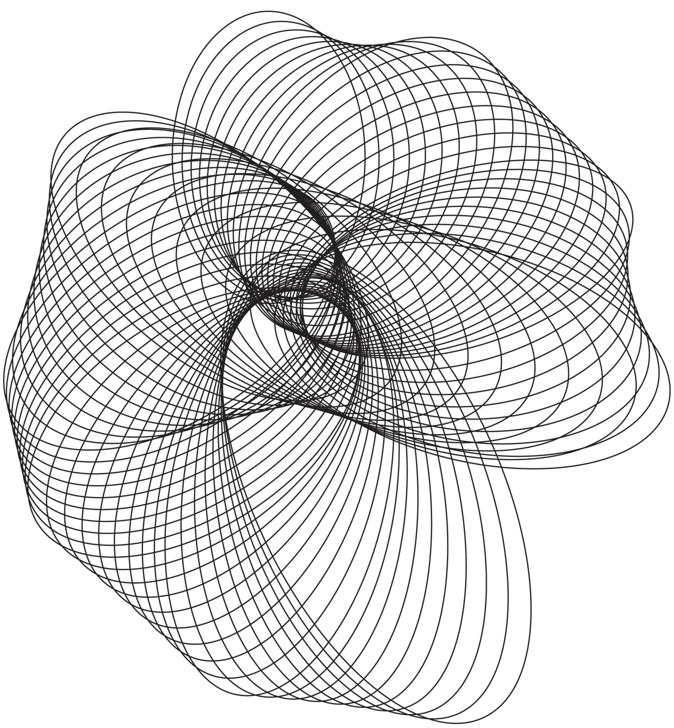
15 Нацртај го графикот на функцијата $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

ТЕМА 3

ТОЧКА ВО РАМНИНА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

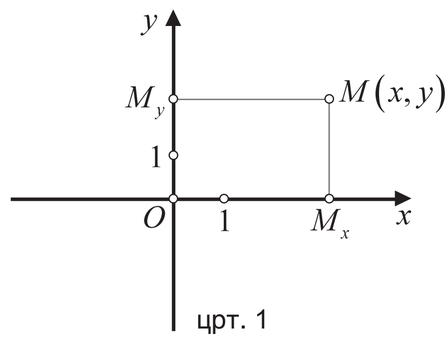
За реализација на темата може да се користат апликациите:
- Geogebra (Растојание меѓу две точки; Делење на отсечка во даден однос; Плоштина на триаголник)



1 ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

Потсети се!

- Декартовиот правоаголен координатен систем се состои од две заемно нормални бројни оски x и y, при што $x \cap y = \{O\}$. Правите x и y се викаат ***координатни оски***, а нивната пресечна точка O се вика ***координатен почеток***. Оската x се вика ***апсцисна оска***, а оската y се вика ***ординатна оска*** (црт. 1).



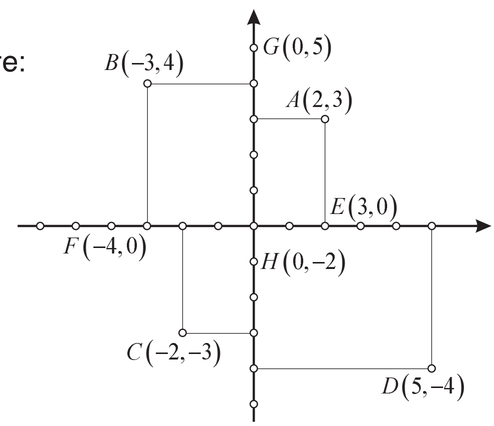
црт. 1

- Која било точка M во координатниот систем определена е со подреден пар реални броеви (x, y), кои се викаат ***координати*** на точката M. Важи и обратно, на секој подреден пар реални броеви одговара само една точка од координатниот систем.
- Точките на апцисната оска се со координати $(x, 0)$, а точките на ординатната оска се со координати $(0, y)$.

А **1** Претстави ги во координатен систем точките:

$A(2,3)$, $B(-3,4)$, $C(-2,-3)$, $D(5,-4)$,

$E(3,0)$, $F(-4,0)$, $G(0,5)$, $H(0,-2)$.



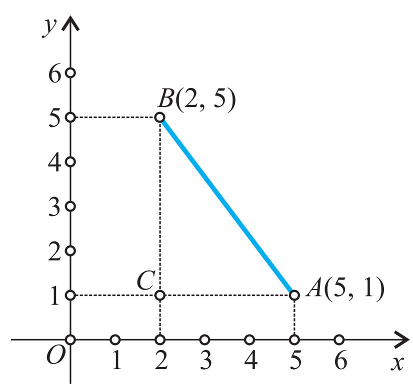
црт. 2

Воочи: точките чии координати се позитивни се во I квадрант; точките чии координати се негативни се во III квадрант; точките чија апциса е нагативна а ордината позитивна се во II квадрант; точките чија апциса е позитивна а ординатата е негативна се во IV квадрант (црт. 2).

- Во кој квадрант или на која оска се наоѓаат дадените точки?

Б **2** Точките $A(5, 1)$ и $B(2, 5)$ претстави ги во правоаголен координатен систем. Одреди го растојанието меѓу нив.

Решение



црт. 3

- Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни со координатните оски (црт. 3).
- Кои се координатите на пресечната точка C?

- Од кој вид (според аглите) е ΔABC?
- Одреди ги должините на отсечките AC и BC.

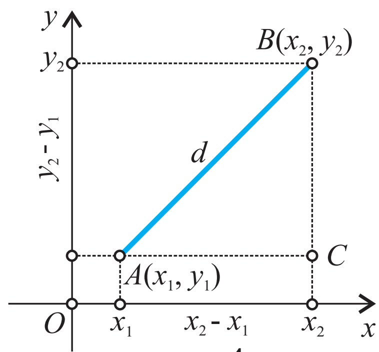
■ Воочи дека $\overline{AC} = 5 - 2 = 3,\ \overline{BC} = 5 - 1 = 4;$ според Питагоровата теорема $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

3 Во рамнината се дадени точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Одреди го растојанието d меѓу нив.

Решение

ΔABC е правоаголен со катети $\overline{AC} = x_2 - x_1$ и $\overline{BC} = y_2 - y_1$ (црт. 4) и хипотенуза $\overline{AB} = d.$ Според Питагоровата теорема имаме $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ или

$$\boxed{d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$



црт. 4

4 Одреди го растојанието меѓу точките: а) $A(7,9)$ и $B(10,3)$; б) $A(-4,-5)$ и $B(3,-4)$.

5 На x-оската одреди точка која е еднакво оддалечена од точките $A(0, 5)$ и $B(4, 2)$.

Решение

Потсети се дека, која било точка што е на x-оска е со координати $(x,0)$.

Нека бараната точка е $M(x, 0)$. Тогаш $\overline{MA} = \sqrt{(0-x)^2 + (5-0)^2};\ \overline{MB} = \sqrt{(4-x)^2 + (2-0)^2}.$

Од условот $\overline{MA} = \overline{MB}$ имаме $\sqrt{x^2 + 25} = \sqrt{16 - 8x + x^2 + 4};\quad x^2 + 25 = 16 - 8x + x^2 + 4,$ од каде што $x = -\frac{5}{8},$ т.е. $M\left(-\frac{5}{8}, 0\right).$

6 На y-оската одреди точка која е еднакво оддалечена од точките $A(-3,-5)$ и $B(4,-3)$.

7 На y-оската да се одреди точка што од точката $A(4,-6)$ е оддалечена за 5 единици.

Решение

- Колку е апсцисата на точка што лежи на y-оската?

■ Нека бараната точка е $M(0, y)$. Од условот на задачата
$\overline{MA} = 5,$ т.е. $\sqrt{(4-0)^2 + (-6-y)^2} = 5;\ 16 + 36 + 12y + y^2 = 25;\ y^2 + 12y + 27 = 0.$

■ По решавањето на квадратната равенка ги добиваме вредностите $y_1 = -9$ и $y_2 = -3,$ што значи дека постојат две такви точки: $M_1(0,-9)$ и $M_2(0,-3)$.

8 На x-оската да се одреди точка што од точката $A(5, 12)$ е оддалечена за 13 единици.

Задачи

1. Точките $A(3, 4)$, $B(-2, 4)$ и $C(2, 2)$ се темиња на еден триаголник. Одреди го периметарот на триаголникот.

2. Докажи дека триаголникот чии темиња се $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ и $C\left(-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$ е рамностран.

3. Докажи дека триаголникот со темиња $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$ и $C(-1, -3)$ е правоаголен.

4. Одреди ја равенката на геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точките $A(2, 2)$ и $B(4, 4)$.

■ Геометриско место на точки во рамнина е множество на точки кои што задоволуваат ист услов.

5. Одреди ги координатите на точката што е еднакво оддалечена од точките
а) $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 2)$; б) $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 4)$.

6. Точката $M(x, y)$ е еднакво оддалечена од точките $A(3, 5)$ и $B(-2, 4)$. Нејзиното растојание до y-оската е два пати поголемо од растојанието до x-оската.
Определи ги нејзините координати.

7. Дадени се две соседни темиња на квадратот $A(3, -7)$ и $B(-1, 4)$. Пресметај ја неговата плоштина.

8. Една подвижна точка, што имала почетна положба $M_0(3, 8)$, се преместува паралелно со y-оската. Да се определи нејзината положба кога таа ќе биде на еднакво растојание од точките $M_1(4, 7)$ и $M_2(-3, 2)$.

9. Една подвижна точка што имала почетна положба $M_o(2, 1)$ се преместува паралелно со x-оската. Да се определи нејзината положба кога таа ќе биде на растојание еднакво на 13 единици од точката $N(4, 6)$.

10. Докажи аналитички дека во правоаголниот триаголник отсечката d, која го поврзува темето на правиот агол со средината на хипотенузата, е еднаква на половина од хипотенузата.

2 ДЕЛЕЊЕ НА ОТСЕЧКА ВО ДАДЕН ОДНОС

Потсети се!

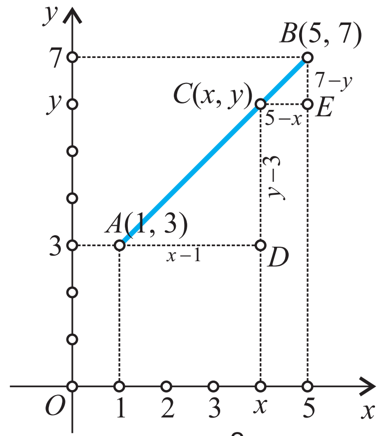
- Што е размер (т.е. однос меѓу две отсечки)?
- На отсечката AB (црт. 1) избрана е точка C.
  Што значи точката C да ја дели отсечката AB во однос $1:3$?

црт. 1

А **1** Одреди ги координатите на точката C, која отсечката AB, $A(1, 3)$ и $B(5,7)$ ја дели во однос $3 : 1$.

Решение

- Низ точката A повлекуваме права паралелна со x-оската, а низ C права паралелна со y-оската. Пресечната точка ја означуваме со D (црт. 2).
Низ C повлекуваме права паралелна со x-оската, а низ B права паралелна со y-оската. Пресечната точка ја означуваме со E (црт. 2).



црт. 2

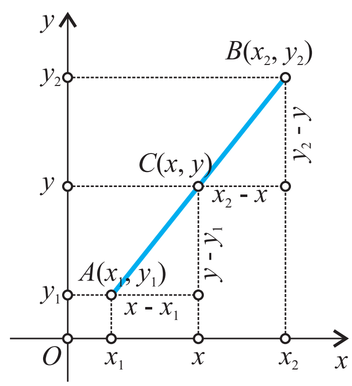
- Бидејќи точката $C(x,y)$ е меѓу точките A и B, следува дека броевите $x-1$ и $5-x$ се со исти знаци.

- Од сличноста на триаголниците ADC и CEB (правоаголни триаголници со еднакви остри агли) следува дека соодветните страни се пропорционални, т.е.
$\overline{AC}:\overline{CB}=(x-1):(5-x)$, а поради $\overline{AC}:\overline{CB}=3:1$ следува дека $(x-1):(5-x)=3:1$, т.е. $x=4$. Од $\overline{AC}:\overline{CB}=(y-3):(7-y)$ и $\overline{AC}:\overline{CB}=3:1$ следува дека $(y-3):(7-y)=3:1$, т.е. $y=6$. Значи, бараната точка е $C(4,6)$.

2 Одреди ги координатите на точката C, која отсечката AB, $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во даден однос $m : n = \lambda$.

Решение

- Бидејќи точката $C(x,y)$ лежи меѓу точките A и B (црт. 2), броевите $x-x_1$ и x_2-x се со исти знаци, па од сличноста на триаголни-ците и условот на задачата имаме:



црт. 3

$\overline{AC}:\overline{CB}=(x-x_1):(x_2-x)$ и $\overline{AC}:\overline{CB}=\lambda$, т.е.
$(x-x_1):(x_2-x)=\lambda$; $x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$; $x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2$, т.е.
$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. На сличен начин за ординатата y добиваме
$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Според тоа, бараната точка е $C\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\right)$.

3 Одреди ги координатите на точката C што отсечката AB ја дели во даден однос λ:
а) $A(-6,-2)$, $B(2,10)$, $\lambda=3$; б) $A(-1,2)$, $B(5,2)$, $\lambda=\dfrac{1}{2}$; в) $A(3,5)$, $B(-8,1)$, $\lambda=\dfrac{2}{7}$.

Решение

б) $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $x=\dfrac{-1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1.$ $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $y=\dfrac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{2}}=2.$ Значи, $C(1, 2)$.

- Ако точката C е средишна точка на отсечката AB, тогаш $\overline{AC}:\overline{CB}=1$, т.е. $\lambda=1$.
- Кои се координатите на точката C?

Запомни!

Координатите на точка, која дадена отсечка $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во однос $m:n=\lambda$, се одредуваат по формулите:

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.}$$

Координатите на средишната точка на отсечката AB се:

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.}$$

4 Одреди ги координатите на тежиштето на триаголникот чии темиња се точките:
а) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$; б) $A(2, 3)$, $B(-10, -4)$, $C(2, -8)$.

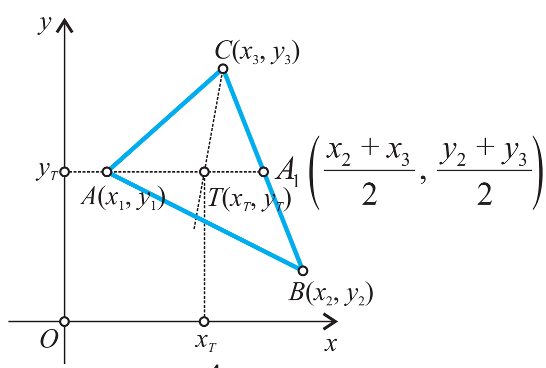
Решение

а) $A(x_1, y_1)$; $A_1\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ (црт. 4). Ако T е тежиште на ΔABC, тогаш: $\overline{AT}:\overline{TA_1}=2:1=\lambda$, па $\lambda=2$. Понатаму имаме:

$$x_T=\frac{x_1+2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};$$

$$y_T=\frac{y_1+2\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Значи, $T\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.



црт. 4

5 Отсечката AB, $A(-9, 5)$ и $B(11, -3)$ со точките M, N и P е поделена на четири еднакви делови. Одреди ги координатите на точките M, N и P.

Решение

- Точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda = 1:3$ (црт. 4), па

црт. 5

$$x_m = \frac{-9+\frac{1}{3}\cdot 11}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{-27+11}{3}}{\frac{4}{3}} = -4; \qquad y_m = \frac{5+\frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3.$$ Значи, $M(-4, 3)$.

- Координатите на точките N и P одреди ги сам.

Задачи

1. Одреди ги координатите на точката C која отсечката $A(-3, 1)$, $B(2, 5)$ ја дели во однос $3:1$.

2. Одреди ги координатите на тежиштето на триаголникот:
   а) $A(2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(-8, 2)$; б) $A(-5, 2)$, $B(-1, -6)$, $C(3, 4)$.

3. Отсечката $A(3, -6)$, $B(10, 8)$ е поделена со точките C, D, E и F на пет еднакви делови. Кои се координатите на тие точки?

4. Одреди ги координатите на четвртото теме на паралелограмот, ако три негови темиња се: а) $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$, $C(7, -6)$; б) $A(-10, 7)$, $B(5, -13)$, $C(14, 7)$.

5. Докажи дека правата што минува низ средините на две страни на триаголникот е паралелна со третата страна.
   Упатство: ΔABC постави го во координатен систем така што страната AB да лежи на x – оската, а темето A да се совпаѓа со координатниот почеток.

6. Отсечката AB, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ има должина d. Продолжи ја отсечката преку точката B за a единици. Кои се координатите на крајната точка на добиената отсечка?

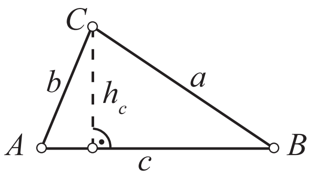
7. Отсечката AB, $A(1, -1)$ и $B(4, 5)$ да се продолжи во насока AB до точката C, така што нејзината должина да се зголеми три пати. Одреди ги координатите на точката C.

8. Точките $A(3, 5)$, $B(12, 2)$ и $C(8, 12)$ се темиња на триаголник. Одреди го:
   а) периметарот на триаголникот;
   б) координатите на средишните точки на страните;
   в) координатите на тежиштето.

3 ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

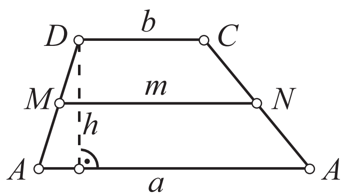
Потсети се!

- Плоштината P на триаголникот ABC е



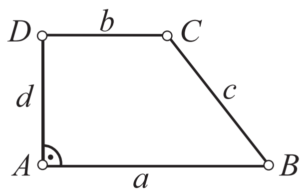
$$P=\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}.$$

- Плоштината P на трапезот $ABCD$ е



$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h=m\cdot h.$$

- Плоштината P на правоаголниот трапез $ABCD$ е



$$P=\frac{a+b}{2}\cdot d.$$

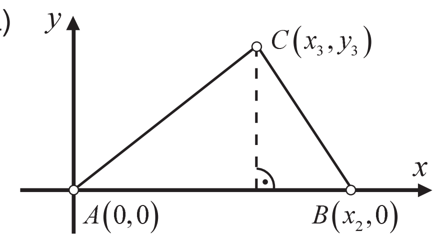
А **1** Одреди ја плоштината P на триаголникот ABC, ако координатите на неговите темиња се:

а) $A(0,0),\ B(x_2,0),\ C(x_3,y_3)$;

б) $A(0,0),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$.

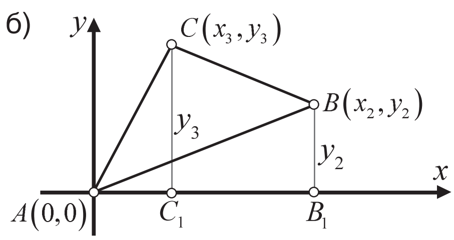
Решение

а)



$P=\dfrac{|x_2\cdot y_3|}{2}$ квадратни единици.

б)



$P=P_{\Delta AC_1C}+P_{C_1B_1BC}-P_{\Delta AB_1B}$ па

$$P=\left|\frac{x_3y_3}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}(x_2-x_3)-\frac{x_2y_2}{2}\right|.$$

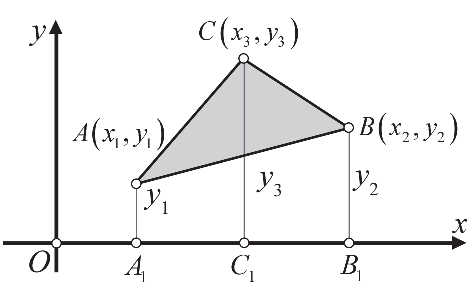
2 Пресметај ја плоштината P на триаголникот ABC, ако:

а) $A(0,0),\ B(5,0),\ C(4,3)$; б) $A(0,0),\ B(7,2),\ C(5,3)$.

Б **3** Изведи формула за плоштина на триаголник ABC ако:

$A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ C(x_3,y_3)$.

Решение



- Според ознаките на цртежот имаме:

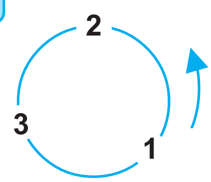
$$P_{\Delta ABC}=P_{A_1C_1CA}+P_{C_1B_1BC}-P_{A_1B_1BA}$$

$$P_{\Delta ABC}=\left|\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_2-x_3)-\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)\right|,$$

$$P_{\Delta ABC}=\left|x_1\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_1+y_3}{2}\right)+x_2\left(\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+x_3\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_2-y_3}{2}\right)\right|,\text{ т.е.}$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)\right|.$$

Воочи, претходната формула полесно ќе ја запомниш ако ја користиш кружницата на индекси дадена на цртежот. Имено, според насоката означена со стрелка се распоредени индексите во формулата.



- Ако $P_{\Delta ABC}=0$, тогаш равенството $x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)=0$ претставува услов за колинеарност на три точки.

4 Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(2,-1)$, $B(-3,4)$, $C(-4,-5)$.

5 Провери дали точките $A(-4,3)$, $B(2,-1)$, $C(3,4)$ се колинеарни.

Задачи

1. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(-1,0)$, $B(3,5)$, $C(0,1)$.
2. Дали точките $A(2,5)$, $B(-1,-1)$, $C(0,1)$ се колинеарни?
3. Одреди ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$, ако $M(-1,-3)$, $N(5,1)$, $P(2,4)$, $Q(-2,1)$.
4. На x-оската одреди точка D која со точките $E(6,2)$ и $F(-1,4)$ зафаќа триаголник со плоштина 12 квадратни единици.
5. Одреди ја плоштината на триаголникот, чии темиња се:
   а) $A(1, 0)$, $B(3, 1)$, $C(0, 2)$; б) $A(-4, -3)$, $B(5, 1)$, $C(-3, 5)$; в) $A(a, 0)$, $B(a+b, a)$, $C(0, b)$.
6. Одреди ја плоштината на четириаголникот, чии темиња се:
   а) $A(2, 3)$, $B(-3, 4)$, $C(-1, -4)$, $D(3, -1)$; б) $A(-1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(0, 5)$, $D(-2, 3)$.
7. Точките $A(-2, -1)$, $B(0, 2)$ и $C(4, y_3)$ се темиња на триаголникот ABC, чија плоштина е $P=7$. Одреди ја ординатата y_3 на точката C.

3 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Точката M припаѓа само на x-оската ако нејзините координати се:

А. $(0,0)$; Б. $(x\neq 0,0)$; В. $(x,0)$; Г. $(0,x)$.

2 Симетричната точка на точката $M(-4,5)$ во однос на координатниот почеток е точката:

А. $(-4,5)$; Б. $(4,5)$; В. $(-4,-5)$; Г. $(4,-5)$.

3 Растојанието од точката $M(0,y)$ до y-оската е:

А. 0; Б. y; В. $\sqrt{y}$; Г. $\sqrt{y^2}$.

4 Која од дадените точки е средна точка на отсечката AB, $A(-3,2)$, $B(-3,-6)$?

А. $M(-1,-2)$ Б. $N(-1,2)$ В. $P(-3,-2)$ Г. $Q(1,2)$

5 Ако три точки формираат триаголник со плоштина нула, тогаш тие се:

А. колинеарни Б. неколинеарни

6 Ако точката $M(x,y)$ припаѓа на симетралата на првиот и третиот квадрант, тогаш нејзините координати x и y се ________________.

7 Растојанието од точката $M(3,4)$ до координатниот почеток $O(0,0)$ е ______________.

8 Апсцисата на точката M која отсечката AB: $A(a,b)$, $B(3a,b^2)$ ја дели во однос $2:3$ има вредност _____________.

9 Дадени се точките $P(-1,1)$ и $S(2,2)$. Координатитет на точката $M(x,y)$ која е симетрична на P во однос на S се: $x =$ _____, $y =$ _____.

10 Точките $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ се колинеарни ако нивните координати го задоволуваат равенството ______________________________.

11 Одреди го растојанието AB ако $A\left(2\frac{1}{2},-2\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(5\frac{1}{2},1\frac{2}{3}\right)$.

12 Даден е триаголникот ABC: $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,2)$. Одреди ги координатите на тежиштето T на триаголникот.

13 Одреди ги координатите на темето D на паралелограмот $ABCD$ ако: $A(2,3)$, $B(-4,5)$, $C(6,-1)$.

14 Пресметај ја плоштината на паралелограмот ABC, ако: $A(2,3)$, $B(-4,5)$, $C(6,-1)$, $D(12,-3)$.

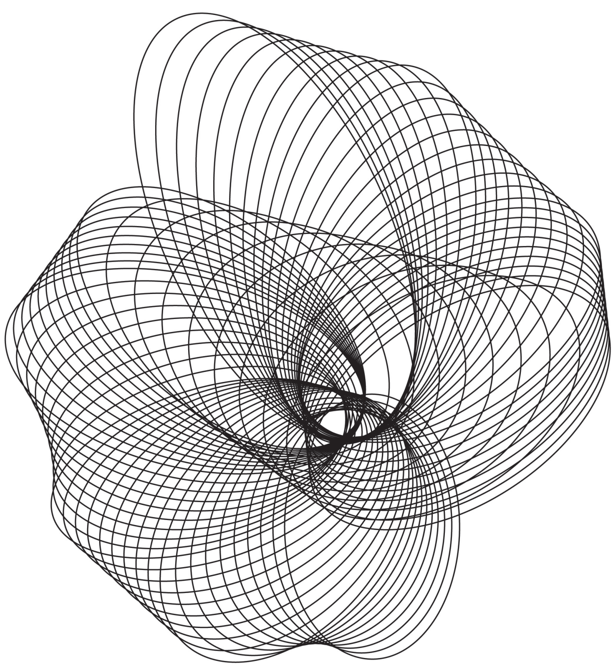
15 Провери дали триаголникот ABC е правоаголен, ако $A(1,4)$, $B(5,1)$, $C(1,1)$.

ТЕМА 4

ПРАВА ВО РАМНИНА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

За реализација на темата може да се користат апликациите:
- Geogebra (Равенка на права низ една и низ две точки; Пресек на две прави: агол меѓу две прави, услов за паралелност, услов за нормалност)



1

ОПШТ ВИД НА РАВЕНКА НА ПРАВА

Потсети се!

- Со колку точки е определена една права?
- Колку прави минуваат низ една точка?
- Низ кои било две различни точки минува една и само една права.
- Нацртај го графикот на линеарната функција $2x - y = 1$.

Аналитичката геометрија се занимава со одредување на положбата на точки во рамнината со помош на систем броеви, наречени координати на точка. Со тоа, изучувањето на геометриските фигури се врши со средства на алгебрата врз основа на методот на координати.

- Основни задачи на аналитичката геометрија се:

1) ако се познати геометриските својства на дадена линија, да се најде равенка на таа линија;

2) ако се знае равенката на дадена линија, да се најдат геометриските својства на таа линија.

Знаејќи дека низ две различни точки минува само една права, си поставуваме задача да најдеме равенка на таа права.

1 Дадени се точките $A(2, 1)$ и $B(5, 4)$. Одреди ја зависноста меѓу координатите на точките A и B и која било точка $P(x, y)$ од правата што минува низ точките A и B.

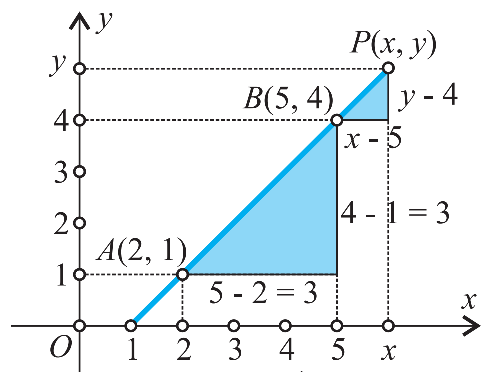
Решение

- Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни со x-оската, а низ точките B и P прави паралелни со y-оската (црт. 1).
- Какви се меѓу себе триаголниците ACB и BDP?

$\Delta ACB \sim \Delta BDP$, па од сличноста следува

$(x-5):3 = (y-4):3$, од каде што

$x - 5 = y - 4$, т.е. $x - y - 1 = 0$.



црт. 1

Воочуваш дека зависноста меѓу координатите на точките A, B и P е искажана со една равенка, линеарна по променливите x и y.

Теорема 1. Секоја права во координатната рамнина може да се изрази со равенка, линеарна во однос на координатите x и y на која било точка од правата.

Доказ

Нека $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ се дадени точки и нека $M(x, y)$ е која било точка од правата p што минува низ точките P и Q. Низ точките P и Q повлекуваме прави паралелни со x-оската.

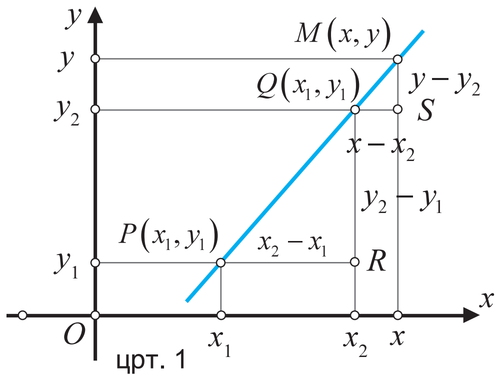
Низ точките Q и M повлекуваме прави паралелни со y-оската. Нека пресечните точки на повлечените прави се R и S; тогаш: $R(x_2, y_1)$ и $S(x, y_2)$.

$$\Delta PRQ \sim \Delta QSM.$$ Зошто?

Од сличноста на триаголниците PRQ и QSM следува

$\frac{\overline{SM}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}}$, т.е. $\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, од каде што

што $(y - y_2)(x_2 - x_1) = (x - x_2)(y_2 - y_1)$.



црт. 1

По извршеното сведување се добива равенката $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Разликите $y_1 - y_2$, $x_2 - x_1$ и $x_1y_2 - x_2y_1$ се константни броеви, па можеме да ги означиме со A, B и C, соодветно. Тогаш равенката е од видот

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

и се вика ***ойшти вид равенка на права***. Таа го изразува условот при кој точката $M(x, y)$ лежи на правата p. Значи, координатите на секоја точка $M(x, y)$ што лежи на правата p ја задоволуваат равенката, а координатите на точките што не лежат на правата p, не ја задоволуваат добиената равенка.

Важи и обратното:

Теорема 2. Секоја равенка од видот $Ax + By + C = 0$, каде што A, B и C се константни коефициенти и такви што барем еден од коефициентите A и B е различен од нула, претставува равенка на права.

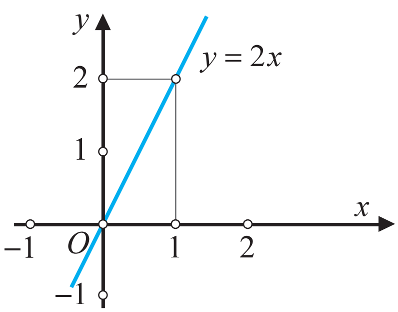
3 Нацртај ја правата: а) $2x - y = 0$; б) $x - 2 = 0$; в) $3y - 5 = -8$.

Решение

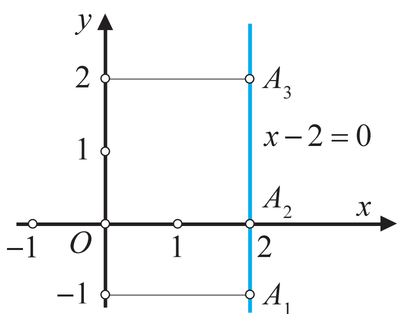
а)

x	0	1
y	0	2

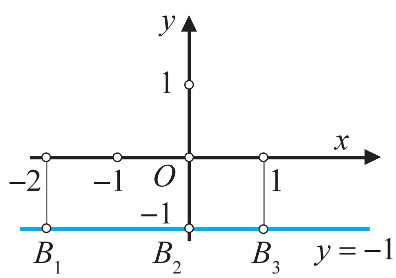
Воочи дека правата минува низ $O(0, 0)$ (црт.3).



црт. 3



црт. 4



црт. 5

б) Равенката $x - 2 = 0$ е еквивалентна со $x + 0 \cdot y - 2 = 0$, која ја задоволуваат координатите на точките $A(2, y)$, каде што y е кој било реален број, т.е. $A_1(2, -1), A_2(2, 0), A_3(2, 2)$ итн. црт. 4.

в) Равенката $3y-5=-8$ е еквивалентна со $0\cdot x+3y+3=0$, која ја задоволуваат координатите на точките $B(x,-1)$, каде што x е кој било реален број, т.е. $B_1(-2,-1), B_2(0,-1), B_3(1,-1)$ итн. (црт. 5).

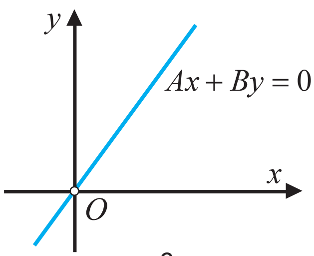
3 Каква положба има правата $Ax+By+C=0$ во рамнината, ако:

а) $C=0$; б) $B=0$; в) $A=0$; г) $A=0$ и $C=0$; д) $B=0$ и $C=0$.

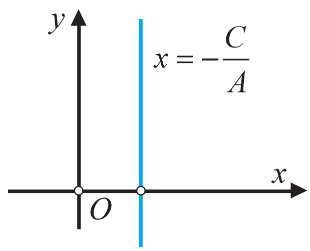
Решение

- а) Ако $C=0,\ A\neq 0$ и $B\neq 0$, тогаш равенката е од видот $Ax+By=0$. Координатите на координатниот почеток $O(0,0)$ ја задоволуваат равенката $Ax+By=0$. Значи, правата од видот $Ax+By=0$ минува низ координатниот почеток (црт. 6).

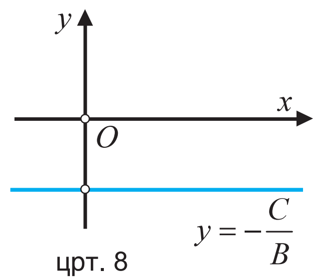
- б) Ако $B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$, тогаш равенката е од видот $Ax+C=0$, т.е. $x=-\dfrac{C}{A}$. Тоа значи дека сите точки на правата имаат иста апсциса $x=-\dfrac{C}{A}$, т.е. правата е паралелна со y-оската и е на растојание $\left|-\dfrac{C}{A}\right|$ единици од неа (црт.7).



црт. 6



црт. 7



црт. 8

- в) Ако $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, тогаш равенката е од видот $By+C=0$ или $y=-\dfrac{C}{B}$. Тоа значи дека сите точки на правата имаат иста ордината $y=-\dfrac{C}{B}$, т.е., правата е паралелна со $x-$оската и е на растојание $\left|-\dfrac{C}{B}\right|$ единици од неа (црт.8).

- г) Ако $A=0,\ C=0,\ B\neq 0$, тогаш $y=0$ е равенка на x-оската.

- д) Ако $B=0,\ C=0,\ A\neq 0$, тогаш $x=0$ е равенка на y-оската.

Решавајќи ја оваа задача, ја докажавме Теоремата 2 (обратна на теоремата 1).

4 Одреди ги пресечните точки на правата $x-y+1=0$ со координатните оски.

5 Одреди ги пресечните точки на правата $Ax+By+C=0$ со координатните оски.

Решение

- Пресечната точка со x-оската има ордината $y=0$. Заменувајќи во равенката добиваме $Ax+C=0$, од каде што $x=-\dfrac{C}{A}$. Значи, пресекот со x-оската е $M\left(-\dfrac{C}{A},0\right)$.

- Пресечната точка со y-оската има апсциса $x=0$. Заменувајќи во равенката добиваме $By+C=0$, од каде што $y=-\frac{C}{B}$. Значи, пресекот со y-оската е $N\left(0,-\frac{C}{B}\right)$.

Задачи

1. Која точка лежи на правата: а) $M(2,3)$, $4x-y=0$; б) $N(4,2)$, $8x+7y=46$; в) $P(-3,-1)$, $5x-3y+12=0$; г) $Q(-4,7)$, $x-2y=10$.

2. Каква положба имаат во координатната рамнина правите чии равенки се:
   а) $3x+6=0$; б) $2y-3=0$; в) $3x+y=0$; г) $2y=0$; д) $3x=0$?
   Нацртај ги нивните графици.

3. Во следните равенки одреди го непознатиот коефициент, така што точката M да лежи на правата определена со таа равенка..
   а) $Ax+3y-7=0$, $M(-2,9)$; б) $2x+By+6=0$, $M(-6,-5)$; в) $2x+3y+C=0$, $M(-4,3)$.

4. Одреди ги координатите на точките во коишто правата дадена со равенката $2x-y+3=0$ ги сече координатните оски.

5. Во равенката на правата $(m+2)x+(2m-3)y+3m+5=0$ одреди го параметарот m, така што правата:
   а) да минува низ координатниот почеток; б) да е паралелна со x-оската;
   в) да е парелелна со y-оската; г) да минува низ точката $M(2,-2)$.

2 РАВЕНКА НА ПРАВА НИЗ ДВЕ ТОЧКИ. СЕГМЕНТЕН ВИД НА РАВЕНКА НА ПРАВА

А 1 Дадени се точките $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Напиши ја равенката на правата одредена со тие точки.

Согледај го решението:

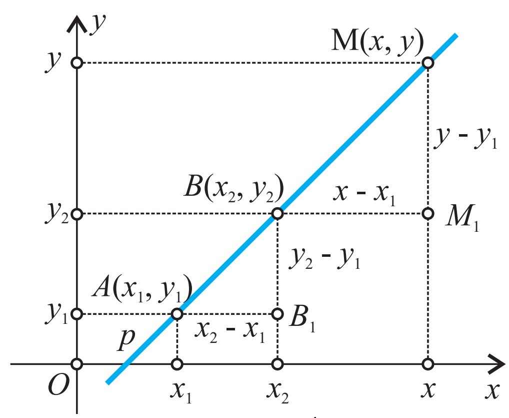
- Низ точките A и B минува единствена права. Нека точката $M(x,y)$ е која било точка од правата.

$$\Delta AM_1M \sim \Delta AB_1B \text{ (Зошто?)}$$

- Од сличноста на триаголниците (црт.1) следува дека

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{или} \quad \boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),}$$

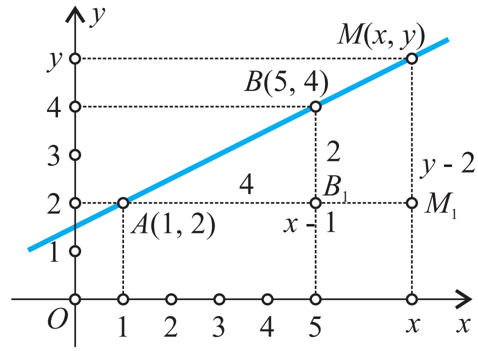
што претставува **равенка на права низ две точки**.



црт. 1

2 Напиши ја равенката на правата одредена со точките $A(1, 2)$ и $B(5, 4)$.

Решение



црт. 2

■ $\Delta AM_1M \sim \Delta AB_1B$ (црт. 2). Оттука имаме:

$$\frac{y-2}{x-1}=\frac{2}{4};\quad y-2=\frac{1}{2}(x-1);\quad x-2y+3=0.$$

Со примена на формулата $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

имаме: $y-2=\dfrac{4-2}{5-1}(x-1)$, т.е. $x-2y+3=0$.

3 Даден е триаголникот ABC, $A(2,3)$, $B(-4,1)$, $C(2,-3)$. Напиши ја равенката на:

а) страната AB; б) тежишната линија повлечена од темето A.

■ Ако точките A и B лежат на права што е паралелна со y-оската, тогаш равенката е $x=x_1$. Во тој случај не можеме да ја користиме дадената формула, бидејќи $x_2-x_1=0$, тогаш ја користиме формулата запишана во следниов вид:

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1).$$

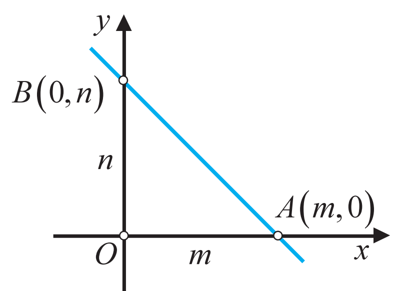
Б **4** Напиши равенка на права што минува низ точките $A(m,0)$ и $B(0,n)$.

Решение

■ Низ точките A и B минува единствена права (црт. 3). Во формулата за равенка на права низ две точки ги заменуваме координатите на дадените точки и добиваме:

$$y-0=\frac{0-n}{m-0}(x-m);\quad my=-nx+mn;$$

$$nx+my+mn\,|:mn,\,(mn\neq 0),\ \text{т.е.}\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$



црт. 3

Запомни!

Равенката $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$, $m\neq 0$, $n\neq 0$ се вика ***сегментен вид*** равенка на права.

m е сегмент (дел) на x-оската; n е сегмент (дел) на y-оската.

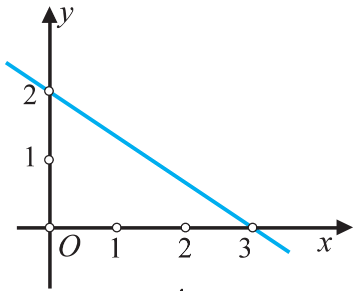
5 Равенката на правата $2x+3y-6=0$ запиши ја во сегментен вид и нацртај ја правата користејќи ги сегментите.

Решение. $2x+3y=6\,|:6;\ \ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1,$ па $m=3,\ n=2.$ Правата е претставена на црт. 4.

6 Напиши равенка на права, ако m и n соодветно се:

а) 1 и $-1;$ б) 2 и $-3;$ в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}.$

Решение. в) $\frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1;\ \ \frac{3x}{2}+\frac{4y}{3}=1,$ т.е. $9x+8y-6=0.$



црт. 4

Воочи!

Сегментниот вид на равенка на права овозможува брза конструкција на правата. Равенка на права што минува низ координатниот почеток или е паралелна со некоја од координатните оски не може да се запише во сегментен вид, бидејќи во тој случај $m=0$ или $n=0.$ Од друга страна, секоја права што не минува низ координатниот почеток и ги сече координатните оски може да се претстави со равенка во сегментен вид и обратно, секоја равенка од видот $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ определува права што на координатните оски x и y отсекува отсечки со должини $|m|$ и $|n|,$ соодветно.

7 Равенката на правата $Ax+By+C=0$ запиши ја во сегментен вид.

Решение. $Ax+By=-C;\ \ \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1;\ \ \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1,$ па $m=-\frac{C}{A},\ n=-\frac{C}{B}.$

8 Одреди ја плоштината на триаголникот што правата $4x+3y-12=0$ го формира со координатните оски.

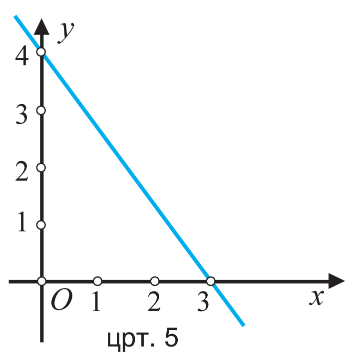
Решение

- Дадената равенка ја доведуваме во сегментен вид и имаме:

$\frac{4x}{12}+\frac{3y}{12}=1$ т.е. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$ Значи, $m=3,\ n=4$ (црт. 5).

Триаголникот е правоаголен со катети m и n, па

$P=\frac{m\cdot n}{2},$ т.е. $P=\frac{3\cdot 4}{2}=6.$



црт. 5

9 Во равенката на правата $\lambda x+(\lambda-2)y-6=0$ одреди го $\lambda,$ така што должината на отсечката на x-оската да биде два пати поголема од должината на отсечката на y-оската.

Решение

$\lambda x+(\lambda+2)y-6=0|:6;\ \ \frac{\lambda x}{6}+\frac{(\lambda+2)y}{6}=1;\ \ \frac{x}{\frac{6}{\lambda}}+\frac{y}{\frac{6}{\lambda+2}}=1;\ \ m=\frac{6}{\lambda},\ \ n=\frac{6}{\lambda+2}.$

Од условот $m=2n$ имаме: $\frac{6}{\lambda}=2\cdot\frac{6}{\lambda+2};\ \ \lambda+2=2\lambda,\ \ \lambda=2.$

10 Во равенката на правата $6x+5y-12\lambda=0$ одреди го λ, така што производот од должините на отсечките на координатните оски да биде 12.

Задачи

1. Напиши равенка на права што минува низ точките
   а) $A(-1,2)$ и $B(2,1)$; б) $A(3,-4)$ и $B(-2,-3)$.
   Добиените равенки на права запиши ги во општ во сегментен вид.

2. Дијагоналите на ромбот $d_1=10,\ d_2=4$ се земени за координатни оски. Напиши ги равенките на страните на ромбот, ако за x-оска е земена поголемата дијагонала.

3. Дадена е отсечката AB, $A(2,-1)$ и $B(7,9)$. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $C(1,-2)$ и ја дели отсечката AB во однос $2:3$.

4. Равенката на правата напиши ја во сегментен вид, а потоа нацртај го нејзиниот график:
   а) $3x-4y-24=0$; б) $4x+9y-6=0$; в) $6x-20y+15=0$; г) $35x+9y+15=0$.

5. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $M(3,5)$ и на координатните оски отсекува отсечки чии должини се однесуваат како 3 : 4.

6. Една права минува низ точката $M(4,1)$, а на координатните оски отсекува отсечки чиј збир на должините е 10. Напиши ја нејзината равенка.

7. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $B(-5,4)$, а со координатните оски формира триаголник со плоштина $P=5$.

8. Во равенката на правата $12x+\lambda y-60=0$ одреди го λ така што должината на отсечката од таа права меѓу координатните оски да биде 13.

9. Во равенката на правата $(2\lambda+1)x+(3\lambda-5)y+4\lambda=0$ одреди го λ така што правата да биде паралелна со: а) $x-$оската; б) $y-$оската.

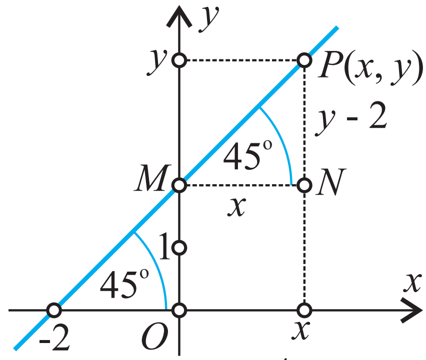
10. Во равенката $Ax+By-45=0$ одреди ги A и B, така што збирот од должините на отсечките на координатните оски да биде 14, а нивната разлика да е 4.

3

ЕКСПЛИЦИТЕН ВИД НА РАВЕНКА НА ПРАВА. РАВЕНКА НА ПРАВА ШТО МИНУВА НИЗ ЕДНА ТОЧКА

А

1 Состави равенка на права која на позитивниот дел од y-оската отсекува отсечок со должина 2, а со позитивниот дел на x-оската зафаќа агол $\alpha = 45^o$.



црт. 1

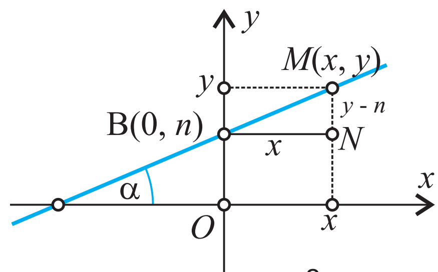
Решение

Од ΔMNP (црт. 1) имаме:

$$\frac{y-2}{x} = \operatorname{tg}\alpha, \quad y-2 = x \cdot \operatorname{tg} 45^0, \text{ т.е. } y = x+2.$$

2 Состави равенка на права која на y-оската отсекува отсечок со должина n, а со позитивниот дел на x-оската зафаќа агол α.

Решение



црт. 2

- На црт. 2 е претставена правата p. Нејзината положба во однос на декартовиот координатен систем е определена со отсечката $\overline{OB} = n$ што правата ја отсекува на y-оската и аголот α што таа го образува со позитивниот дел на x-оската.
- Нека $M(x, y)$ е која било точка од правата p. Ја изразуваме ја зависноста меѓу координатите x и y на точката M, аголот α и отсечката n.
- Низ точката B повлекуваме права паралелна со x-оската, а низ M права паралелна со y-оската. Пресечната точка ќе ја обележиме со N. Од триаголникот MBN имаме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y-n}{x}$, т.е. $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + n$. Ако $\operatorname{tg}\alpha = k$, тогаш равенката е од видот $\boxed{y = kx + n;}$

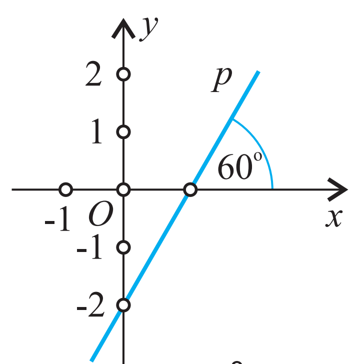
  кој се вика ***експлицитен вид равенка на права***; k се вика коефициент на правецот на правата, $n-$отсечка (сегмент) што правата ја отсекува на y-оската.

3 Напиши ја равенката на правата која на ординатната оска отсекува отсечка со должина 5, а со позитивниот дел на x-оската формира агол $\alpha = 225^0$.

Решение. $n = 5, \; k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 225^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 + 45^0\right) = \operatorname{tg} 45^0 = 1,$ па $y = x + 5.$

4 Нацртај ја правата $y = x\sqrt{3} - 2.$

Решение. Од дадената равенка следува дека $k = \sqrt{3}, \; \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3},$ $\alpha = 60^0$ и $n = -2,$ црт. 3.



црт. 3

5 Напиши ја равенката на правата која поминува низ координатниот почеток и со позитивниот дел на x-оската зафаќа агол од 135^o.

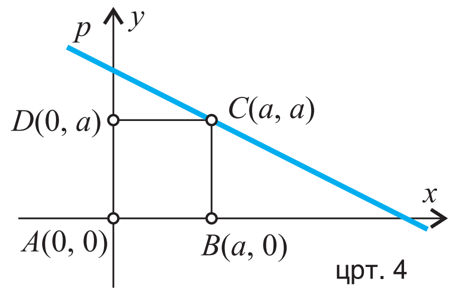
Решение. $n=0$, $k=\text{tg}135^0=-1$. Значи, $y=-x$ е бараната равенка; тоа е правата која е симетрала на II и IV квадрант.

6 Напиши ја равенката на правата што е паралелна со x-оската, а на ординатната оска отсекува отсечка со должина 3.

Решение. Аголот меѓу паралелни прави е 0^0 или 180^0, па $\text{tg}\,0^0=\text{tg}180^0=0$, т.е. $k=0$; $y=0\cdot x+3$. Значи, бараната равенка е $y=3$.

7 Во триаголникот определен со правата $y=-\frac{1}{2}x+3$ и координатните оски е впишан квадрат така што две негови страни лежат на координатните оски. Одреди ги координатите на неговите темиња.

Проследи го решението

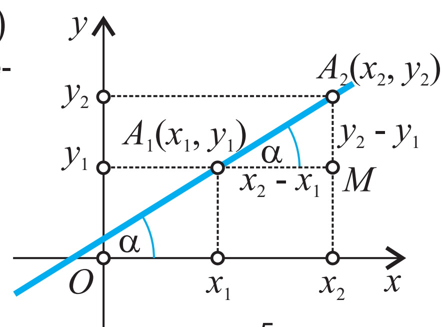


црт. 4

Нека страната на квадратот е a. Координатите на темиња на квадратот се $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$ и $D(0,a)$ (црт. 4). Точката C лежи на правата p, па нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е. $a=-\frac{1}{2}a+3$, од каде што $a=2$. Значи, точките $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ и $D(0,2)$ се темиња на квадратот.

Б **8** Дадени се координатите на две точки $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$. Одреди го коефициентот на правецот на правата што минува низ тие точки.

Проследи го решението



црт. 5

$\measuredangle A_2A_1M=\alpha$ (како агли со паралелни краци). Од ΔA_1MA_2 имаме $k=\text{tg}\,\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Воочи!

- Формулата $k=tg\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ има смисла само за $x_2 - x_1 \neq 0$.
- Ако $x_2-x_1=0$, т.е. $x_2=x_1$, тогаш правата е нормална на x-оската и нејзината равенка е $x=x_1$.
- Ако $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ го замениме во равенката на права што минува низ две точки, тогаш равенката е од видот $\boxed{y-y_1=k(x-x_1),}$ која се вика ***равенка на права низ една точка***, со коефициент на правец k.

9 Напиши ја равенката на правата која минува низ точката $A(-3,2)$, а со позитивниот дел од x-оската образува агол $\alpha = 150^0$.

Проследи го решението

- Равенката е од видот $y - y_1 = k(x - x_1)$, $k = \operatorname{tg}150^0 = \operatorname{tg}(90^0 + 60^0) = -\operatorname{ctg}60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, па равенката е $y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)$ или $x\sqrt{3} + 3y + 3\sqrt{3} - 6 = 0$.

Запомни!

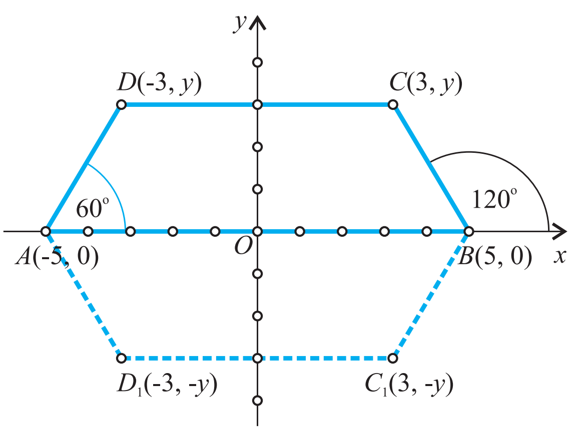
Равенката $y = kx + n$ е експлицитен вид равенка на права, а равенката $y - y_1 = k(x - x_1)$ е равенка на права што минува низ дадена точка $A(x_1, y_1)$.

10 Одреди го аголот што правата го образува со позивната насока на x-оската, како и отсечката што таа права ја отсекува на ординатната оска:

а) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $y = -7$; в) $x = 3$.

11 Напиши ги равенките на страните на рамнокракиот трапез чии основи се $a = 10$, $b = 6$, а аглите на поголемата основа се 60^o. За координатни оски да се земат: големата основа за апсцисна оска, а оската на симетрија на трапезот за ординатна оска.

Проследи го решението



црт. 6

- Задачата има две решенија (црт. 6). Според условот на задачата темињата на едниот трапез се $A(-5,0), B(5,0), C(3,y)$ и $D(-3,y)$, а на другиот $A(-5,0), B(5,0), C(3,-y), D(-3,-y)$.
- Правата BC минува низ точката $B(5,0)$ и со x-оската формира агол од 120^0. Равенката на правата BC е: $y - y_1 = k(x - x_1)$,

  $k = \operatorname{tg}120^0 = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}(x-5)$, т.е.

  $$BC: \quad x\sqrt{3} + y - 5\sqrt{3} = 0.$$

- Точката $C(3, y)$ лежи на правата BC, па од $3\sqrt{3} + y - 5\sqrt{3} = 0$ следува дека $y = 2\sqrt{3}$, што претставува равенка на страната CD.

  Напиши ги равенките на другите страни на трапезот.

Задачи

1. Одреди ја равенката на права која со позитивната насока на x-оската зафаќа агол $\alpha = 30^0$, а на ординатната оска отсекува отсечка со должина 3.

2. Напиши ја равенката на правата која минува низ точката M и со позитивниот дел на x-оската формира агол α:

   а) $M(2,5)$, $\alpha = 45^0$; б) $M(-1,3)$, $\alpha = 135^0$;

   в) $M(-3,-2)$, $\alpha = 300^0$; г) $M(2,3)$, $\alpha = 150^0$.

3. Во триаголникот определен со правата $y = -3x + 2$ и координатните оски е впишан правоаголник така што две негови страни лежат на координатните оски. Одреди ги координатите на неговите темиња, ако се знае дека:

   а) едната страна е трипати поголема од другата;

   б) едната страна е за 1 поголема од другата.

4. Да се определи равенката на правата што минува низ точката $A(3,1)$, а на ординатната оска отсекува отсечката со должина 5.

5. Да се напише равенката на правата што минува низ точката $A(-1,-5)$, а има аглов коефициент 3.

6. Во равенката на правата $2x - (5\lambda - 2)y - 3 = 0$ одреди го λ, така што правата со x-оската да формира агол од 45^o.

7. Во равенката на правата $(3a - 2b + 5)x - (a - b)y + 2a - 5b + 1 = 0$ одреди ги a и b, така што правата да биде симетрала на: а) I квадрант; б) II квадрант.

8. За кои вредности на a и b правата $(a + 2b - 3)x + (2a - b + 1)y + 6a + 9 = 0$ е паралелна со апсцисната оска, а ординатната оска ја сече во точката $(0,-3)$?

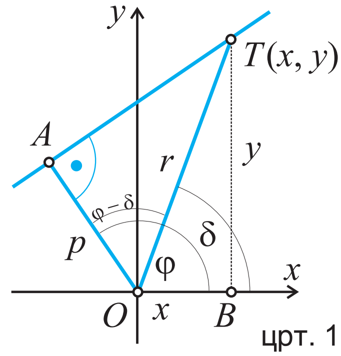
4 НОРМАЛЕН ВИД НА РАВЕНКА НА ПРАВА

Потсети се!

- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$
- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

А Во досегашните разгледувања на права видовме со кои елементи е определена една права. Правата може да биде определена и ако се дадени:

- должината p на нормалата повлечена од координатниот почеток до правата $(p>0)$ и
- аголот φ што нормалата на правата повлечена од координатниот почеток го зафаќа со позитивниот дел на x-оската, при што $0^\circ<\varphi<360^\circ$.



црт. 1

Нека $T(x,\ y)$ е која било точка од правата, а δ е аголот што $\overline{OT}=r$ го формира со позитивниот дел на x-оската (црт. 1).

Од ΔOAT имаме $\dfrac{p}{r}=\cos(\varphi-\delta)$ или $p=r\cos(\varphi-\delta)=r\cos\varphi\cos\delta+r\sin\varphi\sin\delta.$

Од ΔOBT имаме $x=r\cos\delta,\ y=r\sin\delta$ па растојанието p од координатниот почеток до правата е $p=x\cos\varphi+y\sin\varphi$ или равенката

$$\boxed{x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0}$$

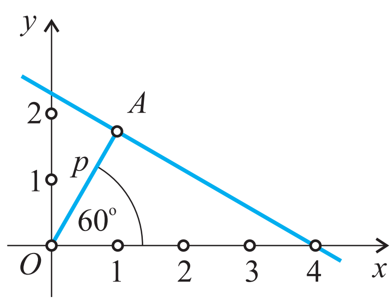
Ова се вика нормален или Хессеов вид равенка на права.

1 Нацртај го графикот и напиши ја равенката на правата, ако $\varphi=60^\circ$ и $p=2.$

Решение

$x\cos60^\circ+y\sin60^\circ-2=0;$

$x\dfrac{1}{2}+y\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2=0;\quad x+\sqrt{3}y-4=0$ (црт. 2).



црт. 2

Б **2** Равенката $Ax+By+C=0$ доведи ја во нормален вид.

Проследи го решението

- Ако равенката $Ax+By+C=0$ ја помножиме со некој број $\lambda,\ (\lambda\neq0)$ ќе се добие равенка $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0$ која е еквивалентна на дадената.

- Равенките $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0$ и $x\cos\varphi+y\sin\varphi+p=0$ се еквивалентни ако нивните коефициенти се еднакви т.е.

$$\lambda A=\cos\varphi,\ \lambda B=\sin\varphi,\ \lambda C=-p.$$

- Со квадрирање и собирање на првите две равенства, добиваме:

$$\lambda^2\left(A^2+B^2\right)=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1.$$

- Оттука следува

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \text{па}\ \cos\varphi=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\varphi=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ p=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

По замената на λ во равенката $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0,$ имаме $\dfrac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$

Од $p>0,$ следува дека знакот пред коренот треба да е спротивен на знакот од слободниот член.

3 Правата: а) $12x+5y-10=0;$ б) $2x+y-4=0;$ трансформирај ја во нормален вид.

Решение

- а) Во равенката на правата $A=12,\ B=5,\ C<0\Rightarrow\lambda>0,$ т.е.

$\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{169}}=\dfrac{1}{13},$ па $12x+5y-10=0\,\Big|\cdot\dfrac{1}{13};$ $\dfrac{12}{13}x+\dfrac{5}{13}y-\dfrac{10}{13}=0$ или ако ја примениме формулата $\dfrac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$ добиваме $\dfrac{12x+5y-10}{\sqrt{12^2+5^2}}=0,$ т.е. $\dfrac{12x+5y-10}{13}=0.$

4 Одреди го аголот што нормалата на правата $x-y+1=0$ повлечена од координантниот почеток го зафаќа со позитивниот дел на x-оската, како и должината на таа нормала.

Решение

- Ќе ја сведеме равенката во нормален вид: $A=1,\ B=-1,\ C=1,\ \lambda=-\sqrt{2};$ $\dfrac{x-y+1}{-\sqrt{2}}=0,$ т.е. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0.$ Споредувајќи ја оваа равенка со равенката $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$ имаме: $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ Од $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ и $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ следува $\varphi=135^\circ.$

Запомни!

Нормален вид на равенка на права $Ax+By+C=0$ е:

$$\boxed{\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0}$$

каде квадратниот корен и слободниот член C се со спротивни знаци.

5 Равенката на правата $y = kx + n$ доведи ја во нормален вид.

Решение

- Од кој вид е дадената равенка?

- Равенката ја доведуваме во општ вид, т.е. $kx - y + n = 0,$ а нормалниот вид е:

$$\boxed{\frac{kx - y + n}{\pm\sqrt{k^2+1}} = 0,}$$

каде што пред квадратниот корен се зема знак спротивен на знакот на n.

Задачи

1 Напиши равенка на права, ако е:

а) $\varphi = 30^\circ,\ p = 2;$ б) $\varphi = 150^\circ,\ p = 2;$ в) $\varphi = 45^\circ,\ p = 1;$ г) $\varphi = 135^\circ,\ p = 1.$

2 Следните равенки на права запиши ги во нормален вид:

а) $4x + 3y + 30 = 0;$ б) $7x - 24y - 100 = 0;$ в) $x - y + 2 = 0;$ г) $y = ax + 2;$ д) $4y + 3 = 0;$

ѓ) $4x + 3 = 0;$ е) $x\sqrt{3} - y\sqrt{6} + 7 = 0;$ ж) $y = -\frac{3}{4}x + 5 = 0;$ з) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$

3 Одреди го аголот што нормалата на правата го формира со позитивниот дел на x-оската:

а) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0;$ б) $\sqrt{3}x - y - 4 = 0;$ в) $x + y + 2 = 0.$

5 РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Потсети се!

- Што е растојание од точка до права?
- Што е растојание меѓу две паралелни прави?

1 Дадена е равенката на правата m: $Ax + By + C = 0$ и точката $M(x_1,\ y_1)$ што не лежи на дадената права. Одреди го растојанието од точката M до правата m.

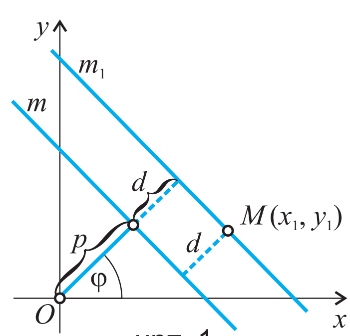
Проследи го решението

I случај. Точката M и координатниот почеток лежат на различни страни од правата m (црт. 1).

- Нека е $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ равенката на правата m во нормален вид.

- Низ точката M повлекуваме права m_1 која е определена со аголот φ и растојанието од координатниот почеток $p + d$. Нормалниот вид на равенката на правата m_1 е:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p + d) = 0.$$



црт. 1

- Бидејќи точката $M(x_1, y_1)$ лежи на правата m_1, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е.

$$x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - (p+d) = 0.$$

Оттука следува дека $d = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p$ е бараното растојание.

- Ако равенката на правата е дадена во општ вид, тогаш претходно треба да ја трансформираме во нормален вид.
Во овој случај растојанието d од точката $M(x_1,\ y_1)$ до правата $Ax+By+C=0$ ќе се пресмета по формулата

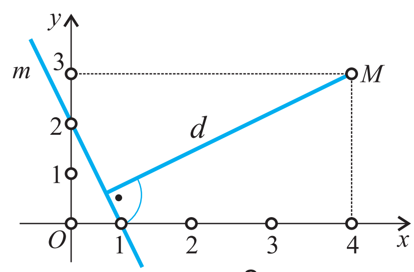
$$\boxed{d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},}$$

пред коренот се зема знак спротивен на знакот од слободниот член C.

2 Одреди го растојанието од точката $M(4,\ 3)$ до правата m: $2x+y-2=0$.

Решение. Точката M и координатниот почеток лежат на различни страни од правата m (црт. 2).

$$d = \frac{2\cdot4+1\cdot3-2}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{9}{5}.$$



црт. 2

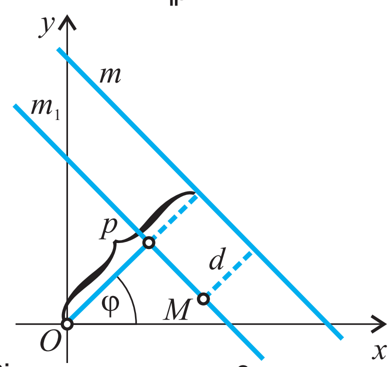
II *случај*. Точката M и координатниот почеток лежат од иста страна на правата m (црт. 3).

- Во овој случај нормалниот вид на равенката на правата m_1 е:

$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p+d) = 0$, т.е. $x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p-d) = 0$,

$d = -(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p)$ или $\boxed{d = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};}$

пред коренот се зема знак спротивен на знакот на C.

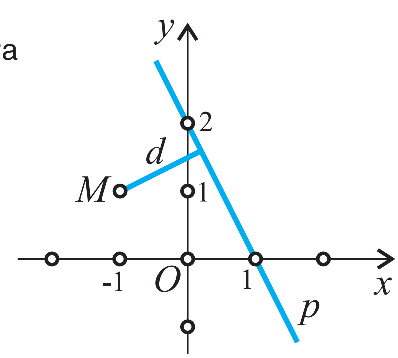


црт. 3

3 Одреди го растојанието од точката $M(-1,\ 1)$ до правата p: $2x+y-2=0$.

Решение. Точката M и координатниот почеток лежат од иста страна на правата p (црт. 4). $d = -\frac{2\cdot(-1)+1\cdot1-2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$

- Одредувањето на положбата на дадената точка и координатниот почеток во однос на дадената права не е секогаш потребно. Бидејќи растојанието е секогаш ненегативен реален број, тогаш при одредувањето на растојанието ќе ја користиме апсолутната вредност.



црт. 4

Запомни!

Растојанието од дадена точка $M(x_1, y_1)$ до дадена права $Ax+By+C=0$ се одредува со формулата

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

4 Одреди го растојанието од координатниот почеток до правата $3x-4y+6=0$.

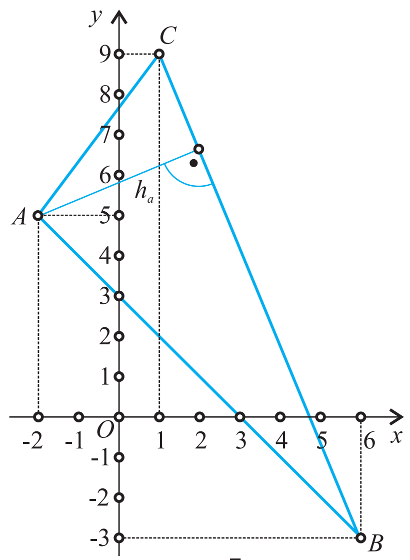
5 Одреди ги висините на ΔABC, ако се познати координатите на неговите темиња: $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$ и $C(1, 9)$.

Решение

- Одреди ја равенката на правата што минува низ точките B и C (црт. 5).
- Ако точно работиш, треба да ја добиеш равенката $12x+5y-57=0$.
- Одреди го растојанието од точката A до правата BC.

$$d=\frac{|12\cdot(-2)+5\cdot5-57|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{56}{13}.$$

Значи, $h_a=\dfrac{56}{13}$.



црт. 5

6 Одреди го растојанието меѓу двете паралелни прави $3x-4y-10=0,\ 6x-8y+5=0$.

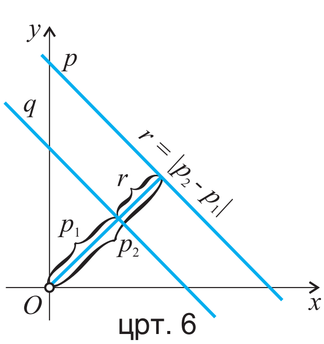
Решение

- Оваа задача можеме да ја решиме на повеќе начини. Ќе се задржиме на два од нив.

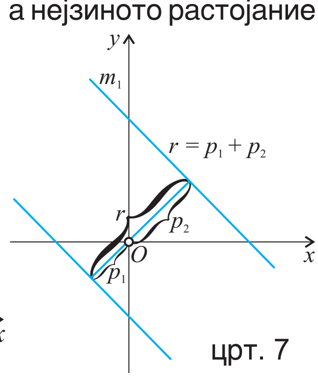
I *начин.* На една од правите земаме произволна точка $M(x_1, y_1)$ и го бараме нејзиното растојание до другата права. Нека $M(2, y_1)$ лежи на правата $3x-4y-10=0$.
Оттука следува: $3\cdot2-4y_1-10=0;\ \ 4y_1=-4;\ \ y_1=-1$. Значи $M(2, -1)$, а нејзиното растојание до правата $6x-8y+5=0$ е:

$$d=\frac{|6\cdot2-8(-1)+5|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{12+8+5}{10}=\frac{25}{10}=2{,}5.$$

II *начин.* (Упатство) Одреди ги растојанијата p_1 и p_2 од координатниот почеток до едната и другата права.



црт. 6



црт. 7

Ако координатниот почеток е од иста страна на правите тогаш $d=|p_1-p_2|$ (црт. 6); ако координатниот почеток O е меѓу правите, тогаш $d=p_1+p_2$ (црт. 7).

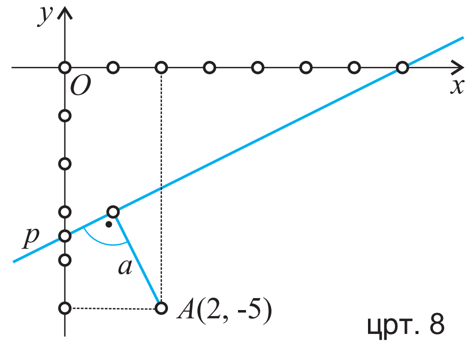
7 Точката $A(2,-5)$ е теме на еден квадрат, а една негова страна се наоѓа на правата p: $x-2y-7=0$. Да се пресмета неговата плоштина.

Решение

- Растојанието од точката $A(2,-5)$ до правата p: $x-2y-7=0$ е еднакво со страната a на квадратот, т.е.

$$a=\frac{|1\cdot 2-2(-5)-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

- Плоштината на квадратот е $P=(\sqrt{5})^2=5$.



црт. 8

8 Дадени се равенките на две страни на еден правоаголник $3x-2y-5=0,\ 2x+3y+7=0$ и едно негово теме $A(-2,1)$. Пресметај ја неговата плоштина.

Задачи

1. Пресметај го растојанието d од дадената точка до дадената права, ако:
   а) $A(2,7),\ p:12x+5y-7=0$; б) $A(-3,2),\ p:4x-7y+26=0$.

2. Провери дали правите $2x+\sqrt{5}y-18=0$ и $\sqrt{11}x-5y+36=0$ допираат еден ист круг чиј центар е во координатниот почеток. Колкав е радиусот на тој круг?

3. Пресметај го растојанието од правата $p:a(x-a)+b(y-b)=0$ до координатниот почеток.

4. Дијагоналите на ромбот со должина 30 и 16 се земени за координатни оски. Пресметај го растојанието меѓу страните на ромбот.

5. На ординатната оска одреди ја точката што е еднакво оддалечена од координатниот почеток и од правата $3x-4y+12=0$.

6. На апсцисната оска одреди ја точката што се наоѓа на растојание $d=a$ од правата $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

7. Растојанијата на точката M од правите $5x-12y-13=0$ и $3x-4y-19=0$ се соодветно еднакви на 3 и 5. Определи ги координатите на точката M.

8. Одреди го геометриското место на точките што се еднакво оддалечени од двете паралелни прави $3x-y+7=0,\ 3x-y-3=0$.

9. Напиши ја равенката на правата пареленлна со правите $x+2y=1$ и $x+2y=3$, која растојанието меѓу нив го дели во однос $1:3$.

10. На растојание 5 од точката $C(4,3)$ повлечи права која на координатните оски отсекува отсечки со еднакви должини.

6 АГОЛ МЕЃУ ДВЕ ПРАВИ

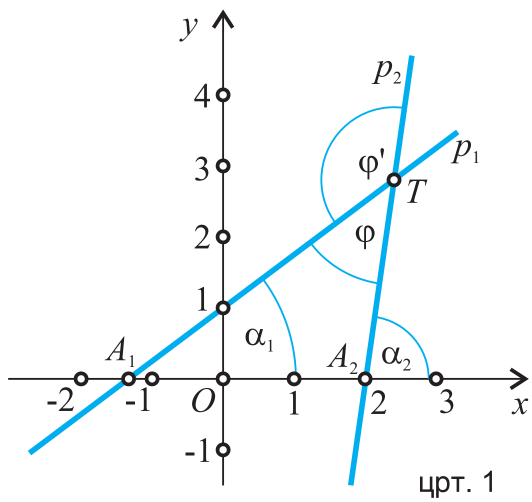
Потсети се!

- Секој надворешен агол на триаголникот е еднаков на збирот на двата внатрешни несоседни со него агли.
- $\operatorname{tg}(\alpha+90^\circ)=-\operatorname{ctg}\alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$
- Две прави што се сечат образуваат четири агли.
- Какви се тие агли меѓу себе?

А **1** Одреди го аголот меѓу правите $y=\dfrac{3}{4}x+1$ и $y=7x-14$.

Проследи го решението

- Правите ќе ги претставиме графички (црт. 1).
- Воочи, правите формираат остар агол φ или тап агол $\varphi'=180^\circ-\varphi$. Вообичаено под агол меѓу две прави го земаме помалиот (остриот) агол.



црт. 1

- Аголот α_2 е надворешен агол на ΔA_1A_2T (црт. 1), па оттука следува:

$$\varphi+\alpha_1=\alpha_2,\text{ т.е. }\varphi=\alpha_2-\alpha_1.$$

- Со примена на адиционите теореми

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

- Од равенките на правите имаме $\operatorname{tg}\alpha_1=\dfrac{3}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha_2=7$,

па $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{7-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}\cdot 7}=\dfrac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}}=1$. Значи $\varphi=45^\circ$.

2 Одреди го аголот меѓу правите $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.

Проследи го решението

- Ако во равенството $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}$ замениме $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$, тогаш

аголот меѓу две прави е даден со: $\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},}$ каде што k_1 е коефициент на правецот на едната права, а k_2 е коефициент на правецот на другата права.

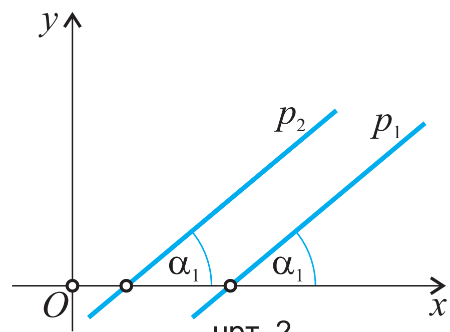
- Со примена на оваа формула се одредува или $\operatorname{tg}\varphi>0$, или $\operatorname{tg}\varphi<0$. Во првиот случај е определен остар, а во вториот тап агол меѓу дадените прави.

Б Две прави се паралелни ако и само ако имаат еднакви коефициенти на правец.

- Ако правите p_1 и p_2 се паралелни, тогаш тие зафаќаат исти агли со позитивниот дел на x-оската, т.е. $\alpha_2=\alpha_1$ (црт. 2), па и $\mathrm{tg}\,\alpha_2=\mathrm{tg}\,\alpha_1$. Од $\mathrm{tg}\,\alpha_2=k_2$ и $\mathrm{tg}\,\alpha_1=k_1$, следува:

$$\boxed{k_2=k_1}$$

- Обратно, ако $k_2=k_1$ тогаш $\mathrm{tg}\,\alpha_2=\mathrm{tg}\,\alpha_1$ т.е. $\alpha_2=\alpha_1$, што значи дека правите p_1 и p_2 се паралелни.



црт. 2

3 Низ точката $A(-3,\,2)$ повлечи права p_2 што е паралелна со правата $p_1: 2x-3y+4=0$.

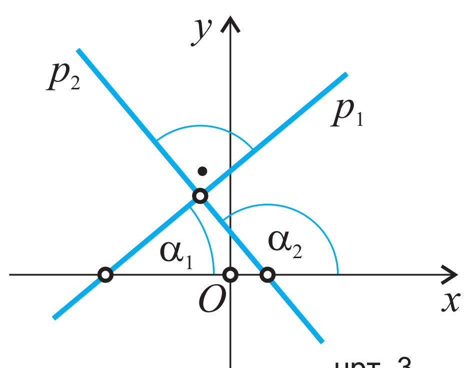
Решение

- Равенката на правата p_1 ја доведуваме во експлицитен вид, т.е. $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$; значи $k_1=\frac{2}{3}$.

  Коефициентот на правецот на правата $Ax+By+C=0$ може да се одреди и со примена на формулата $k=-\frac{A}{B}$.
- Од условите за паралелност на правите p_1 и p_2 следува $k_2=k_1=\frac{2}{3}$.
- Од равенката на правата низ една точка имаме $y-y_1=k(x-x_1)$, т.е $y-2=\frac{2}{3}(x+3)$ или $2x-3y+12=0$.

4 Докажи дека правите се заемно нормални, ако и само ако коефициентите на правите им се реципрочни со спротивен знак.

Доказ



црт. 3

Ако правите p_1 и p_2 се заемно нормални тогаш аголот меѓу нив $\varphi=90^\circ$, (црт. 3).

Од $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$ и тврдењето дека $\mathrm{tg}\,90^\circ$ не е дефиниран следува дека изразот $\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$ не е дефиниран ако $1+k_1\cdot k_2=0$. Оттука следува дека $k_1=-\frac{1}{k_2}$ или $k_2=-\frac{1}{k_1}$.

Ако $k_1=-\frac{1}{k_2}$ или $k_2=-\frac{1}{k_1}$, тогаш $k_1\cdot k_2+1=0$, па изразот $\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$ не е дефиниран. Оттука следува дека $\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\mathrm{tg}\,\varphi$ не е дефиниран, значи аголот $\varphi=90^\circ$; т.е. $p_1\perp p_2$. Равенството

$\boxed{k_1\cdot k_2+1=0}$ се вика услов за нормалност на две прави.

5 Низ точката $A(-3,\ 2)$ повлечи права p_2 што е нормална на правата $p_1: 2x-3y+4=0$.

Решение

- Коефициентот на правецот на дадената права $k_1=-\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$.
- Од условот за нормалност следува $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2}$.
- Со замена во равенката на права низ една точка $y-y_1=k(x-x_1)$ имаме

$$p_2: y-2=-\frac{3}{2}(x+3) \quad \text{т.е} \quad 3x+2y+5=0.$$

6 Дадени се две прави $p_1: 3x-4y+8=0$, $p_2: 5y-4mx-7=0$. Одреди го m така што правите да се заемно: а) нормални; б) паралелни.

Решение

- а) Равенките на правите ги доведуваме во експлицитен вид:

$$p_1: y=\frac{3}{4}x+2, \quad k_1=\frac{3}{4}; \qquad p_2: y=\frac{4}{5}mx+\frac{7}{5}, \quad k_2=\frac{4}{5}m.$$

- Од условот за нормалност $k_1\cdot k_2+1=0$ следува $\frac{3}{4}\cdot\frac{4m}{5}+1=0$, т.е. $m=-\frac{5}{3}$.

7 Дадени се равенките на правите $p_1: 4x-3y+1=0$, $p_2: 2x-my+5=0$. Одреди го m така што правите да се сечат под агол од 45°.

Решение

- Од равенките на правите: $p_1: y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$, $k=\frac{4}{3}$; $\qquad p_2: y=\frac{2}{m}x+\frac{5}{m}$, $k=\frac{2}{m}$,

Бидејќи правите p_1 и p_2 може да бидат означени и обратно тогаш од $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$ имаме:

Ако $k_1=\frac{4}{3},\ k_2=\frac{2}{m}$ или $k_2=\frac{4}{3},\ k_1=\frac{2}{m}$

$$\frac{\frac{2}{m}-\frac{4}{3}}{1+\frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}}=1 \qquad\qquad \frac{\frac{4}{3}-\frac{2}{m}}{1+\frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}}=-1$$

$$6-4m=3m+8; \qquad\qquad 4m-6=3m+8;$$

$$m=-\frac{2}{7} \qquad\qquad m=14.$$

Значи, за $m=-\frac{2}{7}$ или $m=14$ дадените прави образуваат агол од 45°.

8 Напиши равенка на права која минува низ точката $A(1,\ 2)$, а е:

а) паралелна; б) нормална; на правата $y=\frac{2}{3}x-1$.

Задачи

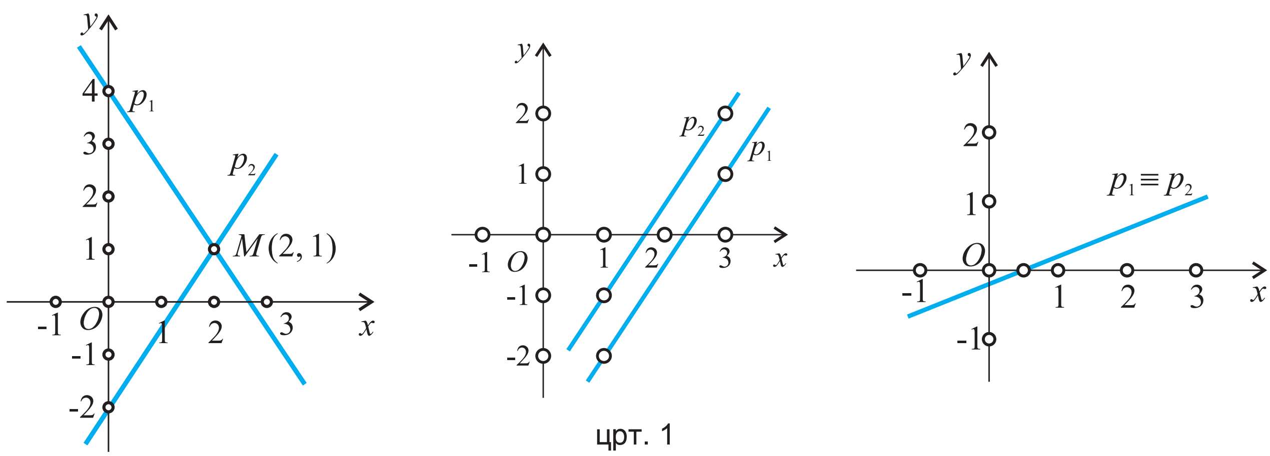
1. Напиши ја равенката на симетралата на отсечката AB, $A(5, 7)$, $B(9, 5)$.
2. Даден е $\Delta ABC, A(3,3), B(11,6), C(7,12)$. Одреди ја равенката на висината повлечена од темето C.
3. Одреди го аголот помеѓу правите: а) $y = x$, $y = 3x + 5$; б) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.
4. Одреди ги аглите на триаголникот ABC, $A(1,3)$, $B(5,1)$, $C(3,1)$.
5. Низ точката $M(3,5)$ повлечи права која со правата $3x-2y+7=0$ формира агол од 45°.
6. За кој агол треба да се заврти правата $3x+y-6=0$ околу својата пресечна точка со y-оската за да ја сече правата $x-3y-6=0$ под агол од 45°?
7. За кој агол треба да се заврти правата $2x-3y+5=0$ околу својата точка $M(2,3)$ за да на x-оската отсекува отсечка со должина 4?

7 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ

Потсети се!

- Системот равенки $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ може да: а) има единствено решение; б) нема ниту едно решение; в) има бесконечно многу решенија.
- Каква заемна положба може да имаат две прави во рамнина?
- Две прави се паралелни ако и само ако нивните коефициенти на правци се еднакви.

1 Дадени правите p_1 и p_2: а) $3x+2y-8=0$ и $3x-2y-4=0$;
б) $3x-2y-7=0$ и $6x-4y-10=0$; в) $2x-5y-1=0$ и $4x-10y-2=0$.
Нацртај ги нивните графици и одреди ја нивната заедничка положба.



црт. 1

Воочи!

а) Правите се сечат во точката $M(2,1)$;

б) правите се паралелни;

в) правите се совпаѓаат (црт. 1).

2 Нека се дадени правите p_1 и p_2, чии равенки се: $p_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1=0$, $p_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2=0$.

Одреди ги условите кога правите:

а) се сечат; б) се паралелни;

в) се совпаѓаат.

Проследи го решението

а) Пресечната точка $M_0(x_0,y_0)$ лежи на двете прави, па затоа нејзините координати ќе ги задоволуваат истовремено равенките на правите. Координатите на M_0 ќе ги добиеме како решение на системот $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$:

$$x_0=\frac{A_1C_1-A_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y_0=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}; \quad A_1B_2-A_2B_1 \neq 0.$$

1. Системот има единствено решение, т.е. правите се сечат само ако $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}; \quad A_2 \neq 0,\ B_2 \neq 0.$$

2. Ако $A_1B_2-A_2B_1=0$ и барем еден од изразите $C_1B_2-C_2B_1$ или $A_1C_2-A_2C_1$ не е еднаков на нула, тогаш системот нема решение, т.е. правите се паралелни и различни.

Од $A_1B_2-A_2B_1=0$ следува $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, од $C_1B_2-C_2B_1 \neq 0$ следува $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Оттука следува

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \quad A_2 \neq 0,\ B_2 \neq 0,\ C_2 \neq 0.$$

3. Ако $A_1B_1-A_2B_2=0$, $C_1B_2-C_2B_1=0$ и $A_1C_2-A_2C_1=0$, тогаш системот има бесконечно решенија, т.е. правите се совпаѓаат. Оттука следува дека $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Одреди го односот на коефициентите на правите во задачата **1**

3 Одреди ги координатите на тежиштето на триаголникот чии равенки на страните се: $a: 7x+y+20=0$, $b: x-2y-10=0$, $c: x+y-4=0$.

4 Напиши равенка на права која минува низ пресекот на правите $p: x-y+4=0$ и $q: 4x-2y-20=0$, а е: а) паралелна; б) нормална со правата $r: 2x-3y-1=0$.

Решение

- а) Го одредуваме пресекот на правите $\begin{cases} x-y+4=0 \\ 4x-2y-20=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=14 \\ y=18 \end{cases}$; $M(14,18)$.
- Бидејќи правата треба да биде паралелна со правата r, $k=k_r=\frac{2}{3}$.
- Бараната права минува низ точката $M(14,18)$ и има коефициент на правец $k=\frac{2}{3}$, т.е.

$y-y_1=k(x-x_1)$; $y-18=\frac{2}{3}(x-14)$; $2x-3y+26=0$.

5 Одреди за која вредност на коефициентот k, правата $y=kx+3$ минува низ пресекот на правите $y=2x+1$ и $x-y+5=0$.

Задачи

1 Дадени се две точки: $A(-4,2)$ и $B(3,1)$. Одреди ја равенката на правата што е паралелна со AB, а y-оската ја сече во точката $C(0,-2)$.

2 За која вредност на параметарот m правите $(m-2)x+my-2=0$ и $6x+(m+8)y-m-2=0$ се совпаѓаат?

3 Одреди го m така да правите $mx-3y-2=0$ и $3x-my-m+1=0$: а) се паралелни; б) се совпаѓаат.

4 Напиши равенка на права што минува низ точката $A(1,2)$, така што точките $B(3,3)$ и $C(5,2)$ да се на еднакво растојание од правата.

5 Равенките на страните на триаголникот се: $y-x+3=0$, $7y-2x+6=0$, $3y+2x+14=0$. Одреди:
а) периметарот; б) плоштината;
в) должината на висините; г) должината на тежишните линии на триаголникот.

6 Состави равенка на права што минува низ пресечната точка на правите $2x+y-2=0$ и $x-5y-23=0$ низ средишната точка на отсечката MN, $M(5,-6)$ и $N(-1,-4)$.

7 Напиши ја равенката на правата што минува низ пресекот на правите $2x+7y-8=0$ и $3x+2y+5=0$, а со правата $2x+3y-7=0$ формира агол од 45°.

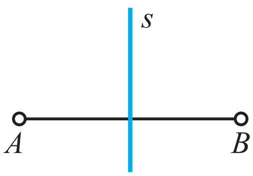
8 Одреди ја ортогоналната проекција на точката $A\left(1\frac{1}{6},2\frac{1}{4}\right)$ врз правата $6x-4y-15=0$.

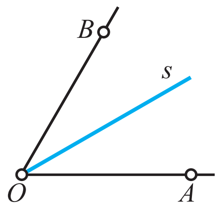
9 Одреди ја точката A што е симетрична на точката $B(-3,-4)$ во однос на правата $2x+3y+5=0$.

8 РАВЕНКА НА СИМЕТРАЛА НА АГОЛ

Потсети се!

- Кои својства ги има симетралата s на отсечката AB?





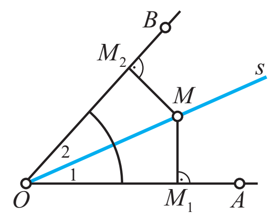
- Кои својства ги има симетралата s на аголот AOB?
- Какви се меѓу себе накрсните агли?

A

1 Докажи дека секоја точка од симетралата на даден агол е подеднакво оддалечена од краците на тој агол.

Проследи го доказот

Нека M е точка од симетралата на аголот AOB и нека $MM_1 \perp OA$, $MM_2 \perp OB$ (црт. 1).



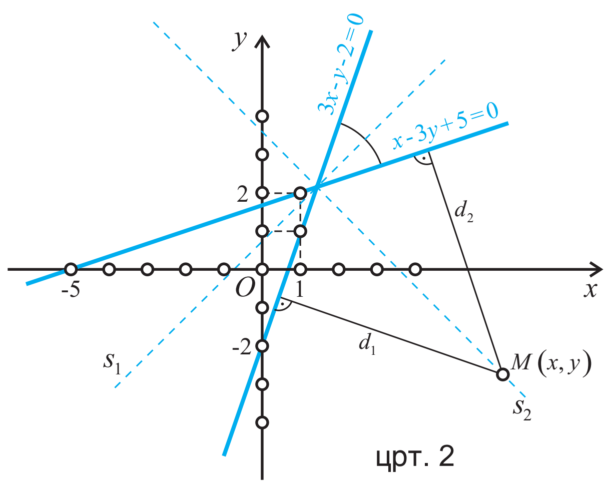
црт. 1

Ги разгледуваме правоаголните триаголници OMM_1 и OMM_2. Од $\overline{OM}=\overline{OM}$ (заедничка страна), $\measuredangle 1=\measuredangle 2$ (OM е симетрала) и $\measuredangle OM_1M=\measuredangle OM_2M=90^{\circ}$. Според признакот АСА следува дека $\Delta OMM_1 \cong \Delta OMM_2$, па $\overline{MM_1}=\overline{MM_2}$. Бидејќи M е произволна точка од симетралата, тогаш секоја нејзина точка е еднакво оддалечена од краците на аголот.

- Симетрала на агол е гемотриско место на точки во рамнина.

2 Одреди го геометриското место на точки што се еднакво оддалечени од краците на аголот што го формираат правите $x-3y+5=0,\ 3x-y-2=0$.

- Аглите образувани од правите што се сечат се викаат накрсни агли, па бараното геометриско место на точки се симетралите s_1 и s_2 на накрсните агли (црт. 2).



црт. 2

Нека точката $M(x,y)$ е која било точка од една симетрала, тогаш растојанијата на точката M до едниот крак (едната права) е $d_1=\dfrac{|3x-y-2|}{\sqrt{9+1}}$, а до другиот $d_2=\dfrac{|x-3y+5|}{\sqrt{1+9}}$ се еднакви, т.е. $\dfrac{|3x-y-2|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{|x-3y+5|}{\sqrt{1+9}}$.

Оттука следува:

$|3x-y-2|=|x-3y+5|$, па $s_1:\ 3x-y-2=x-3y+5$, а $s_2:\ 3x-y-2=-(x-3y+5)$.

Бараните равенки на симетралите се: $s_1: 4x-4y+3=0$, а $s_2: 2x+2y-7=0$.

Од порано ти е познато дека симетралите на напоредните агли се взаемно нормални, значи $s_1 \perp s_2$ што може да се заклучи дека $k_1 = 1,\ k_2 = -1$ го задоволуваат условот за нормалноста $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0.$

3 Напиши ги равенките на симетралите на аглите образовани од правите: $p_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $p_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

Решение

Нека $M(x, y)$ е точка од која било симетрала на еден од аглите.

Растојанијата $d_1 = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$ и $d_2 = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ до дадените прави (краците на аголот) се еднакви, т.е. равенството

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

е равенка на симетралите на накрсните агли.

4 Одреди ги равенките на симетралите на аглите што се добиваат со пресекот на правите: $\ell_1 :\ 3x + 4y - 25 = 0$ и $\ell_2 :\ 5x - 12y + 26 = 0.$

Проследи го решението

Според формулата за равенката на симетралите на аголот имаме:

$\frac{|3x + 4y - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x - 12y + 26|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$, т.е. $13 \cdot |3x + 4y - 25| = 5 \cdot |5x - 12y + 26|,$ следува

$13 \cdot (3x + 4y - 25) = 5 \cdot (5x - 12y + 26)$ или $13 \cdot (3x + 4y - 25) = -5 \cdot (5x - 12y + 26).$

Бараните равенки на симетралите се $14x + 112y - 455 = 0$ и $64x - 8y - 195 = 0.$

5 Напиши равенка на права што е паралелна на две различни паралелни прави, и е на еднакво растојание од нив.

Проследи го решението

Од $\ell_1 :\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $\ell_2 :\ A_1x + B_1y + C_2 = 0,$ за $C_1 \neq C_2$ имаме:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_1x + B_1y + C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$ т.е.

$$A_1x+B_1y+C_1=A_1x+B_1y+C_2 \text{ или } A_1x+B_1y+C_1=-\left(A_1x+B_1y+C_2\right).$$

Од првата равенка имаме $C_1=C_2$ што е спротивно на дадениот услов, а од втората равенка имаме $A_1x+B_1y+\frac{C_1+C_2}{2}=0.$ Оваа е равенка на правата што е паралелна со дадените прави и е еднакво оддалечена од нив.

6 Одреди равенка на права која е паралелна и еднакво оддалечена од правите $\ell_1:\ 2x-3y+7=0$ и $\ell_2:\ 4x-6y-11=0.$

Задачи

1. Одреди ги равенките на симетралите на аглите што се добиваат при пресекот на правите $\ell_1:\ 6x+8y-1=0$ и $\ell_2:\ 10x+24y+15=0.$

2. Одреди равенка на права што е паралелна и еднакво оддалечена од правите $4x+3y-12=0$ и $4x+3y+8=0.$

3. Одреди ги координатите на центарот на впишаната кружница во триаголникот чии страни се дадени со равенките:
$a:\ 3x+4y-1=0,\quad b:\ 5x-12y+2=0$ и $c:\ 8x+17y-4=0.$

4 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Правата $2x-3y+1=0$ минува низ точката:

А. $A(2,2)$; Б. $B(-3,-3)$; В. $C(1,1)$; Г. $D(0,0)$.

2 Коефициентот на правецот на правата определена со точките $A(2,-3)$ и $B(-4,-5)$ е:

А. $\frac{2}{3}$; Б. $\frac{1}{3}$; В. $-\frac{2}{3}$; Г. $-\frac{1}{3}$.

3 Плоштината на триаголникот што правата $4x-3y+12=0$ го зафаќа со координатните оски е:

А. 6; Б. 12; В. -6; Г. -12.

4 Правите $2x-3y+7=0$ и $-4x+6y+13=0$ се:

А. паралелни; Б. заемно нормални; В. совпаѓаат; Г. разминуваат.

5 Растојанието од точката $A(2,-1)$ до правата $2x-3y-7=0$ е:

А. 0; Б. 2; В. 3; Г. 7.

6 Општ вид на равенката на правата $y=kx+n$ е __________________________.

7 Експлицитниот вид на равенката на правата $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ е ________________________.

8 Правите $y=-\frac{2}{3}x+1$ и $kx+y-3=0$ се паралелни ако $k=$ ______.

9 Равенката на права чијшто коефициент на правец е $\frac{a}{2}$ и минува низ точката $M(x_1,y_1)$ е __________________________.

10 Правите $y=k_1x+n_1$ и $y=k_2x+n_2$ се заемно нормални ако за нивните коефициенти k_1 k_2 го задоволуваат условот ____.

11 Равенката на правата $2x-3y-7=0$ трансформирај ја експлицитен и сегментен вид.

12 Напиши равенка на права која минува низ точката $M(2,3)$ и е паралена со правата $4x-3y+1=0$.

13 Одреди го растојанието од точката $M(-1,3)$ до правата $5x+12y-1=0$.

14 Одреди ја пресечната точка на правите $2x-3y+1=0$ и $3x+y-4=0$ и пресметај го аголот меѓу нив.

15 Даден е триаголникот ABC: $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,-3)$. Напиши ја равенката на висината повлечена од темето C, и пресметај ја нејзината должина.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

ТЕМА 1

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

1

1 а) $-\frac{5}{2}$; б) -1. 2 а) Со споредување на дропките $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{8}$ добиваме: $\sqrt[7]{2^5} < \sqrt[8]{2^6}$; б) $\sqrt[3]{5^4} < \sqrt[4]{5^7}$;

в) $\pi^{\sqrt{2}} < \pi^{\sqrt{3}}$; г) $3^{\sqrt[3]{6}} < 3^{\sqrt[3]{8}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$. 3 а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{8}} \cdot 4^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{8}} = 2^{-2\sqrt{2}} \cdot 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{6\sqrt{2}} = 2^{6\sqrt{2}} = 64^{\sqrt{2}}$;

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{12}} = 2^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{4\sqrt{3}} = 2^{6\sqrt{3}} = 64^{\sqrt{3}}$; в) $\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{8}} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^{8} = 3^2 = 9$. 4 а) $\left(\left(\sqrt[4]{4}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-3\sqrt{8}} = \left(\sqrt[4]{4}\right)^{-12} = 4^{-3} = \frac{1}{64}$;

б) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$.

2

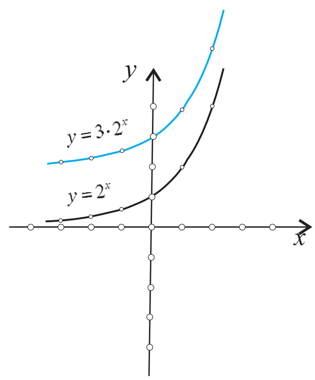
1 Растечки се б) и г).

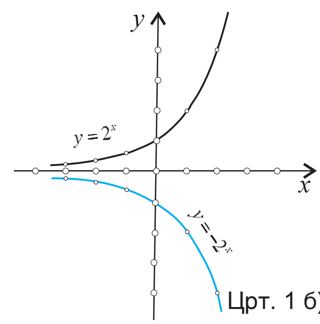
3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Црт. 1а)

Црт. 1б)





Црт. 1 б)

3

1 а) $x = 11$; б) $x = -15$, в) $x = 0$.

2 а) $5^{x^2-3x+1} = 5^{-1} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 2$ или $x_2 = 1$; б) $3^{x^2-3x+3,5} = 3^{3,5}$, $x_1 = 0$ или $x_2 = 3$;

3 а) $2^{(x+2)(x+1)} = 2^6 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 6$, $x_1 = 1$ или $x_2 = -4$; б) се добива $6^{x+2} = 6^{2x+1}$, од каде $x = 1$.

4 а) $x = 3$; б) $x = 3$. 5 а) Се добива $\frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{8} = \frac{3^x}{9} - \frac{3^x}{27} \Rightarrow 3^4 \cdot 2^x = 2^4 \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow x = 4$;

4

1 а) Со смената $y = 2^x$ се добива квадратната равенка $y^2 + 7y - 44 = 0$, па оттука $x = 2$;

б) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. 3 а) $x = 0$, б) $x = 1$. 4 а) $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x$; $x = 0$.

5

1 а) $\log_6 36 = 2$; б) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$; в) $\log_7 1 = 0$; г) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -2$. 2 а) $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} =$

$= 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$; б) $x = -3$; в) $x = -\frac{1}{2}$; г) $x = -\frac{2}{3}$. 3 а) $x = 2^6 = 64$; б) $x = \frac{1}{8}$; в) $x = \frac{1}{27}$; г) $x = \frac{1}{4096}$.

4 а) 4; б) 5; в) $\frac{1}{2}$; г) 2. 5 а) Добиваме $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 3 = -3$; б) 24. 6 а) 3; б) 0. 7 а) -2; б) 150; в) 3.

6 ② а) $-x>0,\ x\in(-\infty,0)$; б) $1-x>0,\ x\in(-\infty,1)$; в) $x^2-4>0,\ x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; г) $x^2-3x-4>0$, $x\in(-\infty,1)\cup(4,\infty)$. ③ Растечки се б) и в). ④ а) $\log_2 3>\log_2\sqrt{2}$; б) $\log_3\frac{1}{5}<\log_3\frac{1}{2}$; в) $\log_2\sqrt{3}<\log_2\pi$. ⑤ а) $a>b$; б) $a<b$; в) $a>b$; г) $a>b$. ⑥ а) $a\in(0,1)$; б) $a\in(1,\infty)$; в) $a\in(1,\infty)$.

7 ② а) $\log x=\log 5+2\log a+3\log b$; б) $\log x=\log 8+2\log a+3\log b-\log 5-\log c$; в) $\log x=\log(a^2+2)-\log(b-3)$.

③ а) $\log x=\log a+\frac{1}{2}\log a=\frac{3}{2}\log a$; б) $\log x=2\log a+\frac{1}{2}\log a-\log 3-\frac{2}{3}\log b=\frac{5}{2}\log a-\log 3-\frac{2}{3}\log b$.

④ а) $\log x=\log 2+3\log(a+b)$; б) $\log x=\log 8+3\log a+2\log(a-b)$;

в) $\log x=\log 2+2\log(a+1)-\log(a+2)-\log(a-2)$. ⑤ а) $\log x=\log a+\frac{1}{2}\left(\log a+\frac{1}{2}\log a\right)=\frac{7}{4}\log a$;

б) $\log x=\log 2+2\log a+\log b+\frac{1}{2}\left(\log a+\frac{1}{2}\log b\right)-\frac{1}{3}\log a-\frac{1}{3}\log b=\log 2+\frac{13}{6}\log a+\frac{11}{12}\log b$.

⑥ а) $\log p=\frac{1}{2}\left(\left(\log s+\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)\right)\right)$; б) $\log x=\frac{1}{3}\left(\log a+2\log b-\log 5-2\log(a-b)\right)$.

⑦ $x=\frac{m^2n^4}{a^3b^5}$. ⑧ $x=\frac{5\cdot 4^2}{8n^3m^2}=\frac{10}{n^3m^2}$. ⑨ $x=\sqrt[3]{\frac{(a-2b)^2}{a+2b}}$. ⑩ $x=\frac{(a+b)^2}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}\cdot a^2$. ⑪ а) $\log_6 4+\log_6 9=$ $=\log_6 36=2$; б) $\log_{12}4+\log_{12}36=\log_{12}144=2$; в) $\log_{10}500-\log_{10}5=\log_{10}\frac{500}{5}=2$; г) $\log_5\frac{1}{4}\cdot 100=2$.

8 ① а) $\log_2 3\cdot\log_9 16=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2}=2$; б) $\log_2\sqrt{5}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2}=\frac{1}{2}\log_2 5\cdot\frac{\frac{1}{3}\log_2 2}{2\log_2 5}=\frac{1}{12}$. ② а) 6; б) 3.

в) $\frac{2-a}{a+b}$, упатство: $\log_{35}28=\frac{\log_{14}14+\log_{14}2}{\log_{14}7+\log_{14}5}=\frac{1+\log_{14}\frac{2\cdot 7}{7}}{a+b}$.

④ а) $\log_a b+\log_{\frac{1}{a}}b=\log_a b+\frac{\lg_a b}{\lg_a\frac{1}{a}}=\log_a b-\log_a b=0$; б) $3\log_b a+2\log_b\frac{1}{a}=3\log_b a+2\log_b a^{-1}=\log_b a$;

9 ① а) За $x>0$, $x=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$; б) за $x>-1$, $x+1=2^{\frac{1}{2}}$, т.е. $x=\sqrt{2}-1$. ② а) $\frac{9}{2}$; б) 0; 5.

③ а) $D=\left(\frac{5}{3},\infty\right)$, $x=5$; б) $D=\left(\sqrt[3]{56},\infty\right)$, $x=4$. ④ а) За $x>0$, $\log_3 x=2$, т.е. $x=9$; б) за $x>1$, $\log_3(x-1)=4$, $x-1=5$, $x=6$.

10 ① а) За $x>-5$ имаме $x+5=x^2+5$; $x^2-x=0$; $x_1=0$, $x_2=1$. б) За $x>0$ имаме $\frac{x^2}{x^3}=27$, $x=\frac{1}{27}$.
② а) 1; б) 3; ③ а) $\frac{5}{2}$; б) 3; ④ а) За $x>2$, $\frac{x+3}{x-2}=5$, $x=\frac{13}{4}$; б) за $x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$ имаме $\log_4(x^2-5)=10^0$, т.е. $x^2-5=4$, од каде што $x_1=3, x_2=-3$.

11 (1) а) За $x>0$ по смената $\lg x = y$ добиваме $2y^2-5y+3=0$, т.е. $y_1=\frac{3}{2}, y_2=1$, па $x_1=10^{\frac{3}{2}}, x_2=10$.

б) Од $x>0, \lg x+2\neq 0$ и $4-\lg x\neq 0$ имаме $D: x\in(0,\infty)\setminus\{10^{-2},10^4\}$, а по смената $\lg x=y$ добиваме $\frac{2}{2+y}+\frac{1}{4-y}=1 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0$, т.е. $y_1=1, y_2=2$, па $x_1=10, x_2=100$. (2) а) $\log_7 x-6\log_x 7+1=0$; за $x>0$ и $x\neq 1$, со примена на $\lg_x 7=\frac{1}{\lg_7 x}$ и смената $\lg_7 x=y$ добиваме $y-\frac{6}{y}+1=0 \Leftrightarrow y^2+y-6=0; y_1=-3, y_2=2$, односно $x_1=7^{-3}=\frac{1}{343}, x_2=7^2=49$. б) За $x>0$, по логаритмирањето со основа 10 имаме $-1+(\lg x-2)\lg x=2$, а со смената $\lg x=y$ добиваме $y^2-2y-3=0$; $y_1=-1, y_2=3$; $x_1=\frac{1}{10}, x_2=1000$.

12 (1) а) За $3^x-2>0$, т.е. $x>\log_3 2$ имаме $3^x-2=5^2 \Leftrightarrow 3^x=27; x=3$. б) Според дефиницијата за логаритамска равенка имаме $4^x-3=2^{x+1}$, т.е. $4^x-2\cdot 2^x-3=0$. По смената $2^x=y$ добиваме $y^2-2y+3=0$; $y_1=3, y_2=-1$; $x_1=\log_2 3$ (2) а) $5^{2\log x-1}=5^{\log x}\cdot\sqrt[3]{5}$. За $x>0$ имаме $5^{2\log x-1}=5^{\log x+\frac{1}{3}}$, т.е. $2\log x-1=lox+\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log x=\frac{4}{3}$, т.е. $x=10^{\frac{4}{3}}$. б) За $x>0$ и $3^{\log_3 x}=y$ добиваме $y^2-4y+3=0$; $y_1=1, y_2=3$. Од $3^{\log_3 x}=1$ добиваме $x=1$, а од $3^{\log_3 x}=3$ добиваме $x=3$. (3) ***Упатство:*** $y(1+y)=2$, $y_1=1$, $y_2=-2$.
За $y_1=1 \Rightarrow \log_2(2^x+1)=1, x=0$. За $y_2=-2$ равенката нема решение

1

1 Б. 2 Г. 3 А. 4 В. 5 Б. 6 $(0,+\infty)$ 7 $a>0, a\neq 1$. 8 $\frac{x}{y}$.

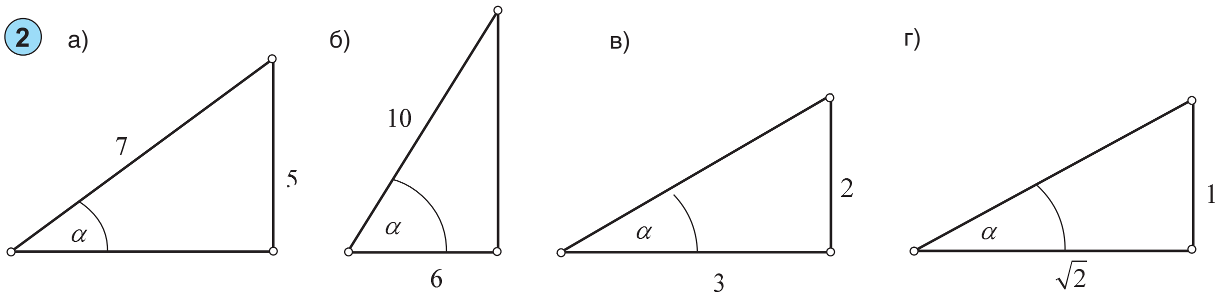
9 x-оската. 10 $\frac{2}{3}$. 11 $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-2\sqrt[3]{27}}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-6}=3^{-2}=\frac{1}{9}$. 12 Со смената $5^x=y$, добиваме $y^2-4y-5=0$; $y_1=5, y_2=-1$. Од $5^x=5$ следува дека $x=1$, а за $y=-1$, равенката $5^x=-1$ нема решение.

13 $\log_2(\log_3 x)=10^0 \Rightarrow \log_3 x=2^1; x=9$. 14 $\frac{\log 3}{\log 5}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot\frac{\log 5}{\log 4}=1$. 15 За $x<\log_2 3$ имаме $4^x-3\cdot 2^x+2=0$, па со смената $2^x=y$ добиваме $y^2-3y+2=0$, $y_1=1, y_2=2$, па од $2^x=1, x=0$, односно $2^x=2, x=1$, се решенија на равенката.

ТЕМА 2 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

1 (1) а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \cos\alpha=\frac{4}{5}, \operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}, \operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$; б) $\sin\alpha=\frac{4}{5}, \cos\alpha=\frac{3}{5}, \operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}, \operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$;
в) $\sin\alpha=\frac{8}{17}, \cos\alpha=\frac{15}{17}, \operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}, \operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$; г) $\sin\alpha=\frac{12}{37}, \cos\alpha=\frac{35}{37}, \operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{35}, \operatorname{ctg}\alpha=\frac{35}{12}$.

2 а) б) в) г)



3 $\operatorname{tg}50^\circ = \frac{H}{5}$ или $H \approx 5{,}958$. **4** Од $\frac{a}{b} = \frac{8}{15}$ следува $a = \frac{8}{15}b$ и $c = \frac{17}{15}b$, па $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{15}b : \frac{17}{15}b = \frac{8}{17} = 0{,}470$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$.

2

1 а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) -2. **2** а) $\frac{1}{2}$; б) 0. **3** а) $3\frac{3}{4}$; б) $5\frac{1}{4}$. **4** а) $\alpha = 66^\circ 44'$; б) $\alpha = 62^\circ 37'$; в) $\alpha = 75^\circ$; г) $\alpha = 84^\circ 15'$. **5** а) $\alpha = 20^\circ$; б) $\alpha = 38^\circ 15'$; в) $\alpha = 54^\circ 40'$; г) $\alpha = 89^\circ 37'$; д) $\alpha = 45^\circ$; ѓ) $\alpha = 35^\circ$. **6** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sin 70^\circ}{3\cos 70^\circ}$; г) $\frac{2}{5}$. **7** а) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$; в) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **8** а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\cos\alpha = \frac{40}{41}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{40}{9}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **9** а) $\sin^3\alpha$; б) $\cos^3\alpha$. **10** а) $2\sin\alpha$; б) $2\cos\alpha$. **11** а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **12** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **15** Упатство. а) Замени $\operatorname{tg}\alpha$ со $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; б) Упатство. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

3

1 а) $90^0 + 1\cdot 360^0$; б) $196^0 + (-1)\cdot 360^0$; в) $120^0 + 8\cdot 360^0$; г) $80^0 + (-3)\cdot 360^0$, или $-2\cdot 360^0 - 280^0$.
2 а) 30°; б) 180^0; в) 360^0. **3** $28\pi \approx 87{,}96\,\text{cm}$. **4** а) $\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{3\pi}{5}$; в) $\frac{7{,}068\pi}{6}$; г) $\frac{59\pi}{50}$; д) $\frac{48\pi}{25}$.
5 а) 30^0; б) 60^0; в) 135^0; г) $157^0\,30'$; д) $229^0\,10'$.

4

2 а) I квадрант; б) II квадрант; в) IV квадрант; г) III квадрант; д) IV квадрант.
3 а) II квадрант; б) II квадрант; в) I квадрант; г) III квадрант; д) IV квадрант.
5 а) $\alpha = 0^0$ или $\alpha = 360^0$, па $\sin 0^0 = \sin 360^0 = 0$, $\cos 0^0 = \cos 360^0 = 1$; б) $\alpha = 180^0$, $\sin 180^0 = 0$; $\cos 180^0 = -1$; в) $\alpha = 90^0$, $\sin 90^0 = 1$; $\cos 90^0 = 0$; г) $\alpha = 270^0$, $\sin 270^0 = -1$; $\cos 270^0 = 0$; д) исто како б).
7 Позитивен: а), в) и д), а негативен: б), г) и ѓ). **8** а) $\sin 130^0 > 0$, $\cos 210^0 < 0$, па $\sin 130^0 \cdot \cos 210^0 < 0$; б) негативен; в) негативен; г) негативен; д) позитивен. **9** а) II или IV квадрант, т.е. $\alpha \in (90^0, 180^0) \cup (270^0, 360^0)$; б) I или III квадрант, т.е. $\alpha \in (0^0, 90^0) \cup (180^0, 270^0)$.
10 Негативен: а) и в), позитивен: б) и г).

5

1 а) $1{,}73$; б) $-1{,}73$; в) 0; г) $1{,}73$; д) $-0{,}57$. **2** Позитивен: а), б) и г); негативен: в) и д). **3** а) $\sin 15^0>0,\ \operatorname{tg}150^0<0$, па $\sin 15^0\cdot\operatorname{tg}150^0<0$; б) позитивен; в) негативен. **4** Позитивен: а), б) и в); негативен: г). **5** а) II или III квадрант, т.е. $\alpha\in\left(90^0,180^0\right)\cup\left(180^0,270^0\right)$; б) I или II квадрант, т.е. $\alpha\in\left(0^0,90^0\right)\cup\left(90^0,180^0\right)$; в) I или II квадрант, т.е. $\alpha\in\left(0^0,90^0\right)\cup\left(90^0,180^0\right)$.

6

1 а) $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin\alpha=\frac{21}{29},\ \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{20}{21},\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{21}{20}$. **2** а) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$; б) $\sin\alpha=\frac{40}{41},\ \cos\alpha=-\frac{9}{41};\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{40}{9}$. **3** $\frac{9}{5}$. **4** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$.

5 б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\cdot\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$

6 а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha\left(1+\cos\alpha\right)+\sin\alpha\left(\cos\alpha+1\right)}{\cos\alpha}=\frac{\left(1+\cos\alpha\right)\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)}{\cos\alpha}=\left(1+\cos\alpha\right)\left(1+\operatorname{tg}\alpha\right).$

7

1 а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) -1. **2** а) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) 1. **3** а) 3; б) од $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ следува дека $\cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$, па $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3},\ \frac{\operatorname{tg}\beta-\sin\alpha}{\cos\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{4}{3}}=\frac{11}{29}.$

4 а) $\sin 40^0$; б) $\sin 20^0\cdot\left(-\sin 20^0\right)-\cos 20^0\cdot\cos 20^0+\left(-\operatorname{ctg}20^0\right)\cdot\left(-\operatorname{tg}20^0\right)=-\sin^2 20^0-\cos^2 20^0+1=0.$

5 $2\cos^2\alpha$. **6** 1. **7** $\operatorname{ctg}40^0$.

8

1 а) $\sin 25^0>\sin 15^0$; б) $\cos 120^0>\cos 130^0$; в) $\sin 20^0>\sin 320^0$, бидејќи $\sin 20^o>0$, а $\sin 320^o<0$; г) $\operatorname{tg}38^0<\operatorname{tg}62^0$; д) $\operatorname{ctg}280^0>\operatorname{ctg}300^0$. **2** а) и в) негативен; б), г) позитивен.

3 а) $\sin 225^o<\sin 212^o<\sin 126^o<\sin 123^o$; б) $\operatorname{tg}154^o<\operatorname{tg}142^o<\operatorname{tg}45^o<\operatorname{tg}48^o<\operatorname{tg}52^o$.

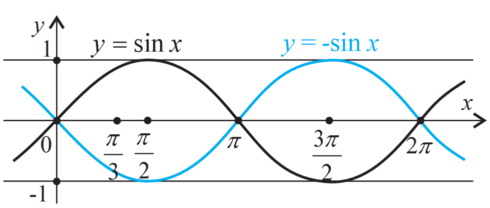
4 а) $\sin 48^0-\sin 64^0<0$ и $tg15^0-tg50^0<0$, па $\frac{\sin 48^0-\sin 64^0}{tg15^0-tg50^0}>0$. б) негативн.

5 $ctg320^0<0,\ tg214^0>0,\ tg150^0+tg165^0<0$ како збир на два негативни броја, па $\frac{ctg320^0\cdot tg214^0}{tg150^0+tg165^0}>0$.

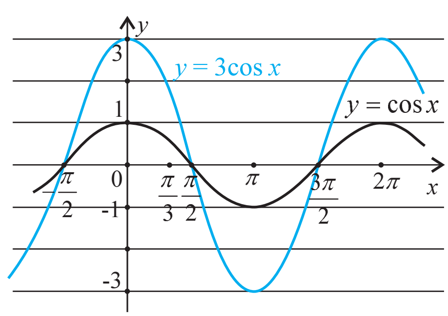
6 а) 1; б) -1; в) 0; г) 1; д) 0.

10

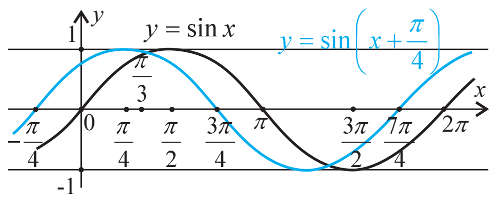
1 а)



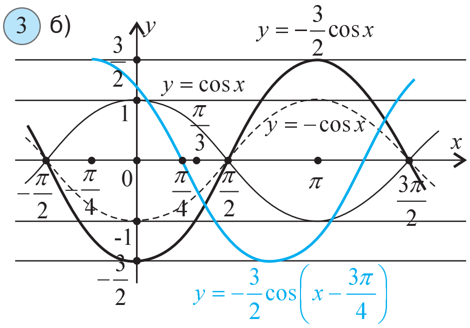
г)



2 б)

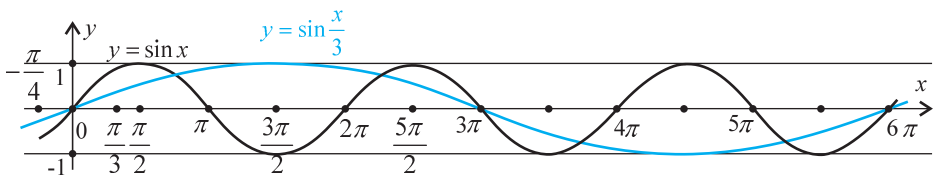


3 б)

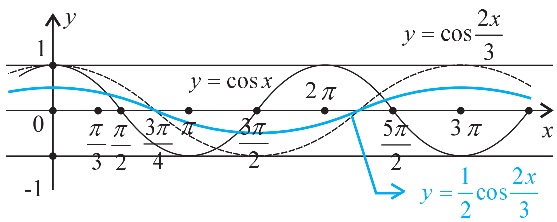


11

1 б)

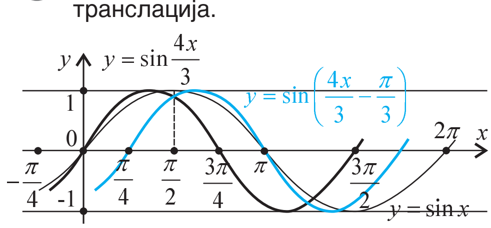


2 в)

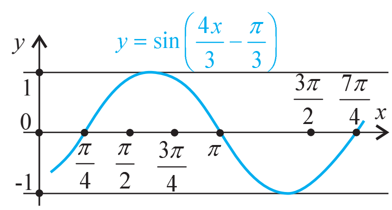


12

1 б) Графикот е нацртан со транслација.

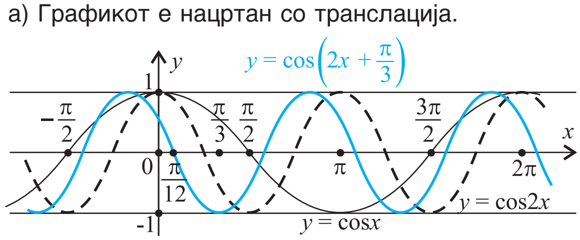


Графикот е нацртан со карактеристични точки.

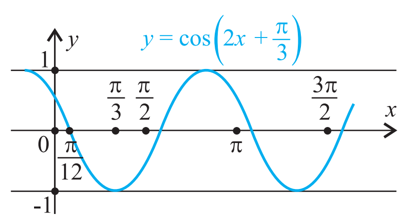


Нули: $y=0$:	max: $y=1$:	min: $y=-1$:
$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;	$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;	$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
$\mathbf{k=0}$ $x=\frac{\pi}{4}$;	$\mathbf{k=0}$ $x=\frac{5\pi}{8}$;	$\mathbf{k=0}$ $x=\frac{11\pi}{8}$;
$\mathbf{k=1}$ $x=\pi$;	$\mathbf{k=1}$ $x=\frac{13\pi}{8}$;	$\mathbf{k=1}$ $x=\frac{23\pi}{8}$;
$\mathbf{k=-1}$ $x=-\frac{\pi}{2}$;	$\mathbf{k=-1}$ $x=-\frac{7\pi}{8}$;	$\mathbf{k=-1}$ $x=-\frac{\pi}{8}$.

2 а) Графикот е нацртан со транслација.



Графикот е нацртан со карактеристични точки.



Нули: $y=0$:

$2x+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$;

$\mathbf{k=0}$ $x=\frac{\pi}{12}$;

$\mathbf{k=1}$ $x=\frac{7\pi}{12}$;

$\mathbf{k=-1}$ $x=-\frac{5\pi}{12}$;

max: $y=1$:

$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

$\mathbf{k=0}$ $x=-\frac{\pi}{6}$;

$\mathbf{k=1}$ $x=\frac{5\pi}{6}$;

$\mathbf{k=-1}$ $x=-\frac{7\pi}{6}$;

min: $y=-1$:

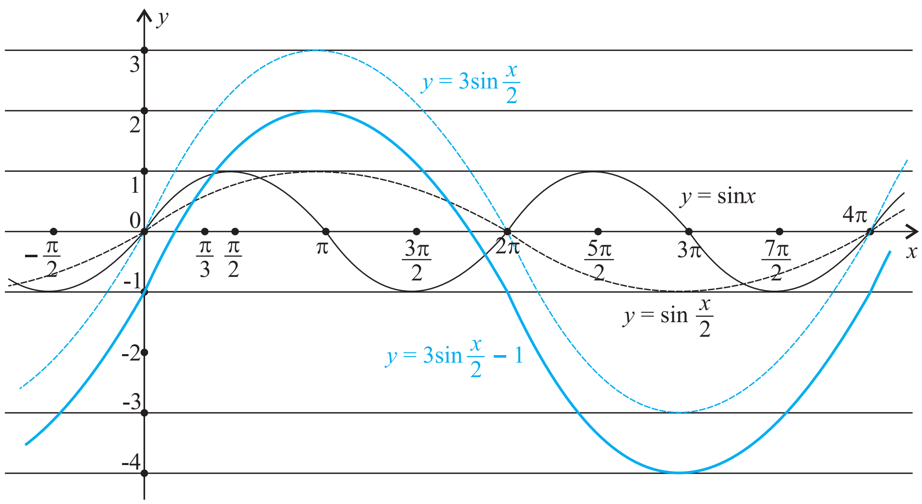
$2x+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

$\mathbf{k=0}$ $x=\frac{\pi}{3}$;

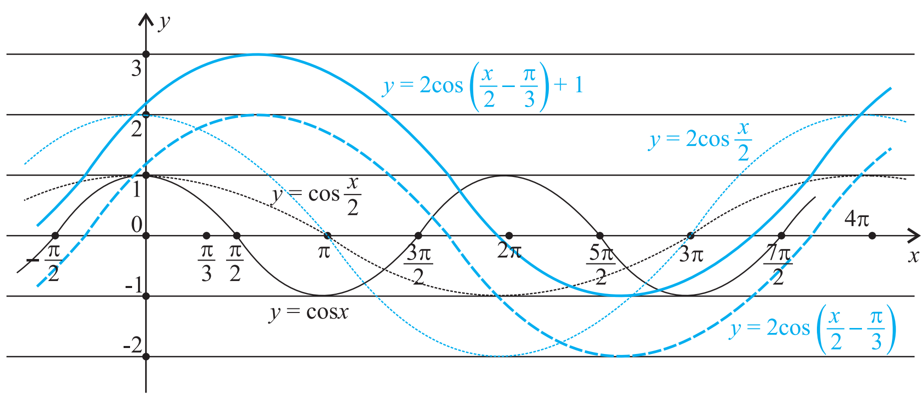
$\mathbf{k=1}$ $x=\frac{4\pi}{3}$;

$\mathbf{k=-1}$ $x=-\frac{2\pi}{3}$.

13 2 а)



3 б)



14 3 б) $y=1-\operatorname{tg}x=-\operatorname{tg}x+1$. Го цртаме графикот $y=\operatorname{tg}x$, потоа $y=-\operatorname{tg}x$ и на крајот $y=-\operatorname{tg}x+1$.

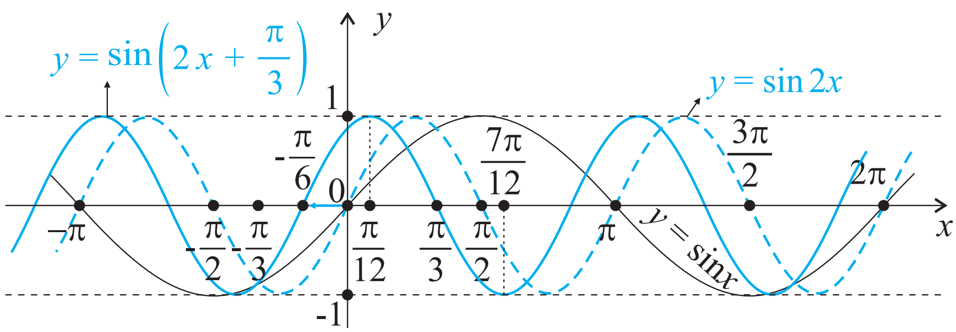
4 б) Функцијата ја трансформираме $y=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{tg}\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, а потоа го цртаме нејзиниот график кој ќе го добиеме со поместување на графикот на функцијата $y=\operatorname{tg}x$ по x-оска вдесно за $\frac{\pi}{2}$.

2 **1** Г. **2** А. **3** Б. **4** В. **5** А. **6** Б. **7** Ординатата, тригонометриската кружница. **8** Тангенсна оска. **9** Првиот, четвртиот. **10** Вториот, третиот.

11 $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$. **12** а) 1; б) 1. **14** а) 1. Го цртаме графикот на $y = \sin x$.

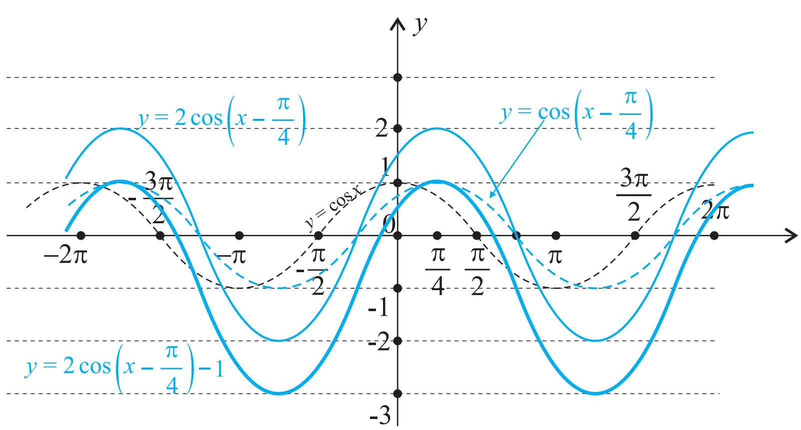
2. $b = 2$, периодот е $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, претходниот график што е во интервалот $[0, 2\pi]$ го „збиваме" во новата периода $[0, \pi)$. 3. Фазното поместување $\varphi = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} > 0$, па вториот график $y = \sin 2x$ го поместуваме влево за $\frac{\pi}{6}$, со што го добиваме графикот на функцијата $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. б) Нули на функцијата се $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ако нулите не може да се прочитаат од графикот, тогаш ги добиваме од равенката $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, а притоа имаме: $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi$, т.е. $2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, а $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Финкцијата има максимум 1, т.е. $y_{\max} = 1$ во точката $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Точките на максимумот може да ги добиеме и од равенката $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$. Решението на равенката е $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, т.е. $2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, а $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Функцијата има минимум $y_{\min} = -1$ во точката $x = -\frac{5\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, или од равенката $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, од каде што $x = -\frac{5\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Графикот е претставен на следниот цртеж.



15 $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. 1. Го цртаме графикот на $y = \cos x$. 2. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 3. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ (види цртеж).



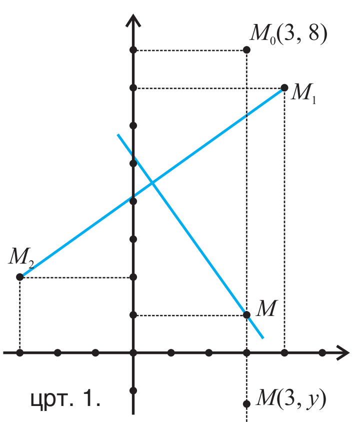
ТОЧКА ВО РАМНИНА

1

① $\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{25}=5$; $\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$;
$\overline{BC}=\sqrt{4^2+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$; $L=5+\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5+3\sqrt{5}$. ② $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$.

③ $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$. ④ Бараното геометриско место на точки е симетрала на отсечката AB. Нека $M(x, y)$ е која било точка од бараното геометриско место. Според својството на симетралата на отсечка, имаме: $\overline{MA}=\overline{MB}$, т.е.: $\overline{MA}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$, $\overline{MB}=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$, па од условот $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$ следува $(x-2)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-4)^2$. По средувањето на равенката добиваме $x+y-6=0$, што претставува равенка на симетралата на отсечката AB, т.е. бараното геометриско место.

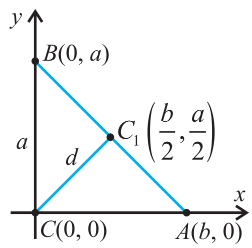
⑤ а) $M\left(\frac{1}{2},1\right)$; б) $M\left(\frac{3}{2},2\right)$. ⑥ Од условот на задачата имаме $\begin{cases}\overline{MA}=\overline{MB}\\ x=2|y|\end{cases}$. Од условот $\overline{MA}=\overline{MB}$, следува:
$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$. Со средување на оваа равенка добиваме $5x+y-7=0$. Од равенките $x=2|y|$ и $5x+y-7=0$ имаме $\begin{cases}5x+y-7=0\\ x=2y\end{cases}$ или $\begin{cases}5x+y-7=0\\ x=-2y\end{cases}$. Со решавање на двата системи се добиваат точките $M_1\left(\frac{14}{11},\frac{7}{11}\right)$ и $M_2\left(\frac{14}{9},-\frac{7}{9}\right)$, што значи задачата има две решенија. ⑦ $P=137$.



црт. 1.

⑧ $\overline{MM_1}=\overline{MM_2}$; $1+(y-7)^2=6^2+(y-2)^2$; $1+y^2-14y+49=36+y^2-4y+4$, $y=1$. Значи $M(3, 1)$, црт. 1. ⑨ $M_1(-8, 1)$, $M_2(16, 1)$.

⑩ Ако темето на правиот агол го сме стиме во координатниот почеток, остана тите две темиња имаат координати $A(b, 0)$ и $B(0, a)$, црт. 2.



црт. 2.

C_1 е средишна точка за отсечката AB, па од формулата за растојание имаме:

$$d=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{4}}=$$

$=\frac{1}{2}\sqrt{c^2}=\frac{c}{2}$, што требаше да се докаже.

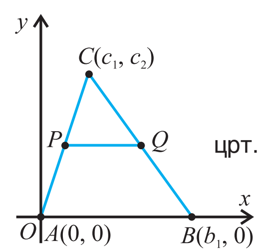
2

① $C\left(\frac{3}{4},4\right)$. ② а) $T(-1, 3)$; б) $T(-1, 0)$. ③ $C\left(\frac{22}{5},-\frac{16}{5}\right)$; $D\left(\frac{29}{5},-\frac{2}{5}\right)$; $E\left(\frac{36}{5},\frac{12}{5}\right)$; $F\left(\frac{43}{5},\frac{26}{5}\right)$.

④ а) $D(13, -1)$; б) $D_1(-1, 27)$.

⑤ Нека $P(p_1, p_2)$ и $Q(q_1, q_2)$ се средини на страните AC и BC соодветно, црт. 3.

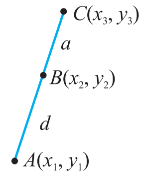
$p_2=\frac{0+c_2}{2}=\frac{c_2}{2}$; $q_2=\frac{0+c_2}{2}=\frac{c_2}{2}$ од каде следува дека $p_2=q_2$ т.е. точките P и Q се еднакво оддалечени од x – оската, што значи $PQ \parallel x$, т.е. $PQ \parallel AB$.



црт. 3

6 Од условот на задачата имаме: $\overline{AB}:\overline{BC}=d:a=\lambda$; $x_2=\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}$; $y_2=\frac{y_1+\lambda y_3}{1+\lambda}$, од каде $x_3=\frac{1}{\lambda}(x_2-x_1)+x_2$,

$y_3=\frac{1}{\lambda}(y_2-y_1)+y_2$, т.е. $x_3=x_2+\frac{a}{d}(x_2-x_1)$; $y_3=y_2+\frac{a}{d}(y_2-y_1)$. Види цртеж.



7 $C(13,17)$.

8 а) $L=\sqrt{90}+\sqrt{116}+\sqrt{74}$; б) $S_{AB}\left(\frac{15}{2},\frac{7}{2}\right)$, $S_{AC}\left(\frac{11}{2},\frac{17}{2}\right)$, $S_{BC}(10,7)$;

в) $T\left(\frac{23}{3},\frac{19}{3}\right)$;

3

1 $P=\frac{1}{2}$. 2 $P=0$; точките се колинеарни. 3 $P_{\Delta MNP}+P_{\Delta MPW}=15+9,5=24,5$.

4 Од $|26-2x|=24$ добиваме $x_1=1, x_2=25$.

5 $P=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$; а) $\frac{5}{2}$; б) 34; в) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$. 6 а) 28,5; б) 24.

7 Има две решенија: $C(4,15)$, $C_1(4,1)$.

3

1 Б. 2 Г. 3 А. 4 В. 5 А. 6 еднакви. 7 5. 8 $\frac{9a}{5}$.

9 $x=5,\ y=3$. 10 $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$. 11 5. 12 $T\left(2,\frac{2}{3}\right)$. 13 $D(12,-3)$.

14 16. 15 Правоаголен, бидејќи $3^2+4^2=5^2$.

ТЕМА 4 ПРАВА ВО РАМНИНА

1

1 а) не; б) да; в) да; г) не.

а) паралелна со y – оската;

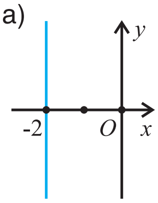
б) паралелна со x – оската;

в) минува низ $O(0, 0)$;

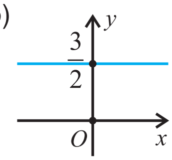
г) $y=0$ е равенка на x – оската;

д) $x=0$ е равенка на y – оската (црт. 1).

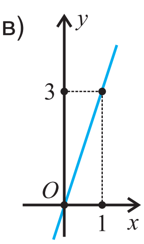
2 а)



б)



в)



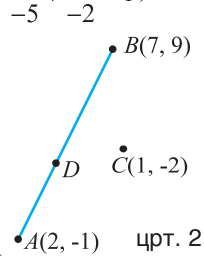
црт. 1

3 а) $A=10$; б) $B=-\frac{6}{5}$; в) $C=-1$. 4 $P_x\left(-\frac{3}{2},0\right)$; $P_y(0,3)$. 5 а) $m=-\frac{5}{3}$; б) $m=-2$; в) $m=\frac{3}{2}$; г) $m=-15$.

2

1 а) $x+3y-5=0$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{3}}=1$; б) $x+5y+17=0$; $\frac{x}{-17}+\frac{y}{-\frac{17}{5}}=1$. 2 $\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$; $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-2}=1$;

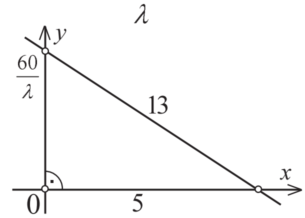
$\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$. 3 Ги одредуваме координатите на точката D, така што $\overline{AD}:\overline{DB}=2:3$. Оттука, $D(4,3)$. Потоа ќе ја напишеме равенката на правата што минува низ точките C и D, и добиваме: $5x-3y-11=0$ (црт. 2).



црт. 2

(4) а) $\frac{x}{8}+\frac{y}{-6}=1$; б) $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1$; в) $\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1$; г) $\frac{x}{-\frac{3}{7}}+\frac{y}{-\frac{5}{3}}=1$. (5) $4x+3y-27=0$.

(6) $x+4y-8=0$ и $x+y-5=0$. (7) Задачата има две решенија, т.е. постојат две такви прави, и тоа: p_1: $2x+5y-10=0$ и p_2: $8x+5y+20=0$. (8) Ја доведуваме равенката во сегментен вид $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{60}{\lambda}}=1$, од каде $m=5$, $n=\frac{60}{\lambda}$. Според Питагоровата теорема имаме: $5^2+\left(\frac{60}{\lambda}\right)^2=13^2$, а оттука $\lambda=\pm 5$, црт. 3 (9) а) $\lambda=-\frac{1}{2}$; б) $\lambda=\frac{5}{3}$. (10) $A=5$; $B=9$.



црт. 3

3

(1) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$. (2) а) $x-y+3=0$; б) $x+y-2=0$; г) $x\sqrt{3}+3y-2\sqrt{3}+9=0$. в) $x\sqrt{3}+y+3\sqrt{3}+2=0$; (3) а) $O(0,0)$; $A\left(\frac{1}{3},0\right)$; $B\left(\frac{1}{3},1\right)$; $C(0,1)$; б) $O(0,0)$; $A\left(\frac{1}{4},0\right)$; $B\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$; $C\left(0,\frac{5}{4}\right)$. ***Упатство:*** $a=3b$ или $b=3a$. Темето B лежи на дадената права, црт. 10.

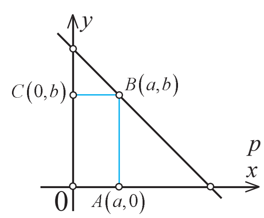
(4) $4x+3y-15=0$. (5) $3x-y-2=0$. (6) $\lambda=\frac{4}{5}$. (7) а) a и b ќе ги одредиме од условите: коефициентот на правецот $k=1$ и правата минува низ (0, 0), т.е. должината на отсечката на y–оската е $n=0$.

Равенката на правата во експлицитен вид е

$$y=\underbrace{\boxed{\frac{3a-2b+5}{a-b}}}_{k}\cdot x+\underbrace{\boxed{\frac{2a-5b+1}{a-b}}}_{n}.$$

Според условот на задачата $k=1$ и $n=0$ т.е.

$$\begin{cases}\frac{3a-2b+5}{a-b}=1\\ \frac{2a-5b+1}{a-b}=0,\end{cases}$$ од каде $a=-3$, $b=-1$.



црт. 4

б) $a=-\frac{11}{7}$, $b=-\frac{3}{7}$. (8) $a=7$, $b=-2$, $y+3=0$.

4

(1) а) $\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-2=0$; б) $-\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-2=0$; в) $\frac{x\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$; г) $-\frac{x}{2}\sqrt{2}+\frac{y}{2}\sqrt{2}-1=0$.

(2) а) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-6=0$; б) $\frac{7}{25}x-\frac{24}{25}y-4=0$; в) $\frac{x-y+2}{-\sqrt{2}}=0$; г) $\frac{y-ax-2}{\sqrt{1+a^2}}=0$; д) $-\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}=0$; ѓ) $-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=0$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{7}{3}=0$; ж) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-4=0$; з) $\frac{nx+my-mn}{\pm\sqrt{n^2+m^2}}=0$. (3) а) $\varphi=60^0$; б) $\varphi=30^0$; в) $\varphi=135^0$.

5

(1) а) $d=4$; б) $d=0$. (2) Да, $r=5$. ***Упатство:*** Правите допираат еден ист круг со центар во координатниот почеток, ако се наоѓаат на исто растојание од координатниот почеток.

(3) $d=\sqrt{a^2+b^2}$. (4) $d=\frac{240}{17}$. (5) Постојат две такви точки: $M_1(0,-12)$ и $M_2\left(0,\frac{4}{3}\right)$. (6) Равенката на правата ја трансфомираме во општ вид: $bx+ay-ab=0$. Според формулата за растојание од точка до права имаме: $d=\frac{bx+ay-ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$. Од условот на задачата $d=a$ и $y=0$ т.е. $a=\frac{bx-ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, од каде $x=a\pm\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$.

7 $M(2,3)$. 8 Нека $M(x,y)$ е една точка од бараното геометриско место, т.е. $\frac{3x-y+7}{-\sqrt{10}}=\frac{3x-y-3}{\sqrt{10}}$ од каде се добива $3x-y+2=0$. $\left.\begin{matrix}d\\d\end{matrix}\right\}M(x,y)$ Значи, бараното геометриско место е правата $3x-y+2=0$.

9 $2x+4y-3=0$. 10 Постојат две такви прави $p_1: x+y-7-5\sqrt{2}=0$ и $p_2: x+y-7+5\sqrt{2}=0$.

6

1 I начин: Симетралата s на отсечката AB минува низ нејзината средишна точка $S(s_1,s_2)$ и е нормална на отсечката, т.е. $s_1=\frac{5+9}{2}=7$, $s_2=\frac{7+5}{2}=6$, $k_s=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$. Бараната равенка е: $y-6=2(x-7)$ т.е. $2x-y-8=0$. II начин: ***Упатство:*** Равенката на симетралата на отсечката AB, може да се одреди и како геометриско место на точки, кои се еднакво оддалечени од точките A и B.

2 $8x-3y+92=0$. 3 а) $\varphi=26^0 33'35''$; б) $\varphi=22^0 22'$. 4 $90^0, 45^0, 45^0$. 5 Задачата има две решенија $5x+y-20=0$, $x-5y+22=0$. 6 45^0, 135^0. 7 90^0.

7

1 $k_{AB}=\frac{1-2}{3+4}=-\frac{1}{7}$. Од условот за паралелност следува $k_p=k_{AB}=-\frac{1}{7}$. Бараната права p минува низ точката $C(0,-2)$, па $y-(-2)=-\frac{1}{7}(x-0)$ од каде ја добиваме равенката $x+7y+14=0$.

2 Да, $m=-4$, $m=4$. 3 За $m=-3$ правите се паралелни, а за $m=3$ тие се совпаѓаат. 4 $x-6y+11=0$. ***Упатство:*** Нека бараната права е $p: y-2=k(x-1)$. Коефициентот k ќе го одредиме од условот $d_1=d_2$. 5 а) $L=\sqrt{13}+\sqrt{53}+4\sqrt{2}$; б) $P=10$; в) $\frac{20}{\sqrt{13}}, -20\sqrt{53}, \frac{5}{\sqrt{2}}$; г) $5, \frac{1}{2}\sqrt{157}, \frac{1}{2}\sqrt{37}$. 6 $x-y-7=0$.

7 $x-5y+13=0$, $5x+y-17=0$. 8 $(2,-7)$. 9 $\left(-2,-\frac{5}{2}\right)$. ***Упатство:*** Најди ја ортогоналната проекција на точката A врз правата.

4

1 В. 2 Б. 3 А. 4 А. 5 А. 6 $kx-y+n=0$ или $-kx+y-n=0$.

7 $y=-\frac{n}{m}x+n$. 8 $\frac{2}{3}$. 9 $y-y_1=\frac{a}{2}(x-x_1)$. 10 $k_2\cdot k_1+1=0$ или $k_2=-\frac{1}{k_1}$ или $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

11 $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$, $\frac{x}{\frac{7}{2}}+\frac{y}{-\frac{7}{3}}=1$. 12 $4x-3y+1=0$. 13 $\frac{30}{13}=2\frac{4}{13}$. 14 $\begin{cases}2x-3y+1=0\\9x+3y-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1.\end{cases}$

$k_1=-3$, $k_2=\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=-\frac{11}{3}$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\left|-\frac{11}{3}\right|$. 15 $AB:\ y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$,

$y-2=\frac{4-2}{3+1}(x+1)$, $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$, т.е. $x-2y+5=0$. $h_c=\frac{|x_C-2y_C+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|5+6+5|}{\sqrt{5}}=\frac{16}{\sqrt{5}}$.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ

С О Д Р Ж И Н А

Издавач:

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА НА РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
ул. „Мито Хаџи Василев - Јасмин”, бб - Скопје

Рецензиона комисија:

Д-р Боро Пиперевски, претседател
М-р Митруш Петрушев, член
Биљана Стефановска, член

Со Решение на Министерот за образование и наука на Република Македонија број 22-4258/1 од 28.07.2010 година, се одобрува употребата на овој учебник.

Автори: Д-р Наум Целакоски,
Д-р Верца Бакева,
Боривоје Миладиновиќ,
Јово Стефановски

МАТЕМАТИКА
за трета година средно стручно образование за сите струки

Уредник на изданието
Јово Стефановски

Јазичен лектор
Сузана Стојковска

Компјутерска обработка и дизајн
Бобан Аврамоски, Драган Шопкоски, Милчо Аврамоски

Коректура
Авторите

Подготовка за печат
Јово Стефановски

Печати:
Графички центар дооел, Скопје

Тираж:
5.600

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека “Св.Климент Охридски” , Скопје
51(075.3)
МАТЕМАТИКА за III година : средно стручно образование за сите струки /
Наум Целакоски ...[и др.]. - Скопје : Министерство за образование и наука на
Република Македонија, 2010. - 146 стр. : илустр. ; 27 см
Автори: Наум Целакоски, Верица Бакева, Боривоје Миладиновиќ, Јово
Стефановски
ISBN 978-608-226-049-5
1. Целакоски, Наум [автор]
COBISS.MK-ID 84290058