Анета Гацовска
Јованка Тренчева Смилески
Надица Ивановска

МАТЕМАТИКА ЗА ЕКОНОМИСТИ

ИЗБОРЕН ПРЕДМЕТ ЗА III И IV ГОДИНА НА ЧЕТИРИГОДИШНОТО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

ЕКОНОМСКО - ПРАВНА И ТРГОВСКА СТРУКА

2015

Рецензенти:

д-р Гордана Билбиловска, професор при Економски факултет, УКИМ, Скопје

Елизабета Лазовска - Тасиќ, професор при СУГС „Марија Кири - Склодовска”, Скопје

Виолета Несторовска, професор СЕПУГС „Васил Антевски - Дрен”, Скопје

Издавач:
Министрство за образование и наука на Република Македонија

Печати:
Графички центар дооел, Скопје

Со Решение на Министерот за образование и наука на Република Македонија број 22–2246/1 од 21.04.2010 година, се одобрува употреба на овој учебник

П р е д г о в о р

Учебникот **МАТЕМАТИКА ЗА ЕКОНОМИСТИ** за трета и четврта година на четиригодишното стручно образование е пишуван според Наставните програми за истоимените изборни предмети за трета и четврта година на четиригодишното стручно образование. Наменет е пред сé, според наставниот план за учениците од економско правната и трговската струка во образовните профили економски техничар и техничар за трговија и маркетинг. Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на наставата. Учебникот се состои од два дела. Првиот дел е пишуван според Наставната програма трета година на четиригодишното стручно образование и се состои од четири тематски целини, додека вториот дел е пишуван според Наставната програма четврта година на четиригодишното стручно образование и се состои од шест тематски целини. Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна содржина, наставна единица, дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, која претставува продолжување на работата на часот и таа е највисок степен на самостојна работа на ученикот. На крајот од учебникот се дадени кратки одговори или решенија на задачите, а по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање.

Во првиот дел се поместени, наставните теми: „**Полиноми**”, ,,**Равенки и неравенки**”, ,,**Елементи на линеарното програмирање**”и ,,**Калкулации**”.

Првата наставна тема „**Полиноми**” претставува повторување на формулите за скратено множење, како и проширување на знаењата за разложување на полиноми на множители, рационализација на именител на дропка, признаци за деливост.

Совладувањето на материјалот изложен во втората наставна тема ,,**Равенки и неравенки**” дава можност за стекнување на знаења во врска со равенките и неравенките како и усвојување на техники за решавање на некои видови равенки и системи равенки. Во делот од квадратните неравенки и системите неравенки акцентот е ставен на нивната практична примена.

Третата наставна тема ,,**Елементи на линеарното програмирање**” е насочена кон воведување на поимите линеарна равенка, линеарна неравенка и системи линеарни неравенки, кои се основен предуслов за разбирање на проблемите во областа на линеарното програмирање.

Со совладување на материјалот кој се однесува на четвртата наставна тема ,,**Калкулации**” ученикот ќе се стекне со основни знаења од областа на калкулациите, во смисла на поделбата на калкулациите, видовите калкулации, елементите на калкулациите. Сметаме дека од особена важност е нивната улога во трговијата, односно изработката на калкулации за еден или повеќе производи.

Во вториот дел се поместени, наставните теми: ,,**Матрици**'', ,,**Низи од реални броеви**'', ,,**Реални функции од реална променлива**'', ,,**Изводи**'', ,,**Потрошувачки кредит**''и ,,**Елементарна актуарска математика**''.

Во првата тема ,,**Матрици**'' учениците се упатуваат на усвојување на поимот матрица и основните операции со матрици. Во продолжение се запознаваат со некои поважни видови матрици, а на крајот користејќи елементарни трансформации на матрици ќе одредуваат ранг на матрица.

Совладувањето на материјалот изложен во втората тема ,,**Низи од реални броеви**'' овозможува проширување на знаењата на учениците во врска со низите од реални броеви и граничните процеси. Особено, тие ќе се запознаат со поимот конвергентна и дивергентна низа, како и со својствата на конвергентните низи и операциите со конвергентни низи.

Материјалот изложен во темата ,,**Реални функции од реална променлива**'', овозможува проверување на познавањата од функциите со реална променлива и изучување на некои својства на реалните функции, а потоа користејќи ги стекнатите знаења се учениците се оспособуваат да цртаат графици на елементарните функции. На крајот со изучувањето на граничните процеси и нивните својства учениците ќе ги прошират знаењата за функциите.

Во четвртата тема од вториот дел ,,**Изводи**'', ученикот се запознава со поимот извод од реална функција, како и со техниката на наоѓање на извод на некои елементарни функции. Ги усвојува основните правила за диференцирање и одредува извод на сложена функција и имплицитно зададена функција, како и извод од повисок ред.

Во петтата тема ,,**Потрошувачки кредит**'', ученикот се запознава со поимот потрошувачки кредит и се оспособува за пресметување на редовната камата и отплатата, како и казнената и бонифицираната камата.

Во шестата тема ,,**Елементи на актуарска математика**'' ученикот се запознава со предметот и целите на актуарската математика, во делот на таблиците на смртност и веројатноста на живеењето и на умирањето.

При реализирање на програма низ овој учебник наставникот може лесно да настојува на самостојна работа од страна на учениците.

Посебна благодарност им должиме на рецензентите на овој учебник, чии сугестии и забелешки придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците од економско – правната струка да се запознаат со содржини кои ќе им бидат од корист во нивното понатамошно професионално усовршување.

Февруари, 2010 Авторите

С О Д Р Ж И Н А

I дел

1. ПОЛИНОМИ

1. 1. Основни поими за полиноми

Ако x е произволен реален број, тогаш на пример, $(x-3)(x-4)$, $(2x+1)(x-1)$, $(x^2+2x+1)(x-1)$, $(x^3-1)(x-1)$, $x^4-3(x^3+1)+2(x-1)^2$ се цели рационални алгебарски изрази со променлива x. По ослободување од заградите и сведување на сличните членови, лесно се покажува дека секој израз соодветно е идентичен со следните рационалните изрази: $x^2-7x+12$, $2x^2-x-1$, x^3+x^2-x-1, x^4-x^3-x+1, $x^4-3x^3+2x^2-4x-1$.

Дефиниција 1. Изразот

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0 \qquad (1)$$

каде што $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ се избрани елементи од множеството на реалните или комплексните броеви, n е природен број, а x - променлива која што прима вредности од истото бројно множество се нарекува **полином** од n-ти степен по x.

Броевите $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ се викаат **коефициенти** на полиномот или поточно, коефициенти пред соодветните степени на променливата x во полиномот (1). Согласно со дефиницијата, полиномот (1) е од n- ти степен, само при услов $a_n\neq 0$. Затоа велиме дека бројот a_n е **водечки** (или најстар) **коефициент** на полиномот (1), а коефициентот a_0 се вика **слободен член**. Ако $a_n=1$, тогаш за полиномот велиме дека е во **нормален вид**.

За скратено означување на полиномите од променлива x, често ги користиме симболите: $P(x), Q(x), f(x), g(x)$ или $P_n(x), Q_n(x), f_n(x)$ итн., ако сакаме да истакнеме дека тој е од n - ти степен. Така на пример, равенството

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0 \qquad (2)$$

ќе го сфаќаме и читаме како: ,,$P(x)$ е полиномот од десната страна од (2)" или ,,полиномот (1) е означен со $P(x)$". Значи, знакот ,,=" тука ни појаснува само што е означено со $P(x)$, слично како при записот на елементарните функции, на пример $f(x)=\sin x$.

Полиноми од трет, втор и прв степен по x соодветно се:

$$P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\quad (a_3\neq 0)$$

$$P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0,\ (a_2\neq 0),\quad P_1(x)=a_1x+a_0,\ (a_1\neq 0).$$

Најнискиот степен на еден полином од x би требало да е еден, меѓутоа во работата со полиноми, посебно кај операциите со нив, целисходно е да прифатиме дека имаме полиноми од нулти степен. $P_0(x)$- полином од нулти степен е секој реален или комплексен број, различен од нула. Навистина, бројот $a_0 \neq 0$ може да се запише во видот a_0x^0, бидејќи $x^0 = 1$. Значи: $P_0(x) = a_0$, $(a_0 \neq 0)$.

Од истите причини (при операциите со полиноми) бројот нула ќе го викаме **нула полином** или **нулти полином** (не значи исто што и полиномот од нулти степен). Тоа е единствен полином на кој не му припишуваме никаков степен. Затоа полиномот (1) кај кој $a_0 \neq 0$ уште се вика **ненула полином**. Меѓутоа, под зборот полином секогаш ќе подразбираме ненулти полином без тоа посебно да го нагласуваме.

По однос на коефициентите на полиномот (1) од дефиницијата 1 ставен е само еден услов: $a_n \neq 0$, што значи дека некои (или сите останати) коефициенти можат да бидат и еднакви на нула. Во таа смисла за полиномот од четврти степен $5x^4 + 1$ можеме да сметаме дека има и членови од трет, втор и прв степен со коефициенти еднакви на нула. Тој, всушност, е еднаков на полиномот: $5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

Да забележиме дека за полином од n-ти степен, покрај неговото запишување во видот (2), т.е. по опаднувачките степени на променливата x, допуштено е да го запишуваме по растечките степени на x:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \ (a_n \neq 0) \qquad (3)$$

согласно комутативноста и асоцијативноста на собирањето на реалните и комплексните броеви.

Ако $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви, полиномот (1), односно (3) се вика **полином со реални коефициенти** или **реален полином**. Ако барем еден од коефициентите $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ е комплексен број, тогаш полиномот (1) се вика **полином со комплексни коефициенти** или **комплексен полином**.

Ако сите коефициенти на еден полином се цели броеви, тој се вика **полином со цели коефициенти** или **целоброен полином**, а ако сите коефициенти му се рационални броеви, тогаш тој се вика **полином со рационални коефициенти** или **рационален полином**. Очигледно е дека секој полином со цели коефициенти, во исто време е рационален, реален и комплексен, согласно инклузиите: $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Даден полином можеме да го разгледуваме во различни бројни множества. При тоа: ако полиномот $P(x)$ сакаме да го разгледуваме над множеството на целите броеви, тогаш тој мора да е со цели коефициенти и променливата x може да зема вредности само од множеството на целите броеви $\mathbb{Z}$, т. е. x $\in\mathbb{Z}$. Ако пак, полиномот $P(x)$ го разгледуваме на множеството на рационалните (односно реланите) броеви, тогаш неговите коефициенти треба да се дадени рационални (односно реални) броеви и променливата x може да зема кои било рационални (односно реални) вредности.

Тоа значи дека даден полином $P(x)$ со цели коефициенти, освен над множеството на целите броеви можеме да го разгледуваме и во множеството на рационалните и во множеството на реалните или комплексните броеви.

Изразот $\quad 0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0$, (4)

кој има структура на полином $P(x)$ од n-ти степен очигледно е дека за секоја вредност на x добиваме вредност нула. Затоа за изразот (4) велиме дека тој е **полином идентички еднаков на нула** или **нула - полином** и пишуваме $P(x) \equiv 0$.

Нека P(x) е полином од променливата x, а c-избран број. Со $P(c)$ го означуваме бројот

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + ... + a_1 c + a_0,$$

што се добива кога во изразот - полиномот (1) променливата x се заменува со c и се извршат сите назначени операции. Бројот $P(c)$ се вика **вредност на полиномот** $P(x)$ при $x = c$ или вредност на $P(x)$ во точката c. Процесот на одредување на бројот $P(c)$ се вика **пресметување** (наоѓање), **вредноста на полиномот** $P(x)$ за $x = c$ (или во точката c).

Задачи за самостојна работа

1. Што е полином?

2. Дали полиномот $R(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ е во нормален вид?

3. Што е целоброен полином, а што рационален полином?

4. Што е нулти полином и колкав е неговиот степен?

5. Одреди ја непосредно вредноста на полиномот:

а) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ за $x = -2$,

б) $Q(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 10$ за $x = 1$,

1. 2. Хорнерова шема

Класична шема - табела за побрзо и поедноставно пресметување на вредноста на полиномот за која било вредност на променливата *x*=*c*, е таканаречена **Хорнерова шема**.

Нека е даден еден полином од петти степен

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0.$$

Бројот P(c) го наоѓаме со помош на следнава шема:

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	
c	a_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	= P(c)

каде што b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 ги определуваме еден по друг со помош на равенствата:

$$c \cdot a_5 + a_4 = b_4$$
$$c \cdot b_4 + a_3 = b_3$$
$$c \cdot b_3 + a_2 = b_2$$
$$c \cdot b_2 + a_1 = b_1$$
$c \cdot b_1 + a_0 = b_0$ при што $P(c) = b_0$

Ако претходните пет равенства ги помножиме од двете страни соодветно со $c^4, c^3, c^2, c, 1$, се добива:

$$c^5 a_5 + c^4 a_4 = c^4 b_4,$$
$$c^4 b_4 + c^3 a_3 = c^3 b_3,$$
$$c^3 b_3 + c^2 a_2 = c^2 b_2,$$
$$c^2 b_2 + c \cdot a_1 = c \cdot b_1,$$
$$c \cdot b_1 + a_0 = b_0.$$

Потоа со собирање на левата и десната страна на овие равенства се добива:

$$c^5 a_5 + c^4 a_4 + c^3 a_3 + c^2 a_2 + c \cdot a_1 + a_0 = b_0 = P(c)$$

а тоа е точно бараната вредност $P(c)$ на полиномот $P(x)$ за $x = c$.

1. Да ја одредиме вредноста на полиномот $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x + 24$ за $x = -3$.

	1	2	-4	5	24
-3	1	-1	-1	8	0

Со користење на Хорнерова шема добиваме дека $P(-3) = 0$ што значи дека $x = -3$ е нула на полиномот $P(x)$. ♦

2. Да ја одредиме вредноста на полиномот $P(x) = 4x^7 - 3x^6 + 2x^4 - 6x^2 + 5x + 13$ за $x = 2$.

	4	-3	0	2	0	-6	5	13
2	4	5	10	22	44	82	169	351

Со користење на Хорнерова шема добиваме дека $P(2) = 351$, а истото се добива и со директно сметање

$P(2) = 4 \cdot 2^7 - 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 13 = 351$. ♦

3. Да ја одредиме вредноста на полиномот $P(x) = -x^6 - 3ix^5 + 2x^4 - 6x - 5i$ за $x = i$

Со користење на Хорнерова шема добиваме $P(i) = 6 - 11i$.

	-1	-3i	2	-6	0	0	-5i
i	-1	-4i	6	-6+6i	-6-6i	6-6i	6-11i

Секој број $x = c$, за кој полиномот $P(x)$ добива вредност нула, т.е. $P(c) = 0$, се вика **нула на полиномот** или **корен на полиномот**

$P(x)$. На пример, бројот 2 е нула на полиномот $P(x)=x^3-3x^2+5x-6$, бидејќи за $x=2$ е точно дека $P(2)=2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2-6=0$. Затоа се вели и пишува: $x=2$ е нула на полиномот $P(x)$.

За полиномите

$$A_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\ (a_n\neq 0) \qquad (1)$$

$$B_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0,\ (b_m\neq 0) \qquad (2)$$

велиме дека се **идентично еднакви** и пишуваме $A_n(x)\equiv B_m(x)$ ако тие добиваат еднакви вредности за секоја вредност на променливата x.

Симболот ,,≡'' ќе го користиме за да не дојде до мешање на поимите ,,еднакви вредности'' и ,,идентични полиноми''. Пред да ја докажеме наредната теорема, ќе го дадеме следното помошно тврдење (лема).

Лема 1. Ако полиномот $P(x)$ прима вредност нула, т.е. $P(x)=0$ за секоја вредност на x, тогаш $P(x)$ е нулти полином.

Теорема 1. Два полинома $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се идентични ако и само ако тие имаат еднакви степени и коефициентите на сличните членови (пред еднаквите степени на x) се соодветно еднакви, односно

$$n=m, a_0=b_0, a_1=b_1,...,a_n=b_m. \qquad (3)$$

Доказ: Ако $A_n(x)\equiv B_m(x)$, тогаш разликата $R(x)=A_n(x)-B_m(x)\equiv 0$ е нула полином.

Полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ не можат да имаат различни степени, бидејќи ако $n\neq m$, тогаш водечкиот коефициент на полиномот $R(x)$ би бил еден од броевите a_n или b_m. Значи, еден од тие коефициенти ќе биде еднаков на нула; а тоа противречи на претпоставката дека $a_n\neq 0$ и $b_m\neq 0$. Според тоа: $n=m$, па ќе биде:

$$R(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+...+(a_0-b_0)\equiv 0 \qquad (4)$$

Но, бидејќи $R(x)$ е нула полином, затоа од (4) и од претходната лема следува дека:

$$\begin{cases} a_0-b_0=0 \\ a_1-b_1=0 \\ .... \\ .... \\ a_n-b_n=0 \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} a_0=b_0 \\ a_1=b_1 \\ .... \\ .... \\ a_n=b_n \end{cases}, \text{ што требаше да се докаже.}$$

Обратно, ако полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ имаат еднакви степени, т.е. $m=n$ и коефициентите на сличните членови им се соодветно еднакви, тогаш очигледно е дека тие два полиноми потполно се совпаѓаат, односно се идентично еднакви.■

Задачи за самостојна работа

1. Со помош на Хорнеровата шема одреди ја вредноста на полиномот:
а) $P(x)=2x^3-x^2+5x-1$ за $x=-2$,
б) $Q(x)=x^5-4x^4+3x^3+2x^2-5x+10$ за $x=1$,
в) $R(x)=x^5+x^3+x+1$ за $x=2$.

2. Со помош на Хорнеровата шема одреди ја вредноста на полиномот:
а) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-3x+5$ за $x=-3$,
б) $g(x)=-3x^5+2x^3-3x+1$ за $x=2$.

3. Провери дали $x_1=-1$ и $x_2=4$ се нули на полиномот
$P(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$.

4. Покажи дека важат идентитетите:
а) $(x-1)(x+1)(x^2+1)\equiv x^4-1$, б) $x^4+x^2+x\equiv(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,
в) $x^6-1\equiv(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

5. Определи ги непознатите коефициенти, така што да важат идентитетите:
а) $a_0x^2-2x+1\equiv b_0x^3-4x^2+b_2x+b_3$, б) $Ax^3+3x^2+Cx-5\equiv 2x^3+Dx^2-x+F$,
в) $(x-a)^2+C\equiv x^2-6x+7$.

1. 3. Собирање и множење на полиноми

Нека $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се два полинома со реални или комплексни коефициенти

$$A_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, a_n\neq 0 \quad (1)$$

$$B_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m, b_m\neq 0 \quad (2)$$

и $n\geq m$ без губење од општоста.

Дефиниција 1. Збир на полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се нарекува полиномот:

$$A_n(x)+B_m(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n, \quad (3)$$

чии коефициенти се добиваат со собирање на коефициентите на $A_n(x)$ и $B_m(x)$ пред еднаквите степени на x, т.е. $c_i=a_i+b_i$, $i=0,1,2,\ldots,m$ и $c_i=a_i$, $i=m+1,\ldots,n$.

Очигледно е дека степенот на збирот $A_n(x)+B_m(x)$ ќе биде еднаков на n ако $n>m$. Но, при $n=m$ степенот на збирот $A_n(x)+B_m(x)$ може да биде и помал од n ако $b_n=-a_n$. Значи, збирот на два полинома A_n и B_m е полином со степен најмногу еднаков на степенот на поголемиот од броевите m и n.

1. Најди го збирот на полиномите:

$A(x)=x^5-2x^4+3x^3-2x+1$ и $B(x)=3x^4-x^2+5$.

$$A(x)+B(x)=(x^5-2x^4+3x^3-2x+1)+(3x^4-x^2+5)=$$
$$=(1+0)x^5+(-2+3)x^4+(3+0)x^3+(0-1)x^2+(-2+0)x+(1+5)=$$
$$=x^5+x^4+3x^3-x^2-2x+6. \blacklozenge$$

Да напоменеме дека збирот на произволен полином $P(x)$ со нултиот полином е полиномот $P(x)$.

Дефиниција 2. Спротивен полином $-P(x)$ на полиномот $P(x)$ е полином чии коефициенти се спротивни на коефициентите на полиномот $P(x)$ пред степените со исти показатели.

Дефиниција 3. Разлика $A(x)-B(x)$ на полиномите $A(x)$ и $B(x)$ се нарекува полиномот $R(x)=A(x)+(-B(x))$.

Според тоа, одземањето на полиноми се сведува на додавање на спротивниот полином на полиномот намалител.

2. Одземи го полиномот $\mathrm{B(x)}$ од полиномот $\mathrm{A(x)}$, ако

$A(x)=x^4-3x^3+2x-1,\qquad B(x)=-x^4+x^3-5x^2+4$.

$$A(x)-B(x)=A(x)+(-B(x))=x^4-3x^3+2x-1+(x^4-x^3+5x^2-4)=$$
$$=(1+1)x^4+(-3-1)x^3+5x^2+2x+(-1-4)=2x^4-4x^3+5x^2+2x-5. \blacklozenge$$

Дефиниција 4. Производ на полиномите (1) и (2) ќе го викаме полиномот

$$A_n(x)\cdot B_m(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_{n+m-1}x^{n+m-1}+d_{n+m}x^{n+m}, \qquad (5)$$

$$d_i=\sum_{k+s=i}a_kb_s,\ \ i=0,1,2,\ldots,n+m-1,n+m \qquad (5')$$

3. Најди го производот на полиномите:

$P(x)=-2x^3+x^2-3$ и $Q(x)=x^2+x-1$.

Изоставајќи ги нултите собироци добиваме:

$$P(x)\cdot Q(x)=((-2)\cdot 1)x^5+((-2)\cdot 1+1\cdot 1)x^4+((-2)\cdot(-1)+1\cdot 1)x^3+(1\cdot(-1)+(-3)\cdot 1)x^2+$$

$+((-3)\cdot 1)x+(-3)\cdot(-1)=-2x^5-x^4+3x^3-4x^2-3x+3$.

Да забележиме дека согласно (5′), коефициентот d_i е еднаков на збирот од производите на оние коефициенти на полиномот $A_n(x)$ и $B_m(x)$ на кои збирот од индексите им е еднаков на i.

Затоа: $d_0=a_0b_0$, $d_1=a_0b_1+a_1b_0$, $d_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$,

$d_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0,\ldots,d_{n+m}=a_nb_m$.

Бидејќи $a_n\neq 0$ и $b_m\neq 0$, и $a_n\cdot b_m\neq 0$, а оттука следува заклучокот дека производот на два нененулти полиноми е полином со степен еднаков на збирот на степените на полиномите - множители.

Од дефинициите 1 и 2 следува дека операциите собирање и множење на полиномите, всушност, се сведуваат на операции со нивните коефициенти. На пример, собирањето на два полиноми се сведува на собирање на коефициентите при еднаквите степени на x, а множењето на множење и собирање на нивните коефициенти. Претходно изнесеното може да се резимира на следниот начин.

Теорема 1. Множеството на полиноми е затворено во однос на операциите собирање и множење и притоа важат следниве идентитети за произволни полиноми $A(x),B(x),C(x)$:

i) $A(x)+B(x)=B(x)+A(x)$ (комутативност на собирањето)

ii) $(A(x)+B(x))+C(x)=A(x)+(B(x)+C(x))$ (асоцијативност на собирањето)

iii) $A(x)+0=0+A(x)=A(x)$ (постои неутрален елемент во однос на собирањето.

iv) $A(x)+(-A(x))=(-A(x))+A(x)=0$ (постои спротивен елемент во однос на собирањето)

v) $A(x)(B(x)+C(x))=A(x)B(x)+A(x)C(x)$ (лев дистрибутивен закон)

vi) $(B(x)+C(x))A(x)=B(x)A(x)+C(x)A(x)$ (десен дистрибутивен закон)

vii) $(A(x)B(x))C(x)=A(x)(B(x)C(x))$ (асоцијативен закон за множењето).

viii) $A(x)B(x)=B(x)A(x)$ (комутативен закон за множењето)

ix) $A(x)\cdot 1=1\cdot A(x)=A(x)$ (постои неутрален елемент во однос на множењето)

Погоре дадените равенства се докажуваат на следниот начин. За секоја вредност на променливата x, левите страни на овие равенства се еднакви на десните страни, бидејќи $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ се броеви и за нив важат комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон. Штом за секоја вредност на променливата x левата и десната страна се еднакви, полиномите се идентични, т.е. еднакви.

Во множеството на сите полиноми од променливата x, при операцијата собирање на полиноми, улогата на неутрален елемент ја игра бројот нула, односно нултиот полином. Така за секој полином $P(x)$ важи:

$$P(x)+0=0+P(x)=P(x) \tag{6}$$

Потоа, во множеството на сите полиноми од x за секој полином $P(x)$ постои нему спротивен полином $-P(x)$ за кој важи:

$$P(x)+(-P(x))\equiv 0 \tag{7}$$

Нека $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

е даден полином, а нему спротивен е полиномот

$-P(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$, каде што $b_i=-a_i$.

Да забележиме дека улогата на полиномот единица (неутрален елемент) при множењето на полиноми ја игра бројот 1, разгледуван како полином од нулти степен. Да видиме уште дали за секој полином $\mathrm{P(x)}$ постои негов инверзен елемент $P^{-1}(x)$ во однос на операцијата множење, т.е. за кој важи

$$P(x)\cdot P^{-1}(x)=1. \tag{8}$$

Јасно е дека $P(x)$ (и $P^{-1}(x)$) мора да биде полином различен од нултиот. Ќе покажеме дека полиномот $P(x)$ има свој инверзен елемент $P^{-1}(x)$ ако и само ако $P(x)$ е полином од нулти степен. Навистина, ако $P(x)=a_0\neq 0$, тогаш неговиот инверзен елемент е бројот $a_0^{-1}=\dfrac{1}{a_0}$.

Ако полиномот $P(x)$ има степен $n\geq 1$, тогаш левата страна на равенството (8) како производ на два ненула полиноми, ако постои полиномот $P^{-1}(x)$, ќе има степен не помал од n, додека пак, десната страна е полином од нулти степен што претставува противречност. Значи, таков полином $P^{-1}(x)$ не постои ако $n\geq 1$, односно за операцијата множење на полиноми не постои инверзна операција.

Забележуваме дека постои големата сличност (аналогија) помеѓу множеството на полиномите и множеството на целите броеви во однос на својствата што ги задоволуваат.

4. Најди го производот на полиномите:

$A(x)=x^3+5x+2$ и $B(x)=2x^4-3x^3+4x^2+7$..

$$\begin{aligned}A(x)\cdot B(x)&=(x^3+5x+2)\cdot(2x^4-3x^3+4x^2+7)=\\&=2x^7-3x^6+4x^5+7x^3+10x^5-15x^4+20x^3+35x+4x^4-6x^3+8x^2+14=\\&=2x^7-3x^6+14x^5-11x^4+21x^3+8x^2+35x+14.\ \blacklozenge\end{aligned}$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди го збирот на полиномите: $P(x)=2x^3-x^2+4$ и $Q(x)=x^2-3x+1$.

2. Запиши ги спротивните полиноми на полиномите од задача 1.

3. Најди го производот на полиномите:

а) $A(x)=3x^4-2x^3+x^2-4x+1$ и $B(x)=x^2-3x+5$,

б) $P(x)=-3x^3+2x^2-x+4$ и $Q(x)=-2x^3+x^2-4x+1$.

4. Изврши го множењето:

а) $(x+2)(x^5-4x^4+3x^3-2x^2+1)$, б) $(x+2)(x-2)(x^2-3x+2)$,

в) $(x-2)^2(x+3)^2(x+1)$.

5. Изврши ги назначените операции:

а) $(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)^2$,

б) $x(x+1)(x+2)(x+3)-(x^2-1)(x^2+x+1)+(x^3-1)(x^2+x+1)$.

1. 4. Делење на полиноми

За разлика од операциите собирање и множење на полиноми, кога операцијата е точно дефиниран полином, операцијата делење на полиноми не секогаш дава полином кој помножен со полиномот делител ќе го даде полиномот деленик. Значи, ако $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се два произволни полиноми, тогаш не секогаш може да се одреди трет полином $q_{n-m}(x)$, таков што важи: $f_n(x)=g_m(x)\cdot q_{n-m}(x)$. Во тој поглед множеството полиноми пак наликува на множеството цели броеви. Слично како кај множеството цели броеви и за множеството полиноми постои алгоритам за делење со остаток, кој го воведуваме со следнава:

Дефиниција 1. Да се подели полиномот $f_n(x)$ со полиномот $g_m(x)\neq 0$, значи да се одредат два нови полиноми $q(x)$ - количник и $r(x)$ - остаток, такви што да важи идентитетот

$$f_n(x)=g_m(x)\cdot q(x)+r(x) \qquad (1)$$

и степенот на $r(x)$ да е барем за единица помал од m (степенот на $g_m(x)$).

Очигледно е дека степенот на полиномот $q(x)$ ќе биде еднаков на разликата од степените на полиномите $f_n(x)$ и $g_m(x)$, т.е. на $n-m$. Се поставува прашањето: дали за секои два дадени полиноми $f_n(x)$ и $g_m(x)\neq 0$ постојат такви два полиноми $q(x)$ и $r(x)$ за кои важи идентитетот (1) и степенот на $r(x)$ да е помал од m? Одговор на тие прашања ни дава следната:

Теорема 1. За кои било два полиноми $f_n(x)$ и $g_m(x)\neq 0$ постојат еднозначно определени полиноми $\mathrm{q(x)}$ и $\mathrm{r(x)}$ што ги задоволуваат условите:

i) важи идентитетот $f_n(x)\equiv g_m(x)\cdot q(x)+r(x)$

ii) степенот на $r(x)$ е помал од m.

Пред да пристапиме кон доказот на теоремата, да се потсетиме на постапката на делење на полиноми.

1. Да го извршиме делењето со остаток на полиномот

$f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ со $g(x) = x^2 - 3x + 1$.

Гледаме дека полиномите се подредени по опаднувачките степени на x, а делењето практично го извршуваме вака:

$$(x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1) = x^3 + x^2 - x$$

$$\underline{\pm x^5 \mp 3x^4 \pm x^3}$$

$$f_4(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

$$\underline{\pm x^4 \mp 3x^3 \pm x^2}$$

$$f_3(x) = \quad -x^3 + 3x^2 - 5x + 6$$

$$\underline{\mp x^3 \pm 3x^2 \mp x}$$

$$f_1(x) = \quad -4x + 6 = r(x)$$

Бидејќи $f_1(x) = -4x + 6$ е полином со степен 1, помал од степенот 2 на g(x), процесот на делење не може да продолжи, па добиваме дека количникот од делењето е $q(x) = x^3 + x^2 - x$, а остатокот $r(x) = -4x + 6$. Притоа:

$x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \equiv (x^3 + x^2 - x)(x^2 - 3x + 1) - 4x + 6$. ♦

Доказ на теорема 1. Нека $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$,

$g_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0)$,

а) Постоење на количник и остаток.

Случајот $n < m$ е тривијален, бидејќи тогаш $q(x) = 0$ и $r(x) = f_n(x)$ го исполнува условот (1),

$f_n(x) = g_m(x) \cdot 0 + f_n(x)$.

Затоа, да претпоставиме дека $n \geq m$ и нека $h'(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$. Тогаш,

$$f_n(x) - g_m(x) \cdot h'(x) = 0 \cdot x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0$$

каде што

$$c_{n-i} = a_{n-i} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-i}, \quad i = 1,...,m$$

$$c_{n-i} = a_{n-i}, \quad i = m+1,...,n$$

Нека $i = s_1$ е најмалиот индекс за кој $c_{n-s_1} \neq 0$ и притоа $n - s_1 \leq n - 1$. Тоа значи дека

$$f_n(x) - g_m(x)h'(x) = c_{n-s_1}x^{n-s_1} + c_{n-s_1-1}x^{n-s_1-1} + ... + c_1 x + c_0.$$

Означувајќи $f_{n-s_1}(x) = c_{n-s_1}x^{n-s_1} + ... + c_1 x + c_0$ се добива равенството

$$f_n(x) = g_m(x)h'(x) + f_{n-s_1}(x),$$

каде што s_1 е најмалку 1. Ако $n-s_1<m$, тогаш добиено е бараното равенство (1) со h'(x) во улога на $q(x)$ и $f_{n-s_1}(x)$ во улога на $r(x)$.

Ако $n-s_1 \geq m$, тогаш се повторува постапката за $f_{n-s_1}(x)$ (којшто има степен најмногу $n-1$) во улога на $f_n(x)$ и притоа се добива

$$f_{n-s_1}(x)=g_m(x)h''(x)+f_{n-s_2}(x)$$

каде што $n-s_2 \leq n-s_1-1$, т.е. $s_2>s_1$.

Сега, ако $n-s_2<m$, тогаш равенството

$$f_n(x)=g_m(x)(h'(x)+h''(x))+f_{n-s_2}(x)$$

го задоволува условот (1) со $q(x)=h'(x)+h''(x)$ и $r(x)=f_{n-s_2}(x)$.

Ако $n-s_2 \geq m$, тогаш постапката се повторува за $f_{n-s_2}(x)$ во улога на $f_n(x)$ и се добива равенството

$$f_{n-s_2}(x)=g_m(x)\cdot h'''(x)+f_{n-s_3}(x)$$

каде што $n-s_3 \leq n-s_2-1$, т.е. $s_3>s_2$.

Притоа во случајот $n-s_3<m$ е добиено бараното претставување, имено

$$f_n(x)=g_m(x)(h'(x)+h''(x)+h'''(x))+f_{n-s_3}(x)$$

со $q(x)=h'(x)+h''(x)+h'''(x)$ и $r(x)=f_{n-s_3}(x)$.

Ако $n-s_3 \geq m$ процесот продолжува. Бидејќи n е конечен број, при некоја конечна постапка $k \leq n-m+1$ ќе се добие

$$f_{n-s_{k-1}}(x)=g_m(x)\cdot h^{(k)}(x)+f_{n-s_k}(x)$$

така што $f_{n-s_k}(x)$ има степен $n-s_k<m$. Тогаш

$$f_n(x)=g_m(x)(h'(x)+h''(x)+...+h^{(k)}(x))+f_{n-s_k}(x)$$

е бараното претставување (1) со

$$q(x)=h'(x)+h''(x)+...+h^{(k)}(x) \quad \text{и} \quad r(x)=f_{n-s_k}(x).$$

б) Единственост на количникот и остатокот.

Нека постојат и други полиноми $q_1(x)$ и $r_1(x)$ што ги задоволуваат бараните услови. Тогаш

$$f_n(x)=q(x)g_m(x)+r(x)=q_1(x)g_m(x)+r_1(x),$$

$$g_m(x)[q(x)-q_1(x)]=r_1(x)-r(x).$$

Но, степенот на $r_1(x)-r(x)$ е помал од m (степенот на $g_m(x)$) и последното равенство повлекува $q(x)-q_1(x)=0$. Тогаш и $r_1(x)-r(x)$ е нулти полином. Затоа, $r_1(x)=r(x)$ и $q_1(x)=q(x)$. ■

Посебен интерес претставува делењето на кој било полином $f(x)$ од n- ти степен со линеарен полином $x-c$ (односно со биномот $x-c$), каде што c е некој број.

Во тој случај, бидејќи делителот $g(x)$ во (1) е од прв степен, остатокот $r(x)$ ќе биде некој полином од нулти степен или нула, односно во секој случај некој број r. Притоа ќе важи идентитетот

$$f(x) \equiv (x-c)\cdot q(x) + r \qquad (2)$$

каде што $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

Следнава теорема ни дава можност да го одредиме остатокот r од делењето на полиномот $f(x)$ со биномот $x-c$, а притоа без да го вршиме тоа делење.

Теорема 2. (Теорема на Безу) Остатокот од делењето на полином $f(x)$ со биномот $x-c$ е еднаков на вредноста $f(c)$ на полиномот $f(x)$ за $x=c$.

Доказ: Идентитетот (2) важи за секој x, па според тоа ќе важи и за $x=c$. Ако во двете страни на (2) замениме $x=c$, добиваме: $f(c) \equiv (c-c)\cdot q(c) + r$, односно, $f(c) = r$. Со тоа теоремата е докажана. ■

2. Да го одредиме остатокот r од делењето на полиномот
$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ со биномот $x+2$.

Согласно Теоремата на Безу бараниот остаток r е еднаков на $f(-2)$, а вредноста $f(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 1 = 15$.

Бараниот остаток можеме да го одредиме и со делењето:

$$(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x+2) = x^3 + 3x - 7$$
$$\underline{\pm x^4 \pm 2x^3}$$
$$3x^2 - x + 1$$
$$\underline{\pm 3x^2 \pm 6x}$$
$$-7x + 1$$
$$\underline{\mp 7x \mp 14}$$
$$15 = r$$

т. е. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv (x+2)(x^3 + 3x - 7) + 15$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Одреди го количникот $g(x)$ и остатокот $r(x)$ при делење на полиномот $2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2$ со $2x^2 + 5x - 1$.

2. Изврши го делењето на полиномите со остаток:

а) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 5) : (x^2 - 3x + 1)$,

б) $(x^3-2x^2+3x-4):(3x^2-2x-1)$,
в) $(x^5-5x^4+x^3-2x^2+3):(x^2-x+1)$.

3. Одреди го количникот и остатокот од делењето на полиномот $P(x)=2x^4-x^3-2x^2+3x+1$ со биномот $\mathrm{x}-3$.

4. Изврши го делењето на:
а) $2x^5-5x^3-8x$ со $x+3$, б) x^4-3x^3+2x-1 со $x-1$.

5*. Одреди го остатокот од делењето на полиномот $P(x)=x^{50}-x^{30}+x^{10}-4$ со x^2-1. (Упатство: x^2 замени го со нова променлива, на пример t.)

1. 5. Деливост на полиноми

Дадени се два ненулти полиноми $f(x)$ и $g(x)$ со комплексни или реални коефициенти. Ако остатокот $r(x)$ од делењето на $f(x)$ со $g(x)$ е нула полином, т.е. ако $r(x)\equiv 0$, тогаш велиме дека полиномот $f(x)$ се дели без остаток со полиномот $g(x)$, или дека тој е делив со полиномот $g(x)$.

Дефиниција 1. Полиномот $f(x)$ велиме дека е делив со ненулти полином $g(x)$ ако и само ако постои полином $q(x)$ таков што да важи идентитетот

$$f(x)\equiv g(x)\cdot q(x). \tag{1}$$

За полиномот $g(x)$, пак, велиме дека е делител на полиномот $f(x)$. Всушност, ако $g(x)$ е делител на $f(x)$, тогаш $q(x)$ треба да го земеме како количник од делењето на $f(x)$ со $g(x)$. Навистина, од (1) го добиваме равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x) \tag{2}$$

кое важи за сите вредности на x, за кои $g(x)\neq 0$.

1. Полиномот x^3+1 е делив со полиномот $x+1$, бидејќи важи
$x^3+1\equiv(x+1)(x^2-x+1)$. ♦

Очигледно е дека ако важи равенството (1), тогаш полиномот $q(x)$ е исто така, делител на $f(x)$.

Во случај кога $g(x)$ е делител на $f(x)$, односно кога $f(x)$ се дели без остаток со $g(x)$, тоа често симболички го запишуваме со

$$g(x)\,|\,f(x) \tag{3}$$

кое го читаме: „ $g(x)$ е делител на $f(x)$" или „ $g(x)$ го дели $f(x)$".

Да забележиме дека ако полиномот $f(x)$ и неговиот делител $g(x)$ се со реални (рационални) коефициенти, тогаш полиномот - количник $q(x)$ е, исто така, со реални (рационални) коефициенти. Меѓутоа, полином со реални (рационални) коефициенти може да има и делители, чии коефициенти или слободни членови се комплексни (ирационални) броеви. Тоа го покажува следниот пример.

2. $x^2-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $x^2+2=(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})$. ♦

Деливоста кај полиномите ги има следниве поважни својства:

Теорема 1. Ако полиномот $f(x)$ е делив со полиномот $g(x)$, тогаш постои само еден единствен полином - количник $q(x)$.

Теорема 2. Ако полиномот $f(x)$ е делив со $g(x)$, а $g(x)$ е делив со полиномот $h(x)$, тогаш $f(x)$ е делив со $h(x)$.

Доказ. Нека $f(x)\equiv g(x)\cdot q(x)$ и $g(x)\equiv h(x)\cdot\varphi(x)$. Тогаш
$f(x)\equiv[h(x)\cdot\varphi(x)]\cdot q(x)\equiv h(x)\cdot[\varphi(x)\cdot q(x)]$. ■

Теорема 3. Ако секој од полиномите $f(x)$ и $g(x)$ е делив со $h(x)$, тогаш и нивниот збир и разлика се деливи со $h(x)$.

Доказ. Нека $f(x)\equiv h(x)\cdot q(x)$ и $g(x)\equiv h(x)\cdot\varphi(x)$. Тогаш
$f(x)\pm g(x)\equiv h(x)\cdot q(x)\pm h(x)\cdot\varphi(x)$, односно $f(x)\pm g(x)\equiv h(x)\cdot[q(x)\pm\varphi(x)]$.■

Теорема 4. Ако $f(x)$ е делив со $\varphi(x)$, тогаш и производот на $f(x)$ со кој било полином $g(x)$ е делив со $\varphi(x)$.

Доказ. Нека $f(x)\equiv\varphi(x)\cdot q(x)$. Тогаш
$f(x)\cdot g(x)\equiv[\varphi(x)\cdot q(x)]\cdot g(x)\equiv\varphi(x)[q(x)\cdot g(x)]$.■

Од теорема 3 и 4 следува следнава:

Последица 1. Ако секој од полиномите $f_1(x),f_2(x),...,f_k(x)$ е делив со $\varphi(x)$, тогаш со $\varphi(x)$ е делив и полиномот $f_1(x)\cdot g_1(x)+f_2(x)\cdot g_2(x)+...+f_k(x)\cdot g_k(x)$, каде што $g_1(x),g_2(x),...,g_k(x)$ се произволни полиноми.

Теорема 5. Секој полином $f(x)$ е делив со кој било полином од нулти степен различен од 0.

Навистина, $f(x) \equiv c\left(\frac{a_0}{c}x^n + \frac{a_1}{c}x^{n-1} + ... + \frac{a_n}{c}\right)$, каде што c е произволен број различен од нула, т. е. произволен полином од нулти степен.

Теорема 6. Ако $f(x)$ е делив со $g(x)$, тогаш $f(x)$ е делив и со $c \cdot g(x)$, каде што c е произволен број различен од нула.

Доказ. Од равенството $f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)$ следува и равенството
$f(x) \equiv [c \cdot g(x)] \cdot [c^{-1} \cdot q(x)]$.■

Теорема 7. Ако $f_n(x) \equiv g_m(x) \cdot q(x)$ и $g_m(x) \equiv f_n(x) \cdot h(x)$. Тогаш $m=n$, а $q(x)$ и $h(x)$ се полиноми од 0-ти степен.

Доказ. Нека k е степенот на $q(x)$, а s на $r(x)$. Тогаш $n = m + k$, а $m = n + s$ и оттука мора да биде $k + s = 0$. Бидејќи $k \geq 0$ и $s \geq 0$, $k + s = 0$ ако и само ако $k = s = 0$. Значи, $f_n(x) = c \cdot g_m(x)$ за некој број $c \neq 0$, а оттука $g_m(x) = c^{-1} f_n(x)$. Значи, $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се истовремено деливи еден со друг. ■

Од теоремите 2 и 7 следува следнава

Последица 2. Секој делител на еден од полиномите $f(x)$ и $c \cdot f(x)$ е делител и на другиот полином.

Дефиниција 2. Полиномот $f(x)$ велиме дека е неразложлив во дадено бројно множество P ако тој нема делители од ненулти степен помал од степенот на $f(x)$ со коефициенти од тоа множество.

Полиномот $f(x)$ се вика разложлив во бројно множество P ако тој има барем еден делител од ненулти степен помал од степенот на $\mathrm{f(x)}$ со коефициенти во множеството P.

Секој полином од прв степен е неразложлив, бидејќи во спротивен случај тој би требало да се претстави во вид на производ од не помалку два множители со степени не помали од еден, а тоа е невозможно.

3. Полиномите $x^3 + 1$ и $x^2 - 2$ може да се разложат како:

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ и $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

Иако полиномот x^2-2 е разложлив на два полиноми со реални коефициенти, тој не е разложлив на два полиноми со цели (или рационални) коефициенти. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Провери дали полиномот $x^3+x^2-17x+15$ е делив со биномот:
а) $x+5$, б) $x-1$, в) $x+1$, г) $x-3$.

2. Покажи дека полиномот x^3+a^3 е делив со $x+a$, но не е делив со $x-a$.

3. Провери дали полиномот $x^2+a^2, a\in\mathbb{Z}$ е делив со биномот:
а) $x+a$, б) $x-a$, в) $x+ai$, г) $x-ai$.

4. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x)=2x^3+x^2+ax+b$ така што тој да биде делив со $x-2$ и со $x-3$.

5*. Покажи дека полиномот $x^{2k+1}-a^{2k+1}$ е делив со $x-a$ и одреди го полиномот - количник.

1. 6. Нули на полиномите и полиномни равенки

Нека $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$, (1)
т.е. $f(x)$ е полином од *n*- ти степен.

Да видиме каква врска постои меѓу нулите на полиномот $f(x)$ и неговите **линеарни делители**, т.е. делителите од видот $x-c$. Таа врска ја утврдува следнава важна:

> **Теорема 1.** Бројот c е нула на полиномот $f(x)$ ако и само ако $f(x)$ е делив со $x-c$, т.е. ако $(x-c)|f(x)$.

Доказ: а) Нека бројот c е нула на полиномот $f(x)$, т. е. нека $f(c)=0$. Но, според Теоремата на Безу, остатокот од делењето на $f(x)$ со $x-c$ е еднаков на $r=f(c)$. Бидејќи $f(c)=0$ и $r=0$. Според тоа, полиномот $f(x)$ е делив со $x-c$.

б) Нека полиномот $f(x)$ е делив со $x-c$. Тогаш ќе важи идентитетот $f(x)\equiv(x-c)\cdot q(x)$. Во тој случај за $x=c$ имаме $f(c)=(c-c)\cdot q(c)=0$. Значи, бројот c е нула на $f(x)$.■

Според тоа, одредувањето на нулите на полиномот $f(x)$ е еквивалентно со одредувањето на линеарните делители (фактори) на $f(x)$. Затоа гореспоменатата теорема ја викаме и теорема на факторизација на полиномот.

Теорема 2. Ако полиномот $f(x)$ од n- ти степен има k ($k \leq n$) различни нули $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$, тогаш $f(x)$ е делив со производот $(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdot...\cdot(x-c_k)$.

Доказ: Бидејќи c_1 е нула на полиномот $f(x)$, тогаш врз основа на дефиницијата за деливост на полиноми имаме

$$f(x) \equiv (x-c)\cdot q_{n-1}(x). \tag{2}$$

Бидејќи и c_2 е нула на полиномот $f(x)$,

$$0 = f(c_2) = (c_2 - c_1)\cdot q_{n-1}(c_2).$$

Меѓутоа $c_2 \neq c_1$. Затоа мора да е $q_{n-1}(c_2) = 0$. Тоа значи дека c_2 е нула на полиномот $q_{n-1}(x)$, па затоа тој е делив со $x - c_2$, т. е.

$$q_{n-1}(x) \equiv (x-c_2)\cdot q_{n-2}(x). \tag{3}$$

Со замена на $q_1(x)$ од (3) во (2), добиваме:

$$f(x) \equiv (x-c_1)(x-c_2)\cdot q_{n-2}(x). \tag{4}$$

Бидејќи и c_3 е нула на полиномот $f(x)$:

$$0 = f(c_3) = (c_3-c_1)(c_3-c_2)\cdot q_{n-2}(c_3).$$

Но, бидејќи $c_3 \neq c_2$ и $c_3 \neq c_1$, мора да биде $q_{n-2}(c_3) = 0$, а тоа значи дека c_3 е нула на полиномот $q_{n-2}(x)$, па затоа тој е делив со $x - c_3$, т.е.

$$q_{n-2}(x) \equiv (x-c_3)q_{n-3}(x). \tag{5}$$

Со замена на $q_{n-2}(x)$ од (5) во (4), добиваме:

$$f(x) \equiv (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\cdot q_{n-3}(x) \tag{6}$$

Ако оваа постапка ја продолжиме, ќе го добиеме идентитетот

$$f(x) \equiv (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)...(x-c_k)q_{n-k}(x) \tag{7}$$

каде што $q_{n-k}(x)$ е полином од $(n-k)$- ти степен, чиј водечки коефициент е еднаков на a_n. ■

1. Да докажеме дека полиномот $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ е делив со полиномот $g(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$.

Равенството (7) овозможува задачата да ја решиме преку пресметување на вредностите $f(1), f(-2), f(3)$. Бидејќи $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(3) = 0$ заклучуваме дека $\mathrm{g(x)}|\mathrm{f(x)}$. ♦

Видовме дека, ако c е нула на полиномот $f(x)$, односно ако $f(c)=0$, тогаш тој е делив со $x-c$. Меѓутоа, полиномот $f(x)$ понекогаш може да е делив, освен со $x-c$ и со $(x-c)^k$, каде што $1<k\le n$. Во тој случај велиме дека бројот c е повеќекратна нула на полиномот.

Дефиниција 1. За бројот $x=c$ велиме дека е повеќекратна нула со кратност k (или c е k - кратна нула) на полиномот $f(x)$, ако полиномот $f(x)$ е делив со $(x-c)^k$, но не е делив со $(x-c)^{k+1}$.

Очигледно, ако c е k - кратна нула на полиномот $f(x)$, тој може да се запише во видот

$$f(x)\equiv(x-c)^k\cdot g(x) \qquad (8)$$

каде што $g(x)$ е полином за кој $g(c)\ne 0$.

Ако $k=1$, тогаш велиме дека c е еднократна нула или проста нула на $f(x)$.

2. Да се утврди кратноста на нулата $x=2$ на полиномот

$f(x)=x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8$.

Според теорема 2, бидејќи $f(2)=0$, $f(x)$ е делив со $x-2$, односно

$(x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8):(x-2)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$,

$q_4(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$, $f(x)=(x-2)q_4(x)$; $q_4(2)=0$,

па значи $q_4(x)$ е делив со $x-2$. Понатаму,

$(x^4-4x^3+5x^2-4x+4):(x-2)=x^3-2x^2+x-2$,

$q_3(x)=x^3-2x^2+x-2$, $f(x)=(x-2)^2q_2(x)$.

Бидејќи $q_4(x)=(x-2)q_3(x)$, $q_3(2)=0$ па значи $q_3(x)$ е делив со $x-2$.

$(x^3-2x^2+x-2):(x-2)=x^2+1$, $q_2(x)=x^2+1$, $f(x)=(x-2)^3q_2(x)$.

Да забележиме дека последниот количник не е делив со $x-2$, бидејќи $q_2(2)=5$.

Според тоа, полиномот $f(x)$ е делив со $(x-2)^3$, но не е делив со $(x-2)^4$. Значи $x=2$ е трикратен корен на $f(x)$: $f(x)=(x-2)^3(x^2+1)$. ♦

Овде ќе се задржиме на еден од основните проблеми на теоријата на полиномите, сврзан со одредувањето на нивните нули, што е во тесна врска со поимот алгебарска равенка од една променлива.

Нека е даден полиномот $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $(a_n\ne 0)$.

Равенството $P(x)=0$, т.е.

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0, \qquad (a_n\ne 0) \qquad (9)$$

се нарекува **полиномна** или **алгебарска равенка** од $n-$ти степен по x. Броевите $a_0, a_1, a_2,..., a_n$ се викаат коефициенти на равенката (9). Очигледно, да се реши равенката (9) значи да се најдат нулите на полиномот $P(x)$.

Бидејќи $a_n \neq 0$, полиномите $P(x)$ и $\frac{1}{a_n}P(x)$ имаат исти нули. Затоа, не се губи од општоста ако прифатиме дека $a_n = 1$. Тогаш равенката (9) има вид

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0. \qquad (10)$$

Кога коефициентите $a_0, a_1,..., a_n$ се познати конкретни броеви, равенката (9) се вика нумеричка полиномна равенка или алгебарска равенка со бројни коефициенти**,** а кога сите коефициенти се запишани со букви (општи броеви), тогаш равенката (9) се вика општа полиномна равенка од n-ти степен.

Ако еден од коефициентите на равенката (9) е конкретен број, или ако меѓу нив постои некоја зависност, тогаш соодветната равенка се вика специјален случај на општата равенка. На пример, равенките од четврти степен:

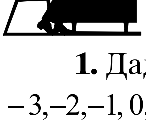
$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0, \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0, \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

се специјални случаи од општа полиномна равенка од четврти степен.

Нулите на полиномот $P(x)$ се нарекуваат корени на равенката $P(x) = 0$. Значи, равенката $P(x) = 0$ може да има реални, комплексни и повеќекратни корени.

Постапката, т.е. примената на алгоритам со кој ги наоѓаме корените на дадена равенка, се вика решавање на равенката, а множеството од сите добиени корени - решение на равенката.

Постојат формули за решавање на општите полиномни равенки од трет и четврти степен, аналогни на формулата за решавање на квадратни равенки, но поради нивната обемност тие не се изучуваат во средно училиште. Не постојат вакви формули за решавање на општа равенка од петти степен и повисок. Докажано е дека формули во кои фигурираат само четирите основни операции и коренувањето во корените на општа алгебарска равенка со степен најмалку 5 не постојат. Меѓутоа, постојат некои специјални случаи на полиномни равенки за кои множеството решенија може експлицитно да се изрази. Некои такви специјални случаи на равенки од трет и четврти степен ќе бидат разгледани во следната тема.



Задачи за самостојна работа

1. Даден е полиномот $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$. Провери кои од броевите: $-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3,$ се негови нули.

2. Дадени се полиномите $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ и $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$. Провери кои од броевите $-1, 3, 2$ се заеднички нули на полиномите $f(x)$ и $g(x)$.

3. Даден е полиномот $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$. Провери дали $x = -2$ е негова нула и ако е, одреди ја нејзината кратност.

4. Дали $x = 3$ е нула со кратност 5 на полиномот $f(x) = (x-3)^5(x^2 - 5x + 6)$?

5. Провери дали полиномот

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)(x-2) + 4(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

е еднаков со полиномот $\varphi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 15x + 5$.

1. 7. Метод на неопределени коефициенти. Основна теорема на алгебрата

При операциите со полиноми и трансформациите на полиномите од еден во друг вид, се служиме со, таканаречениот, **метод на неопределени коефициенти**. Се применува во случаите кога сакаме даден израз да трансформираме во друг идентичен израз од определен вид, со коефициенти што треба да се определат.

Бараните коефициенти ги означуваме со букви и ги третираме како непознати. Потоа, користејќи го условот дека дадениот и трансформираниот израз треба да се идентични, даваме произволно избрани вредности на аргументот (променливата) и добиените вредности на двата изрази ги споредуваме. Така добиваме одреден број равенки по бараните коефициенти како непознати. Ако се работи за полиноми, тогаш равенките по бараните непознати коефициенти ги добиваме со споредување на соодветните коефициенти на дадениот и трансформираниот полином. Како тоа го оствaруваме во практика ќе покажеме на следниве неколку примери.

1. Трансформирај го во вид на полином производот $(x+3)(x-2)(x+4)$.

Очигледно е дека дадениот производ е полином од трет степен, чиј коефициент пред водечкиот член е еднаков на 1, а слободниот член е еднаков на –24. Значи, треба да важи идентитетот

$$(x+3)(x-2)(x+4) \equiv x^3 + ax^2 + bx - 24.$$

За одредување на коефициентите a и b, згодно е за аргументот x да ги избереме вредностите $x = -3$ и $x = 2$. Притоа ги добиваме равенките $9a - 3b - 51 = 0$ и $4a + 2b - 16 = 0$, со бараните коефициенти a и b во улога на непознатите. Кога ќе го решиме добиениот систем равенки: $\begin{cases} 3a - b = 17 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$ наоѓаме: $a = 5, b = -2$.

Според тоа, $(x+3)(x-2)(x+4) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$. ♦

2. Подели го полиномот $f(x)=2x^4-3x^3+3x^2+8x-1$ со $g(x)=2x^2+x-1$.

Во нашиот случај бараниот количник $q(x)$ ќе биде полином од втор степен, што со помош на неопределени коефициенти го запишуваме $q(x)=ax^2+bx+c$. Остатокот $r(x)$ ќе биде од прв степен, па според тоа ќе го има видот $r(x)=dx+e$. Тогаш имаме:

$2x^4-3x^3+3x^2+8x-1\equiv(2x^2+x-1)(ax^2+bx+c)+dx+e$ или

$2x^4-3x^3+3x^2+8x-1\equiv 2ax^4+(a+2b)x^3+(2c+b-a)x^2+(d+c-b)x+e-c$.

Значи, согласно со теорема од 2. 1

$$\begin{cases}2a=2\\ a+2b=-3\\ 2c+b-a=3\\ d+c-b=8\\ e-c=-1\end{cases}\text{, оттука }\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=3\\ d=3\\ e=2\end{cases}$$

Според тоа: $q(x)=x^2-2x+3$ и $r(x)=3x+2$. ♦

3. Со методот на неопределени коефициенти избери полиноми $A(x)$ и $B(x)$, за кои важи $f(x)\cdot A(x)+g(x)\cdot B(x)=1$, за $f(x)=x^3, g(x)=(x-1)^2$ и степенот на $A(x)$ е најмногу 1.

Ако степенот на полиномот $A(x)$ е најмногу 1, тогаш степенот на полиномот $B(x)$ е најмногу 2. Затоа нека $A(x)=ax+b$ и $B(x)=cx^2+dx+e$.

Од равенството $x^3(ax+b)+(x-1)^2(cx^2+dx+e)=1$, кое по ослободување од заградите и подредување на левата страна по степените на x,

$(a+c)x^4+(b-2c+d)x^3+(c-2d+e)x^2+(d-2e)x+e\equiv 1$, добиваме дека

$$\begin{cases}a+c=0\\ b-2c+d=0\\ c-2d+e=0\\ d-2e=0\\ e=1\end{cases}\text{, оттука }\begin{cases}a=-3\\ b=4\\ c=3\\ d=2\\ e=1\end{cases}.$$

Според тоа, $A(x)=-3x+4,\quad B(x)=3x^2+2x+1$. ♦

Од равенството $(x-1)(x+3)(x+4)=x^4+8x^3+17x^2-2x-24$ гледаме дека полиномот $f(x)=x^4+8x^3+17x^2-2x-24$ од четврти степен има точно четири нули. Меѓутоа, се поставува прашањето: дали секој полином има воопшто барем една нула? Тоа е прашање што треба потемелно да се разгледа. На пример, полиномот x^4+1 во множеството на реалните броеви нема ниту една нула, бидејќи за кој било (позитивен или негативен) реален број $x=x_0$ е $x_0{}^4\geq 0$, а збирот $x_0{}^4+1\geq 1$, односно секогаш е позитивен реален број. Тоа не значи пак, дека полиномот x^4+1 и во множеството на комплексните броеви нема нули. Полиномите од нулти степен (освен нула полиномот), воопшто не се анулираат, а за полиномите од прв и втор степен знаеме дека имаат нули. Одговор на прашањето за егзистенција на нули на полиномот го дава следнава:

Теорема 1. (Основна теорема на алгебрата) Секој полином од степен $n \geq 1$, со коефициенти во полето на комплексните броеви има барем една нула, во општ случај комплексна.

Оваа теорема е една од најважните во математиката и претставува основа на теоријата на полиноми со бројни коефициенти. Затоа таа се вика **Основна теорема на алгебрата** или **Гаусова теорема**, по името на германскиот математичар К. Ф. Гаус (1777-1852), кој прв ја докажал во својата докторска дисертација кога имал 22 години, а подоцна дал уште неколку докази.

Основната теорема на алгебрата гарантира постоење на барем една (комплексна нула c_1 на даден полином f со степен $n \geq 1$. Ако дадениот полином го поделиме со $x-c_1$, добиваме полином g со степен за единица помал од степенот на f. Според Основната теорема на алгебрата и полиномот g има барем една (комплексна) нула c_2 која, исто така, ќе биде и нула и на дадениот полином f. Делејќи го полиномот g со $x-c_2$ добиваме полином со степен за единица помал од степенот на g. Оваа постапка ја продолжуваме сé додека не добиеме полином од прв степен $ax+b,\ a \neq 0$, кој го запишуваме како $a(x-c_n)$, каде $c_n = -\dfrac{b}{a}$. Со тоа го добиваме разложувањето

$$f(x) = (x-c_1)g(x) = (x-c_1)(x-c_2)h(x) = (x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)a$$

Јасно е дека бројот a е всушност водечкиот коефициент на полиномот. Меѓу броевите $c_1, c_2, \dots, c_n$ може да има и еднакви. Нека, на пример, само p корени се реални, и тоа, $c_{i_1} = \alpha_1$ е k_1-кратна нула, $c_{i_2} = \alpha_2$ е k_2-кратна нула, ..., $c_{i_p} = \alpha_p$ е k_p-кратна нула, така што $k_1 + k_2 + ... + k_p = n$. Тогаш полиномот се запишува во форма

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_p)^{k_p}, \qquad (k_1 + k_2 + \dots + k_k = n). \qquad (1)$$

Притоа претставувањето на полиномот во овој облик е еднозначно, со точност до редоследот на множителите. Имено, ако стартуваме на пример со α_2 како прва нула на полиномот, ќе добиеме разложување од облик $f(x) = a(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_t)^{p_t}$, кое се разликува од почетното само по редоследот на множителите.

Теорема 2. Секој полином на единствен начин (со точност до редоследот на множителите) се разложува во обликот (1), каде $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ се различни комплексни корени на полиномот.

Комплетното разложување на полиномите на множители во пракса не е секогаш лесно изводливо, посебно за полиноми со повисоки степени, така што често пати е неопходно користење на компјутер за таа цел.

Задачи за самостојна работа

1. Одреди ги коефициентите m и n така што полиномот $x^4-3x^3+3x^2+mx+n$ да биде делив со $q(x)=x^2-3x+2$.

2. При кои услови полиномот x^3+ax+b ќе биде делив со полиномот x^2+cx-1?

3. Определи ги коефициентите a и b така што триномот ax^4+bx^3+1 да биде делив со $(x-1)^2$.

4. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот x^3-2x^2+ax+b, така што тој да биде делив со $x-1$, а при делење со $x-2$ да се добие остаток 4.

5. Искажи ја основната теорема на алгебрата.

1. 8. Обопштена Виетова теорема

За даден полином од n-ти степен

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0 \qquad (1)$$

веќе знаеме дека тој може да се претстави и како производ од n линеарни множители во множеството на комплексните броеви:

$$P(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_{n-1})(x-c_n) \qquad (2)$$

каде што $c_1,c_2,...,c_{n-1},c_n$ се неговите n нули (реални или комплексни), а меѓу нив може да има и еднакви.

Да го извршиме множењето на биномите во (2) кои се разликуваат само по вторите членови, не земајќи го предвид коефициентот a_n (или сметајќи дека е $a_n=1$).

Прво ќе го одредиме производот на првите два множители:

$p_2=(x-c_1)(x-c_2)=x^2-(c_1+c_2)x+c_1c_2$, потоа

$p_3=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)=x^3-(c_1+c_2+c_3)x^2+(c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)x-c_1c_2c_3$,

$$p_4=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)=x^4-(c_1+c_2+c_3+c_4)x^3+(c_1c_2+c_1c_3+c_1c_4$$
$$+c_2c_3+c_2c_4+c_3c_4)x^2-(c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+c_1c_3c_4+c_2c_3c_4)x+c_1c_2c_3c_4.$$

Множејќи и понатаму на тој начин, ќе го добиеме и производот

$$p_n = (x-c_1)(x-c_2)...(x-c_n) = x^n - (c_1+c_2+...+c_n)x^{n-1} + (c_1c_2+c_1c_3+...+c_{n-1}c_n)x^{n-2} -$$
$$-(c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+...+c_{n-2}c_{n-1}c_n)x^{n-3}+...+(-1)^k(c_1c_2...c_k+c_1c_2...c_{k-1}c_{k+1}+...)x^k+...+$$
$$(-1)^n c_1c_2...c_n. \qquad (3)$$

Ако полиномот p_n го помножиме со a_n, согласно (2) добиваме полином идентичен со $P(x)$, т.е. $a_n p_n(x) = P(x)$, односно

$$\begin{aligned}&a_nx^n - a_n(c_1+c_2+...+c_n)x_{n-1} + a_n(c_1c_2+c_1c_3+...+c_{n-1}c_n)x^{n-2} -\\&-a_n(c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+...+c_{n-2}c_{n-1}c_n)x^{n-3}+...+\\&+(-1)^k a_n(c_1c_2...c_k+c_1c_2...c_{k-1}c_{k+1}+...)x^k+...+\\&+(-1)^n a_nc_1c_2...c_n \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\end{aligned} \qquad (4)$$

Со споредување на коефициентите пред еднаквите степени на x во левата и десната страна на идентитетот (4) ги добиваме равенствата:

$$\begin{aligned}&c_1+c_2+...+c_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\&c_1c_2+c_2c_3+...+c_{n-1}c_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},\\&c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+...+c_{n-2}c_{n-1}c_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},\\&.\ .\\&c_1c_2...c_{n-1}+c_1c_2...c_{n-2}c_n+......+c_2c_3...c_n = (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n},\\&c_1c_2c_3...c_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.\end{aligned} \qquad (5)$$

Овие равенства, кои ни ја даваат врската меѓу нулите и коефициентите на полиномот $P(x)$ од n - ти степен, се викаат **Виетови формули**.

Забележуваме дека левата страна кај k-тото равенство ($k=1,2,3,...,n$) претставува збир од семожните производи од по k различни нули, земен со знак плус или минус, во зависност од парноста или непарноста на бројот k.

Виетовите формули можат да се користат за одредување на коефициентите на полиномот, ако се познати неговите нули.

1. Најди полином од четврти степен $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, кој има прости нули 2 и –5 и една двократна нула 3.

Нули на бараниот полином се: $x_1 = 2,\ \ x_2 = -5,\ \ x_3 = 3,\ \ x_4 = 3$, а a_0 нека е 1. Формално, $P(x) = (x-2)(x+5)(x-3)^2$. Користејќи ги равенствата (5) за $n = 4$ добиваме:

$$a_1 = -(x_1+x_2+x_3+x_4) = -(2-5+3+3) = -3$$

$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -10 + 6 + 6 - 15 - 15 + 9 = -19$

$a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = -(-30 - 30 + 18 - 45) = 87$

$a_4 = x_1x_2x_3x_4 = -90$.

Според тоа, бараниот полином е $P(x) = x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 87x - 90$. ♦

2. Пресметај го збирот од квадратите на нулите на полиномот $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Нека x_1, x_2 и x_3 се нули на полиномот. Според Виетовите правила имаме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1. \\ x_1x_2x_3 = 3 \end{cases} \qquad (6)$$

Од идентитетот $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ и равенствата (6) добиваме $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши еден полином од трети степен чии корени се $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$.

2. Запиши еден полином од 4-ти степен со корени $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3$.

3. Напиши ги Виетовите формули за полиномот $x^3 + ax + b$ и одреди ги неговите нули, ако една од нив е двократна.

4*. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x) = ax^4 + bx^2 + 1$, ако се знае дека $P(x)$ има двократна нула $x = 1$.

5*. Напиши ги Виетовите формули за полином од петти степен.

1. 9. Полиноми со реални коефициенти

Нека е даден полином f со реални коефициенти. Го запишуваме во обликот

$$f(x) = a(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\cdots(x-\alpha_p)^{p_k}\ , \quad (p_1 + p_2 + ... + p_k = n),$$

каде во општ случај $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ се комплексни нули. Се поставува прашањето: како да се разложи полином со реални коефициенти на полиноми кои, исто така, ќе бидат со реални коефициенти. За таа цел најпрво ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 1. Ако комплексниот број α е нула на полиномот $f(x)$ со реални коефициенти, тогаш и неговиот конјугиран број $\overline{\alpha}$ е, исто така, нула на полиномот.

Доказ. Нека $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n$, каде $a_0,a_1,....,a_n$ се реални броеви. Ако α е нула на полиномот $f(x)$, тогаш

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+....+a_n=0.$$

Ако двете страни на ова равенство се конјугираат и притоа се искористи дека $\overline{(\alpha^k)}=(\overline{\alpha})^k$, како и фактот дека $\overline{a_k}=a_k$, добиваме

$$a_0(\overline{\alpha})^n+a_1(\overline{\alpha})^{n-1}+....+a_n=0, \quad \text{т.е.} \quad f(\overline{\alpha})=0. \ \blacksquare$$

Ако нулата α во теорема 1 е реален број, тогаш теорема 1, всушност, ништо не тврди. Меѓутоа, ако α е комплексен, но не е реален број, во тој случај ако сме ја нашле нулата α, ние, всушност, сме нашле две различни нули: α и $\overline{\alpha}$. Полиномот можеме да го поделиме со $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ и со тоа проблемот на разложување сме го довеле до разложување на полином со степен помал за 2. Освен тоа, бидејќи $-p=\alpha+\overline{\alpha}$ и $q=\alpha\overline{\alpha}$ се реални броеви, добиваме дека полиномот $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2+px+q$ е, исто така, со реални коефициенти, па и количникот на полиномот f(x) со овој трином е, исто така, полином со реални коефициенти. Сега повторно може да се примени теоремата 1. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека нулите на полиномот $f(x)$ се состојат од реални броеви и парови заемно конјугирани комплексни броеви. Освен тоа, горната постапка на одвојување на секој пар заемно конјугирани комплексни броеви укажува на тоа дека кратноста на α мора да е еднаква на кратноста на $\overline{\alpha}$. Од оваа дискусија произлегува точноста на следнава теорема.

Теорема 2. Нулите на еден полином со реални коефициенти можат да бидат реални броеви и парови заемно конјугирани броеви со иста кратност.

Ако кратноста на нулите α и $\overline{\alpha}$ е k, тогаш

$$(x-\alpha)^k(x-\overline{\alpha})^k=[(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]^k=(x^2+px+q)^k,$$

и освен тоа $p^2-4q<0$, бидејќи во спротивно нулите на триномот x^2+px+q ќе бидат реални. Од оваа дискусија произлегува и следната теорема за разложување на полиноми со реални коефициенти на множители.

Теорема 3. Секој полином f со реални коефициенти и со степен n, на единствен начин со точност до редоследот на множителите, може да се запише во следниот облик

$$f(x)=a(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{m_t},$$

каде $a,a_1,...,a_s,p_1,...,p_t,q_1,...,q_t$ се реални броеви при што $a_1,...,a_s$ се различни реални нули, паровите $(p_1,q_1),...,(p_t,q_t)$ се различни и $p_1^2<4q_1,...,p_t^2<4q_t$, а $k_1,...,k_s,m_1,...,m_t$ се природни броеви и за нив важи $k_1+...+k_s+2(m_1+...+m_t)=n$.

1. Разложи го полиномот $x^5+x^4+5x^3+5x^2+4x+4$ на реални множители.

Имаме $x^5+x^4+5x^3+5x^2+4x+4=(x+1)(x^4+5x^2+4)$. Од $t^2+5t+4=(t+1)(t+4)$, добиваме

$$x^5+x^4+5x^3+5x^2+4x+4=(x+1)(x^4+5x^2+4)=(x+1)(x^2+1)(x^2+4).$$

Ова е бараното разложување, бидејќи x^2+1 и x^2+4 се неразложливи во множеството на реалните броеви. ♦

2. Разложи го полиномот x^8+8x^4+16 на реални множители.

$x^8+8x^4+16=(x^4+4)^2$.

Забележуваме дека $x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$ и овие два множитела се понатаму неразложливи. Затоа,

$$x^8+8x^4+16 = (x^2-2x+2)^2(x^2+2x+2)^2. ♦$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди полином со реални коефициенти со најмал можен степен со водечки коефициент 2, таков што негови нули се броевите

а) $2+i$ и $1-2i$, б) $1+i$ и $-1-i$.

2. Најди полином со реални коефициенти од трети степен, со водечки коефициент 1, чии нули се 1 и $1-i$.

3. Најди полином со реални коефициенти со најмал можен степен и со водечки коефициент 1, за кој бројот $2i$ е нула со кратност 3, а 0 е корен со кратност 2.

Разложи ги на реални множители следниве полиноми:

4*. x^5+3x^3+2x, **5*.** $x^{11}+3x^9+3x^7+x^5$.

1.10. Полиноми со цели и рационални коефициенти

Секој полином со цели коефициенти:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0, \quad (a_n\neq 0) \tag{1}$$

има специфични својства што се гледа од следнава теорема.

Теорема 1. Секоја цела нула на полиномот $f(x)$ со цели коефициенти е делител на слободниот член на тој полином.

Доказ: Нека $x=\alpha$ е цела нула на $f(x)$. Тогаш важи: $f(x)\equiv(x-\alpha)\cdot q(x)$, односно

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0=(x-\alpha)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0), \tag{2}$$

каде што коефициентите на $q(x)$ се цели броеви, па и бројот b_0 е цел.

Согласно равенството (2), имаме $a_0 = -\alpha \cdot b_0 = \alpha \cdot (-b_0)$. Оттука следува дека целата нула на $f(x)$ е делител на неговиот слободен член a_0. ■

Според тоа, согласно теорема 1, ако целобројниот полином $f(x)$ има цели нули, тогаш нив треба да ги бараме помеѓу сите можни делители (и позитивни и негативни) на слободниот член a_0 на $f(x)$. Испитувањето на сите делители на слободниот член a_0 во некои случаи (кога нивниот број е голем) претставува обемна работа. Но, постои начин во голема мера тие пресметувања да се упростат. Очигледно е дека броевите 1 и -1 се или не се нули на полиномот $f(x)$. Ги пресметуваме $f(1)$ и $f(-1)$ и воедно утврдуваме дали броевите 1 и -1 се нули на полиномот $f(x)$. Потоа, ако целиот број α е нула на $f(x)$, тогаш ќе важи равенството (2). Бидејќи сите коефициенти на количникот $q(x)$ се цели броеви, и количниците

$$\frac{f(1)}{1-\alpha} = q(1), \frac{f(1)}{-1-\alpha} = q(-1) \quad \text{или} \quad \frac{f(1)}{\alpha-1} = -q(1), \frac{f(-1)}{\alpha+1} = -q(-1) \tag{3}$$

мора да бидат цели броеви. Според тоа, од сите делители на слободниот член a_0 за да провериме дали се нули на полиномот $f(x)$, вршиме испитување само на оние делители α за кои количниците (3) се цели броеви.

1. Да ги одредиме целите нули (ако има такви) на полиномот
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$.

Делители на слободниот член 6 на $f(x)$ се: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Бидејќи $f(1) = 1 - 2 - 5 + 4 + 6 = 4, f(-1) = 1 + 2 - 5 - 4 + 6 = 0$ заклучуваме дека бројот 1 не е нула, а бројот -1 е нула на полиномот. Потоа броевите $\frac{4}{1+2}, \frac{4}{1-6}$ $\frac{4}{1+6}$ не се цели броеви, па затоа делителите -2, 6 и -6 ги отфрламе од натамошното испитување. Бидејќи количниците $\frac{4}{1-2}, \frac{0}{-1-2}, \frac{4}{1-3}, \frac{0}{-1-3}, \frac{4}{1+3}, \frac{0}{-1+3}$ се цели броеви, за секој од останатите делители 2, 3 и -3 вршиме натамошно испитување со пресметување на $f(2) \neq 0$, $f(3) = 0$ и $f(-3) \neq 0$. Според тоа, $f(x) = (x-3)(x+1)(x^2-2)$. ♦

Ако не сите коефициенти на полиномот $f(x)$ се цели броеви, туку меѓу нив има и дропки, тогаш полиномот го множиме со најмалиот заеднички именител s на дробните коефициенти, па ќе добиеме полином $sf(x)$ со цели коефициенти, којшто има исти нули како и полиномот $f(x)$. Според тоа, за да ги одредиме целите нули на $f(x)$, доволно е да ги одредиме целите нули на $sf(x)$.

2. Најди ги целите нули на полиномот $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-x^2-\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}$.

За $f(x)$ е $s=4$. Го множиме полиномот $f(x)$ со 4, па добиваме:

$4f(x)=x^4+2x^3-4x^2-5x-6$.

Делители на слободниот член, -6, се: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. За делителите 1 и -1 со директна замена добиваме $4f(1)=1+2-4-5-6=-12,\ 4f(-1)=1-2-4+5-6=-6$.

Лесно се уверуваме дека за делителите $2,-2$ и 3 количниците (3) се цели броеви, а за 3, 6 и -6 тие се дропки.

Така на пример, за $\alpha=6$ количникот $\frac{4f(1)}{1-\alpha}=\frac{-12}{1-6}=\frac{-12}{-5}$ не е цел број. Значи, натамошното испитување дали се нули на $4f(x)$ го вршиме само за делителите: $2,-2$ и 3, односно со пресметување на $4f(2)=0,\ 4f(-2)=-12,\ 4f(3)=78$ и $f(-3)=0$.

Значи, делителите 2 и -3 се нули на $4f(x)$, па добиваме:

$4f(x)=(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$, т.е. полиномот $4f(x)$ има само две цели нули $\alpha_1=2$ и $\alpha_2=-3$. ♦

Сега да преминеме на прашањето за одредување на рационалните нули на полином со цели коефициенти.

Теорема 2. Ако полиномот (1) со цели коефициенти има рационална нула $\frac{p}{q}$, каде што p и q се заемно прости, тогаш p е делител на слободниот член a_0, а q е делител на водечкиот коефициент a_n на полиномот $f(x)$.

Доказ. Ако $x=\frac{p}{q}$ е нула на $f(x)$, тогаш со негова замена во $f(x)$ и множење со q^n, добиваме:

$$a_np^n+a_{n-1}qp^{n-1}+a_{n-2}q^2p^{n-2}+\dots+a_1q^{n-1}p+a_0q^n=0 \tag{4}$$

Оттука

$$a_0q^n=p(-a_np^{n-1}-a_{n-1}qp^{n-2}-a_{n-2}q^2p^{n-3}-\dots-a_1q^{n-1}) \tag{5}$$

Бидејќи $p,q,a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n$ се цели броеви, изразот во заградата на десната страна во (5) е цел број. Од равенството (5) следува дека производот a_0q^n е делив со p, а бидејќи p и q се заемно прости, следува дека p е делител на a_0.

Равенството (4) да го запишеме во видот

$$a_np^n=q(-a_{n-1}p^{n-1}-a_{n-2}qp^{n-2}-\dots-a_1q^{n-2}p-a_0q^{n-1}) \tag{6}$$

Оттука следува дека производот a_np^n е делив со q, но бидејќи p и q се заемно прости, следува дека q е делител на a_n. ■

Теорема 3. Секоја рационална нула на полиномот $f(x)$ со цели коефициенти и со водечки коефициент $a_n = 1$, е цел број.

Ако $a_n = 1$, согласно теоремата 2, q е делител на a_n, па мора да е $q = \pm 1$. Според тоа, рационалната нула $\dfrac{p}{q}$ е цел број.

Теоремата 1 укажува дека за наоѓањето на сите рационални (дробни и цели) нули на целоброен полином $f(x)$, чиј водечки коефициент е $a_n \neq 1$, треба тој да се трансформира во целоброен полином со водечки коефициент еднаков на единица. Тоа го постигнуваме на следниот начин:

Полиномот $f(x)$ го множиме со $a_n^{\,n-1}$ и добиваме полином $a_n^{\,n-1} f(x)$ што ги има истите нули како и дадениот полином $f(x)$,

$$a_n^{\,n-1} f(x) = a_n^{\,n} x^n + a_{n-1} a_n^{\,n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 a_n^{\,n-1} x + a_n^{\,n-1} a_0 \qquad (7)$$

односно

$$a_n^{\,n-1} f(x) = (a_n x)^n + a_{n-1}(a_n x)^{n-1} + \ldots + a_n^{\,n-2} a_1 (a_n x) + a_n^{\,n-1} a_0 . \qquad (8)$$

Потоа во (8) изразот $a_n x$ го заменуваме со нов аргумент $y = a_n x$, па полиномот $a_n^{\,n-1} f(x)$ го добива видот

$$a_n^{\,n-1} f(x) = \varphi(y) = y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_n^{\,n-2} a_1 y + a_n^{\,n-1} a_0 . \qquad (9)$$

Согласно теоремата 3, сите рационални нули на полиномот (9) се цели броеви. Кога ќе ги одредиме сите цели нули на полиномот (9), со помош на равенството $x = \dfrac{y}{a_n}$, ќе ги одредиме и сите рационални нули на полиномот $f(x)$.

3. Најди ги рационалните нули на полиномот $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 15x + 6$.

Го множиме полиномот $f(x)$ со 3^3 $(= a_4^{\,3})$:

$$3^3 f(x) = 3^3 \cdot 3x^4 - 5 \cdot 3^3 x^3 - 11 \cdot 3 \cdot 3^2 x^2 + 15 \cdot 3^2 \cdot 3x + 3^3 \cdot 6$$

$$3^3 f(x) = (3x)^4 - 5 \cdot (3x)^3 - 33 \cdot (3x)^2 + 135(3x) + 162$$

$$3^3 f(x) = \varphi(y) = y^4 - 5y^3 - 33y^2 + 135y + 162 ,$$

каде што $y = 3x$. Потоа проверуваме дали 1 и -1 се нули на полиномот $\varphi(y)$:

$$\varphi(1) = 1 - 5 - 33 + 135 + 162 = 260, \;\; \varphi(-1) = 1 + 5 - 33 - 135 + 162 = 0 .$$

Значи, -1 е нула на $\varphi(y)$.

Од $162 = 2 \cdot 3^4$ заклучуваме дека делители на 162 покрај ± 1 се $\pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ и др.

Проверуваме дека за $\alpha = \pm 2$ и $\alpha = \pm 3$ количниците $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1}, \frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1}$ се дропки, според тоа, тие не се цели нули на $\varphi(x)$, а за $\alpha = 6$: $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1} = \frac{260}{6-1} = 52$, $\frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1} = \frac{0}{6+1} = 0$ се цели броеви. Со проверка, се добива $\varphi(6) = 0$. Значи, $\varphi(y) = (y+1)(y-6)(y^2 - 27)$. Според тоа, полиномот $\varphi(y)$ има само две цели нули $y_1 = -1$ и $y_2 = 6$. Оттука, бараните рационални нули на дадениот полином $f(x)$ се само $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = 2$.

Разложувањето на $f(x)$ на множители со цели коефициенти ќе гласи:

$3^3 f(x) = (3x+1)(3x-6)(9x^2 - 27)$, од каде што $f(x) = (3x+1)(x-2)(x^2 - 3)$. ♦

Да напоменеме дека овој метод е применлив само за полиномите со цели коефициенти и тоа само за одредување на нивните рационални нули.

Теорема 4. Ако за $x = 0$ и $x = 1$ полиномот $f(x)$ со цели коефициенти има непарни вредности, тогаш тој полином нема цели нули.

Доказ. Да го претпоставиме спротивното: Нека $x = \alpha$ е цела нула на $f(x)$ т. е. нека $f(\alpha) = 0$, и нека $f(0)$ и $f(1)$ се непарни броеви.

Очигледно е дека количникот $\frac{f(1)}{\alpha - 1}$, при непарен броител $f(1)$ може да биде цел број само ако α е парен број. Од $f(\alpha) = 0$, односно од $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, добиваме $a_0 = -\alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1)$.

Според тоа, слободниот член a_0 е парен број (бидејќи α е парен број). Од друга страна, пак, $f(0) = a_0$ по услов е непарен број. Оваа противречност ја докажува теоремата. ■

4. Полиномот $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - x + 5$ прима непарни вредности за $x = 0$ и $x = 1$: $f(0) = 5$ и $f(1) = 2 - 3 + 4 - 1 + 5 = 7$. Значи, тој нема цели нули. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Одреди ги целите нули на полиномот, ако има такви

а) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$,   б) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$.

2. Одреди ги рационалните нули на полиномите:

а) $3x^3 + x^2 + 6x + 2$,   б) $6x^4 + x^3 + 16x^2 + 3x - 6$.

3. Разложи ги следниве полиноми на неразложливи множители:

а) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 15x - 6,$ б) $g(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4,$

в) $\varphi(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2.$

4*. Докажи дека ако f е полином со цели коефициенти, тогаш за произволни различни цели броеви x и y разликата $f(x) - f(y)$ е делива со $x - y$.

5*. Користејќи ја претходната задача, докажи дека не постои полином f со цели коефициенти, така што $f(a) = b,\ f(b) = c$ и $f(c) = a$, за некои три различни цели броеви a, b и c.

1. 11. Задачи за вежбање

1. Пресметај го збирот и разликата на полиномите
$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 4$ и $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$.

2. Со помош на Хорнерова шема пресметај ја вредноста на полиномот $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 10$ за $x = 2.$

3. Докажи дека ако збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$ е еднаков на 0, тогаш за произволен полином $Q(x)$ и збирот на коефициентите на производот $P(x)Q(x)$ исто така е еднаков на 0.

4. Определи ја вредноста на коефициентот a така што полиномот
$P(x) = (a-1)x^3 + (2a-4)x^2 + (1-a)x + 5a + 3$ да биде делив со $x - 2$.

5. Најди полином со реални коефициенти со најмал можен степен со водечки коефициент 3, таков што броевите i и $2i$, се нули со кратност

а) 1 б) 2.

6. Најди полином со реални коефициенти со најмал можен степен и со водечки коефициент 1, за кој бројот $2i$ е нула со кратност 3, а 0 е корен со кратност 2.

7. Најди полином со комплексни коефициенти од најмал степен, чии што корени се $1+i, i-2$ и $2i$.

8*. Разложи ги на реални множители следниве полиноми:

а) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$, б) $x^5 - 2x^3 - 3x$.

9*. Кои се целобројните нули на полиномот $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x$?

10*. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот x^3-2x^2+ax+b, така што тој да биде делив со $(x-1)^2$.

2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

2. 1. Симетрични равенки

Равенка од облик

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0,\ \ a \neq 0,\ \ n \in \mathbb{N}, \qquad (1)$$

каде што a, b и c се реални броеви или изрази што не зависат од непознатата x, се вика **симетрична равенка** од $n-$ти степен.

Очигледно е дека ниту еден од корените на симетричната равенка не е еднаков на нула, бидејќи $a \neq 0$.

Понатаму, ако x_0 е корен на симетричната равенка (1) тогаш и $\frac{1}{x_0}$ е корен на симетричната равенка (1). Навистина, ако x_0 е корен на симетричната равенка (1) тогаш

$$a{x_0}^n + b{x_0}^{n-1} + c{x_0}^{n-2} + ... \pm c{x_0}^2 \pm bx_0 \pm a = 0. \qquad (2)$$

Ако двете страни на равенството (3) ги поделиме со ${x_0}^n$ имаме

$$a + b\left(\frac{1}{x_0}\right) + c\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + ... \pm c\left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-2} \pm b\left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1} \pm a\left(\frac{1}{x_0}\right)^n = 0$$

од каде што следува дека $\frac{1}{x_0}$ е корен на симетричната равенка (1).

Предмет на нашиот интерес ќе биде решавањето на симетрични равенки од трети и четврти степен.

2.1.1. Решавање на симетрични равенки од трет степен

Равенката

$$ax^3 + bx^2 \pm bx \pm a = 0, \qquad (3)$$

има корен $x = \mp 1$. Со користење на Хорнерова шема, симетричната равенка може да се претстави во облик

$$(x \pm 1)(ax^2 + cx + a) = 0.$$

Значи, решавањето на симетричната равенка (3) се сведува на решавање на квадратна равенка.

1. Реши ја равенката $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$.

Дадената равенка има корен $x_1 = -1$. Таа може да се запише во облик

$$(x+1)(3x^2 + 10x + 3) = 0.$$

По решавање на квадратната равенка $3x^2+10x+3=0$ добиваме дека $x_2=-\frac{1}{3}$ и $x_3=\frac{1}{3}$. ♦

2. Реши ја равенката $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

Дадената равенка има корен $x_1=1$. Таа може да се запише во облик

$(x-1)(2x^2-5x+2)=0$.

По решавање на квадратната равенка $2x^2-5x+2=0$ добиваме дека $x_2=2$ и $x_3=\frac{1}{2}$. ♦

2.1.2. Решавање на симетрични равенки од четврт степен

Равенката

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \tag{4}$$

ја делиме со x^2 и ги групираме членовите со соодветно еднакви коефициенти, ја добиваме равенката

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+cx^2+bx+a=0,$$

која е еквивалентна на неа. Ако ставиме $x+\frac{1}{x}=y,$ добиваме $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Со замена на овие вредности во (4) добиваме квадратна равенка по новата променлива y:

$$dy^2+ey+f=0$$

чии што решенија се y_1 и y_2. Соодветните вредности на x ги добиваме од смената $x+\frac{1}{x}=y,$ односно од квадратната равенка $x^2-xy+1=0.$

3. Реши ја равенката $6x^4-11x^3-18x^2-11x+6=0$.

Со смената $x+\frac{1}{x}=y$ дадената равенка преминува во равенката

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-11\left(x+\frac{1}{x}\right)-18=6(y^2-2)-11y-18=0\,,$$

односно во равенката $6y^2-11y-18=0$ чии корени се $y_1=-\frac{3}{4}$ и $y_2=\frac{5}{3}$. Соодветните вредности на x ги добиваме од смената $x+\frac{1}{x}=y$, односно од вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{4} \\ x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2+3x+4=0 \\ 3x^2-5x+3=0 \end{array}\right..$$

Од нив добиваме $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm i\sqrt{55}}{8}$, $x_{3,4}=\dfrac{5\pm i\sqrt{11}}{6}$. ♦

Равенката

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx-a=0, \tag{5}$$

има корен $x=1$. Со користење на Хорнеровата шема симетричната равенка може да се претстави во облик

$$(x-1)(ax^3+dx^2+dx+a)=0.$$

Значи, решавањето на симетричната равенка (3) се сведува на решавање на симетрична равенка од трет степен.

4. Реши ја равенката $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$.

Дадената равенка има корен $x_1=1$. Таа може да се запише во облик

$$(x-1)(2x^3-7x^2+7x-2)=0.$$

По решавање на симетричната равенка $2x^3-7x^2+7x-2=0$ добиваме дека $x_2=1$, $x_3=2$ и $x_4=\dfrac{1}{2}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следните равенки се симетрични равенки:

а) $2x^2+3x^2-3x-2=0$; б) $12x^3-37x^2+37x-12=0$;

в) $x^4-x^3-x+1=0$; г) $2x^4-2x^3+x^2-x-2=0$.

Најди ги корените на следниве симетрични равенки од трет ред:

2. $12x^3-13x^2-13x+12=0$. **3.** $15x^3+19x^2-19x-15=0$.

4.* $2x^3+3x^2-3x-2=0$. **5.*** $3x^3+x^2-x-3=0$.

Реши ги следниве симетрични равенки од четврт ред:

6. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$. **7.** $12x^4-25x^3+25x-12=0$.

8. $x^4-5x^3+5x-1=0$. **9.*** $2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$.

2. 2. Биномни равенки

Равенка од облик

$ax^n \pm b = 0, \ a > 0, \ b > 0,$ (1)

се вика **биномна равенка** од $n-$ти степен.

Со смената $x = y \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ каде што со $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ е означена аритметичката вредност на $n-$тиот корен од позитивниот реален број $\frac{b}{a},$ биномната равенка (1) преминува во биномна равенка од видот

$y^n \pm 1 = 0.$ (2)

До доменот на нашиот интерес ќе биде решавањето на биномна равенка од трет и четврт степен. Постапка за нивно решавање ќе ја илустрираме со неколку примери.

1. Реши ја равенката: а) $y^3 - 1 = 0;$ б) $y^3 + 1 = 0.$

а) Равенката $y^3 - 1 = 0$ е еквивалентна на равенката $(y-1)(y^2 + y + 1) = 0$ чии решенија се $y_1 = 1, \ y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$ ♦

б) Равенката $y^3 + 1 = 0$ е еквивалентна на равенката $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$ чии што решенија се $y_1 = -1, \ y_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$ ♦

2. Реши ја равенката $8x^3 - 27 = 0.$

Со смената $x = y \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ од дадената равенка ја добиваме равенката $y^3 - 1 = 0$ чии решенија се $y_1 = 1, \ y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$ Ако се вратиме на воведената смена добиваме дека $x_1 = \frac{3}{2}, \ x_{2,3} = \frac{-3 \pm i3\sqrt{3}}{4}.$ ♦

3. Реши ја равенката: а) $y^4 - 1 = 0;$ б) $y^4 + 1 = 0.$

а) Равенката $y^4 - 1 = 0$ е еквивалентна на равенката $(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0,$ чии што решенија се $y_{1,2} = \pm 1, \ y_{3,4} = \pm i.$ ♦

б) Равенката $y^4+1=0$ може да ја запишеме во облик $y^4+2y^2+1-2y^2=0$, односно $(y^2+1)^2-(\sqrt{2}y)^2=0$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $(y^2-\sqrt{2}y+1)(y^2+\sqrt{2}y+1)=0$. Најзините решенија се $y_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$, $y_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}$. ♦

4. Реши ја равенката $16x^4-81=0$.

Со смената $x=y\cdot\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ од дадената равенка ја добиваме равенката $y^4-1=0$ чии решенија се $y_{1,2}=\pm1$, $y_{3,4}=\pm i$. Ако се вратиме на воведената смена добиваме дека $x_{1,2}=\pm\frac{3}{2}$, $y_{3,4}=\pm\frac{3i}{2}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следните равенки се биномни равенки:

а) $x^4+2=0$; б) $3x^4-6x^2=0$; в) $x^3-\sqrt{7}=0$;
г) $2x^4-9=0$; д) $3x^3-2x^2+x=0$; ѓ) $7x^4-2x=0$.

Најди ги корените на следниве биномни равенки:

2. $x^2+2=0$. **3.** $36x^2-25=0$. **4.** $5x^2+2=0$.

Реши ги следниве биномни равенки:

5. $x^3-8=0$. **6.** $27x^3+64=0$. **7.** $125x^3+8=0$.

8. $x^4-81=0$. **9.*** $16x^4-625=0$. **10.*** $81x^3+16=0$.

2. 3. Триномни равенки

Равенка од облик

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,\ a\neq0,\ n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

каде што a, b и c се реални броеви или изрази што не зависат од непознатата x, се вика **триномна равенка** од $n-$ти степен.

Триномните равенки ги решаваме алгебарски со воведување на нова променлива со смената $x^n=y$. Тогаш равенката (1) преминува, во однос на новата променлива во квадратна равенка

$$ay^n+by+c=0$$

чии што корени се

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Според тоа, решавањето на триномната равенка (1) се сведува на решавање на две биномни равенки од $n-$ти степен:

$$x^n = y_1$$

$$x^n = y_2.$$

Ние ќе се ограничиме на решавање на триномни равенки кои се сведуваат на биномни равенки од трет и четврт степен. Постапка за нивно решавање ќе ја илустрираме со неколку пример.

1. Реши ја триномната равенка $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

Со смената $x^3 = y$ равенката преминува во квадратната равенка

$$y^2 + 7y - 8 = 0$$

чии што решенија се

$$y_1 = 1, \ \ y_2 = -8.$$

Потоа ги решаваме биномните равенки од четврт степен

$$x^3 = 1 \ \text{ и } \ x^3 = -8.$$

Тие имаат корени

$$x_1 = 1, \ \ x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \ \ x_4 = -2, \ \ x_{5,6} = 1 \pm i\sqrt{3},$$

кои се всушност бараните корени на дадената триномна равенка. ♦

2. Реши ја триномната равенка $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Со смената $x^4 = y$ равенката преминува во квадратната равенка

$$y^2 - 17y + 16 = 0$$

чии што решенија се

$$y_1 = 1, \ \ y_2 = 16.$$

Потоа ги решаваме биномните равенки од четврт степен

$$x^4 = 1 \ \text{ и } \ x^4 = 16.$$

Тие имаат корени

$$x_{1,2} = \pm 1, \ \ x_{3,4} = \pm i, \ \ x_{1,2} = \pm 2, \ \ x_{3,4} = \pm 2i,$$

кои се всушност бараните корени на дадената триномна равенка. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следните равенки се триномни равенки:

а) $2x^4+4x^2+2=0$; б) $3x^8-6x^2+8=0$; в) $x^9-x^3=0$;
г) $x^{16}-x^8+9=0$; д) $32x^6+12x^3+1=0$; ѓ) $-3x^{14}-10x^2=0$.

Најди ги корените на следниве триномни равенки:
2. $x^8-5x^4+6=0$. **3.** $x^8-15x^4-16=0$. **4.** $32x^6+12x^3+1=0$.
5. $x^6-9x^3+8=0$. **6.** $x^4+7x^2+10=0$. **7.*** $x^4-5x^2+4=0$.

Реши ги следниве триномни равенки:
8. $16x^4-17x^2+1=0$. **9.** $(x-3)x^4-6(x-3)^2+5=0$. **10.** $-3x^4-7x^2+10=0$.
11. $x^4+5x^2+4=0$. **12.** $x^4-10x^2+9=0$; **13.*** $x^4-29x^2+100=0$.

2. 4. Биквадратни равенки

Равенка од видот

$$ax^4+bx^2+c=0,\quad a\neq 0, \qquad (1)$$

каде што a, b и c се реални броеви или изрази што не зависат од непознатата x, се вика **биквадратна равенка.**

1. Равенките $2x^4-7x^2+20=0$, $\frac{x^4}{2}+3x^2+20=0$, $x^4+\sqrt{3}x^2=0$, $5x^4-\frac{2}{3}=0$, $3x^4=0$, се примери на биквадратни равенки. ♦

Во биквадратната равенка променливата x се наоѓа само на парен степен, па ако $x_0\neq 0$, е корен на равенката тогаш неговиот спротивен $-x_0$ е исто така корен на равенката. Со воведување на смената

$$x^2=y$$

равенката (1) се трансформира во квадратна равенка по непознатата y, односно во равенката

$$ay^2+by+c=0,\quad a\neq 0, \qquad (2)$$

По определување на корените на равенката (1) се враќаме на воведената смена, односно ги решаваме квадратните равенки

$$x^2=y_1 \text{ и } x^2=y_2.$$

Сите корени на последните две равенки, се корени на биквадратната равенка (1).

Од направената дискусија не е тешко да се заклучи дека решавањето на биквадратана равенка се сведува на решавање на квадратна равенка.

2. Реши ја биквадратната равенка $x^4-34x^2+225=0$.

Со смената $x^2=y$ ја добиваме квадратната равенка $y^2-34y+225=0$. Со примена на формулата за пресметување на корените на квадратна равенка, добиваме

$y_1 = 25$ и $y_2 = 9$.

Да забележиме дека двата корени на квадратната равенка се позитивни. Ако се вратиме на воведената смена, односно ако ги решиме равенките $x^2 = 25$ и $x^2 = 9$, добиваме дека биквадратната равенка има четири реални корени $x_{1,2} = \pm 5$, $x_{3,4} = \pm 3$, кои се попарно спротивни (± 5 и ± 3). ♦

2. Реши ја биквадратната равенка $x^4 + x^2 - 20 = 0$.

Со смената $x^2 = y$ ја добиваме квадратната равенка $y^2 + y + 20 = 0$, чии корени се $y_1 = 4$ и $y_2 = -5$. Да забележиме дека едниот корен на квадратната равенка е позитивен, а другиот е негативен реален број. Ако се вратиме на воведената смена, односно ако ги решиме равенките $x^2 = 4$ и $x^2 = -5$, добиваме дека биквадратната равенка има два реални корени $x_{1,2} = \pm 2$, и два имагинарни корени $x_{3,4} = \pm i\sqrt{5}$. ♦

3. Реши ја биквадратната равенка $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

Со смената $x^2 = y$ ја добиваме квадратната равенка $y^2 + 3y + 2 = 0$, чии корени се $y_1 = -3$ и $y_2 = -1$. Да забележиме дека двата корени на квадратната равенка се негативни реални броеви. Ако се вратиме на воведената смена, односно ако ги решиме равенките $x^2 = -3$ и $x^2 = -1$ добиваме дека биквадратната равенка има четири имагинарни корени $x_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ и $x_{3,4} = \pm i$. ♦

3. Реши ја биквадратната равенка $x^4 - 7x^2 = 0$.

Со воведување на смената $x^2 = y$ ја добиваме квадратната равенка $y^2 - 7y = 0$, чии корени се $y_1 = 0$ и $y_2 = 7$. Решавајќи ги равенкте $x^2 = 0$ и $x^2 = 7$, добиваме дека биквадратната равенка има четри реални корени од кои два еднакви $x_{1,2} = 0$, и два различни $x_{3,4} = \pm 7$. ♦

Понатаму, ако $x_0 = 0$ е корен на една биквадратна равенка, тогаш од $a0 + b0 + c = 0$, следува дека $c = 0$. Според тоа можеме да заклучиме дека разгледуваната биквадратната равенка е од облик

$ax^4 + bx^2 = 0$.

Последната равенка има два реални корени еднакви на нула. Според тоа ако биквадратана равенка има корен $x_0 = 0$ тогаш тој е двоен корен. Уште повеќе ако $b = 0$, тогаш $x_0 = 0$ е четворен корен.

4. Реши ја биквадратната равенка $5x^4 + 3x^2 = 0$.

Со воведување на смената $x^2 = y$ ја добиваме квадратната равенка $5y^2 + 3y = 0$, чии корени се $y_1 = 0$ и $y_2 = -\frac{3}{5}$. Од двете равенки $x^2 = 0$ и $x^2 = -\frac{3}{5}$, првата има два еднакви реални корени $x_{1,2} = 0$ и втората има два имагинарни корени $x_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{3}{5}}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следните равенки се биквадратни равенки:

а) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$; б) $3x^4 - 7x^2 + 1 = 0$; в) $x^3 + 2x^2 - 7 = 0$;

г) $2x^4 - 9 = 0$; д) $3x^4 - 2x^2 = 0$; ѓ) $7x^4 - 2x = 0$.

2. Најди ги корените на следниве биквадратни равенки:

а) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; б) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; в) $x^4 - 4x^2 = 0$.

3. Реши ги следниве биквадратни равенки:

а) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$; б) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$; в) $x^4 + x^2 = 0$.

4*. Разложи ги на множители полиномите:

а) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; б) $P(y) = 4y^4 - 29y^2 + 25$.

5*. Скрати ги дропките:

а) $\dfrac{x^4 - 16}{x^4 - 13x^2 + 36}$; б) $\dfrac{x^4 - 11x^2 + 24}{x^4 - 17x^2 + 72}$.

2. 5. Детерминанти

Нека a, b, c и d се дадени реални броеви и ad, bc се соодветните производи.

Дефиниција 1. Вредноста на изразот $ad - bc$, запишан шематски $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ се нарекува **детерминанта од втор ред**; значи, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Броевите a, b, c и d се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Тие се распоредени во две **редици** (хоризонтално) и во две **колони** (вертикално), а накрсно формираат две **дијагонали**. Првата редица ја сочинуваат броевите a и b, а втората броевите c и d. Првата колона ја сочинуваат броевите a и c, а втората броевите b

и d. Броевите a и d ја формираат **главната дијагонала**, а броевите b и c ја формираат **споредната дијагонала**.

Согласно со кажаното заклучуваме дека детерминанта од втор ред е еднаква на разликата од производите на елементите од главната и од споредната дијагонала.

1. Детерминантата $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ го претставува бројот -23 бидејќи

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 4 - 5\cdot 3 = -8 - 15 = -23;$$

детерминантата има вредност -23. ♦

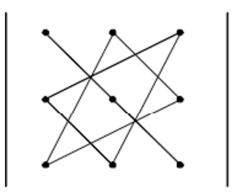
Нека a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,3)$ се дадени реални броеви.

Дефиниција 2. Вредноста на изразот $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$ запишан шематски $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ се нарекува **детерминанта од трет ред**; значи

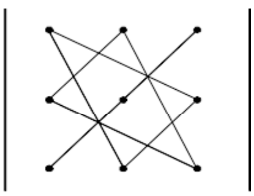
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Броевите a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,3)$ се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Елементите се распоредени во **три редици** (хоризонтално) и во **три колони** (вертикално). Елементите a_1, b_2, c_3 ја сочинуваат **главната дијагонала**, а a_3, b_2, c_1 ја сочинуваат **споредната дијагонала** на детерминантата.

Во изразот претставен со детерминантата од трет ред, првите три собироци претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на главната дијагонала (a_1, b_2, c_3) и во темињата на триаголниците, чии основи се паралелни со главната дијагонала $(a_2, b_3, c_1$ и $a_3, b_1, c_2)$, (црт. 1). Следниве три члена од равенството што се земени со негативен знак, претставуваат производи од три елементи, кои лежат на



знак (+)
Црт. 1



знак (-)
Црт. 2

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \therefore & \therefore & \therefore & & \\ - & - & - & & \end{array}$$

Црт. 3

споредната дијагонала (a_3, b_2, c_1) и во темињата на триаголниците чии основи се паралелни со споредната дијагонала $(a_2, b_1, c_3$ и $a_1, b_3, c_2)$, (црт. 2).

За пресметување на вредноста на детерминанта од трет ред се користи **Сарусовото правило**. Според ова правило, за да ја пресметаме вредноста на детерминантата, десно од неа ги допишуваме првата и втората колона, при што тие се четвртта и петта колона на нова правоаголна шема. Потоа производите на елементите (по три), што лежат на главната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со позитивен знак, а производот на елементите (по три) што лежат на споредната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со негативен знак и овие шест производи ги собираме (црт. 3).

2. Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ се пресметува на следниов начин

$$\left|\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 2\cdot 4 + (-1)\cdot 5\cdot(-3) + 3\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot 5\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 4 = 39. \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги вредностите на следниве детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, ѓ) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$.

Реши ги равенките по непознатата x:

2. $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$. **3.** $\begin{vmatrix} x^2-x & x^2 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$. **4.** $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x+2 & (x+2)^2 \end{vmatrix} = 0$.

5. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0$. **7.** $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Реши ги неравенките:

8.* $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 4x & 2 \end{vmatrix} > 5$. **9.*** $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} > 8$. **10.*** $\begin{vmatrix} 3x & x \\ 2x & -4 \end{vmatrix} > -14$.

11*. Докажи го идентитетот $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_2) & \frac{1}{2}(y_1+y_2) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1-x_2) & \frac{1}{2}(y_1-y_2) & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

2. 6. Систем од две линеарни равенки со две непознати

Нека $a_i, b_i, c_i,\ i=1,2$ се дадени реални броеви, а $x,\ y$ се непознати. Тогаш

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}, \tag{1}$$

претставува **систем од две линеарни равенки со две непознати**; a_1, b_1, a_2, b_2 се **коефициенти на системот**, а c_1, c_2 се **слободни членови**.

Решение на системот (1) е секој подреден пар броеви (x_0, y_0), за кој што двете равенки преминуваат во идентитети кога x ќе се замени со x_0, а y со y_0 во (1).

Ако системот (1) има барем едно решение, тој е **решлив**, а ако нема ниту едно решение, за него велиме дека е **противречен**. Решливиот систем којшто има единствено решение се вика **еднозначно решлив** или **определен**, ако пак тој има повеќе од едно решение, велиме дека е **неопределен**.

Системот (1) од две равенки со две непознати може да го решиме со помош на детерминанти од втор ред.

Да претпоставивме дека $a_i \neq 0,\ \ b_i \neq 0,\ \ i=1,2$ и барем еден од слободните членови е различен од нула, односно $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$.

Ги дефинираме детерминантите:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \ (= (a_1b_2 - a_2b_1),$$

наречена главна детерминанта или детерминанта на системот, и детрминантите

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} (= c_1b_2 - c_2b_1) \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} (= a_1c_2 - a_2c_1).$$

наречени детрминанти по непознатите x и y.

Можни се следниве два случаи, кои заемно се исклучуваат:

Случај . Ако $\Delta \neq 0$, тогаш со

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \tag{5}$$

е определено решение системот (1). Уште повеќе точна е следнава:

> **Теорема 1.** Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение, определено со формулите (5), наречени **Крамерови формули**.

1. За системот равенки $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ имаме $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, што значи дека тој има единствено решение (x_0, y_0). Со наоѓање на $\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$, се добива $x_0 = \frac{-7}{7} = -1$, $y_0 = \frac{14}{7} = 2$. ♦

Случај . Ако $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ тогаш системот има бескрајно многу решенија.

2. За системот равенки $\begin{cases} 3x - 6y = -15 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -15 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -15 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Да забележиме дека двете равенки на системот се еквавалентни. Со изоставување, на пример, на втората равенка системот се сведува на една равенка,

$3x - 6y = -15$.

Тогаш, со избор на произволно t за една од непознатите, на пример, $y = t$ се добива точно определена вредност за x: $x = \frac{1}{3}(-15 + 6t) = (2t - 5)$, така што подредените парови $(2t - 5, t)$, за секој реален број t, го претставуваат множеството решенија на системот. ♦

Случај . Ако $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, тогаш системот е противречен.

3. За системот равенки $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = -6; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -4$$

што значи дека тој е противречен. Во тоа може лесно да се убедиме, ако втората равенка ја замениме со еквивалентната равенка (делејќи ги двете страни со 2)

$2x-3y=5$. За ниеден подреден пар (x_0, y_0), таков што $2x_0-3y_0$ не може истовремено да е еднакво на 5 и на 6.♦

Да се потсетиме, на почетокот од дискусијата претпоставивме дека $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $i=1,2$ и барем еден од слободните членови е различен од нула, односно $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Во продолжение ќе разгледаме некои специјални случаи:

1^0 Нека двата слободни члена се еднакви на нула, односно $c_1=c_2=0$.

Тогаш системот (1) го добива обликот

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases},$$

и се нарекува **хомоген систем** од две линеарни равенки со две непознати.

Не тешко да се воочи дека хомогениот систем секогаш има решение $x_0=0$, $y_0=0$, кое се нарекува **тривијално решение**. Затоа се поставува прашањето дали постои нетривијално решение $(\overline{x}, \overline{y})$ различно од тривијалното $(0,0)$?

• Ако $a_1=a_2=b_1=b_2=0$ тогаш секој подреден пар реални броеви $(\overline{x}, \overline{y})$ претставува решение на системот.

Ако барем еден од коефициентите е различен од нула, на пример, $a_1 \neq 0$ тогаш за $\Delta=0$ системот има бесконечно многу решенија, а за $\Delta \neq 0$ системот има само тривијално решение $(0,0)$.

4. а) За системот равенки $\begin{cases} 2x=0 \\ 4x-6y=0 \end{cases}$ имаме $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=-12 \neq 0$, што значи тој има само тривијално решение $(0,0)$. Навистина првата равенка има единствено решение $x_0=0$. Ако замениме во втората равенка добиваме дека единствено решение е $y_0=0$.

б) За системот равенки $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 4x-6y=0 \end{cases}$ имаме $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=0$, што значи тој има бесконечно многу решенија. Во тоа може лесно да се убедиме, ако втората равенка ја замениме со еквивалентната равенка (делејќи ги двете страни со 2) $2x-3y=0$. Тогаш, со избор на произволно t за една од непознатите, на пример, $y=t$ се добива точно определена вредност за x: $x=\frac{3}{2}t$ така што подредените парови $\left(\frac{3}{2}t, t\right)$, за секој реален број t, го претставуваат множеството решенија на системот. ♦

2^0 Нека барем еден од коефициентите на системот (1) е еднаков на нула.

Без губење на општоста може да се претпостави дека $a_1=0$. Со аналогна дискусија направена за системот (1) се добива дека системот: има единствено решение ако $\Delta \neq 0$; бескрајно многу решенија ако $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$; е противречен ако $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$.

Задачи за самостојна работа

1. Со помош на детерминанти реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 13 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 10y = 35 \\ 3x + 16y = -33 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 10y = 1 \end{cases}$.

2. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 2y = \sqrt{2} \\ x - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} + 3y = \sqrt{3} \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ bx + 4y = k \end{cases}$.

3. Најди ги вредностите на параметрите a и b за кои системот равенки

$$\begin{cases} 4x + 6y = a \\ 2x - by = 1 \end{cases}$$

а) има единствено решение; б) е неопределен; в) е противречен.

4*. За кои вредности на параметарот k системот равенки $\begin{cases} kx - 6y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ има само тривијално решение?

5*. За која вредност на k системот равенки $\begin{cases} kx - y = 4 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ е противречен?

2. 7. Систем од три линеарни равенки со три непознати

Детерминантите од трет ред, аналогно на детерминантите од втор ред, може да ги користиме за поедноставно запишување на сложени формули и услови, како и за решавање на системи од три линеарни равенки со три непознати.

Нека a_{ij}, $i, j = 1,2,3$, и b_i, $i = 1,2,3$ се дадени реални броеви, а x, y, z се непознати. Тогаш

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

претставува **систем од три линеарни равенки со три непознати**; a_{ij}, $i, j = 1,2,3$, се **коефициенти на системот**, а b_i, $i = 1,2,3$ се слободните членови.

Коефициентите пред x, y, z образуваат **детерминанта на системот**, означена со Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Детерминантите:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

се нарекуваат **детерминанти на непознатите** x, y, z, соодветно.

Да се реши системот значи да се најдат вредности на непознатите, ако постојат, кои ги задоволуваат трите равенки на системот и претставуваат негово решение или да се утврди противречност на системот. При утврдување на решенијата на дадениот систем линеарни равенки можни се следниве случаи:

Случај . Ако $\Delta \neq 0$, тогаш со

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{2}$$

е определено решение системот (1). Уште повеќе точна е следнава:

> **Теорема 1.** Ако детерминантата Δ на системот (1) е различна од нула, тогаш тој систем има единствено решение, определено со формулите (2), наречени **Крамерови формули**.

1. Системот равенки $\begin{cases} -2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$ има единствено решение $(1,1,0)$, бидејќи

$\Delta = 4 \neq 0$, $\Delta_x = 4$, $\Delta_y = 4$ и $\Delta_z = 0$, така што $x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$, $y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$,

$z_0 = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{0}{4} = 0$. ♦

Случај . Нека $\Delta = 0$.

1 Барем една од детерминантите Δ_x, Δ_y, Δ_z е различна од нула, на пример, $\Delta_x \neq 0$ тогаш системот е противречен.

2. Системот равенки $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 3x-y+z=2 \\ x-4y+5z=0 \end{cases}$ е противречен бидејќи $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 1 \neq 0.$

Навистина, ако првата равенка ја помножиме со -1 и ја додадеме на втората равенка го добиваме системот $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ x-4y+5z=1 \\ x-4y+5z=0 \end{cases}$ кој е еквивалентен на појдовниот. Но ниту за еден подреден пар реални броеви (x_0, y_0, z_0), не може истивремено да важи $x_0-4y_0+5z_0$ и $x_0-4y_0+5z_0$. $2x_0-3y_0$ истовремено да е еднакво на 1 и на 0.♦

Ако $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0,$ тогаш системот равенки (1) има бескрајно многу решенија или е противречен.

3. За системот $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ 2x+6y+2z=4 \\ 3x+9y+3z=6 \end{cases}$ имаме дека $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ што значи дека системот има бескрајно многу решенија или е противречен. Уочувајќи дека притоа системот може да се запише како $\begin{cases} x+3y+z=2 \\ 2(x+3y+z)=2\cdot 2 \\ 3(x+3y+z)=2\cdot 3 \end{cases}$ заклучуваме дека двете последни равенки се излишни и тогаш решенијата на системот се решенијата: равенката на $x+3y+z=2$ која што има бескрајно многу решенија; тројката x, y, $z=2-x-3y$ може да се смета за општо решение на системот за произволно избрани реални броеви x, y. ♦

4. За системот $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 6x-3y+3z=6 \\ 8x-4y+4z=4 \end{cases}$ имаме дека $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, што значи дека системот има бескрајно многу решенија или е противречен. Уочуваме дека системот $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 6x-3y+3z=6 \\ 8x-4y+4z=4 \end{cases}$ може да се запише во вид $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3(2x-y+z)=3\cdot 2, \\ 4(2x-y+z)=4\cdot 1 \end{cases}$ кој што е еквивалентен со системот $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$. Последниот систем очигледно е противречен, што значи дека и дадениот систем е противречен. ♦

5. За системот $\begin{cases} 3x+2y-z=8 \\ x+y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=10 \end{cases}$ се добива дека $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$. За да утврдиме дали тој е противречен или има бескрајно многу решенија може да постапиме на следниов начин. Бидејќи коефициентите на системот се различни од нула, избирајќи го, на пример, бројот (-1) пред z во првата равенка, таа може да се запише во еквивалентен вид $z=3x+2y-8$, кој што може да се искористи за елиминирање на непознатата z од втората и во третата равенка на системот. Така се добива систем од две равенки со две непознати $\begin{cases} 7x+5y=17 \\ 14x+10y=34 \end{cases}$ или, еквивалентно $\begin{cases} 7x+5y=17 \\ 2(7x+10y)=2\cdot 17 \end{cases}$ кој што очигледно има бескрајно многу решенија. Како општо решение може да се земе, на пример $x=t$, $y=\frac{17-5t}{7}$, $z=\frac{11t-22}{7}$. ♦

Задачи за самостојна работа

Реши ги системите линеарни равенки:

1. $\begin{cases} 2x-3y+z=9 \\ x+2y-3z=-6 \\ 4x-5y-2z=12 \end{cases}$. **2.** $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 3x-y+4z=2 \\ 2x-3y+5z=1 \end{cases}$. **3.** $\begin{cases} 4x-y+3z=1 \\ 3x+2y-z=3 \\ x-3y+4z=-2 \end{cases}$.

4. Докажи дека системот линеарни равенки $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=0 \\ 2x+ay+z=2 \end{cases}$ за секоја вредност на параметарот а има единствено решение. Најди го тоа решение.

5*. За кои вредности на параметарот a системот равенки $\begin{cases} 2x+ay-z=8 \\ ax+2y+z=20 \\ x+y-2z=-5 \end{cases}$

а) има бескрајно многу решенија; б) е противречен; в) има единствено решение.

2. 8. Хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати

Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

во кој слободните членови во сите равенки се еднакви на нула, се вика **хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати**.

Очигледно е дека секој хомоген линеарен систем (1) секогаш има таканаречено **нулто** или **тривијално решение** $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$ Затоа од интерес е да утврдиме во кои случаи хомогениот систем линеарни равенки (1) има и ненулти решенија. Точна е следнава:

> **Теорема 1.** Хомогениот систем (1) од три линеарни равенки со три непознати има ненулти решенија, ако и само ако детерминантата на системот (1) е еднаква на нула, односно $\Delta = 0.$

1. Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

нема ненулто решение бидејќи $\Delta = 2 \neq 0.$ ♦

2. Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

има бескрајно многу решенија бидејќи неговата детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

За да ги најдеме ненултите решенија постапуваме на следниов начин: Од втората равенка на системот се добива $z = -2x - y$ и со замена на z со изразот $-2x - y$ првата и третата равенка се сведуваат на равенките $2x + y = 0$ и $-2x - y = 0.$ Оттука за произволно избран реален број t тројката

$$x = t,\ \ y = -2t,\ \ z = 0$$

претставува решение на системот. ♦

Задачи за самостојна работа

Најди ги сите решенија на системот хомогени линеарни равенки:

1. $\begin{cases} 3x+7y+3z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$. **2.** $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+7y-z=0 \\ 3x-5y+3z=0 \end{cases}$.

3. За кои вредности на параметарот а, системот хомогени линеарни равенки $\begin{cases} x+3+az=0 \\ 4x+5y-z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases}$ ќе има ненулти решенија.

4. Докажи дека за произволни вредности на a, b и c, системот $\begin{cases} ay+bz=0 \\ -ax+cz=0 \\ -bx-cy=0 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија.

5*. За која вредност на параметарот a, системот $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$ има барем две решенија?

2. 9. Систем од линеарна равенка и квадратна равенка со две непознати

2.9.1. Квадратна равенка со две непознати

Равенката од видот

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

каде што барем еден од коефициентите a, b и c е различен од нула и коефициентите a, b, d или b, c, e истовремено не се еднакви на нула, се вика равенка од втор степен или **квадратна равенка со две непознати**.

1. Равенките $2x^2+3xy-4y^2+x-y+2=0$, $-x^2+9y^2+x-y=3$, $x^2+3xy+3y+1=0$, $y^2+2xy-x-y+4=0$ и $x^2+xy-y^2=0$ се примери на квадратна равенка со две непознати. ♦

Ако во равенката (1) $d = e = f = 0$, тогаш таа ги содржи само квадратните членови

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \qquad (2)$$

и се вика **хомогена квадратна равенка со две непознати**.

2. Равенките $2x^2 + 3xy - 4y^2 = 0$, $x^2 - 9y^2 = 5$, $x^2 + 4xy = 0$, $y^2 + 2xy = 0$ и $x^2 + xy - y^2 = 0$ се примери на хомогена квадратна равенка со две непознати. ♦

Да се реши квадратната равенка со две непознати (1) значи да се најде множеството подредени парови (x_0, y_0) за кој што равенката преминува во идентитет кога x ќе се замени со x_0, а y со y_0, односно важи

$$a{x_0}^2 + bx_0y_0 + c{y_0}^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

3. Квадратната равенка $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$ има бесконечно многу решенија. Поточно сите подредени парови од облик $(4t, t)$ и $(t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, се решенија на равенката. Понатаму, квадратната равенка $x^2 + y^2 = 0$ има само тривијално решение (0,0), додека квадратната равенката $x^2 + 4y^2 = -3$ нема решение. ♦

Како што можевме да заклучиме од претходниот пример, квадратна равенка со две непознати може да има бесконечно многу решенија, да има конечно многу решенија или да нема решение.

2.9.2. Систем од линеарна равенка и квадратна равенка со две непознати

Систем од две равенки од кои едната е линеарна равенка со две непознати, а другата е квадратна равенка со две непознати се вика **систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати.** Од соодветните теореми за еквивалентни системи равенки секој систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати е еквивалентен на систем од видот

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

наречен **општ облик на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати** со коефициенти m, n, p, a, b, c, d, e и f.

1. Системите равенки $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 - 3x + 4y + 9 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x^2 + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$ се примери на системи од линеарна равенка и квадратна равенка со две непознати. ♦

Да се реши системи од линеарна равенка и квадратна равенка со две непознати значи да се најде множеството подредени парови (x_0, y_0) за кој што равенката преминува во идентитет кога x ќе се замени со x_0, а y со y_0, односно важи

$$a{x_0}^2 + bx_0y_0 + c{y_0}^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

Ако системот (1) има барем едно решение, велиме дека тој е **решлив**, а ако тој нема ниту едно решение, тогаш за него велиме дека е **противречен**.

За наоѓање на решението на системот (1) доволно е од линеарната равенка да ја изразиме едната променлива преку другата, а потоа да замениме во квадратната равенка.

2. Реши го системот равенки $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x^2 - y^2 + 6x + 10 = 0 \end{cases}$.

Од првата равенка имаме $y = 1 - 2x$. Со замена во втората равенка добиваме $5x^2 - (1-2x)^2 + 6x + 10 = 0$, односно $x^2 + 10x + 9 = 0$. Корените на добиената квадратна равенка се $x_1 = -1$ и $x_2 = -9$. Оттука добиваме дека $y_1 = 3$ и $y_2 = 19$. Според тоа решенија на дадениот систем се подредените парови $(-1,3)$ и $(-9,19)$. ♦

3. Реши го системот равенки $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - y^2 = 11 \end{cases}$.

Од првата равенка имаме $y = 1 - x$. Со замена во втората равенка добиваме $x^2 - (1-x)^2 = 11$, односно $2x - 1 = 11$. Корен на добиената квадратна равенка $x = 6$. Оттука добиваме дека $y = -5$. Според тоа решенија на дадениот систем е подредениот пар $(6,-5)$. ♦

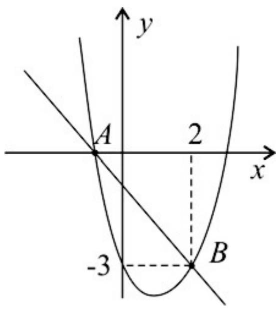
Да забележиме дека покрај аналитичкиот начин за решавање на систем од линеарна равенка и квадратна равенка со две непознати, понекогаш е згодно тој да се реши и на графички начин. Ќе дадеме и графички начин за решавање на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати, ограничувајќи се на случајот кога системот е од облик

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}.$$

Да се реши дадениот систем графички, значи да се најдат заедничките точки на графиците на линеарната функција $y = mx + n$ и квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$, претставени во ист координатен систем. Како што знаеме, графикот на линеарната функција $y = mx + n$ е права, додека графикот на квадратната фунција $y = ax^2 + bx + c$ е парабола. Ако правата и параболата имаат заеднички точки, тогаш координатите на тие точки се реалните решенија на дадениот систем. Во спротивно може да заклучиме дека системот нема реални решенија. Во општ случај права и парабола имаат две, една или ниту една заедничка точка.

4. Графички реши го системот: $\begin{cases} y=-x-1 \\ y=x^2-2x-3 \end{cases}$.

Ги конструираме графиците на правата $y=-x-1$ и параболата $y=x^2-2x-3$ во ист координатен систем (црт. 4). Пресечни точки на правата со параболата се точките $A(-1,0)$ и $B(2,-3)$ од каде што заклучуваме дека системот има две реални решенија $(-1,0)$ и $(2,-3)$. ♦



Црт. 4

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следниве равенки се квадратни равенки со две непознати:

а) $2x^2+3xy-4y^2=0$, б) $x^2-9x=5$, в) $x^2+4xy=0$.

Најди ги сите решенија на системот равенки:

2. а) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 4x^2+5y^2-7xy=2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 5x+4y-3=0 \\ 6x^2+3y^2+10xy+2=0 \end{cases}$.

3. а) $\begin{cases} 5x-y-3=0 \\ x^2+3x-y-2=0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x+y+8=0 \\ x^2+y^2+6xy+2y=0 \end{cases}$.

4. а) $\begin{cases} 4y=2x-5 \\ (x-1)^2=y \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2y-3(x+1)=0 \\ 2(x+1)(x-2)=y+x+1 \end{cases}$.

5*. Графички најди го множеството решенија на следниве системи равенки:

а) $\begin{cases} y=2x-7 \\ 7y=x^2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x^2+2x=3(y-3) \end{cases}$, в) $\begin{cases} y=x-7 \\ x^2-y=3x \end{cases}$.

2. 10. Системи од две квадратни равенки со две непознати

Системот од облик

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

се вика **систем од две квадратни равенки со две непознати**.

Да се реши систем од две квадратни равенки со две непознати значи да се најде множеството подредени парови (x_0, y_0) за кои што двете равенки на системот преминуваат во идентитет кога x ќе се замени со x_0, а y со y_0, односно важи

$$\begin{cases} a_1x_0{}^2 + b_1x_0y_0 + c_1y_0{}^2 + d_1x_0 + e_1y_0 + f_1 = 0 \\ a_2x_0{}^2 + b_2x_0y_0 + c_2y_0{}^2 + d_2x_0 + e_2y_0 + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Ако системот (1) има барем едно решение, тој е **решлив**, а ако тој нема ниту едно решение, тогаш за него велиме дека е **противречен**.

За наоѓање на решението на системот (1) во општ случај се соочуваме со сериозни проблеми. Само во неколку специјални случаи постојат методи за решавање на такви системи. Во продолжение ќе се задржиме на два специјални случаи на систем од две квадратни равенки со две непознати за кои во извесна смисла постои општ метод за наоѓање на решението.

2.10.1. Хомогени системи

Системот од облик

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

се вика **хомоген систем од две квадратни равенки со две непознати**. Поточно, хомоген систем од две квадратни равенки со две непознати е систем од две квадратни равенки со две непознати во кој една од квадратните равенки е хомогена.

Постапката за решавање на системот (2) се состои од следниве чекори:

- Проверуваме дали $x = 0$, $y = 0$ е решение на системот.
- При $x \neq 0$, $y \neq 0$ го делиме првото равенство со x^2 (или со y^2), а потоа воведуваме смена

$$z = \frac{y}{x} \text{ (или } z = \frac{x}{y}\text{)}.$$

Тогаш, ако z_1 и z_2 се корени на квадратната равенка

$$cz^2 + bz + a = 0 \text{ (или } az^2 + bz + c = 0\text{)},$$

тогаш множеството решенија на хомогениот систем (2) е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{x}{y} \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z_2 = \dfrac{x}{y} \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}.$$

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}.$$

Во првиот чекор проверуваме дали $x = 0$, $y = 0$ е решение на системот. Очигледно е дека за $x = 0$ од првата равенка добиваме дека $y = 0$, но $x = 0$, $y = 0$ не е решение на втората равенка од дадениот систем. Значи $x = 0$, $y = 0$ не е решение на дадениот систем

При $x \neq 0$, $y \neq 0$ ја делиме првата равенка со x^2 а потоа воведуваме смена $z = \dfrac{y}{x}$. Добиваме квадратната равенка $-2z^2 - z + 1 = 0$ чии корени се $z_1 = -1$ и $z_2 = \dfrac{1}{2}$. Тогаш множеството решенија на дадениот хомоген систем е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = -1 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}$$

Оттука добиваме дека решенија на дадениот систем се подредените парови $(1,-1)$ и $(3,-3)$. ♦

2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ 2x^2 + 25xy - 8y^2 = 5 \end{cases}.$$

Дадениот систем не е хомоген систем од две квадратни равенки со две непознати, но можеме да го сведеме на хомоген ако првата равенка ја помножиме со 5, втората со -1 и потоа ги собереме. Новиот систем кој што е хомоген и еквивалентен на дадениот е

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Проверуваме дали $x = 0$, $y = 0$ е решение на системот. Очигледно е дека $x = 0$, $y = 0$ не е решение на дадениот систем.

При $x \neq 0$, $y \neq 0$ го делиме втората равенка со y^2 а потоа воведуваме смена $z = \frac{x}{y}$. Добиваме квадратната равенка $3z^2 - 10z + 3 = 0$ чии корени се $z_1 = 3$ и $z_2 = \frac{1}{3}$. Тогаш множеството решенија на дадениот хомоген систем е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Оттука добиваме дека решенија на дадениот систем се подредените парови $(1,3)$, $(-1,-3)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ и $\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$. ♦

2.10.2. Симетрични системи

Друг вид на системи од две квадратни равенки со две непознати за кои што постои метод за наоѓање на решенијата се симетричните системи.

Системот од облик

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + a_1y^2 + d_1x + d_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + a_2y^2 + d_2x + d_2y + f_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

се вика **симетричен систем од две квадратни равенки со две непознати**.

За да го решиме системот (3) воведуваме смена

$x + y = u$ и $xy = v$.

На тој начин добиваме систем по непознатите u и v. Ако (u_0, v_0) е решение на новиот систем тогаш на него соодветствува следниот систем по непознатите x и y:

$$\begin{cases} x + y = u_0 \\ xy = v_0 \end{cases}.$$

Според Виетовите формули добиваме дека решенијата на последниот систем се токму решенијата на квадратната равенка

$z^2 - u_0z + v_0 = 0$.

Според тоа, ако z_1 и z_2 се корени на квадратната равенка тогаш решение на системот (3) се паровите

$x = z_1$, $y = z_2$ и $x = z_2$, $y = z_1$.

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+2xy+y=1 \end{cases}.$$

За да го решиме дадениот симетричен систем од две квадратни равенки со две непознати ја воведуваме смената $x+y=u$ и $xy=v$. Тогаш имаме

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v \text{ и } x+2xy+y=u+2v,$$

па за новите непознати u и v го добиваме системот

$$\begin{cases} u^2-2v=5 \\ u+2v=1 \end{cases}.$$

Ако ги собереме двете страни на последниот систем ја добиваме квадратна равенка $u^2+u-6=0,$ чии што решенија се $u_1=2$ и $u_2=-3.$ Оттука наоѓаме дека решенија на последниот систем се

$$u_1=2\,,\ v_1=-\frac{1}{2} \text{ и } u_2=-3\,,\ v_2=2\,.$$

Според тоа, множеството од решенија на дадениот систем е унија од множествата од решенија на системите

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}.$$

Нивните решенија се совпаѓаат со решенијата на квадратните равенки

$$z^2-2z-\frac{1}{2}=0, \text{ и } z^2+3z+2=0.$$

Конечно, добиваме дека решенија на симетричниот систем се подредените парови

$$\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}},1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\ \left(1-\sqrt{\frac{3}{2}},1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\ (-1,-2),\ (-2,-1).\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Кои од дадените системи од квадратни равенки се хомогени:

а) $\begin{cases} 2x^2-y^2=10 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases};$ б) $\begin{cases} 4x^2+2xy+6y^2+x=0 \\ 2x^2-9xy+y^2=29 \end{cases}.$

2. Реши ги хомогените системи од квадратни равенки:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 20 \end{cases}$.

3. Доведи ги до хомоген облик, а потоа реши ги следниве системи од квадратни равенки:

а) $\begin{cases} 6x^2 - 7xy + 3y^2 = 4 \\ 5x^2 + 6xy - 7y^2 = -11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$.

4. Кои од дадените системи од квадратни равенки се симетрични:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 6x + 6y - 9 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 6y^2 = 4 \\ x^2 - 9xy + y^2 = 29 \end{cases}$.

5*. Најди ги решенија на симетричните системи од квадратни равенки:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ x + xy + y - 7 = 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$.

2. 11. Системи од равенки со апсолутни вредности

За системите од равенки со апсолутни вредности не постои точно утврдена постапка за наоѓање на множеството од решенија. Но сепак можеме да издвоиме општи начела по кои ќе ја развиваме постапката за нивно решавање. Тие општи начела воглавно се базираат на дефиницијата и својствата на апсолутната вредност од даден број или израз. Во таа смисла за било кој израз A, со една или две променливи (или реален број), важи

$$|A| = \begin{cases} A, & A \geq 0 \\ -A, & A < 0 \end{cases}.$$

Во продолжение ќе дадеме неколку примери:

1. Реши го системот равенки $\begin{cases} |x| + y = 2 \\ 2x + 3|y| = 5 \end{cases}$.

Решение на дадениот систем, според дефиницијата за апсолутна вредност е унијата од решенијата на системите

(1) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$, за $x \geq 0$ и $y \geq 0$, (2) $\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$, за $x<0$ и $y \geq 0$.

(3) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$, за $x \geq 0$ и $y<0$, (4) $\begin{cases} -x+y=2 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$, за $x<0$ и $y<0$.

Ги бараме решенијата на системите (1) - (4) со назначените ограничувања. Решение на системот (1) е подредениот пар $(1,1)$, решение на системот (2) е подредениот пар $\left(-\frac{1}{5},\frac{9}{5}\right)$, решение на системот (3) е подредениот пар $\left(\frac{11}{5},-\frac{1}{5}\right)$, решение на системот (4) е подредениот пар $(-11,-9)$. Според тоа решенија на дадениот систем се подредените парови $(1,1)$, $\left(-\frac{1}{5},\frac{9}{5}\right)$, $\left(\frac{11}{5},-\frac{1}{5}\right)$ и $(-11,-9)$.♦

2. Реши го системот равенки $\begin{cases} |x|-|y|=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Решение на дадениот систем, според дефиницијата за апсолутна вредност е унијата од решенијата на системите

(1) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, за $x \geq 0$ и $y \geq 0$, (2) $\begin{cases} -x-y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, за $x<0$ и $y \geq 0$.

(3) $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, за $x \geq 0$ и $y<0$, (4) $\begin{cases} -x+y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, за $x<0$ и $y<0$.

Ги бараме решенијата на системите (1) - (4) со назначените ограничувања. Решение на системот (1) е подредениот пар $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Да напоменеме дека подредениот пар $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не е решение на системот (1) бидејќи не ги исполнува ограничувањата $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Решение на системот (2) е подредениот пар $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. И во овој случај подредениот пар $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не е решение на системот (1) бидејќи не ги исполнува ограничувањата $x<0$ и $y \geq 0$. Решение на системот (3) е подредениот пар $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Подредениот пар $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не е решение на системот (3) бидејќи не ги исполнува ограничувањата $x \geq 0$ и $y < 0$. Решение на системот (4) е подредениот пар $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Подредениот пар $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не е решение на системот (4) бидејќи не ги исполнува ограничувањата $x < 0$ и $y < 0$. Според тоа, решенија на дадениот систем се подредените парови $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ♦

3. Реши го системот равенки $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ |xy| = 5 \end{cases}$.

Решение на дадениот систем, според дефиницијата за апсолутна вредност е унијата од решенијата на системите

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$, за $x \geq 0$, $y \geq 0$ или $x < 0$, $y < 0$,

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ -xy = 5 \end{cases}$, за $x \geq 0$, $y < 0$ или $x < 0$, $y \geq 0$.

Ги бараме решенијата на системите (1) и (2) со назначените ограничувања. Да забележиме дека системите (1) и (2) се симетрични системи од квадратни равенки со две непознати. Решение на системот (1) се подредените парови $(1,5)$, $(5,1)$, $(-1,-5)$ и $(-5,-1)$. Решенија на системот (2) се подредените парови $(-1,5)$, $(-5,1)$, $(1,-5)$, $(5,-1)$. Според тоа, решенија на дадениот систем се подредените парови $(1,5)$, $(5,1)$, $(-1,-5)$, $(-5,-1)$ $(-1,5)$, $(-5,1)$, $(1,-5)$, $(5,-1)$. ♦

Задачи за самостојна работа

Според дефиницијата за апсолутна вредност, најди ги системите чија што унија од решенија е решение на дадениот систем.

1. $\begin{cases} x-|y|=9 \\ 3|x|+9y=2 \end{cases}$. **2.** $\begin{cases} |x+y|=7 \\ x^2+3y^2=9 \end{cases}$. **3.** $\begin{cases} 2x^2-y^2+|x|+y=12 \\ x^2+5xy+3y^2=0 \end{cases}$.

Реши ги следниве системи равенки со апсолутни вредности:

4. $\begin{cases} |x|=|y| \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$. **5.** $\begin{cases} 3x^2-4|xy|+y^2=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$. **6.** $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ |xy|=-2 \end{cases}$.

2. 12. Систем квадратни неравенки со една непозната

Множеството од конечно многу квадратни неравенки со една иста непозната се вика **систем квадратни неравенки со една непозната**.

1. Системот

$$\begin{cases} 3x^2-5x+2_1<0 \\ 4x^2+16x-7\geq 0 \end{cases}$$

е пример на систем од две квадратни неравенки со една непозната, додека системот

$$\begin{cases} 3x^2-5x+2>0 \\ 4x^2+16x-7\geq 0 \\ x^2-10x-2<0 \end{cases}$$

е пример на систем од три квадратни неравенки со една непозната. ♦

Решение на систем квадратни неравенки со една непозната е секоја вредност на непознатата $x=x_0$, која е решение на секоја од неравенките во системот. Множеството решенија на даден систем квадратни неравенки со една непозната се состои од заедничките решенија на секоја од неравенките во системот, односно од пресекот на множествата решенија на неравенките во системот. Да се реши даден систем квадратни неравенки со една непозната значи да се определи множеството решенија.

Два системи квадратни неравенки со една непозната се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија. Ако една од неравенките во системот ја замениме со неравенка еквивалентна на неа добиваме, систем еквивалентен на дадениот.

1. Системот неравенки $\begin{cases} x^2-4x>9 \\ x^2>7x+5 \end{cases}$ е еквивалентен со системот неравенки $\begin{cases} x^2-4x-9>0 \\ x^2-7x-5>0 \end{cases}$ кој е во општ облик. Едно негово решение е $x=10$, додека $x=-1$ не е негово решение. Навистина $\begin{cases} 10^2-4\cdot 10-9=51>0 \\ 10^2-7\cdot 10-5=25>0 \end{cases}$, но $\begin{cases} (-1)^2-4\cdot(-1)-9=-4<0 \\ (-1)^2-7\cdot(-1)-5=3>0 \end{cases}$. ♦

Во продолжение, низ неколку примери ќе го илустрираме методот на решавање систем квадратни неравенки со една непозната.

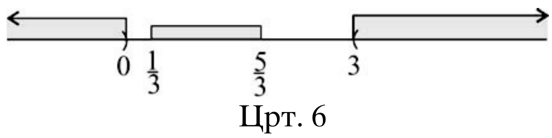
2. Реши го системот $\begin{cases} x^2-4x-5>0 \\ x^2-7x+6\le 0. \end{cases}$

Најнапред ја решаваме оделно секоја неравенка од системот. Кај првата неравенка, бидејќи $D=16+20>0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, триномот x^2-4x-5 има две реални различни нули $x_1=-1$ и $x_2=5$ и добива позитивни вредности во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(5,+\infty)$. Значи, нејзиното множество решенија е $R_1=(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

Кај втората неравенка бидејќи $D=49-24>0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, па триномот x^2-7x+6 има две реални различни нули $x_1=1$ и $x_2=6$ и добива негативни вредности или вредност нула во интервалот $[1,6]$. Значи, множеството решенија на втората неравенка е $R_2=[1,6]$.

Останува да го определиме пресекот на множествата од решенија R_1 и R_2 на двете неравенки во системот. За таа цел множествата R_1 и R_2 графички ги претставуваме на иста бројна оска, односно деловите кои одговараат на нив ги прецртуваме. Потоа заклучуваме дека двојно прецртан дел од бројната оска е само интервалот $R=R_1\cap R_2=(5,6]$ (црт. 5). ♦

Црт. 5



Црт. 6

3. Реши го системот $\begin{cases} 9x^2-18x+5<0 \\ x^2-3x>0. \end{cases}$

Кај првата неравенка, бидејќи $D = 324 - 180 > 0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, триномот $9x^2 - 18 + 5$ има две реални различни нули $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{5}{3}$ и добива негативни вредности во интервалот $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Значи, нејзиното множество решенија е $R_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Кај втората неравенка бидејќи $D = 9 > 0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, па триномот $x^2 - 3x$ има две реални различни нули $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ и добива позитивни вредности во интервалите $(-\infty,0)$ и $(3,+\infty)$. Значи, множеството решенија на втората неравенка е $R_2 = (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$.

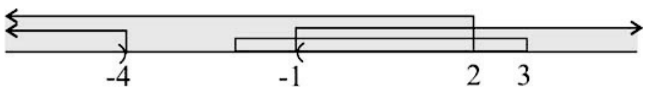
Останува да го определиме пресекот на множествата од решенија R_1 и R_2 на двете неравенки во системот. За таа цел множествата R_1 и R_2 графички ги претставуваме на иста бројна оска, односно деловите кои одговараат на нив ги прецртуваме. Потоа заклучуваме дека не постои двојно прецртан дел од бројната оска. Значи множеството решенија на дадениот систем е $R = R_1 \cap R_2 = \varnothing$ (црт. 6). ♦

4. Реши го системот $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 + 5x + 4 > 0 \\ x - 2 > 0. \end{cases}$

Кај првата неравенка, бидејќи $D = 1 + 24 > 0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, триномот $x^2 - 4x - 5$ има две реални различни нули $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ и добива позитивни вредности во интервалите $(-2,3)$. Значи, нејзиното множество решенија е $R_1 = (-2,3)$.

Кај втората неравенка бидејќи $D = 25 - 16 > 0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, па триномот $x^2 - 7x + 6$ има две реални различни нули $x_1 = -4$ и $x_2 = -1$ и добива позитивни вредности во интервалите $(-\infty,-4)$ и $(-1,\infty)$. Значи, множеството решенија на втората неравенка е $R_2 = (-\infty,-4) \cup (-1,\infty)$.

Третата равенка на системот е линеарна. Таа има множество решенија $R_3 = (-\infty,-2)$.



Црт.7

Останува да го определиме пресекот на множествата од решенија R_1, R_2 и R_3 на двете неравенки во системот. За таа цел множествата R_1, R_2 и R_3 графички ги претставуваме на иста бројна оска, односно деловите кои одговараат на нив ги прецртуваме. Потоа заклучуваме дека тројно прецртан дел од бројната оска е само интервалот $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = (-1,2)$ (црт. 7). ♦

Задачи за самостојна работа

1. Дали системите $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 + 2x < 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 + 4x + 7 > 0 \\ x^2 + 3x + 2 < 0 \end{cases}$ се еквивалентни?

2. Реши ги системите:

а) $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 > 0 \\ -x^2 + 1 < 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ 6x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 + 2x + 5 < 0 \\ x^2 - 99x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$.

3. Најди го множеството решенија на системите:

а) $\begin{cases} x^2 + 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 + 10x + 16 < 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + 5x + \frac{25}{4} > 0 \\ 6x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$.

Реши ги системите:

4.* $\begin{cases} x^2 + 7 < 8x \\ (x-2)(x+3) < 0 \end{cases}$. **5*.** $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - 2x < \frac{x^2+4x}{2} - 1 \\ (x-6)(x-7) \leq 2(x+14) \end{cases}$.

2. 13. Дробно рационални неравенки со една непозната

Дробно рационална неравенка со една непозната се нарекува неравенката од видот

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \left(\frac{P(x)}{Q(x)} < 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\right) \qquad (1)$$

во која $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми по x.

Дробно рационалните неравенки се решаваат најдобро со методот на интервали кој што се состои од следниве чекори:

• Ги наоѓаме корените на равенките $P(x)=0$ и $Q(x)=0,$ а потоа ги разложуваме $P(x)$ и $Q(x)$ на множители и ги извршуваме можните скратувања. Тие корени не се решенија на неравенката.

• Нека $x_1 < x_2 < ... < x_k$ се корени на множителите од непарен степен. Со помош на овие броеви ја разделуваме бројната права на $k+1$ интервали.

• Го наоѓаме знакот на количникот од коефициентите пред највисоките степени во броителот и именителот и го запишуваме во најдесниот интервал. Да забележиме дека знакот на најдесниот интервал можеме да го определиме ако ја пресметаме вредноста на изразот $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ во некоја точка од тој интервал.

• Запишуваме знаци „$+$'' и „–'' во секој интервал редоследно, одејќи од десно кон лево.

• Решение на неравенката $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ се сите интервали со знак „$+$''.

Лесно може да се направи аналогија на горните чекори за неравенките од видот $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$.

1. Реши ја дробно рационалната неравенка $\frac{x^3+x^2-x-1}{-x^4+13x^2-36}>0.$

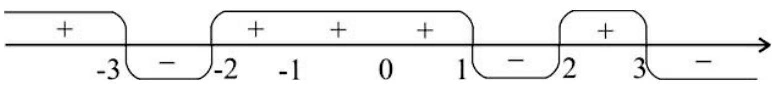
Ги разложуваме на множители полиномите во броителот и во именителот и ги наоѓаме нивните корени.

Имаме $x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)^2(x-1)$, од каде што заклучуваме дека корени на полиномот во броителот се ± 1.

Корените на биквадратната равенка $-x^4+13x^2-36=0$ се ± 2 и ± 3. Тогаш

$-x^4+13x^2-36=-(x+3)(x+2)(x-2)(x-3).$

Во вториот чекор утврдуваме дека корени на множителите со непарен степен се $-3,\ -2,\ 1,\ 2,\ 3$. Тие ја разделуваат бројната оска на 6 интервали $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ и $(3,+\infty)$ (црт. 8).



Црт. 8

Во третиот чекор наоѓаме дека коефициентот пред највисоката степен е -1. Во најдесниот интервал запишуваме знак „–''.

Во следниот чекор запишуваме знаци „+ ’’ и „–’’ во секој интервал редоследно, одејќи од десно кон лево.

Во последниот чекор, имајќи предвид дека -1 не е решение на неравенката, добиваме дека множеството решенија на неравенката е

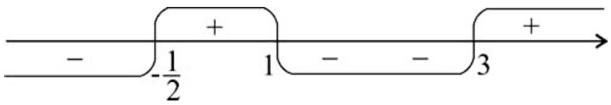
$(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$. ♦

1. Реши ја дробно рационалната неравенка $\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-3}\geq 0$.

Корени на полиномите во броителот и во именителот се 1, $-\dfrac{1}{2}$ и 3.

Во следниот чекор утврдуваме дека корени на множителите со непарен степен се 1, $-\dfrac{1}{2}$ и 3. Да забележиме дека а $x=3$ дробно рационалниот израз од левата страна на неравенката нема смисла, додека 1 и $-\dfrac{1}{2}$ се корени на дадената неравенка.

Корените на множителите со непарен степен ја разделуваат бројната оска на 4 интервали $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ $(1,3)$ и $(3,+\infty)$ (црт. 9).



Црт. 9

Во третиот чекор наоѓаме дека коефициентот пред највисоката степен е 2. Во најдесниот интервал запишуваме знак „+’’.

Во следниот чекор запишуваме знаци „+ ’’ и „–’’ во секој интервал редоследно, одејќи од десно кон лево.

Во последниот чекор, имајќи предвид дека 3 не е решение на неравенката, добиваме дека множеството решенија на неравенката е

$(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$. ♦

Се поставува прашање зошто при решавањето на дробно рационалните неравенки не се ослободуваме од именителот. Ослободување од именител значи множење на неравенството со број кој не е нула или израз кој не прима вредност нула. Еквивалентноста се запазува без разлика дали ќе ги множиме двете страни на неравенството со позитивен или негативен број.

3. Ако при решавањето, на пример, на неравенката $\frac{1}{x} > 1$ ги помножиме двете страни со изразот $x \neq 0$, за кој знаеме дека прима позитивни или негативни вредности, не можеме да напишеме кое неравенство е еквивалентно на даденото неравенство. Имено неравенството си ја запазува насоката ако $x > 0$ и ја менува насоката ако $x < 0$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои равенки се дробно рационални неравенки со една непозната?

2. Реши ги следниве неравенки:

а) $\frac{3x^2-8x}{x^2-27} \leq 0$; б) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+2x-143} > 0$; в) $\frac{x^2-x-90}{x^2-4x-5} < 0$.

Најди го множеството решенија на следниве неравенки:

3. а) $\frac{(x-4)^2}{12x^2-5x-2} > 0$; б) $\frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x-7)} \leq 0$; в) $\frac{x^2+1}{x^2+4} < 0$.

4. а) $\frac{x-3}{x+1} > -\frac{1}{x}$; б) $\frac{x-3}{x+1} \geq -\frac{1}{x}$; в) $\frac{x^2+1}{x^2+4} \geq 0$.

5*. За кои вредности на параметарот m неравенството $\frac{2mx}{x^2+4} < 3$ е идентично неравенство ?

. 1 . Примена на квадратни неравенки и систем квадратни неравенки

2.14.1. Примена на квадратна неравенка

Квадратните неравенки се применуваат во решавање проблеми од науката и од секојдневната практика. Постапката за решавање на поставениот проблем се состои во следниве неколку чекори:

1) Определување на познати и непознати величини, како и определување на множеството дозволени вредности за непознатите величини;

2) Според условите во задачата се изразува врската меѓу величините, односно се составуваат равенки и неравенки;

3) Решавање на добиените равенки и неравенки;

4) Толкување и проверување на добиените резултати во согласност со условите во задачата.

1. Должината на една страна на даден правоаголник е $15cm$. Колкава е должината на другата страна a на правоаголникот, ако се знае дека неговата плоштина не ја надминува плоштината на квадрат со страна a?

Од условот на задачата ја добивама квадратната неравенка $15a \le a^2$, чие што решение е $a \in (-\infty, 0] \cup [15, +\infty)$. Бидејќи мерниот број на должината е позитивен реален број, решение на задачата се сите реални броеви $a \in [15, +\infty)$. ♦

2. Најди два последователни природни броеви ако се знае дека збирот од нивните квадрати е помал од 25.

Да го означиме со x помалиот од двата барани броеви. Од условот на задачата ја добиваме квадратната неравенка $x^2 + (x+1)^2 < 25$ која е еквивалентна со неравенката $x^2 + x - 12 < 0$ чие што решение е интервалот $(-4,3)$. Бидејќи 1 и 2 се единствените природни броеви во добиениот интервал, бараните последователни природни броеви се 1 и 2, односно 2 и 3. ♦

3. Цената на една стока која чини 200 денари, се намалила двапати за еден ист процент. За кој процент може да се намали цената, така што при второто намалување таа да не биде помала од 180,5 денари?

Да го означиме со x процентот за кој се намалила цената на дадената стока. По првото намалување цената на дадената стока изнесува $200 - \frac{x}{100}200$, а по второто намалување $(200 - \frac{x}{100}200) - \frac{x}{100}(200 - \frac{x}{100}200)$. Од условот на задачата ја добиваме квадратната неравенка $(200 - \frac{x}{100}200) - \frac{x}{100}(200 - \frac{x}{100}200) \ge 180{,}5$, која е еквивалентна со неравенката $x^2 - 200x + 975 \ge 0$. Решение на неравенката е множеството $(-\infty, 5] \cup [195, +\infty)$, а бидејќи x е процент на намаление, решение на задачата е интервалот $(0,5]$. ♦

2.14.2. Примена на системи квадратни неравенки

Системите квадратни неравенки наоѓаат примена во решавање разни задачи во математиката, физиката и другите природни науки. Решавањето на многу проблеми од секојдневната практика се сведува на решавање системи квадратни неравенки. Ќе разгледаме неколку примери.

1. Реши ја неравенката $(x^2 + x - 12)(x^2 + x - 6) \ge 0$.

Од $(x^2+x-12)(x^2+x-6)\geq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2+x-12\geq 0 \\ x^2+x-6\geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+x-12\leq 0 \\ x^2+x-6\leq 0. \end{cases}\right)$, следува дека множество решенија на дадената неравенка е унијата на множествата на решенија на двата системи квадратни неравенки. Множеството решенија на првиот систем е $(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$, а на вториот систем $[-3,2]$. Решение на дадената неравенка е множеството $(-\infty,-4]\cup[-3,2]\cup[3,+\infty)$. ♦

2. Реши ја неравенката $\frac{x^2-9x+14}{x^2-16x+55}\leq 0$.

Бидејќи $\frac{x^2-9x+14}{x^2-16x+55}\leq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2-9x+14\geq 0 \\ x^2-16x+55<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-9x+14\leq 0 \\ x^2-16x+55>0. \end{cases}\right)$,

множеството решенија на дадената неравенка е унијата на множествата на решенија на двата системи квадратни неравенки. Множеството решенија на првиот систем е $[7,11)$, а на вториот систем $[2,5)$. Решение на дадената неравенка е множеството $[2,5)\cup[7,11)$. ♦

3. Дали постои квадрат за кој што збирот од бројните вредности на плоштината и на периметарот е поголем од 5, а помал од 21?

Да ја означиме страната на бараниот квадрат со x. Од условите на задачата го добиваме системот $\begin{cases} x^2+4x>5 \\ x^2+4x<21 \end{cases}$, кој е еквивалентен на системот $\begin{cases} x^2+4x-5>0 \\ x^2+4x-21<0 \end{cases}$. Множеството решенија на првата неравенка од системот е $R_1=(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$, додека множеството решенија на втората неравенка е $R_2=(-7,3)$. Решение на системот неравенки е $R=(1,3)$. Според тоа, квадрат со бараните својства постои. Уште повеќе, секој квадрат чија должина е поголема од 1 и помала од 3 ги исполнува условите од задачата. ♦

4. Цената на една стока која чини 300 денари, се намалила двапати за еден ист процент. За кој процент може да се намали цената, така што по второто намалување цената да не биде помала од 75 денари и поголема од 147 денари?

Да го означиме со x процентот за кој се намалила цената на дадената стока. По првото намалување цената на дадената стока изнесува $300-\frac{x}{100}300$. По второто намалување цената на стоката изнесува $(300-\frac{x}{100}300)-\frac{x}{100}(300-\frac{x}{100}300)$. Од условот на задачата го добиваме системот $\begin{cases} (300-\frac{x}{100}300)-\frac{x}{100}(300-\frac{x}{100}300)\leq 147 \\ (300-\frac{x}{100}300)-\frac{x}{100}(300-\frac{x}{100}300)\geq 75 \end{cases}$,

кој е еквивалентен на системот

$\begin{cases} x^2-200x+7500\geq 0 \\ x^2-200x+5100\leq 0 \end{cases}$, чие решение е $R=[30,50]\cup[150,170]$. Бидејќи се работи за процент на намаление, решение на задачата е интервалот $[30,50]$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја должината на страната на квадрат на којшто збирот од бројните вредности на неговата плоштина и на неговиот периметар е помал од 21.

2. Цената на еден електричен уред изнесувала 25 евра. По двократно намалување неговата цена била поголема од 18 евра. За колку проценти е намалена цената на електричниот уред првиот, односно вториот пат, ако процентот на второто намалување е двапати поголемо од процентот на првото намалување?

3. Реши ги следниве неравенки:

а) $(x^2-4)(9x^2-12x+4)\geq 0$; б) $(x^2+1)(49x^2+42x+9)>0$;

в) $(36x^2-60x+25)(81x^2+36x+4)<0$; г) $(-25x^2+30x-9)(-9x^2+12x-11)\leq 0$.

4. Најди го множеството решенија на следниве неравенки:

а) $(x-2)(x+3)(x+2)(x-3)\geq 0$; б) $(x-1)^2(x-2)(x+3)>0$;

в) $(x-4)^2(x^2-4x+3)<0$; г) $(x-1)(x-2)(x+7)(x-3)\leq 0$.

5*. Најди два последователни природни броја за кои збирот од нивните квадрати е помал од 41, а нивниот производ е поголем од 6.

4. 15. Задачи за вежбање

1. Најди ги корените на следниве симетрични равенки од трет ред:

а) $2x^3+7x^2+7x+2=0$, б) $12x^3-37x^2+37x-12=0$.

2. Реши ги следниве симетрични равенки од четврт ред:

а) $2x^4-3x^3+5x^2-3x+2=0$; б) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

3. Реши ги следниве биномни равенки:

а) $x^3 - 2 = 0$; б) $8x^3 + 1 = 0$; в) $27x^3 - 64 = 0$.

4. Реши ги следниве биномни равенки:

а) $x^4 + 16 = 0$; б) $16x^4 - 1296 = 0$; в) $11x^4 - 17 = 0$.

5. Реши ги следниве триномни равенки:

а) $8x^6 - 35x^3 + 27 = 0$; б) $512x^6 + 152x^3 - 27 = 0$.

6. Реши ги следниве триномни равенки:

а) $\dfrac{x^3 + 216}{x^3} = \dfrac{x^3 + 217}{9}$; б) $(x^2 + 5)(x^2 - 5) + \dfrac{8(x^4 + 2)}{x^4} = 0$.

7. Реши ги следниве биквадратни равенки:

а) $x^4 + 40x^2 + 144 = 0$; б) $(4x^2 + 5)(x^2 - 5) = 6x^2$.

8*. Скрати ги дропките:

а) $\dfrac{9x^4 - 40x^2 + 16}{4x^4 - 17x^2 + 4}$; б) $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 29x^2 + 100}$.

9. Пресметај ја вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a+a^2 & ab-ac \end{vmatrix}$

10. Реши ги равенките по непознатата x:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

11*. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$,

каде што x, y, a, b се произволно дадени реални броеви.

12. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 3x - 5y + 22 = 0 \\ x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x - 4y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$.

13. Даден е системот равенки $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-my=n \end{cases}$. Најди вредности за m и n, за кои што системот:

а) има единствено решение; б) е противречен; в) е неопределен.

14. Реши ги системите:

а) $\begin{cases} x-6y+8z=0 \\ 3x-4y+5z=18 \\ 2x+4y-3z=26 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+4y+z=14 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+6y+2z=0 \\ 3x+4y+z=1 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$.

15. При претпоставка дека системите имаат решение и притоа сите изрази во именителите се различни од нула, со воведување соодветна смена, најди ги решенијата:

а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+z}-\dfrac{6}{y-2x}-\dfrac{1}{3z-y}=1 \\ \dfrac{6}{x+y+z}-\dfrac{4}{y-2x}+\dfrac{1}{3z-y}=3 \\ \dfrac{15}{x+y+z}+\dfrac{2}{y-2x}+\dfrac{3}{3z-y}=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{12}{x+y}-\dfrac{4}{x-2z}=0 \\ \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{y+3z}=2 \\ \dfrac{10}{y+3z}-\dfrac{6}{x-2z}=-1 \end{cases}$.

16. Најди ги сите решенија на системот хомогени линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 12x+28y+12z=0 \\ 4x+16y+8z=0 \\ 4x-4y-4z=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+6y+3z=0 \\ 6x+21y-3z=0. \\ 9x-15y+9z=0 \end{cases}$

17. Најди ги сите решенија на системот равенки:

а) $\begin{cases} 12x-4y=8 \\ 16x^2+20y^2-28xy=8 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 25x+20y-15=0 \\ 30x^2+15y^2+50xy+10=0 \end{cases}$.

1 . Графички најди го множеството решенија на следниве системи равенки:

а) $\begin{cases} y=4x-1 \\ \dfrac{1}{4}y=x^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=5x-4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y-2x=3 \\ \dfrac{y-x^2-x}{7}=x+1 \end{cases}$.

19. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

20. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6 \\ y^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 14 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases}$

21*. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} |x| = |y| \\ 3x^2 + 3y^2 = 12 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 21x^2 - 28|xy| + 7y^2 = 0 \\ 7x^2 + 7y^2 = 14 \end{cases}$.

22. Реши ги системите неравенки:

а) $\begin{cases} 5x^2 + 6x + 1 \geq 0 \\ 16x^2 + 10x + 1 < 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 7x^2 + 4x + 1 > 0 \\ (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{16x+1}{4} < 84 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{x+1}{x-3} > 0 \\ (x-1)(x-2) \geq 0 \end{cases}$.

23. Реши ги следниве неравенки:

а) $\frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1} \geq 0$; б) $\frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0$; в) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} > 0$.

24*. Реши ги следниве неравенки:

а) $\frac{x+5}{2x-4} < \frac{x+1}{x-5} < \frac{2}{x+6}$; б) $\frac{2}{x+6} > \frac{x}{x-4} > \frac{x+2}{2x-4}$.

25. Реши ги следниве неравенки:

а) $\left|\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 1}\right| < 2$; б) $\left|\frac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x + 12}\right| \leq 1$.

26. За која вредност на x дропката $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1}$ е помала од -1?

28*. Најди ја должината на страната на рамностран триаголник за кој што бројната вредност на неговата плоштина е помала од бројната вредност на неговиот периметар.

29*. Ана вложила во банка 4000 денари во времетраење од една година, со определена годишна каматна стапка. На почетокот на втората година, при истата годишна каматна стапка, Ана ја вложила истата сума пари и добиената камата од првата година. Да се определи годишната каматна стапка, ако Ана на крајот од втората година имала барем 4410 денари.

30*. Збирот на квадратите на два последователни непарни природни броеви е поголем од 74, а помал од 202. Кои се тие броеви?

3. ЕЛЕМЕНТИ НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ

3.1. Линеарни равенки

Два изрази сврзани со знакот „=” (еднакво) прават **равенство**. Значи, равенство е

=

каде што и се изрази.

Кај секое равенство разликуваме **лева** и **десна страна**. Во равенството = , изразот е на левата страна, а на десната страна на равенството.

1. Равенства се, на пример, $5 = 4 + 1$, $7 + 2 = 13 - 3$, $x = 2x - 1$, $y + x = -x + 8$.♦

Ако двата изрази во неравенството се бројни изрази тогаш равенството се вика **бројно равенство**.

2. Во претходниот пример, бројни равенства се $5 = 4 + 1$ и $7 + 2 = 13 - 3$. Притоа, равенството $5 = 4 + 1$ е **вистинито** (**точно**) равенство, а $7 + 2 = 13 - 3$ е **невистинито** (**неточно**) равенство. ♦

Ако во равенството има една или повеќе променливи тогаш равенството се нарекува **равенка**. Променливите во равенката се викаат **непознати** и, најчесто, ги означуваме со x, y, ...

3. Равенки се, на пример, $x = 2x - 1$ и $y + x = -x + 8$.♦

Множеството на допуштени вредности на променливите се нарекува **дефиниционо множество** на равенката. Со задавање на вредности на непознатите во дефиниционото множество на една равенка, таа преминува во (бројно) равенство. Ако при замената на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество на равенката, таа преминува во вистинито равенство тогаш равенката се нарекува **идентитет**.

4. Идентитети се, на пример, $3(x + 4) = 3x + 12$ и $2(x + y) = 2x + 2y$.♦

Равенка, која со замена на непознатите за сите вредности од нејзиното дефиниционо множество, преминува во невистинито равенство, се нарекува **невозможна равенка**.

5. Невозможни равенки се, на пример, $x + 3 = x + 4$ и $xy = x(1 + y) + 2 - x$.♦

Според бројот на непознатите што ги содржи една равенка таа може да биде: **равенка со една непозната**, **равенка со две непознати** итн.

6. Во претходните примери, равенки со една непозната се: $x = 2x - 1$, $3(x+4) = 3x + 12$, $x + 3 = x + 4$, а со две непознати: $y + x = -x + 8$, $xy = x(1+y) + 2 - x$ и $2(x+y) = 2x + 2y$. ♦

Според најголемиот степен на непознатите, една равенка може да биде **равенка од прв степен** или **линеарна равенка**, **равенка од втор степен** или **квадратна равенка**, **равенка од трет степен** или **кубна равенка** итн.

7. На пример, равенките $x = 2x - 1$, $y + x = -x + 8$, $3(x+4) = 3x + 12$, $2(x+y) = 2x + 2y$, $x + 3 = x + 4$ се линеарни равенки, а равенките $x^2 = 5x + 1$, $x^2 = x(x+2) - 2x$, $xy = x(1+y) + 2 - x$, $x^2 + 1 = x(x+1) - x$ се квадратни равенки. ♦

Во продолжение ќе се задржиме на линеарни равенки со една непозната, односно на линеарна равенка од облик $f(x) = \ (x)$.

Решение (**корен**) на линеарната равенката $f(x) = \ (x)$ се вика секоја вредност на непознатата $x = x_0$ од дефиниционото множество, за која равенството $f(x_0) = \ (x_0)$ е вистинито бројно равенство. Множеството од сите решенија на една равенка се нарекува **множество решенија на равенката**. Множеството решенија на една равенка е подмножество од дефиниционото множество. Уште, множеството решенија на една равенка е еднакво со дефиниционото множество, ако и само ако равенката е идентитет и множеството решенија на една равенка е еднакво со празното множество, ако и само ако равенката е невозможна.

Да се реши една равенка, значи да се најде множеството решенија на истата. За таа цел, равенката се трансформира во друга поедноставна еквивалентна равенка и така натака, сѐ додека не дојдеме до еквивалентна равенка чиешто множество решенија е очигледно. Под **еквивалентни равенки** подразбираме две равенки кои што имаат исто дефиниционо множество и исто множество на решенија.

8. Равенките $5x = 20$ и $x = 4$ се еквивалентни равенки, додека равенките $5x = 20$ и $5 = \frac{20}{x}$ не се еквивалентни бидејќи немаат исто дефиниционо множество. дефиниционото множество на $5x = 20$ е множеството на реални броеви, а на $5 = \frac{20}{x}$ множеството ненулти реални броеви. ♦

При решавањето на една равенка користиме теореми за еквивалентни равенки.

Теорема 1. Ако кон двете страни на дадена равенка додадеме еден ист израз, кој што е дефиниран во дефиниционото множество, добиваме еквивалентна равенка на дадената.

Со други зборови, еквивалентни равенки се $f(x)=\ (x)$ и $f(x)+\ (x)=\ (x)+\ (x)$, каде што $\ (x)$ е израз дефиниран во дефиниционото множество ($\ (x)$ може да биде и константа).

9. Да ја разгледаме равенката $3x+7-x=1-x$. Според теорема 1, ако $f(x)=3x+7$, $\ (x)=1$ и $\ (x)=-x$, таа е еквивалентната со равенката $3x+7=1$. Ако ги споредиме двете еквивалентни равенки, заклучуваме дека еднаквите членови изостанале, односно се поништиле.

Понатаму, на равенката $3x+7=1$, од двете страни ќе додадеме -7, односно имаме $3x+7-7=1-7$. Ако ги споредиме $3x+7=1$ и $3x=1-7$, заклучуваме дека сме пренеле член од едната страна на равенката на другата страна и притоа сме му го смениле знакот во спротивниот. Со тоа, ја добиваме еквивалентната равенка $3x=-6$.♦

На овој пример ги илустриравме двете последици што произлегуваат од погорната теорема:

- Еднаквите членови од двете страни на равенката можат да се поништат.
- Секој член на равенката може да се пренесе од едната на другата страна на равенката и притоа неговиот знак се менува во спротивен.

Теорема 2. Ако двете страни на дадена равенка ги помножиме со еден ист израз, кој што е дефиниран во дефиниционото множество и има ненулти вредности, добиваме еквивалентна равенка на дадената.

Со други зборови, еквивалентни равенки се $f(x)=\ (x)$ и $f(x)\ (x)=\ (x)\ (x)$, каде што $\ (x)$ е израз дефиниран во дефиниционото множество и за секој x од дефиниционото множество $\ (x)\neq 0$ ($\ (x)$ може да биде и константа).

Според теорема 2, ако ги помножиме двете страни на равенката $3x=-6$ со $\frac{1}{3}$, ја добиваме еквивалентната равенка $x=-2$.

Според досега кажаното, можеме да заклучиме дека секоја линеарна равенка со една непозната е еквивалентна со равенка од видот

$$ax+b=0.$$

Равенката $ax+b=0$ се вика **нормален вид** на линеарна равенка со една непозната. Притоа, a се вика **коефициент пред непознатата** а b **слободен член**.

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следниве равенки се идентитети:

а) $x-3x=-2x$ б) $x+3x=4(x-2x)$ в) $x+1=\frac{3x+3}{3}$ г) $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$?

2. Од кој степен и со колку непознати е секоја од равенките:

а) $x+7=\frac{1}{2}x-2$ б) $xy-3x=y$ в) $x(x-1)^2=3x+1$ г) $x+y^2= \quad +1$?

3. Дали следниве равенки се еквивалентни:

а) $2x+8=10$ и $x+4=5$ б) $5x+3+\frac{x}{2}=x+\frac{x}{2}$ и $5x+3=x$ в) $\frac{1}{x}+1=2$ и $1+x=2x$?

4. Кои од следниве линеарни равенки со една непозната се во нормален вид:

а) $x+7=\frac{1}{2}x-2$ б) $2x+8=10$ в) $5x+3=0$ г) $x=5$?

5. Напиши ги следниве линеарни равенки со една непозната во нормален вид:

а) $x+7=9-2x$ б) $5x+7-\frac{x}{2}=2+\frac{x}{2}$ в) $\frac{3x-2}{5}=3-\frac{x}{10}$.

3.2. Решавање на линеарни равенки со една и две непознати

Да го најдеме множеството решенија на $ax+b=0$. Разгледуваме три случаи:

1. Ако $a\neq 0$ тогаш равенката е еквивалентна со равенката $x=-\frac{b}{a}$, која што има **единствено решение** $x_0=-\frac{b}{a}$.

2. Ако $a=0$ и $b\neq 0$ тогаш равенката е невозможна. Навистина, дадената равенка е еквивалентна со равенката $0\cdot x=-b$ која што е невозможна бидејќи не постои реален број кој помножен со 0 дава ненулти број.

3. Ако $a=0$ и $b=0$ равенката $0\cdot x+0=0$ е идентитет, односно равенката има **бесконечно многу решенија**.

1. Реши ја равенката $6-3x=x-2$.

Ги групираме членовите што ја содржат непознатата на левата страна, а другите на десната страна. Со тоа ја добиваме еквивалентната равенка $-3x-x=-2-6$, односно $-4x=-8$. Со множење на двете страни со $-\frac{1}{4}$ добиваме $x=2$. Значи, дадената равенка има единствено решение $x=2$.♦

2. Реши ја равенката $\frac{2x-1}{3}=2-\frac{x}{6}$.

Ги множиме двете страни на равенката со 6, за да се ослободиме од именителите во неа. Ја добиваме еквивалентната равенка $2(2x-1)=12-x$. Се ослободуваме од заградата и ги групираме членовите што ја содржат непознатата на левата страна, а другите на десната страна. На тој начин доаѓаме до $4x+x=12+2$, односно $5x=14$. Со множење на двете страни со $\frac{1}{5}$ го добиваме единственото решение на равенката $x=\frac{14}{5}$. ♦

3. Реши ја равенката $\frac{x-2}{3}-1=\frac{x}{2}-\frac{x}{6}$.

Дадената равенка е еквивалентна со равенката $2x-4-6=3x-x$, односно со равенката $-10=0$ која што е невозможна. Значи, дадената равенка е невозможна. ♦

Во продолжение ќе се задржиме на линеарни равенки со две непознати, односно на линеарна равенка од видот $f(x_1,x_2)= \quad (x_1,x_2)$.

Решение на равенката $f(x_1,x_2)= \quad (x_1,x_2)$ е секој пар од дефиниционото множество, за која равенството $f(\alpha,\beta)= \quad (\alpha,\beta)$ е вистинито бројно равенство. Множеството од сите решенија на равенката се нарекува **множество решенија на равенката**.

Секоја линеарна равенка со две непознати е еквивалентна со равенка од вид

$a_1x_1+a_2x_2=b$.

Да го најдеме множеството решенија на $a_1x_1+a_2x_2=b$. Разгледуваме три случаи:

1. Ако $a_1=a_2=0$ и $b=0$ тогаш равенката има бесконечно многу решенија.

2. Ако $a_1=a_2=0$ и $b\neq 0$ тогаш равенката е невозможна.

3. Ако барем еден од коефициентите a_1 и a_2 е различен од нула, на пример нека $a_2\neq 0$, дадената равенка е еквивалентна со равенката $x_2=\frac{b-a_1x_1}{a_2}$. Значи, ако α е произволна вредност на непознатата x_1, тогаш решение на равенката е парот $\left(\alpha,\frac{b-a_1\alpha}{a_2}\right)$. Значи, равенката има бесконечно многу решенија.

4. Реши ја равенката $2x_1-x_2=6$.

Дадената равенка е еквивалентна со равенката $x_2=2x_1-6$. Парот $(\alpha,2\alpha-6)$ каде што α е произволен број е решение на дадената равенка, односно множеството $\{(\alpha,2\alpha-6)\,|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$.

Множеството решенија на равенката $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ уште се нарекува и **график** на линеарната равенка со две непознати. Графикот на линеарна равенка со две непознати е **права**.

Задачи за самостојна работа

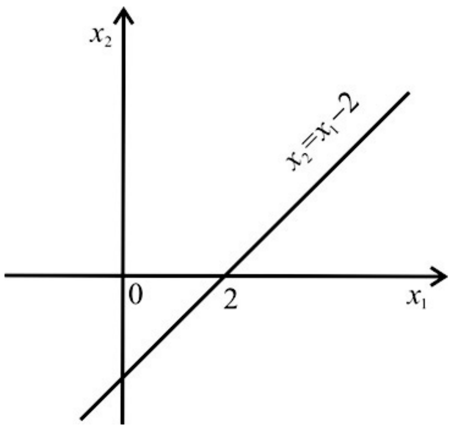
Реши ги равенките:

1. $8x - 4 = 3x + 1$. **2**. $x - \frac{x+1}{2} = 3 - 5x$. **3.** $x - \frac{1}{3} + \frac{x+1}{4} = 7 - \frac{x-1}{2}$.

4. $5 - \frac{2x + \frac{x+2}{3}}{4} = 6$. **5**. $\frac{7x-1}{3} + \frac{2 - \frac{4x-1}{3}}{5} = 1 - \frac{x-7}{5}$.

6. $x_1 - x_2 = 1$. **7**. $\frac{x_1}{3} + 2x_2 - 1 = 0$. **8**. $4x_1 = -2 + \frac{x_2}{7}$.

3.3. Графичко решавање на линеарни равенки со една и две непознати



Црт. 1

Да се реши графички линеарната равенка со една непозната $ax + b = 0$ значи да се најде пресечната точка на правата која што е график на линеарната равенка
$ax_1 + b = x_2$, односно $ax_1 - x_2 = -b$ и апцисната оска (x_1-оската).

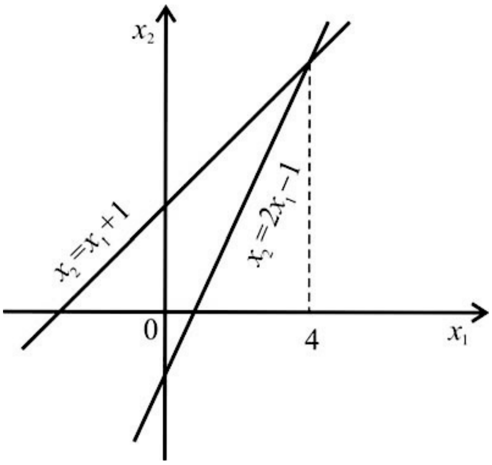
1. Графички реши ја равенката $x - 2 = 0$.

Во координатен систем ја цртаме правата $x_2 = x_1 - 2$. Пресекот на правата со x_1-оската е $x_1 = 2$ (црт. 1). ♦

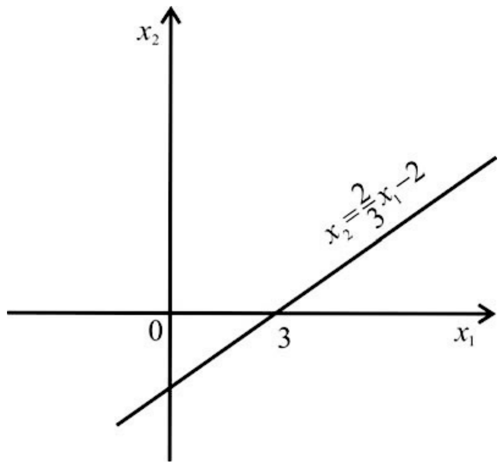
Графички да се реши линеарната равенка со една непозната од облик $f(x) = \ (x)$, значи да се најде апсцисата на пресечната точка на графиците на равенките $f(x_1) = x_2$ и $(x_1) = x_2$. Ова ќе го илустрираме со пример.

2. Графички реши ја равенката $2x - 1 = x + 3$.

Од пресечната точка на графиците $x_2 = 2x_1 - 1$ и $x_2 = x_1 + 3$ повлекуваме нормала на x_1-оската со цел да ја најдеме апсцисата на пресечната точка. Со тоа добиваме дека $x_1 = 4$, што е решение на равенката (црт. 2)



Црт. 2



Црт. 3

Нека е дадена линеарната равенка со две непознати $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ и нека $a_2 \neq 0$. Графички да се реши оваа равенка со две непознати значи да се нацрта графикот на оваа равенка.

3. Графички реши ја равенката $2x_1 - 3x_2 = 6$.

На црт. 3 е претставено графичкото решение на равенката. ♦

Задачи за самостојна работа

Графички реши ги следниве равенки:

1. $x - 1 = -x + 5$.

2. $2x + 7 = -2x - 1$.

3. $-x - 1 = -x + 5$.

4. $\frac{7 - x}{3} = 1 - x$.

5. $x_1 + x_2 = -1$.

6. $2x_1 + x_2 = 7$.

7. $x_1 = 0$.

8. $x_2 = 4$.

3.4. Неравенство и неравенка

Два изрази сврзани со знак за неравенство прават **неравенство**. Значи, неравенства се

$<$ или $\leq$ или $>$ или $\geq$

каде што и се изрази.

1. Примери за неравенства се: $3<7$, $5\geq 4+1$, $x<2x-1$, $y+x\leq -x+8$. ♦

Ако двата изрази во неравенството се бројни изрази тогаш неравенството се вика **бројно неравенство**. Во претходниот пример, бројни неравенства се $3<7$ и $5\geq 4+1$. Ако во неравенството има една или повеќе променливи тогаш неравенството се нарекува **неравенка**. Променливите во неравенката се викаат **непознати** и, најчесто, ги означуваме со x, y, ... Во горниот пример неравенки се $x<2x-1$ и $y+x\leq -x+8$. Множеството на допуштени вредности на променливите се нарекува **дефиниционо множество** на неравенката.

Со задавање на вредности на непознатите во дефиниционото множество на една неравенка, таа преминува во (бројно) неравенство. Ако при замената на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество на неравенката, таа преминува во вистинито неравенство тогаш неравенката се нарекува **идентично неравенство**.

2. Идентични неравенства се, на пример, $x+4>x+3$, $(x+y)^2+1>x^2+2xy+y^2$. ♦

Неравенка, која со замена на непознатите за сите вредности од нејзиното дефиниционо множество, преминува во невистинито неравенство, се нарекува **невозможна неравенка**.

3. Примери за невозможни неравенки се: $x^2<0$, $(x+y)^2\geq x^2+2xy+y^2+100$. ♦

Според бројот на непознатите што ги содржи една неравенка таа може да биде: **неравенка со една непозната**, **неравенка со две непознати** итн.

4. Во претходните примери, неравенки со една непозната се: $x<2x-1$, $x+4>x+3$, $x^2<0$, а со две непознати: $y+x\leq -x+8$, $(x+y)^2+1>x^2+2xy+y^2$ и $(x+y)^2\geq x^2+2xy+y^2+100$. ♦

Според најголемиот степен на непознатите, една неравенка може да биде **неравенка од прв степен** или **линеарна неравенка**, **неравенка од втор степен** или **квадратна неравенка**, **неравенка од трет степен** или **кубна неравенка** итн.

5. Неравенките $x<2x-1$, $x+4>x+3$, $y+x\leq -x+8$ се линеарни неравенки, а неравенките $x^2<0$, $(x+y)^2+1>x^2+2xy+y^2$, $(x+y)^2\geq x^2+2xy+y^2+100$ се квадратни неравенки. ♦

Во продолжение ќе се задржиме на неравенки со една непозната, специјално на неравенка од видот $f(x) < \ (x)$. Сите заклучоци за оваа неравенка ќе важат и во останатите три случаи $f(x) > \ (x)$, $f(x) \le \ (x)$ или $f(x) \ge \ (x)$.

Решение на неравенката $f(x) < \ (x)$ се вика секоја вредност на непознатата $x = x_0$ од дефиниционото множество, за која неравенството $f(x_0) < \ (x_0)$ е вистинито бројно неравенство. Множеството од сите решенија на една неравенка се нарекува **множество решенија на неравенката**. Множеството решенија на една неравенка е подмножество од дефиниционото множество. Уште, множеството решенија на една неравенка е еднакво со дефиниционото множество, ако и само ако неравенката е идентично неравенство и множеството решенија на една неравенка е еднакво со празното множество, ако и само ако неравенката е невозможна.

Да се реши една неравенка, значи да се најде множеството решенија на истата. За таа цел, неравенката се трансформира во друга поедноставна еквивалентна неравенка и така натака, сé додека не дојдеме до еквивалентна неравенка чиешто множество решенија е очигледно. Под **еквивалентни неравенки** подразбираме две неравенки кои што имаат исто дефиниционо множество и исто множество на решенија. При решавањето на една неравенка (слично како и за решавањето на равенките) користиме теореми за еквивалентни неравенки.

> **Теорема 1**. Ако кон двете страни на дадена неравенка додадеме еден ист израз, кој што е дефиниран во дефиниционото множество, добиваме еквивалентна неравенка на дадената.

Со други зборови, еквивалентни равенки се $f(x) < \ (x)$ и $f(x) + \ (x) < \ (x) + \ (x)$, каде што $\ (x)$ е израз дефиниран во дефиниционото множество ($\ (x)$ може да биде и константа).

6. Да ја разгледаме неравенката $4x + 8 - x < 4 - x$. Според претходната теорема, ако $f(x) = 4x + 8$, $\ (x) = 4$ и $\ (x) = -x$, таа е еквивалентната со неравенката $4x + 8 < 4$. Ако ги споредиме двете еквивалентни неравенки, заклучуваме дека еднаквите членови изостанале, односно се поништиле.

Натаму, на неравенката $4x + 8 < 4$, од двете страни ќе додадеме -8, односно имаме $4x + 8 - 8 < 4 - 8$. Ако ги споредиме $4x + 8 < 4$ и $4x + 8 - 8 < 4 - 8$, заклучуваме дека сме пренеле член од едната страна на неравенката на другата страна и притоа сме му го смениле знакот во спротивниот ($+8$ сме го пренеле од другата страна и сме добиле -8). Со тоа, ја добиваме еквивалентната неравенка $4x < -4$. ♦

На овој пример ги илустриравме двете последици што произлегуваат од теоремата:

- Еднаквите членови од двете страни на неравенката можат да се поништат.
- Секој член на неравенката може да се пренесе од едната на другата страна на неравенката и притоа неговиот знак се менува во спротивен.

> **Теорема 2**. Ако двете страни на дадена неравенка ги помножиме со еден ист израз, кој што е дефиниран во дефиниционото множество и добива само позитивни вредности, добиваме еквивалентна неравенка на дадената.

Со други зборови, еквивалентни равенки се $f(x) < \ (x)$ и $f(x)\ (x) < \ (x)\ (x)$, каде што $\ (x)$ е израз дефиниран во дефиниционото множество и за секој x од дефиниционото множество $\ (x) > 0$ ($\ (x)$ може да биде и константа).

7. Според теорема 2, ако ги помножиме двете страни на неравенката $4x < -4$ со $\frac{1}{4}$, ја добиваме еквивалентната неравенка $x < -1$. ♦

> **Теорема 3**. Ако двете страни на дадена неравенка ги помножиме со еден ист израз, кој што е дефиниран во дефиниционото множество и добива само негативни вредности и ако ја промениме насоката на неравенката (< во >) добиваме еквивалентна неравенка на дадената.

Со други зборови, еквивалентни равенки се $f(x) < \ (x)$ и $f(x)\ (x) > \ (x)\ (x)$, каде што $\ (x)$ е израз дефиниран во дефиниционото множество и за секој x од дефиниционото множество $\ (x) < 0$ ($\ (x)$ може да биде и константа).

8. Ако двете страни на неравенката $-5x < 10$ ги помножиме со $-\frac{1}{5}$, добиваме еквивалентната неравенка на неа $x > -2$.♦

Според досега кажаното, можеме да заклучиме дека секоја линеарна неравенка со една непозната е еквивалентна или со неравенка од видот

$$ax + b < 0$$

или со

$$ax + b \leq 0.$$

Неравенката $ax + b < 0$ (односно $ax + b \leq 0$) се вика **нормален вид** на линеарна неравенка со една непозната. Притоа, a се вика **коефициент пред непознатата**, а b **слободен член**.

Задачи за самостојна работа

1. Од кој степен и со колку непознати е секоја од неравенките:

а) $2x - 6 > x - \frac{1}{3}$ б) $x(x-1) < x + 1$ в) $x(y-3) \geq y + 3$ г) $y^2 \leq x + \ $?

2. Дали -1 е решение на неравенките:

а) $2x - 6 > x - 1$ б) $\frac{x-1}{2} \geq x - 7$ в) $2 + \frac{x-1}{2} \leq \frac{3-x}{4}$?

3. Дали следниве неравенки се еквивалентни:

а) $2x+8<10$ и $x+4<5$ б) $5x+3-\frac{x+3}{2}\geq x-\frac{x+3}{2}$ и $5x+3\geq x$

в) $-x+1>2$ и $x-1>-2$ г) $-x-2\leq 1$ и $-1\leq x+2$?

4. Кои од следниве линеарни неравенки со една непозната се во нормален вид:
а) $x+7>3x$ б) $x+2\leq 0$ в) $x<0$ г) $x\geq 7$?

5. Напиши ги следниве неравенки во нормален вид:

а) $2x+8<10$ б) $5x+3\leq x$ в) $x+\frac{x}{3}+1<\frac{x}{3}+1$.

3.5. Графичко решавање на линеарни неравенки со една непозната

Да го најдеме множеството решенија на $ax+b<0$ (односно $ax+b\leq 0$). Разгледуваме три случаи:

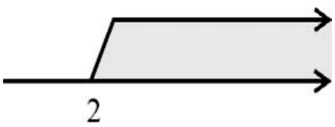
1. Ако $a>0$ тогаш неравенката е еквивалентна со неравенката $x<-\frac{b}{a}$ чиешто множество решенија е интервалот $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$(за неравенката $ax+b\leq 0$ множество решенија е $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$).

2. Ако $a<0$ тогаш неравенката е еквивалентна со неравенката $x>-\frac{b}{a}$ чиешто множество решенија е интервалот $\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$(или $\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$).

3. Ако $a=0$ неравенката $0\cdot x+b<0$ добива облик $b<0$(односно, $0\cdot x+b\leq 0$ добива облик $b\leq 0$), па ако b е негативен број (или ако b е негативен број или нула) тогаш неравенката е идентично неравенство. Ако b е позитивен број или нула (или ако b е позитивен број) тогаш неравенката е невозможна.

1. Реши ја неравенката $6-3x<x-2$.

Ги групираме членовите што ја содржат непознатата на левата страна, а другите на десната страна. Со тоа ја добиваме еквивалентната неравенка $-3x-x<-2-6$, односно $-4x<-8$. Со множење на двете страни со $-\frac{1}{4}$ добиваме $x>2$. Значи, множеството решенија на дадената неравенка е интервалот $(2,\infty)$.

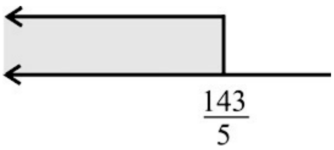


Црт. 4

Множеството решенија можеме графички да го претставиме на бројна оска. Делот од бројната оска што соодветствува на множеството решенија на неравенката го шрафираме (прецртуваме) (црт. 4). ♦

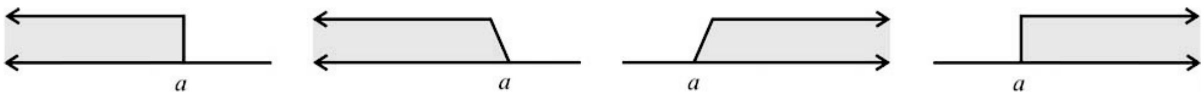
2. Реши ја неравенката $\frac{2x-1}{3} \le 2 - \frac{x}{6}$.

Ги множиме двете страни на неравенката со 6, за да се ослободиме од именителите во неа. Ја добиваме (еквивалентната) неравенка $2(2x-1) \le 12 - x$. Се ослободуваме од заградата и ги групираме членовите што ја содржат непознатата на левата страна, а другите на десната страна. На тој начин доаѓаме до $4x + x \le 12 + 2$, односно $5x \le 14$. Со множење на двете страни со $\frac{1}{5}$ добиваме $x \le \frac{14}{5}$. Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е $\left(-\infty, \frac{14}{5}\right]$. (црт. 5)



Црт. 5

Да воочиме дека при графичкото решавање на неравенките во претходните два примери ги искористивме следниве претставување на множеството решенија.



Ако цртата е коса, укажуваме дека a не е елемент во интервалот, а со второто, ако цртата е под прав агол, дека a е елемент во интервалот.

3. Реши ја неравенката $\frac{x-2}{3} - 1 > \frac{x}{2} - \frac{x}{6}$.

Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $2x - 4 - 6 > 3x - x$, односно со неравенката $-10 > 0$ којашто е невозможна. Значи, дадената неравенка е невозможна, односно множество решенија е празното множество. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Претстави ги графички множествата решенија на неравенките:

а) $x \le 0$ б) $x > -3$ в) $x - 4 < 0$ г) $2x \ge 4$

Реши ги следниве неравенки и множеството решенија претстави го графички:

2. $8x - 4 > 3x + 1$. **3**. $\frac{x-5}{2} - 1 < \frac{2x+1}{4}$.

4*. $5-\dfrac{2x+\dfrac{x+2}{3}}{4}\le 6$.

5*. $\dfrac{7x-1}{3}+\dfrac{2-\dfrac{4x-1}{3}}{5}\le 1-\dfrac{x-7}{5}$.

3.6. Графичко решавање на линеарни неравенки со две непознати

Во продолжение ќе се задржиме на линеарни неравенки со две непознати, специјално на неравенка од видот $f(x_1,x_2)< \ (x_1,x_2)$. Сите заклучоци за оваа неравенка ќе важат и во останатите три случаи $f(x_1,x_2)> \ (x_1,x_2)$, $f(x_1,x_2)\le \ (x_1,x_2)$ или $f(x_1,x_2)\ge \ (x_1,x_2)$.

Решение на неравенката $f(x_1,x_2)< \ (x_1,x_2)$ е секој пар од дефиниционото множество, за која неравенството $f(\alpha,\beta)< \ (\alpha,\beta)$ е вистинито бројно неравенство. Множеството од сите решенија на една неравенка се нарекува **множество решенија на неравенката**.

Секоја линеарна неравенка со две непознати е еквивалентна или со неравенка од вид

$$a_1x_1+a_2x_2<b$$

или со

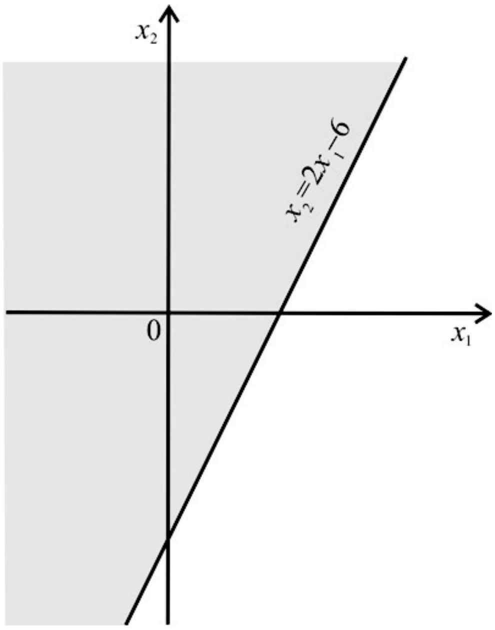
$$a_1x_1+a_2x_2\le b$$

каде што $a_1\ne 0$ или $a_2\ne 0$.

Неравенката $a_1x_1+a_2x_2<b$ е еквивалентна со неравенката $x_2<-\dfrac{a_1}{a_2}x_1+\dfrac{b}{a_2}$, ако $a_2>0$ или со неравенката $x_2>-\dfrac{a_1}{a_2}x_1+\dfrac{b}{a_2}$, ако $a_2<0$. Слично, неравенката $a_1x_1+a_2x_2\le b$ е еквивалентна со неравенката $x_2\le-\dfrac{a_1}{a_2}x_1+\dfrac{b}{a_2}$ или со неравенката $x_2\ge-\dfrac{a_1}{a_2}x_1+\dfrac{b}{a_2}$, во зависност од знакот на a_2.

Ако го замениме знакот $<$ ($>$, $\le$ или $\ge$) во горните неравенки со знакот за еднаквост $(=)$ ја добиваме равенката $x_2=-\dfrac{a_1}{a_2}x_1+\dfrac{b}{a_2}$ која е равенка на права. Правата $x_2=-\dfrac{a_1}{a_2}x_1+\dfrac{b}{a_2}$ во координатниот систем $x_1\ \ x_2$ ја дели координатната рамнина на две полурамнини. Множеството решенија на неравенката $a_1x_1+a_2x_2<b$

се точките од едната од полурамнините определени со правата $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$, не вклучувајќи ги точките од правата, додека множеството решенија на неравенката $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$, освен точките од едната полурамнина определена од правата $x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$ ги вклучува и точките од правата.



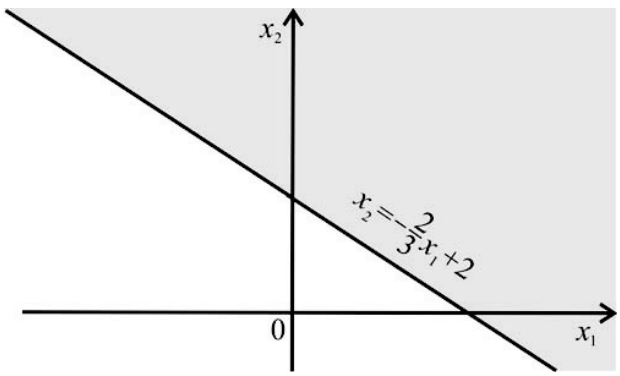
Црт. 6

1. Реши ја неравенката $2x_1 - x_2 < 6$.

Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x_2 > 2x_1 - 6$. Ја цртаме правата $x_2 = 2x_1 - 6$ во координатниот систем $x_1\ x_2$. Бидејќи точката $(0,0)$ е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со правата $x_2 = 2x_1 - 6$, која што ја содржи $(0,0)$ без точките од правата. На црт. 6 е прикажано множеството решенија на дадената неравенка. ♦

2. Реши ја неравенката $2x_1 + 3x_2 \ge 6$.

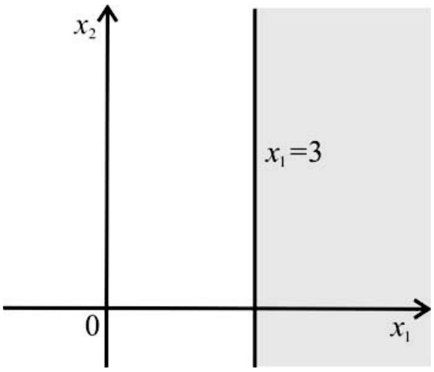
Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x_2 \ge -\frac{2}{3}x_1 + 2$. Ја цртаме правата $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2$ во координатниот систем $x_1\ x_2$. Бидејќи точката $(0,0)$ не е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со правата $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2$, која што не ја содржи $(0,0)$ вклучувајќи ги и точките од правата. На црт. 7, со шрафираниот дел е прикажано множеството решенија на дадената неравенка. ♦



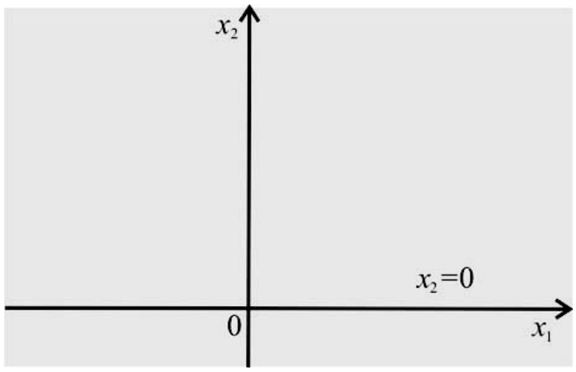
Црт. 7

3. Реши ја неравенката $x_1 + 0 \cdot x_2 \ge 3$.

Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x_1 \geq 3$. Ја цртаме правата $x_1 = 3$, која што е паралелна со x_2 оската, во координатниот систем $x_1 \ x_2$. Бидејќи точката $(0,0)$ не е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со правата $x_1 = 3$, која што не ја содржи $(0,0)$ вклучувајќи ги и точките од правата. На црт. 8, со шрафираниот дел е прикажано множеството решенија на дадената неравенка. ♦



Црт. 8



Црт. 9

4. Реши ја неравенката $0 \cdot x_1 + x_2 \geq 0$.

Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x_2 \geq 0$. Ја цртаме правата $x_2 = 0$ во координатниот систем $x_1 \ x_2$. Всушност, тоа е x_1 оската. Бидејќи точката $(0,1)$ е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со x_1 оската, која што ја содржи $(0,1)$ вклучувајќи ги и точките од правата. На црт. 9, со шрафираниот дел е прикажано множеството решенија на дадената неравенка. ♦

Задачи за самостојна работа

Реши ги следниве неравенки:

1. $x_1 - x_2 > 1$. **2**. $\frac{x_1}{3} + 2x_2 - 1 \geq 0$. **3.** $4x_1 < -2 + x_2$.

4. $x_1 \leq -1$. **5**. $x_2 \leq 7$.

3.7. Системи линеарни неравенки со една непозната

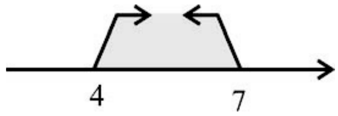
Множеството од конечно многу линеарни неравенки со една непозната се вика **систем линеарни неравенки со една непозната**. **Решение** на систем линеарни неравенки со една непозната е секоја вредност на непознатата која што е решение на секоја од неравенките во системот. Да се реши даден систем неравенки со една непозната, значи, да се определи **множеството решенија** на системот. Множеството решенија на системот линеарни неравенки со една непозната се состои од сите решенија на системот и затоа претставува пресек на множествата решенија на секоја од неравенките во системот. Ако множеството решенија на еден систем линеарни неравенки со една непозната е празното множество тогаш за системот велиме дека е **противречен**. Два системи линеарни неравенки со една непозната се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија.

1. Реши го системот неравенки $\begin{cases} 2x+3<3x-1 \\ x-7<0 \end{cases}$.

Првата неравенка е еквивалентна со неравенката $x>4$, а втората со $x<7$. Значи, дадениот систем неравенки е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x>4 \\ x<7 \end{cases}.$$

Определувањето на множеството решенија на системот е полесно, ако на иста бројна оска ги претставиме множествата решенија на двете неравенки. Во тој случај двојно шрафираниот дел (двојно прецртаниот дел), ако го има, ќе биде бараното множество решенија (црт. 10). ♦



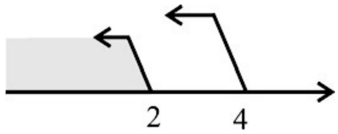
Црт. 10

2. Реши го системот неравенки $\begin{cases} 2x-1<-x+5 \\ x+1<\dfrac{x+6}{2} \end{cases}$.

Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x<2 \\ x<4 \end{cases}.$$

Значи, множеството решенија на дадениот систем неравенки е $(-\infty,2)$ (црт. 11). ♦



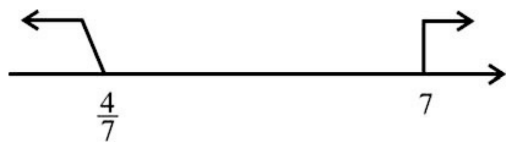
Црт. 11

3. Реши го системот неравенки $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3}<1-\dfrac{x}{2} \\ x-1\geq\dfrac{4x+2}{5} \end{cases}$.

Системот неравенки е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x < \dfrac{4}{7}, \\ x \geq 7 \end{cases}$$

чиешто множество решенија е празното множество, односно системот неравенки е противречен (црт. 12). ♦



Црт. 12

4. Реши го системот неравенки $\begin{cases} x-1 < 2x+3 \\ x+2 \geq \dfrac{1-x}{2} \\ x-1 \leq 3 \end{cases}$.

Дадениот систем неравенки е еквивалентен со системот $\begin{cases} x > -4 \\ x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$.

Според тоа, множеството решенија на дадениот систем неравенки е $[-1,4]$. ♦

5. Реши ја неравенката $(x-1)(x+2) \geq 0$.

Производот на два реални броја е позитивен број или нула ако и двата броја имаат исти знаци или барем еден од нив е нула. Значи,

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$.

Множеството решенија на првиот систем неравенки е $[1,\infty)$, а на вториот $(-\infty,-2]$. Значи, множеството решенија на дадената неравенка е $(-\infty,-2] \cup [1,\infty)$. ♦

Задачи за самостојна работа

Реши ги системите линеарни неравенки со една непозната:

1. $\begin{cases} 3x-2 < 8-2x \\ \dfrac{2x}{3} - 1 > x \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{6} + \dfrac{1-x}{2} \leq 2-x \\ 3x - \dfrac{x-4}{2} > 7 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dfrac{1-x}{4} - 7 > \dfrac{x}{2} \\ 2x+7 > 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dfrac{7-x}{3} \geq 1-x \\ \dfrac{x}{2} \geq 1+x \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ \dfrac{x-1}{2} > x \\ x-7 \leq 0 \end{cases}$.

6*. Реши ја неравенката:

а) $(x-1)(x-3) > 0$ б) $(x+2)(x-5) \leq 0$ в) $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 0$

3.8. Графичко решавање на системи линеарни неравенки со две непознати

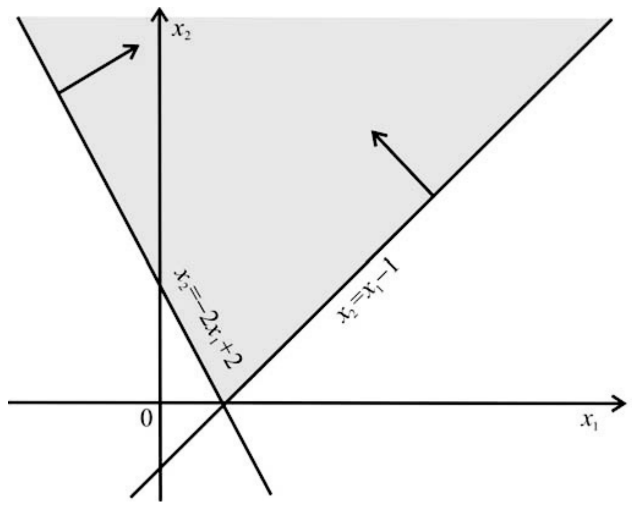
Графичкото решавање на системи линеарни неравенки со две непознати ќе го илустрираме преку неколку примери.

1. Графички реши го системот неравенки $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_2 \ge -2x_1 + 2 \end{cases}$.

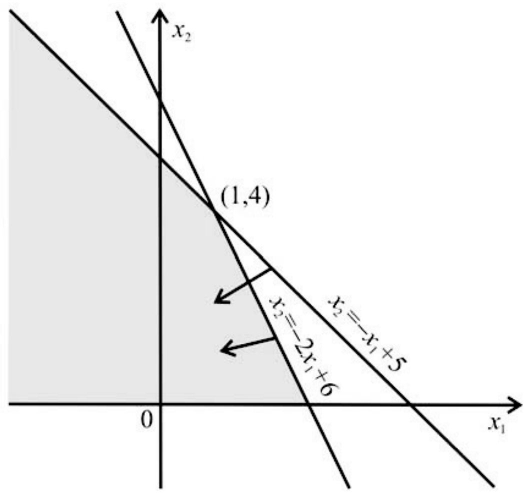
Дадениот систем неравенки е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x_2 \ge x_1 - 1 \\ x_2 \ge -2x_1 + 2 \end{cases}.$$

Множеството решенија на секоја од неравенките во системот го претставуваме графички во ист координатен систем. Полурамнините кои што се решенија на неравенките се означени со стрелки на правите кои ги определуваат. Потоа го определуваме нивниот пресек, кој што е воедно множеството решение на дадениот систем неравенки. Шрафираниот дел на црт. 13 е бараното множество решенија (во кое припаѓаат и точките од полуправите). ♦



Црт. 13



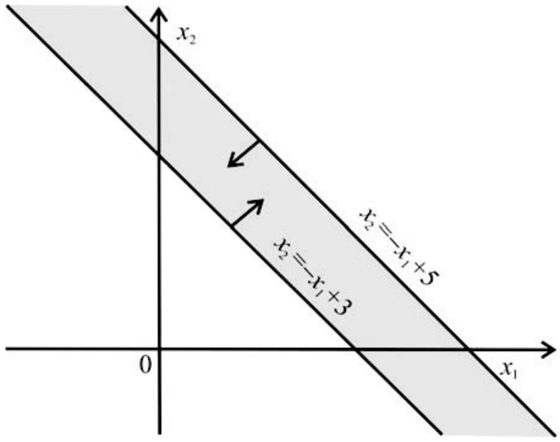
Црт. 14

2. Графички реши го системот неравенки $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 < 6 \end{cases}$.

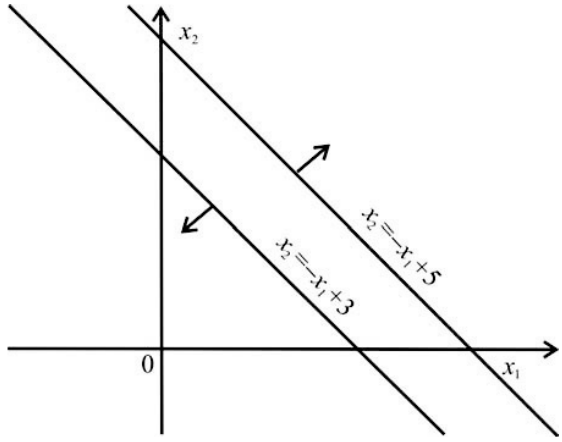
Дадениот систем неравенки е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x_2 \le -x_1 + 5 \\ x_2 < -2x_1 + 6 \end{cases}.$$

Шрафираниот дел на црт. 14 е множеството решенија на дадениот систем неравенки (во кое припаѓаат само точките од полуправата од правата $x_2 = -x_1 + 5$ определена со точката $(1,4)$ и без неа). ♦



Црт. 15

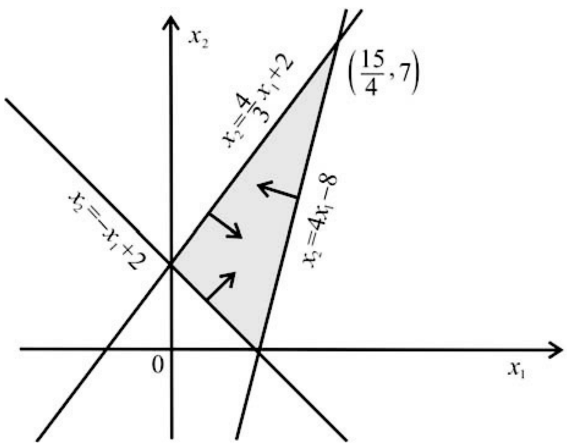


Црт. 16

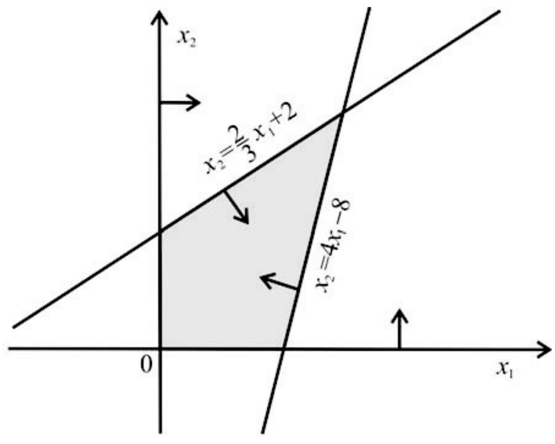
3. Графички реши го системот неравенки:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$,   б) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$.

Шрафираниот дел на црт. 15 е бараното множество решенија на системот неравенки под а) (во кое припаѓаат и точките од полуправите), додека множеството решенија на системот неравенки под б) е празното множество (црт. 16). ♦



Црт. 17



Црт. 18

4. Графички реши го системот неравенки $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 4x_1 - 3x_2 \geq -6 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$.

Шрафираниот дел на црт. 17 е бараното множество решенија на системот неравенки (во кое припаѓаат и точките од отсечките). ♦

5. Графички реши го системот неравенки $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Шрафираниот дел на црт. 18 е бараното множество решенија на системот неравенки (во кое припаѓаат и точките од отсечките). ♦

Задачи за самостојна работа

Графички реши ги системите линеарни неравенки со две непознати:

1. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_2 \geq 4x_1 \end{cases}$. **2**. $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -1 \end{cases}$. **3**. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 1 \end{cases}$ **5***. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 27 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

3. 9. Предмет на линеарното програмирање

Во економијата, се јавуваат проблеми во кои се бара да се постигне определена цел при дадени ограничувања. Решавањето на проблеми во кои се бара најголема или најмала вредност при одредени ограничувања во вид на линеарни равенки или неравенки е предмет на изучување на дисциплината **линеарно програмирање**.

Во продолжение ќе разгледаме неколку задачи од линеарното програмирање. Првата задача е пример за **проблем на планирање на производството за оптимална добивка**.

1. Една компанија произведува три типа принтери. Компанијата има капацитет да произведува 70 принтери дневно и има 120 часа работна рака дневно. Потребно време да се произведе принтери од првиот тип е 1 час, од вториот тип 2 часа и од третиот 3 часа. Заработувачката од првиот тип на принтери е 40 евра, од вториот 50 евра и од третиот тип 60 евра. Најди ја максималната добивка на компанијата.

Го означуваме со x_i, $i=1,2,3$, бројот на принтери од i-тиот тип. Тогаш од првиот услов имаме $x_1+x_2+x_3 \le 70$. Од вториот услов добиваме $x_1+2x_2+3x_3 \le 120$. Тогаш, математичката формулација на овој проблем е да се најде најголемата вредност на функцијата $=40x_1+50x_2+60x_3$ а притоа важат условите $x_1+x_2+x_3 \le 70$ и $x_1+2x_2+3x_3 \le 120$. Јасно, $x_i \ge 0$, $i=1,2,3$. ♦

2. Во два магацини се наоѓаат 10 и 8 шеќер. Тие треба да се пренесат до три слаткарници коишто имаат побарувачка од 5 , 6 и 7 , соодветно. Трошоците за превоз на 1 шеќер се дадени во табела (во денари).

	Слаткарница 1	Слаткарница 2	Слаткарница 3
Магацин 1	55	61	65
Магацин 2	37	82	57

Како да се организира транспортот од магацините до слаткарниците така што вкупниот транспортен трошок да биде најмал, а притоа магацините да се испразнат а побарувачката на слаткарниците да биде задоволена?

Со x_i , $i=1,2$, $=1,2,3$ го означуваме количеството шеќер (во тони) кои треба да се превезат од i-тиот магацин до -тата слаткарница. Бидејќи треба магацините да се испразнат имаме $x_{11}+x_{12}+x_{13}=10$ и $x_{21}+x_{22}+x_{23}=8$. За да биде побарувачката на слаткарниците целосно задоволена, потребно е да важат следниве услови: $x_{11}+x_{21}=5$, $x_{12}+x_{22}=6$ и $x_{13}+x_{23}=7$. Важи и $x_i \ge 0$, $i=1,2$, $=1,2,3$. Тогаш, вкупниот транспортен трошок од двата магацини до трите слаткарници е даден со $=55x_{11}+61x_{12}+65x_{13}+37x_{21}+82x_{22}+57x_{23}$. Математичката формулација на овој проблем гласи:

Најди најмала вредност на функцијата

$$=55x_{11}+61x_{12}+65x_{13}+37x_{21}+82x_{22}+57x_{23},$$

а притоа да важат условите

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=10$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=8$$

$$x_{11}+x_{21}=5$$

$$x_{12}+x_{22}=6$$

$$x_{13}+x_{23}=7$$

$$x_i \ge 0,\ i=1,2,\ =1,2,3.$$

Претходната задача е пример за таканаречениот **транспортен проблем**. ♦

3. Два хранливи производи и содржат во себе протеини, јагленохидрати и масти. Цената на еден грам од производот е 1 денар, а содржи 30% протеини и 50% јагленохидрати. Цената на еден грам од производот е 1,5 денар, а содржи 20% протеини и 75% јагленохидрати. Каква комбинација на овие два производи обезбедува најмалку 440 протеини, 1100 јагленохидрати и 110 масти и притоа трошокот е најмал?

Ако со x_1 и x_2 ги означиме количествата од производите и , соодветно, во грамови тогаш за вкупниот трошок добиваме $= x_1 + 1{,}5x_2$. Од условот во задачата ги добиваме следниве ограничувања: $0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 440$, $0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \geq 1100$ и $0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 \geq 110$. Значи, бараната задача е:

Најди ја најмала вредност на функцијата $= x_1 + 1{,}5x_2$, ако важат

$0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 \geq 440$

$0{,}5x_1 + 0{,}75x_2 \geq 1100$

$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 \geq 110$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Претходната задача е пример за таканаречениот **проблем на смеса**. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Една текстилна фабрика произведува два типа панталони. За првиот тип панталони потребни се 10 минути за кроење и 20 минути за шиење. За вториот тип панталони потребни се 10 минути за кроење и 30 минути за шиење. Фабриката може да обезбеди најмногу 7500 минути на ден за кроење и најмногу 19500 минути за шиење. Заработката од еден пар од првиот тип панталони е 300 денари, а заработката од еден пар од вториот тип панталони е 375 денари. Колку пара панталони од двата типа треба да се произведат дневно за да се добие максимална добивка?

2. Во три фарми со кокошки има 2500, 3000 и 4000 јајца. Тие треба да се пренесат до три продавници коишто имаат побарувачка од 3200, 2700 и 3600, соодветно. Трошоците за превоз на 100 јајца се дадени во табела (во денари).

	Продавница 1	Продавница 2	Продавница 3
Фарма 1	46	40	39
Фарма 2	50	48	40
Фарма 3	55	50	48

Како да се организира транспортот од фармите до продавниците така што вкупниот транспортен трошок да биде најмал, а притоа фармите да се испразнат а побарувачката на продавниците да биде задоволена?

3. На еден градинар за производство на два типа вештачки ѓубрива му се потребни минимум 80 единици азот, 15 единици калиум и 10 единици железо. Првиот тип ѓубриво содржи 20 единици азот, 2 единици калиум и 1 единица железо, а вториот тип 4 единици азот, 1 единица калиум и 2 единици железо. Трошокот за еден килограм од првиот тип вештачко ѓубриво е 180 денари, а за вториот тип 60 денари по килограм. Најди по колку килограми од секој тип вештачки ѓубрива требаат за да се задоволат поставените барања и притоа трошокот да е најмал?

3. 10. Општа задача на линеарното програмирање

Општата задача на линеарното програмирање гласи:

Најди најмала (или најголема) вредност на линеарната функција

$$= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

ако важат следниве услови

$$
\begin{aligned}
&b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = c_1\\
&b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2\\
&\vdots\\
&b_{\ 1}x_1 + b_{\ 2}x_2 + \ldots + b_{\ n}x_n = c\\
&b_{\ +11}x_1 + b_{\ +12}x_2 + \ldots + b_{\ +1n}x_n \le c_{\ +1}\\
&\vdots\\
&b_{\ 1}x_1 + b_{\ 2}x_2 + \ldots + b_{\ n}x_n \le c\\
&x \ \ge 0, \quad = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

каде што a , b_i , c_i , $i = 1,\ldots,$, $= 1,\ldots,n$ се дадени реални броеви.

Во натамошниот текст, општата задача на линеарното програмирање ќе ја нарекуваме општа ЛП-задача или само ЛП-задача.

Првите $(\ )$ услови се нарекуваат **ограничувања** на ЛП-задачата, а следните (n) услови се нарекуваат **услови за ненегативност**, додека линеарната функција се нарекува **функција на целта** на ЛП-задачата.

1. Во ЛП-задачата: Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 7x_1 + 10x_2$ ако важат следниве услови

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + x_2 \le 9\\
&x_1 + 2x_2 \le 8\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,
\end{aligned}
$$

ограничувања се $3x_1 + x_2 \le 9$ и $x_1 + 2x_2 \le 8$, услови за ненегативност се $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ и функција на целта е $= 7x_1 + 10x_2$. ♦

Допустливо решение или **програма** на ЛП-задачата е секоја n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ која што ги исполнува ограничувањата и условите за ненегативност. Множеството од сите допустливи решенија на една ЛП-задача се вика **допустлива област** на ЛП-задачата. Допустливото решение за кое се добива најголемата вредност, односно најмалата вредност на функцијата на целта, се вика **максимално допустливо решение** или **максимална програма**, односно **минимално допустливо решение** или **минимална програма**. Уште, максималното или минималното допустливо решение на една ЛП-задача со еден збор се викаат **оптимално допустливо решение** (**оптимална програма**). Вредноста на функцијата на целта и воопшто на ЛП-задачата која што се добива за оптималното допустливо решение се вика **оптимална вредност** или **оптимум**.

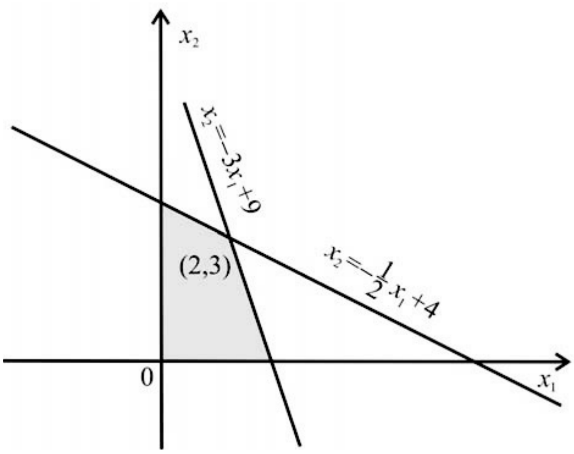
Да се реши ЛП-задача значи да се најде допустливата област на ЛП-задачата, а потоа да се најдат оптималното допустливо решение и оптимумот. ЛП-задачата се нарекува **недопустлива** ако допустливата област е празно множество. Ако допустливата област не е празно множество и ако постои оптимално допустливо решение тогаш ЛП-задачата се вика **решлива**, а ако не постои оптимално допустливо решение се вика **нерешлива**.

2. Графички претстави ја допустливата област на ЛП-задачата од претходниот пример.

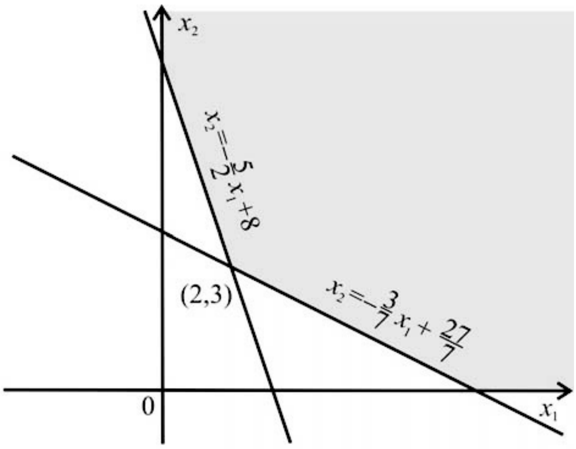
Графички го решаваме системот линеарни неравенки со две непознати

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

и ја добиваме допустливата област на дадената ЛП-задача (црт. 19). ♦



Црт. 19



Црт. 20

3. Графички претстави ја допустливата област на следнава ЛП-задача:

Најди ја најмалата вредност на функцијата $= 7x_1 + 6x_2$ ако важат следниве услови

$5x_1 + 2x_2 \geq 16$

$3x_1 + 7x_2 \geq 27$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Допустливата област ја добиваме со графичко решавање на системот

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 27 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{(црт. 20).} ♦$$

4. Графички претстави ја допустливата област на следнава ЛП-задача:

Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 7x_1 + 6x_2$ ако важат следниве услови

$3x_1 + x_2 \leq 3$

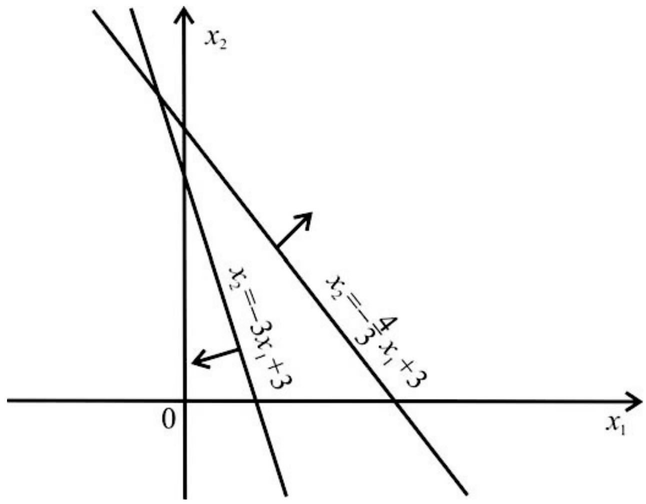
$4x_1 + 3x_2 \geq 12$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Допустливата област ја добиваме со графичко решавање на системот

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(црт. 21). Бидејќи допустливата област е празно множество, оваа ЛП-задача е недопустлива. ♦



Црт. 21

Задачи за самостојна работа

1. Укажи ги ограничувањата, условите за ненегативност и функцијата на целта но следниве ЛП-задачи:

а) Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 3x_1 + 2x_2$ ако важат следниве услови

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

б) Најди ја најмалата вредност на функцијата $= x_1 + 2x_2 - 3x_3$ ако важат следниве услови

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 - x_3 \geq 2$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

2. Што е допустлива област на ЛП-задача?

3. Што е оптимална програма, а што оптимум?

4. Кога една ЛП-задача е нерешлива?

5. Графички претстави ги допустливите области на следниве ЛП-задачи:

а) Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 3x_1 + 2x_2$ ако важат следниве услови

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

б) Најди ја најмалата вредност на функцијата $= 4x_1 + 3x_2$ ако важат следниве услови

$2x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 5x_2 \leq 20$

$3x_1 - 2x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

в) Најди ја најмалата вредност на функцијата $= 2x_1 + x_2$ ако важат следниве услови

$3x_1 + x_2 \geq 15$

$4x_1 + 3x_2 \geq 30$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

г) Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 5x_1 + 7x_2$ ако важат следниве услови

$2x_1 + 3x_2 \geq 6$

$3x_1 - x_2 \leq 15$

$-x_1 + x_2 \leq 4$

$2x_1 + 5x_2 \leq 27$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

3.11. Графичко решавање на ЛП-задачи со две непознати

Со неколку примери ќе го илустрираме графичкото решавање на ЛП-задачи со две непознати.

1. Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 7x_1 + 10x_2$ ако важат следниве услови

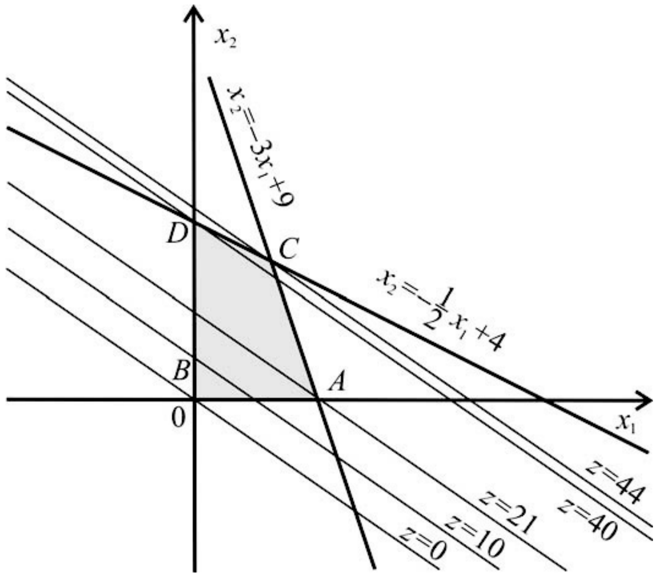
$3x_1 + x_2 \le 9$

$x_1 + 2x_2 \le 8$

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$.

Графички го решаваме системот линеарни неравенки со две непознати $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ и ја добиваме допустливата област на ЛП-задачата, четириаголникот . Потоа, за различни вредности на ги цртаме правите со



Црт. 22

равенки $x_2 = -\frac{7}{10}x_1 + \frac{}{10}$ што ги добиваме од функцијата на целта. Тие прави се паралелни меѓу себе. На црт. 22 претставени се правите добиени за $= 0$, $= 10$, $= 21$, $= 40$ и $= 44$, кои што имаат пресек со четириаголникот . Очигледно, точката одговара на најголемата вредност на , а тоа е $= 44$. Значи оптимумот е 44, а оптималното допустливо решение (x_1, x_2) се всушност координатите на . Точката е пресекот на правите $x_2 = -3x_1 + 9$ и $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 4$ и затоа нејзините координатите ги добиваме како решение на системот

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1 + 9 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 4 \end{cases}.$$

Значи, $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.♦

2. Најди ја најмалата и најголемата вредност на функцијата $= 7x_1 + 6x_2$ ако важат следниве услови

$5x_1 + 2x_2 \ge 16$

$3x_1 + 7x_2 \geq 27$

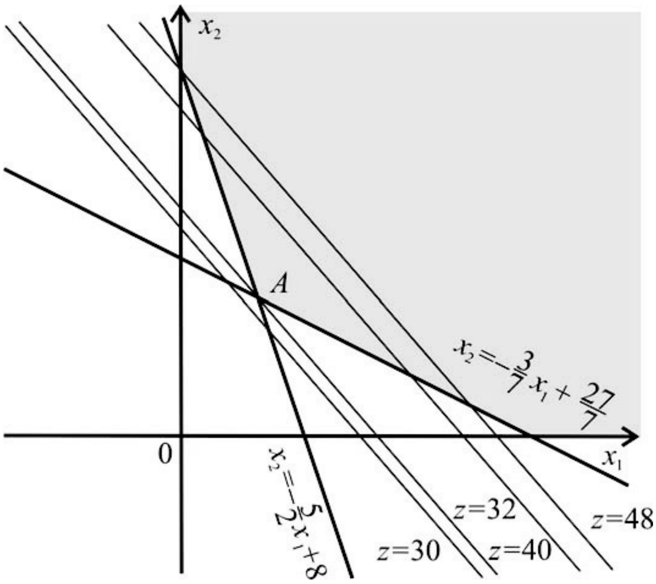
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\,.$

Допустливата област ја добиваме со графичко решавање на системот

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ 3x_1 + 7x_2 \geq 27 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Потоа, за различни вредности на ги цртаме паралелните прави со равенки $x_2 = -\frac{7}{6}x_1 + \frac{}{6}$ што ги добиваме од функцијата на целта. На црт. 23 претставени се правите добиени за $= 30$, $= 32$, $= 40$ и $= 48$. Очигледно, точката одговара на најмалатата вредност на , а тоа е $= 32$. Значи најмалата вредност е 32, а минималното допустливо решение (x_1, x_2) се добива како решение на системот

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 16 \\ 3x_1 + 7x_2 = 27 \end{cases}.$$



Црт. 23

Значи, $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Од друга страна пак, јасно е дека не постои најголема вредност на функцијата на целта. ♦

3. Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 2x_1 + 6x_2$ ако важат следниве услови

$x_1 + x_2 \leq 7$

$2x_1 + x_2 \leq 12$

$x_1 + 3x_2 \leq 15\,.$

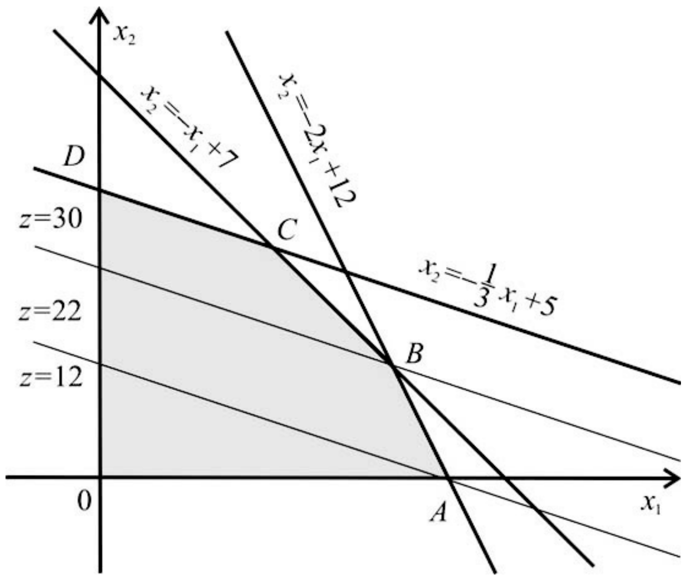
$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

Допустливата област ја добиваме со графичко решавање на системот

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Тоа е петаголникот (црт. 24). Потоа, за различни вредности на ги цртаме паралелните прави со равенки $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{}{6}$ што ги добиваме од функцијата на целта. На цртежот 3 претставени се правите добиени за $=12$, $=22$ и $=30$, кои што имаат пресек со петаголникот . Најголемата вредност е $=30$, а максимални допустливи решенија се сите точки од отсечката . ♦



Црт. 24

Од решените примери можеме да го заклучиме следново:

1. Ако ЛП-задачата е решлива тогаш оптимумот се достигнува во некоја од пресечните точки на правите што ја определуваат допустливата област.

2. Ако функцијата на целта го достигнува својот оптимум во две темиња (пресечни точки) тогаш го достигнува оптимумот и во секоја точка на отсечката што ја определуваат темињата.

4. Една компанија произведува три типа печатари. Компанијата има капацитет да произведува 70 печатари дневно и има 120 часа работна рака дневно. Потребно време да се произведе печатар од првиот тип е 1 час, а од вториот тип 3 часа. Добивката од првиот тип на печатари е 40 евра и 60 евра од вториот тип. Најди ја максималната дневна добивка на компанијата.

Го означуваме со x_1 бројот на принтери од првиот тип, а со x_2 бројот на принтери од вториот тип. Тогаш математичката формулација на овој проблем е:

Најди ја најголемата вредност на функцијата $= 40x_1 + 60x_2$ ако важат

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 70 \\ x_1 + 3x_2 \le 120 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array}.$$

Допустливата област е четириаголник каде што $(0,0)$, $(70,0)$, $(0,40)$ (црт. 25). Координатите на темето ги наоѓаме со решавање на системот

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 70 \\ x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases},$$

односно $(45,25)$. Во секое теме ја пресметуваме вредноста на функцијата $= 40x_1 + 60x_2$.

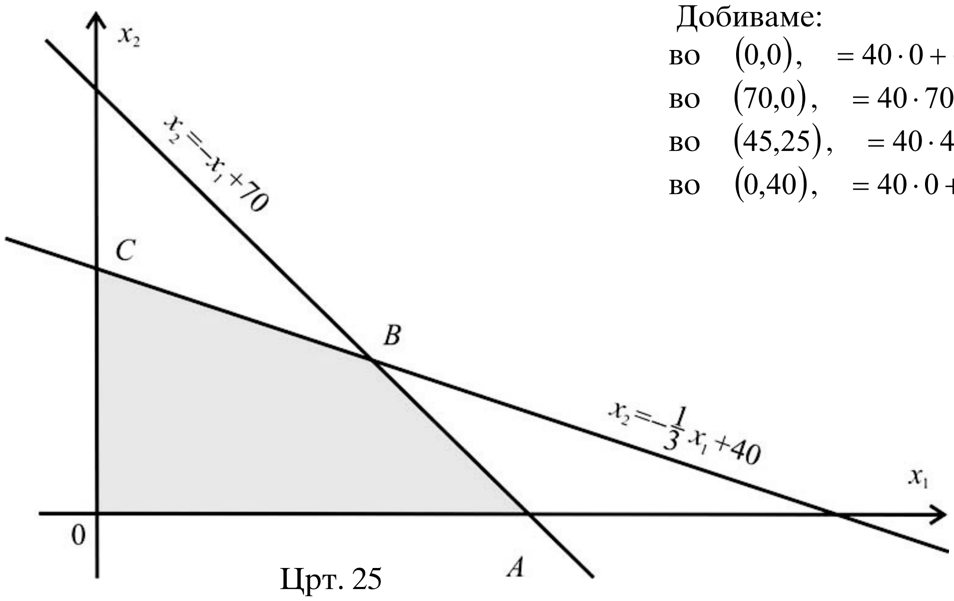
Добиваме:

во $(0,0)$, $= 40 \cdot 0 + 60 \cdot 0 = 0$

во $(70,0)$, $= 40 \cdot 70 + 60 \cdot 0 = 2800$

во $(45,25)$, $= 40 \cdot 45 + 60 \cdot 25 = 3300$

во $(0,40)$, $= 40 \cdot 0 + 60 \cdot 40 = 2400$.



Црт. 25

Значи, максималната дневна добивка на компанијата е 3300 евра, а се добива со произведување на 45 печатари од првиот тип и 25 печатари од вториот тип. ♦

Задачи за самостојна работа

Графички реши ги ЛП-задачите:

1. Најди ја најмалата вредност на $= 3x_1 + x_2$ ако

$$\begin{aligned} &4x_1 + x_2 \geq 11 \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}.$$

2. Најди ја најголемата вредност на $= x_1 + 6x_2$ ако

$$x_1 + x_2 \le 7$$
$$2x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1 + 3x_2 \le 15\,.$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

3. Најди ја најмалата вредност на $\;\; = 3x_1 + 8x_2$ ако

$$4x_1 - 5x_2 \ge 50$$
$$-x_1 + 2x_2 \ge 4$$
$$x_1 + x_2 \le 80 \quad .$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

4. Најди ја најголемата и најмалата вредност на функцијата $\;\; = 5x_1 + 7x_2$ ако важат следниве услови

$$2x_1 + 3x_2 \ge 6$$
$$3x_1 - x_2 \le 15$$
$$-x_1 + x_2 \le 4$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 27$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0\,.$$

5*. Една текстилна фабрика произведува два типа панталони. За првиот тип панталони потребни се 10 минути за кроење и 20 минути за шиење. За вториот тип панталони потребни се 10 минути за кроење и 30 минути за шиење. Фабриката може да обезбеди најмногу 7500 минути на ден за кроење и најмногу 19500 минути за шиење. Заработката од еден пар од првиот тип панталони е 300 денари, а заработката од еден пар од вториот тип панталони е 375 денари. Колку пара панталони од двата типа треба да се произведат дневно за да се добие максимална добивка?

3. 12. Задачи за вежбање

Реши ги линеарните равенки со една непозната:

1. $x - 1 = 15x - 8\,.$ **2**. $2x - \dfrac{x-4}{3} = 13\,.$

3. $2x+\frac{3}{4}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+1}{2}-1$.

4. $\dfrac{x-\frac{x+3}{4}}{3}=5-\frac{x}{2}$.

5. $\frac{1-4x}{3}+\dfrac{\frac{x}{3}-1}{4}=3-\frac{7-x}{2}$.

6. $\frac{x+2}{5}-\frac{3x+1}{2}-1=x-\dfrac{\frac{x+2}{10}-1}{2}$.

Реши ги линеарните равенки со две непознати:

7. $\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{2}-1=0$.

8. $x_1=-2+3x_2$.

Графички реши ги следниве линеарни равенки со една непозната:

9. $x-1=-2x+8$.

10. $3x+7=-2x+2$.

11. $\frac{1-x}{5}=-\frac{11}{5}+x$.

12. $-\frac{x}{2}+3=-\frac{x}{2}-2$.

Графички реши ги следниве линеарни равенки со две непознати:

13. $\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{2}-1=0$.

14. $x_1=-2+3x_2$.

15. Дали следниве неравенки се еквивалентни:

а) $\frac{x-5}{2}-1<\frac{x+1}{4}$ и $x+1<16$

б) $3-\frac{x-1}{2}\geq x-\frac{x+3}{2}$ и $5x-3\geq x+17$.

Реши ги следниве неравенки и множествата решенија претстави ги графички:

16. $x-1<15x-8$.

17. $2x-\frac{x-4}{3}\geq 13$

18. $2x+\frac{3}{4}-\frac{x-1}{3}\leq\frac{x+1}{2}-1$.

19. $\dfrac{x-\frac{x+3}{4}}{3}>5-\frac{x}{2}$.

20. $\frac{1-4x}{3}+\dfrac{\frac{x}{3}-1}{4}\geq 3-\frac{7-x}{2}$.

21. $\frac{x+2}{5}-\frac{3x+1}{2}-1=x-\dfrac{\frac{x+2}{10}-1}{2}$.

Графички реши ги следниве неравенки:

22. $x_1+x_2\leq 3$.

23. $-\frac{x_1}{3}+x_2-1<0$.

24. $x_2>2$.

25. $x_1\leq 6$.

Реши ги системите линеарни неравенки со една непозната:

26. $\begin{cases} x+2>8-2x \\ x-2<\dfrac{x}{5} \end{cases}$.

27. $\begin{cases} -\dfrac{x}{2}-3>\dfrac{x-3}{4} \\ 3x+15\geq 0 \end{cases}$.

28. $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3}\leq 2+x \\ \dfrac{x}{6}\leq 1+\dfrac{x}{2} \end{cases}$.

29. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}+\dfrac{1-x}{5}>1 \\ x-\dfrac{x-1}{3}\leq\dfrac{13}{3} \end{cases}$.

30. Реши ја неравенката:

а) $(x-2)(x+5)\leq 0$

б) $\dfrac{x+1}{x+2}>0$.

Графички реши ги системите линеарни неравенки со две непознати:

31. $\begin{cases} -x_1+x_2\geq -1 \\ x_2+x_1<4 \end{cases}$.

32. $\begin{cases} x_1+2x_2\leq 2 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$.

33. $\begin{cases} x_1+x_2\geq 2 \\ x_1-x_2\leq 2 \\ 4x_1+3x_2\leq 12 \end{cases}$.

34. $\begin{cases} x_1+x_2\leq 6 \\ 9x_1+2x_2\leq 27 \\ x_2\leq 5 \\ x_1\geq 0 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$.

Графички реши ги ЛП-задачите:

35. Најди ја најмалата вредност на $=7x_1+6x_2$ ако

$$\begin{aligned} &5x_1+2x_2\geq 16 \\ &3x_1+7x_2\geq 27 \\ &x_1\geq 0 \\ &x_2\geq 0 \end{aligned}.$$

36. Најди ја најголемата вредност на $=6x_1+3x_2$ ако

$$\begin{aligned} &x_1+x_2\leq 6 \\ &9x_1+2x_2\leq 27 \\ &x_2\leq 5 \\ &x_1\geq 0 \\ &x_2\geq 0 \end{aligned}.$$

37. Најди ја најголемата и најмалата вредност на функцијата $= x_1 + 3x_2$ ако важат следниве услови

$3x_1 + x_2 \geq 45$

$x_1 + 2x_2 \geq 50$

$x_1 + x_2 \leq 35$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

38*. Две фабрики произведуваат три различни типови на кујнски апарати. Првата фабрика на ден произведува 80 апарати од првиот тип, 10 апарати од вториот тип и 20 апарати од третиот тип, а втората фабрика дневно произведува 20 апарати од првиот тип, 10 апарати од вториот тип и 70 апарати од третиот тип. Дневните трошоци на првата фабрика се 10000 евра, а на втората 20000 евра. Тие, заедно, треба да направат 1600 апарати од првиот тип, 500 апарати од вториот тип и 2000 апарати од третиот тип. Колку дена треба да работи секоја од фабриките за да ги направат бараните апарати со најмал трошок? Најди го најмалиот трошок.

39*. Една златарница произведува белегзии и ѓердани. Златарницата дневно може да произведе најмногу 24 парчиња белегзии и ѓердани, заедно. За изработка на една белегзија потребен е 1 час, а за изработка на еден ѓердан потребно е $\frac{1}{2}$ час. Златарницата работи 16 часа дневно. Ако заработката од една белегзија е 2 евра, а заработката од еден ѓердан е 1 евро, колкава е максималната заработка?

40*. Еден рибник е порибен со два вида риба, крап и пастрмка. Сопственикот ги храни рибите со два типа храна. За крапот треба 2 единици од храната од првиот тип и 4 единици од храната од вториот тип. За пастрмката треба 5 единици од храната од првиот тип, а 2 единици од храната од вториот тип. Ако сопственикот има 800 единици од секој тип храна, најди го максималниот број на риби со кои што езерото може да се порибит.

4. КАЛКУЛАЦИИ

4. 1. Поим, значење и видови на калкулации

Постапката за пресметување односно утврдувањето на цената на чинење на учиноците (производи и услуги) се нарекува калкулација.

Калкулацијата претставува преглед на трошоците кои ја сочинуваат структурата на цената на чинење на учиноците.

Зборот калкулација се користи и во секојдневниот живот со повеќе значења, како пресметка за изнаоѓање на цена, како преглед или шема на подредени трошоци, за анализа на трошоците и слично.

Елементи на цената на чинење се следните видови на трошоци:

- Трошоци за материјали за изработка;
- Трошоци за трудот;
- Амортизација;
- Општи трошоци за изработка и
- Општи трошоци на управата и продажбата.

Зборот калкулација има латинско потекло – calculus - што означува пресметка, изработка на пресметка, сметање, пресметка на набавни, продажни и други цени.

Зборот калкулација вообичаено се применува и во секојдневниот живот со повеќекратно значење. Оделни автори даваат различни дефиниции за калкулацијата. Една од посодржајните под поимот калкулација подразбира пресметка на трошоците систематизирани во категории со цел да се добие цената на чинењето по единица учинок. Постојат и низа други дефиниции, меѓутоа за сите е заедничко дека калкулацијата претставува:

- Пресметување и распределување на трошоците по однапред определени категории;
- Изнаоѓање на некоја цена (цена на чинење, набавна цена, продажна цена);
- Анализа и контрола на трошоците и друго.

Во производните претпријатија – компании, калкулацијата претставува пресметка и распоредување на трошоците по производи и добивање на цената на чинење по единица учинок, како и вкупни трошоци за недовршено и завршено производство за определен временски период.

Во литературата оделни автори укажуваат на различни намени на калкулацијата, па оттука доаѓа различното определување на нејзиното значење. Секако калкулацијата на сите места нема иста намена и значење.

За развојниот пат на калкулацијата имаат заслуга голем број на теоретичари, како и лица од праксата. Како резултат на тоа создадени се многу форми на калкулации и многубројни постапки за изработка на калкулациите. Создадени се и најразлични класификации на калкулациите како и постапки за изработка на истите.

Со оглед на енормниот број на класификации на калкулациите за илустрација подетално ќе биде прикажана следната класификација:

I. Формални методи:

а) Преткалкулација и дополнителна калкулација;
б) Книговодствена и техничка калкулација;
в) Систематска и помошна калкулација;
г) Основна и посебна калкулација и
д) Планска калкулација.

II. Пресметка по чисти издатоци и пресметка по погонски вредности:

а) Пресметка по стварни податоци;
б) Пресметка по погонски вредности и
в) Мешовити постапки.

III. Пресметка по стварни трошоци, по нормални трошоци и по плански трошоци:

а) Пресметка по стварни трошоци;
б) Пресметка по нормални трошоци и
в) Пресметка по плански трошоци.

IV. Пресметка по видови, места и носители на трошоци:

а) Дивизиона и додатна калкулација.

Во литературата се среќаваат и други познати а класифицирања на калкулациите од различни аспекти.

Особено значајни се шемите на калкулациите кои се регулирани со позитивните прописи и кои овозможуваат полесно пресметување на цената на чинење на производите и услугите благодарение на соодветни методи на пресметка.

Шеми на калкулации (елементи на цената на чинење)

Шемите на калкулацијата во одделни временски периоди и во одделни земји се разликуваат. Поважни шеми се:

I. Класична шема на калкулација

1. Материјал за изработка:
   - Основен материјал;
   - Помошен материјал;
   - Полупроизводи и
   - Останато.
2. Амортизација
3. Плати за изработка
4. Општи трошоци за изработка:
   - Материјали;
   - Плати и
   - Останато.
5. Општи трошоци на управата и продажбата:
   - Материјали;
   - Плати и
   - Останато.

Елементи на цената на чинење на калкулациите во неколку странски земји

Следи преглед на некои покарактеристични шеми на калкулации во неколку странски земји:

Швајцарија

1.Материјал
2. Општи трошоци на материјалите
I Трошоци на материјалите (1 + 2)
1.Плати
2.Додатоци на платите
II. Трошоци за изработка (1+2)
III. Посебни трошоци за изработка
IV. Трошоци за производство
1. Управни трошоци
2. Продажни трошоци
V. Трошоци на управата и продажбата (1 + 2)
VI. Сопствена цена

Италија

1.Материјал
2. Директни трошоци за изработка
3. Општи трошоци за изработка.
I Трошоци за изработка (1 +2 + 3)
4.Фабрички трошоци
II Сопствена цена (I + 2)

Германија

1. Материјали
2. Општи трошоци за материјалот
I Материјали (1 + 2)
3. Плати за изработка
4. Општи трошоци за изработка
5. Посебни трошоци за изработка
II Трошоци за изработка (3 + 4 + 5)
III Трошоци за изработка (I + II)
6. Општи трошоци на управата
7. Општи трошоци на продажбата
8. Посебни трошоци на продажбата
IV Полна цена на чинење (III+ 6 +7 + 8).

Задачи за самостојна работа

1. Што е калкулација?

2. Кои се елементите на цената на чинење на учиноците?

3. Што е заедничко во дефинициите за калкулацијата?

4. Кои се познати шеми на калкулација?

5. Што означува поимот калкулус?

4. 2. Метод за пресметка по реални трошоци со изработка на калкулации

Станува збор за еден од најстарите методи за пресметка на производството кој во нашата земја е многу применуван. Иако на прв поглед неговата примена изгледа логична и реална, сепак има и многу слабости. Тие особено се манифестираат во современиот начин на стопанисување, кога има масовно и релативно брзо производство, кога на пазарот има голема конкуренција и во услови на зголемена потреба да се знае однапред што ќе се случи со производството.

Овој метод се состои во евиденција на стварно настанатите трошоци, а потоа со изработка на калкулации се утврдува цената на чинење на секој производ. Затоа овој метод е историски. Со овој метод се утврдува цената на чинење на определени учиноци по завршеното производство, а често пати и по нивна реализација. Наспроти тоа, при примена на овој метод не е можно да се преземаат мерки однапред за снижување на цената на чинење и вклопување на пазарот. Методот за пресметка по реални трошоци овозможува само сознанија за висината на цената на чинење и сознанија за поодделни учиноци, како што се продаваат на пазарот со позитивен или негативен резултат. Тоа сознание се добива преку споредување на цената на чинење со продажната цена. Доколку цената на чинење е помала од продажната цена тогаш има позитивен резултат и обратно, ако цената на чинење е повисока од продажната цена, тогаш има негативен резултат од производството на соодветниот учинок.

Иако овој метод е наречен метод за пресметка по реални трошоци, сепак истиот не дава многу реална пресметка, затоа што трошоците се евидентираат по цени кои важеле во определен момент. Така, на пример, при набавка на суровини и материјали, при извршување на услуги, основните средства се амортизираат според нивната набавна вредност и слично, а пресметката се прави подоцна кога се изменети цените, понекогаш и изменети услови за стопанисување.

Кога се применува овој метод, производството се пресметува со правење на калкулации.

За да се елиминираат некои од недостатоците при примена на овој метод се изготвуваат претходни (плански) калкулации со предвидени (планирани) трошоци.

Планските калкулации служат за:

- Донесување на деловни одлуки (дали и како ќе се произведува определен производ или линија на производи);

- Анализа и контрола на фактички направените трошоци за поодделни производи и

- Изнаоѓање на факторите што делувале за направени повисоки или пониски трошоци од предвидените (планираните) трошоци за соодветен производ.

Калкулациите по предвидени (плански) или стварни трошоци во производствените компании – претпријатија претставуваат пресметка и распоредување на трошоците по производи и добивање на цената на чинење по единица учинок, како и пресметка на вкупните трошоци за недовршеното и довршеното производство за определен временски период или за определен производствен процес.

Калкулацијата е значаен инструмент кој го користи менаџментот за:
- Раководење со производството;
- Контрола на работењето;
- Следење на структурални промени;
- Пресметување на цени;
- Останати намени (пресметување на интерни пресметковни цени, пресметување на вредности при инвентура, проценување на постапката за производството заради конкуренција, определување вредности на штетите при осигурување).

Задачи за самостојна работа

1. Во кој случај се применува методот за пресметка по реални трошоци?

2. Кој се негови основни карактеристики?

3. Кој се негови недостатоци?

4. Какви информации се добиваат со методот за пресметка по реални трошоци?

5. Зошто служат планските калкулации?

4. 3. Пресметка на производството со претходна (планска) калкулација

За составување на претходна (планска) калкулација потребно е да се обезбедат :

1. Податоци за предвиденото количество на производи за годината, пократок временски период или производствен процес за кој ќе се прави калкулацијата;

2. Нормативи за потрошувачка на материјали за единица производ или за целото производство, како и квалитет и асортиман на потребните материјали;

3. Норми на трудот, односно колку труд е потребен за единица производ или за целото производство, како и квалификуваност на потребниот труд;

4. Предвидени (плански) цени на материјалите и предвидени (планирани) бруто плати за единица време или единица производи;

5. Висината на предвидените општи трошоци за изработка;

6. Висината на предвидените општи трошоци за менаџмент и администрацијата;

7. Висината на амортизацијата;

8. Фактори за распределба на општите трошоци.

При составувањето на калкулациите директните трошоци се изнаоѓаат и внесуваат во калкулацијата за секој производ или услуга посебно, а индиректните трошоци се распределуваат со клуч изнајден според определен фактор по производи.

1. Пример за изработка на претходна (планска) калкулација

Во една пекарница се произведуваат два производи - кроасан и бурек со сирење. За производството во пекарницата во 2009 година постојат следните податоци:

1. Предвидено е да се произведе во текот на годината $50\,000\,kg$ кроасан и $5\,000\,kg$ бурек со сирење;

2. Пресметани се нормативи за потрошок на материјали со предвидени (плански) цени.

Р. бр.	Назив на материјалот	Нормативи и плански цени за			
		Кроасан		Бурек	
		kg	Цена	*kg*	Цена
1.	Брашно	0,70	28	0,60	30
2.	Сало	/	/	0,30	60
3.	Масло	/	/	0,10	60
4.	Сирење	/	/	0,20	100
5.	Сол и квасец	0,03	0,70	0,40	

3. Утврдени се норми на трудот и тоа:

- За изработка на $1kg$ кроасан 8 минути со бруто платите за еден час 48 денари

- За изработка на $1kg$ бурек 24 минути, со бруто плата за 1 час 54 денари;

4. Амортизација како директен трошок за кроасан – $12\,500$ денари, за бурекот со сирење - $7\,000$ денари.

5. Од искуство во пекарницата е утврдено дека општите трошоци на изработка за една година изнесуваат $64\,200$ денари, додека општите трошоци на менаџмент и администрација изнесуваат 51360 денари.

Основа за распределба на општите трошоци се бруто платите за изработка.

Да преминеме на решавање на проблемот.

Производ: Кроасан тип 500
Предвидени (планирани) единици – производ: $50\,000$ парчиња

Претходна (планска) калкулација 1
за производство на кроасан (за 2009 година)

Р. бр.	Елементи на цената на чинење	Единица мера	Норматив за потрошувачка	Цена	Вредност на производите	
					За 1 парче	За 50 000 парчиња
1.	Материјал за изработка				20,30	1 015 000
	а) брашно	*kg.*	0,70	28,00	19,60	980 000
	б) квасец, сол и вода			0,70	0,70	35 000
2.	Амортизација – дирек. трош.				0,25	12 500
	Бруто плати на изработка	*min*	8	0,8	6,40	320 000
3.	Општи трошоци на изработка				0,96	48 000
4.	Општи трошоци на					
5.	менаџмент и администрација				0,768	38 400
	Цена на чинење и вредност на производството				28,678	1.433.900

Производ: бурек со сирење
Предвидени (планирани) единици – производ: 5 000 парчиња

Претходна (планска) калкулација 2
за производство на бурек со сирење (за 2009 година)

Р. бр.	Елементи на цената на чинење	Единица мера	Норматив за потрошувачка	Цена	Вредност на производите	
					За 1 парче	За 5 000 парчиња
1.	Материјал за изработка				62,40	312 000
	а) брашно	*kg*	0,60	30	18,00	90 000
	б) сало	*kg.*	0,30	60	18,00	90 000
	в) масло	*kg*	0,10	60	6,00	30 000
	г) сирење	*kg*	0,20	100	20,00	100 000
	д) сол, вода и друго			0,40	0,40	2 000
2.	Амортизација – дир. трош.				1,40	7 000
3.	Бруто плати на изработка	*min*	24	0,90	21,60	108 000
4.	Општи трошоци на изработка				3,24	16 200
5.	Општи трошоци на менаџмент и администрација				2,592	12 960
	Цена на чинење и вредност на производството				91,232	456 160

Калкулациите се изработени на следниот начин:

Најнапред се внесени директни трошоци и тоа: прво нормативите за потрошок на материјал и нормативите на трудот за единица производ. Потоа се помножени предвидените материјали што се трошат за единица производ со предвидените (планирани) цени, добиени се трошоци за единица производ кои се помножени по предвиденото (планирано) производство и е добиен вкупниот износ на трошоци за целото производство на производот.

Општите трошоци за изработка прво се распределени по производи според бруто плати за изработка со клуч кој е изнајден по формулата:

$$K = \frac{\sum T}{\sum \Phi} = \frac{64\,200}{428\,000} = 0{,}15$$

Општи трошоци за кроасан Ф x K = 320.000 × 0,15 = 48 000 денари

Општи трошоци за бурек Ф x K = 108.000 × 0,15 = 16 200 денари

Вкупно 64 200 денари

На ист начин се врши распределба на општите трошоци на менаџментот и администрацијата:

$$K = \frac{\sum T}{\sum \Phi} = \frac{51360}{428\,000} = 0{,}12\,.$$

Општи трошоци за кроасан Ф x K = 320 000 × 0,12 = 38 400 денари

Општи трошоци за бурек Ф x K = 108 000 × 0,12 = 12 960 денари

Вкупно 51 360 денари. ♦

Добиените износи се внесуваат во вредноста на целото производство на секој производ, потоа се делат со предвидените единици за производството и се добива вредност за единица производ. На крајот со собирање е добиена цената на чинење и вредноста на предвиденото количество производ.

Задачи за самостојна работа

1. Кои услови треба да се исполнат за примена на претходна калкулација?

2. Како се распределуваат индиректните трошоци по оваа метода?

3. Во една слаткарница се произведуваат два производи - торти и колачи. За производството во слаткарницата во 2009 година постојат следните податоци:

1. Предвидено е да се произведе во текот на годината $30000 kg$ торти и $20000 kg$ колачи;

2. Пресметани се нормативи за потрошувачка на материјали со предвидени (плански) цени.

Р. бр.	Назив на материјалот	Нормативи и плански цени за			
		Торти		Колачи	
		kg	Цена	*kg*	Цена
1.	Брашно	0,60	24	0,60	22
2.	Јајца	0,05	16		
3.	Масло	0,40	48	0,50	44
4.	Ореви	0,08	32	0,03	28
5.	Чоколадо	0,60	40		

3. Утврдени се норми на трудот и тоа:

- За изработка на $1kg$ торта 10 минути со бруто платите за 1 час 36 денари и

- За изработка на $1kg$ колачи 12 минути, со бруто плата за 1 час 48 денари;

4. Амортизација како директен трошок за тортите – 60000 денари, за колачите - 40000 денари.

5. Од искуство во пекарницата е утврдено дека општите трошоци на изработка за една година изнесуваат 111600 денари, додека општите трошоци на менаџмент и администрација изнесуваат 148000 денари.

Основа за распределба на општите трошоци се бруто платите за изработка.

Да се состават претходни (плански) калкулации за двата производи.

4. 4. Метод за пресметка на калкулација по постојани (нормални) трошоци

1. За пресметка по постојани (нормални) трошоци.

Претпријатието XX во 2009 година има остварени фактички (стварни) општи трошоци и тоа:

Тримесечје	Стварни општи трошоци (денари)	Извршени работни часа
Прво	27 000	100
Второ	29 000	120
Трето	28 500	128
Четврто	30 000	100
Вкупно	114 500	448

Во претходните три години трошоците изнесувале:

Година	Стварни општи трошоци	Извршени работни часа
2003	115 000	540
2004	110 000	460
2005	112 590	350
Вкупно:	337 590	1 350

Утврдени се нормативи за директни трошоци по производи и тоа за производ А - 500 денари по килиграм и за производ Б - 400 денари по килиграм. Утврдено е норма време за производство на производ А - 30 минути и за производ Б - 45 минути. Да се утврди цената на чинење на производите.

Предвидено е да се произведат од производот А - $300kg$ и од производот Б - $400kg$.

Се напоменува дека се земени и утврдени статистички вредности сведени на исти услови за стопанисување, а истите не се актуелизирани, бидејќи се предвидува дека во наредниот период нема да има значајни промени.

Да преминеме на решавање на поблемот.

Најнапред се изготвува табела за изнаоѓање на просечни годишни општи трошоци и просечно извршени часови и тоа:

Потрошувачко место	Општи трошоци по години			Вкупно	Просечно годишни општи трошоци
	2003	2004	2005		
Претпријатие	115 000	110 000	112 590	337 590	112 530
Вкупно:	115 000	110 000	112 590	337 590	112 530

Пресметка за извршените работни часови по години и просечни годишни часови

Потрошувачко место	За извршени часови по години			Вкупно	Просечни годишни часови
	2003	2004	2005		
Претпријатие	540	460	350	1 350	450
Вкупно:	540	460	350	1 350	450

Потоа ја утврдуваме калкулативната норма по формулата:

$$КН = \frac{ФТ}{Фч}$$

$$КН = \frac{112.530}{450} = 250 \text{ денари/парче}$$

ФТ – просечни годишни општи трошоци
КН - просечни трошоци
Фч - просечни часови труд

Исто така се пресметува и предвидената нормална цена на чинење со утврдени нормални трошоци и тоа:

Калкулација 3
по стални нормални трошоци за 2009 година

Ред. бр.	Опис	Производ -А		Производ -Б		Вкупно
		за 1 *kg*	300 *kg*	за 1 *kg*	400 *kg*	
1.	Директни трошоци	500	150 000	400	160.000	310 000
2.	Нормални општи трошоци	125	37 500	188	75 200	112 700
	Нормална цена на чинење	625	187 500	588	235 200	422 700

Нормалните трошоци се утврдуваат на следниот начин: калкулативната норма (250 ден.) се дели со 60 (минути во еден час), се добива вредност за 1 минута 4,17 денари. Овој производ се множи со минутите што се предвидени да се вложат за секој производ (А = 30 × 4,17 = 125) и (Б = 45 × 4,17 = 588) и се добиваат нормалните општи трошоци.

Вака утврдената нормална цена на чинење служи за:
- Донесување на одлуки при продажба на производите и
- За споредување на стварните трошоци по единица учинок (стварна цена на чинење) при анализа на работењето.

На крајот на годината се прави - пресметка за компарација на стварните и нормалните општи трошоци

Пресметка на стварните и нормалните општи трошоци
за 31.12.2009 година

Тримесечје	Реални општи трошоци	Пресметани нормални трошоци (саати x250)	Разлика отстапување	Реален број саати	Реални општи трошоци по саат
1	27 000	25 000	–2 000	100	270
2	29 000	30 000	+1 000	120	242
3	28 500	32 000	+3 500	128	223
4	30 000	25 000	-5 000	100	300
	114 500	112 000	-2 500	448	256

(+) Значи успех (снижување на трошоците)

(–) Значи неуспех (зголемување на трошоците) ♦

Ако се додадат реалните општи трошоци, на директните трошоци по единица производ, се добива реална нормална цена на чинење.

Висината на реалните трошоци по саат е различна поради различните влијанија, а првенствено поради влијанието на фиксните трошоци на вкупните трошоци. Носителите на трошоци секогаш се оптоваруваат со општи трошоци, сразмерно со основата на вложени саати за соодветниот носител на трошок. Овде нема распоредување на реалните општи трошоци по носители на трошоци.

Оваа варијанта овозможува:

- Брзо распоредување на општите трошоци по носители на трошоци, во најкратко време по истекот на пресметковниот период;

- Анализа на отстапувањата и перманентно изнаоѓање на факторите кои делувале за појавата на отстапувањата. Оние фактори што делуваат позитивно се стимулираат, а оние што делуваат негативно се отклонуваат или се ограничува нивното делување.

Кога се појавуваат поголеми разлики може да дојде и до промена на калкулативните норми, но тоа не е пожелно.

Разликата што ќе се појави се распределува (во нашиот случај - 2.500 денари) по носители на трошоци на крајот на годината, посредно само за да би ја утврдиле разликата помеѓу настанатите трошоци и постигнатите продажни вредности.

Оваа варијанта делумно овозможува контрола на трошоците, бидејќи контролата зависи во најголема мера од утврдувањето на калкулативните норми. Исто така, оваа варијанта не дава можност за детална анализа на трошоците, како и за разложување на успехот и изнаоѓање од каде потекнува, односно не дава можност да се согледа дали успехот настанал од изменетиот степен на вработеност или од реално снижени трошоци. Затоа, оваа варијанта се применува само заради брзината што се постигнува при правење на пресметка и претставува само една преодна варијанта во развитокот за пресметката на производството.

Задачи за самостојна работа

1. Во што се состои метод за пресметка на калкулација по постојани трошоци?

2. Кои се неговите предности?

3. Претпријатието XX во 2009 година има остварени фактички (стварни) општи трошоци 75 000 денари и 300 извршени работни часови.

Во претходните две години трошоците изнесувале:

Година	Стварни општи трошоци	Извршени работни часа
2007	70 000	280
2008	74 000	320
Вкупно	144 000	600

Утврдени се нормативи за директни трошоци по производи и тоа за производ А - 300 денари по килограм и за производ Б - 200 денари по килограм. Утврдено е норма време за производство на производ А - 20 минути и за производ Б - 40 минути. Да се утврди цената на чинење на производите.

Предвидено е да се произведат $150kg$ од производот А и $180kg$ од Б.

Да се изготви калкулација за постојани трошоци и да се направи компарација на стварните со нормални трошоци.

Се напоменува дека се земени и утврдени статистички вредности сведени на исти услови за стопанисување, а истите не се актуелизирани, бидејќи се предвидува дека во наредниот период нема да има значајни промени.

4. 5. Методи за изготвување на пресметковни калкулации

За изготвување на пресметковна калкулација потребно е исполнување на следните работи:

1. Контрола на работните налози доколку компанијата – претпријатието ги употребува во своето работење. Ако тоа не е случај се врши контрола на останатата

документацијата со цел да се добие претстава за недовршеното производство, за полупроизводите и за довршеното производство.

2. Изготвување на потребни прегледи и усогласување на книговодството на трошоци со останатите книговодства за да се создадат услови за непречено изготвување на пресметковните калкулации. Тоа се постигнува и со:

- Сортирање на работните налози по погони или по други организациски единици, а во рамки на погонот (организациската единица) се сортираат по производи;

- Класифицирање на работните налози по видови (дали одреден работен налог се однесува на завршеното производство, незавршеното производство или пак има завршено и незавршено производство);

- Изготвување на оделни калкулации за секој довршен производ, недовршеното производство и полупроизводите. Доколку компанијата произведува полупроизводи за пазар и за сопствена употреба, се изготвуваат оделни калкулации за едните и за другите. Ако компанијата работи во кооперација со други компании, тогаш за деловите или фазите што ги врши за други компании се прават посебни калкулации. Од оделните калкулации се прави една збирна калкулација за целото производство, за да може да се согледа како работи компанијата како целина. За подетална и попрецизна распределба на трошоците по производи се применуваат различни методи за изготвување на калкулациите и истите може да се групираат во две групи. За нив ќе зборуваме во продолжение.

Задачи за самостојна работа

1. Кои се потребните услови за изготвување на пресметковна калкулација?

2. Кои се видовите на пресметковни калкулации?

3. Кои активности се потребни за изготвување на прегледи и усогласување на книговодството на трошоци со останатите книговодства?

4. 6. Чисто дивизионен метод

Овој метод се користи (применува) во компании – претпријатија кои произведуваат еден производ (електрични централи, циглани, рудници за јаглен).

Како што беше напоменато калкулацијата се изготвува во претпријатија кои произведуваат само еден производ. Постапката се одвива по следниот редослед:

1. Се врши пренесување на трошоците од претходно изготвената планска калкулација во колоната по предвидени (плански) цени;

2. Се внесуваат вредностите на фактички направените трошоци во колоната вкупно по стварни цени;

3. Вкупните трошоци се делат со бројот на произведените единици (10.000 единици) и се добиваат износи по единица производ.

4. Со сумирање на колоната добиена е планска цена на чинење за единица производ и вкупната вредност на производство по стварни цени, односно вкупно направените трошоци за производство на 10 парчиња од производот А.

5. Направено е споредување и изнајдена е разлика помеѓу стварните и однапред предвидените трошоци.

1. Производство на 10 парчиња од производ А

Пресметковна калкулација 4
01.01.2009 до 31.01.2009 година

Р. бр.	Опис	Калкулација за остварен обем на производство			Разлика			
		По плански предвидени цени	По стварни цени		Снижување		Покачување	
		Вкупен износ	За 1 парче	Вкупно	%	Износ	%	Износ
1.	Материјал	105	/	103	/	2	/	/
	- основни	90	8,70	87	/	3	/	/
	материјали	15	1,60	16	/	/	/	1
2.	- помошни	85	8,40	84	/	1	/	/
3.	материјали	20	2,00	20	/	/	/	/
4.	Бруто плати	12	1,40	14	/	/	/	2
5.	Амортизација							
	Општи трош. за							
	израб.	24	2,30	23	/	1	/	/
	Општи трошоци за							
	организација на							
	работа и продажба							
	I. Цена на чинење	**246**	**24,40**	**244**	**/**	**5**	**/**	**3**
6.	Отстапување од постојните цени на материјалите	/	0,20	2	/	2	/	/
	II. Стварна цена на чинење	**246**	**24,20**	**242**	/		/	

 **Задачи за самостојна работа**

1. Во кои случаи се користи чисто дивизионен метод?

2. Која е постапката за изготвување на постапката по чисто дивизионен метод?

3. Кои се предностите од примена на овој метод?

4. 7. Дивизиона калкулација со примена на еквивалентни броеви

Методата на дивизиона калкулација се применува во компании – претпријатија кои произведуваат повеќе производи во различни димензии.

Специфично кај изготвувањето на калкулација по овој метод е што со помош на еквивалентни броеви разни групи производи сродни по својот состав се сведуваат на една група која добива карактер на сметковна единица. Се применува во индустриски компании – претпријатија што произведуваат ламарини, жици, сијалици, стакло, предиво и сл.

Оваа метода го добила називот дивизиона бидејќи постои делење на вкупните трошоци на сметковни единици, за да се добијат трошоци за една сметковна единица, а потоа и на единица производ.

1. Во Погонот за производство на лимови во претпријатието XX Прилеп се произведуваат три видови на лим и тоа: Нм-20, Нм-22 и Нм-24.

Производ	Произведени килограми	Продажна цена (за $1kg$)
1. Лим Нм-20	2 000	5 денари
2. Лим Нм-22	4 000	10 денари
3. Лим Нм-24	6 000	15 денари
Вкупно	12 000	

Од книговодството добиени се следните податоци за направени трошоци за производството:

1. Материјали за изработка	168 000
2. Бруто плати за изработка	22 400
3. Општи трошоци за изработка	8 400
4. Општи трошоци за менаџмент и администрација	25 200
Вкупни трошоци:	224 000

Да преминеме на решавање на проблемот.

Еквиваленитe броеви се изнаоѓаат од различни соодноси: на потрошоците на материјали, на вложените часови труд, на бруто платите за изработка, на предвидените (плански) цени на чинење, на продажните цени.

Во овој пример ќе се земе соодносот на продажните цени на лимовите (основ е продажната цена на лимот Нм 20): 5 : 10 : 15

Ако за основа се земе лимот Нм-20 се добиваат еквивалентни броеви од следните соодноси на продажните цени:

$\frac{5}{5}=1, \quad \frac{10}{5}=2, \quad \frac{15}{5}=3.$

Следи изготвување на преглед во кој се множат еквивалентните броеви со произведените количини производи за да се добијат сметковни единици за секој производ.

Лим	Еквивалентен број	Произведна количина (во *kg*	Сметковни единици	Забелешка
Нм-20	1	2 000	2 000	
Нм-22	2	4 000	8 000	
Нм-24	3	6 000	18 000	
	Вкупно:	12 000	28 000	

Цената на чинење на една сметководна единица е еднаква на:

$$\text{Цена на 1 сметковна единица} = \frac{\Sigma T}{\Sigma CE} = \frac{224\,000}{28\,000} = 8$$

За да се изработи калкулацијата се изготвува:

Помошна табела

Произведена количина	Лим Нм	Еквивалент број	Сметковни единици	Цена на чинење на 1 сметковна единица	Вкупно трошоци по производи	Цена на чинење за 1 *kg*. лим
2 000	20	1	2 000	8		8
4 000	22	2	8 000	8	16 000	16
6.000	24	3	18 000	8	64 000 144 000	24
12 000			28 000	8	224 000	

- Вкупниот износ на трошоците од секој елемент на цената на чинење од калкулацијата се дели со вкупниот број на сметководните единици и се добива износ на трошок за една сметководна единица.

- Добиениот износ на трошоци за една сметководна единица се множи со сметководните единици од секој производ и се добива износ од секој трошок што отпаѓа на секој производ.

Сметковни работи за калкулацијата по видови трошоци:

1. Материјали за изработка 168 000 : 28.000 = 6

- Лим Нм-20 2 000 × 6 = 12 000
- Лим Нм-22 8 000 × 6 = 48 000
- Лим Нм-24 18 000 × 6 = 108 000

Вкупно 168 000

2. Бруто плати за изработка 22 400 : 28.000 = 0.8

- Лим Нм-20 2.000 × 0,8 = 1 600
- Лим Нм-22 8.000 × 0,8 = 6 400
- Лим Нм-24 18.000 × 0,8 = 14 400

Вкупно 22 400

3. Општи трошоци за изработка 8 400 : 28 000 = 0,3

- Лим Нм-20 2 000 ×0,3 = 600
- Лим Нм-22 8 000 × 0,3 = 2 400
- Лим Нм-24 18 000 × 0,3 = 5 400

Вкупно 8 400

4. Општи трошоци за менаџмент и администрација 25 200 : 28 000 = 0,9

- Лим Нм-20 2 000 × 0,9 = 1 800
- Лим Нм-22 8 000 × 0,9 = 7 200
- Лим Нм-24 18 000 × 0,9 = 16 200

Вкупно 25 200

Поединечната цена по производи е добиена со делење на пооделните трошоци за односните производи со произведените количества.

Калкулација 5
за лим Нм-20, Нм-22 и Нм-24 произведен во месец јануари 2009 година

Р. бр.	Елементи на цената	Вкупни трошоци за 28 000 сметк.овни единици	За една сметковна единица	Лим Нм-20 За 1 *kg*	Лим Нм-20 Вкупно 2 000 *kg*	Лим Нм-22 За 1 *kg*	Лим Нм-22 Вкупно 4 000 *kg*	Лим Нм-24 За 1 *kg*	Лим Нм-24 Вкупно 6 000 *kg*
1.	Материјали за изработка	168 000	6,0	6,0	12 000	12,0	48 000	18,0	108 000
2.	Бруто плати за изработка	22 400	0,8	0,8	1 600	1,6	6 400	2,4	14 400
3.	Општи трошоци за изработка	8 400	0,3	0,3	600	0,6	2 400	0,9	5 400
4.	Општи трошоци на менаџмент и администрација	25 200	0,9	0,9	1 800	1,8	7 200	2,7	16 200
	ЦЕНА НА ЧИНЕЊЕ	**224 000**	**8,0**	**8,0**	**16 000**	**16,0**	**64 000**	**24,0**	**144 000**

Задачи за самостојна работа

1. Во кои случаи се применува дивизионата калкулација со примена на еквивалентни броеви?

2. Зошто се нарекува дивизиона метода

3. Што е карактеристично при примена на оваа метода?

4. Во Фабриката за стакло се произведуваат три видови на стакло и тоа: стакло со дебелина од $4mm$, стакло со дебелина од $6mm$ и стакло со дебелина од $8mm$.

Од сметководството се добиени следните податоци за производството:

Производ	Произведени кгр	Продажна цена (за $1kg$)
1. Стакло 4 mm 2. Стакло 6 mm 3. Стакло 8 mm	5 000 10 000 12 000	10 денари 20 денари 30 денари
Вкупно	27 000	

Од книговодството добиени се следните податоци за направени трошоци за производството:

1. Материјали за изработка 2. Бруто плати за изработка 3. Општи трошоци за изработка 4. Општи трошоци за менаџмент и администрација	244 000 183 000 213 500 91 500
Вкупни трошоци:	732 000

За пресметка на еквивалентните броеви да се земе односот на продажни цени (основа на биде цената на стаклото со дебелина од $4mm$).

Да се изготви калкулација за производство на стакло.

4. 8. Дивизиона калкулација за врзани (куплувани) производи

Оваа метода се применува во компании – претпријатија каде од една иста суровина се добиваат (во ист процес) повеќе производи (воденици, кланици, хемиска индустрија, преработка на нафта, фабрика за шеќер, фабрика за масло).

При примената на овој метод постојат повеќе начини за работа:

1. Кога се применуваат материјални показатели како основа за распределба: килограми, метри, тони, калорична вредност, специфична тежина и сл. Овој начин е застарен и денес повеќе многу ретко се употребува, бидејќи дава неточни резултати (показатели).

2. Кога се применуваат вредносни показатели:

- Со делење на производството на главни и споредни производи, т.е. за едните, обично за споредните, се определува пазарна предвидена (планска) цена и се смета дека таа е еднаква на цената на чинење на тие производи. Така, се одземаат трошоците за овие производи, а остатокот се смета дека е за главниот производ. Во овој случај позитивниот или негативниот финансиски резултат се покажува само кај главните производи;

- Кога не се применува поделба на производите, туку пропорционално утврдување на цената на чинење на секој производ. Овој начин е сличен со методот за изработка на калкулација со примена на еквивалентни броеви.

Ќе го илустрираме со пример методот со делење на производите на главни и споредни.

1. Во една фабрика се произведува еден главен производ - леб и два споредни производи – ѓеврек и кифла. За преработка на $6000kg$ брашно направени се трошоци 90000 денари. Од $6000kg$ брашно добиени се $4000kg$ леб, $200kg$ ѓеврек и $600kg$ кифли.

За ѓеврекот и кифлите како споредни производи се одредени цени и тоа:

- ѓеврек 20 денари за $1kg$ и
- кифли 10 денари за $1kg$.

Калкулација 6
за производство на леб, ѓевреци и кифли за месец јануари 2009 година

Споредни производи	Вредност на споредните производи			Вредност на целото производство по цена на чинење	Остаток на трошоците за главниот производ – шеќер
	Количина тони	Цена	Износ		
Ѓеврек Кифли	200 600	20 10	4 000 6 000		
Вкупно:			10 000	90 000	80 000

Цената на чинење на лебот: 80 000 : 4.000 = 20 денари за $1kg$.

Задачи за самостојна работа

1. Во кои компании се применува оваа метода?

2. Кои начини се користат при нејзината примена?

3. Кога се применуваат материјални показатели, како се одвива пресметката?

4. Кога се применуваат вредносни показатели, како се одвива постапката?

5. Во една фабрика се произведува еден главен производ - платно и три споредни производи – панталони, блузи и здолништа. За преработка на $12000m$

платно направени се трошоци 120000 денари. Од 12000m платно добиени се 2000 пара панталони, 3000 блузи и 2000 здолништа.

За споредните производи се одредени цени и тоа:

- панталони 200 денари за 1 пар,
- блузи 300 денари за 1 парче и
- здолништа 150 денари за 1 парче.

Да се изготви калкулација за производството на споредни производи.

4. 9. Процентна метода за пресметка цена на чинење

1. Кланицата Сточар Скопје купила 300 овци со вкупна тежина (жива мера) од 5000kg по цена од 130 денари за 1kg. За колење на овците направени се следните трошоци:

- електрична енергија	5 000 денари
- амортизација	6 000 денари
- бруто плати за изработка	14 000 денари.
Вкупно	25 000 денари

Општите трошоци за изработка изнесуваат 5000 денари, додека општите трошоци за менаџмент и администрација изнесуваат 20000 денари. Вредноста на споредните производи (кожа, волна) изнесува 137500 денари.

Со преработка се добиени следните главни производи:

- месо 2000kg
- овчо сало 500kg
- млечна маст 250kg.

Цената на месото на пазарот е за 50% повисока од цената на салото и маста.

Да се изнајдат поединечните цени на главните производи и да се спроведе соодветна сметководствена евиденција.

Имаме:

5 000 kg × 130 денари = 650 000 денари

650 000 денари + 25 000 денари + 5 000 денари + 20 000 денари = 700 000 денари

Цената на чинење на основните производи се добива кога од вкупните трошоци се одбива цената на чинење на споредните производи, односно

700 000 – 137 500 = 562 500 денари.

Следува пресметка на поединечните цени на главните производи:

100 : 100 = 1 (сметковна единица на салото и маста)

100 + 50 = 150 : 100 = 1,5 (сметковна единица на месото)

Вредност на сметковна единица $= \dfrac{\Sigma T}{\Sigma CE} = \dfrac{562\,500}{3\,750} = 150$ денари.

1. Месо   2 000 × 1,5 = 3 000 × 150 = 450 000 : 2 000 = 225 денари

2. Сало   500 × 1 = 500 × 150 = 75 000 : 500 = 150 денари

3. Маст   250 × 1 = 250 × 150 = 37 500 : 250 = 130 денари.

Вкупно   3 750   562 500. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кога се применува процентната метода?

2. Како се паспределуваат општите трошоци при нејзина примена?

3. Претпријатието Мрамор набавило 15 тони мермер по цена од $50\,000$ денари за 1 тон. За преработка на мермерот направени се вкупно трошоци за $15\,000$ денари.

Со преработка се добиени следните главни производи:

- ѕидни плочки   2 500 парчиња
- подни плочки   1 500 парчиња.

Вредноста на споредните производи (терацо, камен) изнесува $100\,000$ денари.

Цената на ѕидните плочки на пазарот е 50% повисока од цената на подните плочки.

Да се изнајдат поединечните цени на главните производи.

4. 10. Задачи за вежбање

1. Во претпријатието XX се произведуваат два производи - млечно чоколадо и чоколадо за готвење. Од сметководството се добиени податоци за производството во 2009 година и тоа:

1. Предвидено е во текот на годината да се произведе $20\,000 kg$ млечно чоколадо и 4 000 kg чоколадо за готвење;

2. Пресметани се нормативи за потрошувачка на материјали со предвидени (плански) цени.

Р. бр.	Назив на материјалот	Нормативи и плански цени за			
		Млечно чоколадо		Чоколадо за готвење	
		kg/парче	Цена	kg /парче	Цена
1.	Какао	0,70	28	0,60	30
2.	Шеќер	0,30	60	/	/
3.	Масло	0,10	60	0,10	60
4.	Путер	/	/	0,20	100
5.	Ванила	1,00	0,70	1,00	0,60

3. Утврдени се норми на трудот и тоа:

- За изработка на $1kg$ млечно чоколадо, 16 минути со бруто платите за еден час 36 денари и

- За изработка на $1kg$ чоколадо за готвење 48 минути, со бруто плата за 1 час 48 денари;

4. Амортизација како директен трошок за млечното чоколадо – 25 000 денари, за чоколадото за готвење – 28 000 денари.

5. Од искуство во слаткарницата е утврдено дека општите трошоци на изработка за една година изнесуваат 69 120 денари, додека општите трошоци на менаџмент и администрација изнесуваат 103 680 денари.

Основа за распределба на општите трошоци се бруто платите за изработка.

Да се состават претходни (плански) калкулации за двата производи

2. Во Фабриката за текстил се произведуваат три видови на конци, конец со дебелина од $34mm$, конец со дебелина од $40mm$ и конец со дебелина од $50mm$.

Од сметководството се добиени следните податоци за производството:

Производ	Произведени кгр	Продажна цена (за 1 kg)
1. Конец 34 mm	10 000	10 денари
2. Конец 40 mm	18 000	25 денари
3. Конец 50 mm	24 000	35 денари
Вкупно:	52 000	

Од книговодството добиени се следните податоци за направени трошоци за производството:

1. Материјали за изработка	556 000
2. Бруто плати за изработка	347 500
3. Општи трошоци за изработка	486 500
4. Општи трошоци за менаџмент и администрација	278 000
Вкупни трошоци:	1 668 000

За пресметка на еквивалентните броеви да се земе односот на продажни цени (основа на биде цената на конецот со дебелина од 34 mm).

Да се изготви калкулација за производство на конецот.

3. Кланицата Сточар купила 80 свињи со вкупна жива мера од $15000 kg$ по цена од 60 денари за килограм. За колење на свињите се направени следните трошоци:

- електрична енергија 3 000 денари
- амортизација 5 000 денари
- бруто плати за изработка 45 350 денари.

Општите трошоци за изработка изнесуваат 4000 денари, додека општите трошоци за менаџмент и администрација изнесуваат 15000 денари. Вредноста на споредните производи (кожа, волна) изнесува 136724 денари.

Со преработка се добиени следните главни производи:

- Месо $8000 kg$
- Сланина $3000 kg$
- Сало (маст) $1300 kg$

Цената на сланината на пазарот е за 35% повисока од цената на месото, додека цената на салото е за 53% пониска од цената на месото.

Да се изнајдат поединечните цени на главните производи.

Решенија и одговори на задачите

1.1.

2. Да. **5.** а) -31, б) 7.

1.2.

1. а) -31, б) 7, в) 43. **2.** а) 158, б) 75. **3.** $R(-1)=-4$, $R(4)=0$. **5.** а) $a_0=-4,\ b_0=0,\ b_2=-2,$ $b_3=1$, б) $A=2, C=-1, D=3, F=-5,$ в) $a=3, C=-2.$

1.3.

1. $P(x)+Q(x)=2x^3-3x+5.$ **2.** $-P(x)=-2x^3+x^2-4$ и $-Q(x)=-x^2+3x-1.$

3. а) $3x^6-11x^5+22x^4-17x^3+18x^2-23x+5,$

б) $P(x)\cdot Q(x)=6x^6-7x^5+16x^4-20x^3+10x^2-17x+4.$

4. а) $x^6-2x^5-5x^4+4x^3-4x^2+x+2$, б) $x-3x-2x+12x-8$,

в) $x^5-x^4-9x^3-23x^2+24x+36$. **5.** а) x^6+x^5+x+1, б) $x^5+x^4+6x^3+10x^2+6x$.

1.4.

1. $q(x)=x^2+3x-4, r(x)=2x-7$. **2.** а) $q(x)=2x^2+3x+11, r(x)=25x-6$, б) $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$, $q(x)=\frac{16}{9}x-\frac{32}{9}$, в) $q(x)=x^3+4x^2-4x-2$, $r(x)=6x+5$. **3.** $q(x)=2x^3+5x^2+13x+42$, $r(x)=127$. **4.** а) $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$, $r(x)=-322$, б) $q(x)=x^3-2x^2-2x$, $r(x)=-1$. **5.** -2.

1.5.

1. а) да, б) да, в) не, г) да. **3.** а) не, б) не, в) да, г) да. **4.** $a=-43, b=66$.

5. $q(x)=x^{2k}+x^{2k-1}a+...+a^{2k}$.

1.6.

1. Од дадените броеви нули на $f(x)$ се -2,1 и 2. **2.** Бројот -1 е заедничка нула на $f(x)$ и $g(x)$, бројот 3 е нула само на $f(x)$, а бројот 2 не е нула на ниту еден од полиномите. **3.** Бројот -2 е трикратна нула на $f(x)$. **4.** Не, $x=3$ е нула со кратност 6. **5.** Да.

1.7.

1. $m=-3, n=-2.$ **2.** При услов $a=-c-1, b=c$. **3.** $a=3, b=-4$. **4.** $a=3, b=-2$.

1.8.

1. $x^3-x^2-4x+4.$ **2.** $x^4-5x^3+x^2+5x-6$. **3.** $x_1=-\frac{3b}{a},\ x_2=x_3=-\frac{3b}{2a},$ при услов $4a+27b=0$. **4.** $a=1, b=-2$.

1.9.

1. а) $x^4-6x^3+18x^2-30x+25$, б) x^4+4. **2.** $(x-2i)^3(x+2i)^3x^2=x^2(x^2+4)^3$.
3. x^3-3x^2+4x-2. **4.** $x(x^2+1)(x^2+2)$. **5.** $x^5(x^2+1)^3$.

1.10.

1. а) 2 и –3, б) 3, 2 и –2. **2.** а) $-\frac{1}{3}$, б) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$. **3.** а) $(3x-1)(x+2)(x^2+3)$, б) $(x-2)^2(x+1)^2$, в) $(x+1)(x-1)(x+2)(x^2+1)$. **4.** Нека $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. Тогаш $f(x)-f(y)=a_n(x^n-y^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-y^{n-1})+...+a_1(x-y)$ се дели со $x-y$, бидејќи x^n-y^n, $x^{n-1}-y^{n-1}$,..., $x-y$ се деливи со $x-y$. **5.** Да претпоставиме дека постои полином таков што $f(a)=b, f(b)=c$, $f(c)=a$. Тогаш според претходната задача добиваме дека $c-b=k_1(b-a)$, $a-c=k_2(c-b)$ и $b-a=k_3(a-c)$, каде k_1,k_2,k_3 се цели броеви. Ако ги помножиме овие три равенства, добиваме $(c-b)(a-c)(b-a)=k_1k_2k_3(b-a)(c-b)(a-c)$, односно $k_1k_2k_3=1$. Бидејќи k_1,k_2,k_3 се цели броеви, тогаш мора $k_1=k_2=k_3=1$ или два од нив да се еднакви на –1, а третиот да е еднаков на 1. Ако некој од броевите k_1,k_2,k_3 е еднаков на -1, на пример $k_1=-1$, тогаш следува дека $a=c$, што е во контрадикција со условот на задачата. Ако пак $k_1=k_2=k_3=1$, тогаш добиваме $b=\frac{1}{2}(a+c)$, $c=\frac{1}{2}(a+b)$ и $a=\frac{1}{2}(b+c)$. Но ова не е можно бидејќи ако, на пример, a е најголемиот од трите различни броја, тогаш важи $a>\frac{1}{2}(b+c)$, а не $a=\frac{1}{2}(b+c)$.

1. 11.

1. $P(x)+Q(x)=2x^4+2x^3-9x^2+5x$, $P(x)-Q(x)=2x^4-2x^3+6x^2+5x-8$. **2.** 10. **3.** Збирот на коефициентите е еднаков на 0 повлекува дека $P(1)=0$. Затоа и $(PQ)(1)=P(1)Q(1)=0$, па збирот на кеофициентите на полиномот PQ е исто така еднаков на 0. **4.** $a=1$. **5.** а) $3x^4+15x^2+12$, б) $3(x^4+5x^2+4)^2$. **6.** $x^2(x^2+4)^3$. **7.** $x^3+(1-4i)x^2-(7+3i)x-2+6i$. **8.** а) $(x-2)(x+1)(x^2+3)$, б) $x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+1)$. **9.** 0, 1 и –2. **10.** $a=1, b=0$.

2.1.

1. Симетрични се равенките под а), б) и в). **2.** $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_3=-3.$ **3.** $x_1=1,$ $x_2=-\frac{3}{5},\ x_3=-\frac{5}{3}.$ **4.** $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=-2.$ **5.** $x_1=1,\ x_{2,3}=\frac{-2\pm i\sqrt{5}}{3}.$ **6.** $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2},$

$x_3 = 3,\ x_4 = \frac{1}{3}.$ **7.** $x_{1,2} = \pm 1,\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_{3,4} = \frac{4}{3}.$ **8.** $x_{1,2} = \pm 1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = -2.$ **9.** $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2},$ $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

2.2.

1. Биномни се равенките под а), б), г) и д). **2.** $x_{1,2} = \pm i\sqrt{2}i.$ **3.** $x_{1,2} = \pm\frac{5}{6}.$ **4.** $x_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2}{5}}.$

5. $x_1 = 2,\ x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$ **6.** $x_1 = \frac{4}{3},\ x_{2,3} = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{3}.$ **7.** $x_1 = \frac{2}{5},\ x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{5}.$

8. $x_{1,2} = \pm 3,\ y_{3,4} = \pm 3i.$ **9.** $y_{1,2} = \pm\frac{5}{2},\ y_{3,4} = \pm\frac{5i}{2}.$ **10.** $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{3},\ x_{3,4} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{3}.$

2.3.

1. Триномни се равенките под а), г) и д). **2.** $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{3},\ x_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{3},\ x_{5,6} = \pm\sqrt[4]{2},$ $x_{7,8} = \pm i\sqrt[4]{2}.$ **3.** $x_{1,2} = \pm 2,\ x_{1,2} = \pm 2i,\ x_{5,6} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2},\ x_{7,8} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$ **4.** $x_1 = -\frac{1}{2},$ $x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4},\ x_4 = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ x_{5,6} = \sqrt[2]{2}\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}\right).$ **5.** $x_1 = 1,\ x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ x_4 = 2,$ $x_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}.$ **6.** $x_{1,2} = \pm i\sqrt{2},\ x_{3,4} = \pm i\sqrt{5}.$ **7.** $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm 2.$ **8.** $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm\frac{1}{4}.$

9. $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{5}.$ **10.** $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{10}{3}}.$ **11.** $x_{1,2} = \pm i,\ x_{3,4} = \pm 2i.$ **12.** $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm 3.$ **13.** $x_{1,2} = \pm 5\ \ x_{3,4} = 2.$

2.4.

1. Биквадратни се равенките под а), б), г) и д). **2.** а) $x_{1,2} = \pm 3,\ x_{3,4} = \pm 1,$ б) $x_{1,2} = \pm 2,$ $x_{3,4} = \pm\sqrt{5},$ в) $x_{1,2} = 0,\ x_{3,4} = \pm 2.$ **3.** а) $x_{1,2} = \pm 3,\ x_{3,4} = \pm 2i,$ б) $x_{1,2} = \pm i,\ x_{3,4} = \pm 2i,$ в) $x_{1,2} = 0,\ x_{3,4} = \pm i.$ **4.** а) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0,$ б) $4\left(y + \frac{5}{2}\right)\left(y - \frac{5}{2}\right)(y+1)(y-1).$

5. а) $\frac{x^2+4}{x^2-9},\ x \neq \pm 2,$ б) $\frac{x^2-3}{x^2-9},\ x \neq \pm 2\sqrt{2}.$

2.5.

1. а) 7, б) 0, в) 1, г) $-2b^3$, д) 1, ѓ) 2, е) $3abc-a^3-b^3-c^3$, ж) $x^3+y^3+z^3-3xyz$. **2.** $x_1=3,\ x_2=-3$. **3.** $x_1=0,\quad x_2=1$. **4.** $x_1=-2,\ x_2=-\sqrt{5},\quad x_3=\sqrt{5}$. **5.** $x_1=2,\quad x_1=3$. **6.** $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=0$. **7.** $x_1=0,\ x_2=a+b$. **8.** $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. **9.** $x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.
10. $x\in(-7,1)$.

2.6.

1. а) $x=2,\quad y=1$; б) $x=5,\quad y=-3$; в) $x=1$, $y=\frac{1}{5}$. **2.** а) Системот е противречен, б) Системот има бесконечно многу решенија, решение е секој пар броеви $x=t$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(t-1)$, каде што $t\in\mathbb{R}$, в) За $k\neq 2$ системот е противречен, а за $k=2$ тој има бесконечно многу решенија. **3.** а) За произволно a и $b\neq -3$; б) За $a=2$ и $b=-3$; в) За $a\neq 2$ и $b=-3$. **4.** $k=9$. **5.** $k=2$.

2.7.

1. $(1,-2,1)$. **2.** Нема решение. **3.** $x=\frac{5}{11}(1-t)$, $y=\frac{1}{11}(9+13t)$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$.
4. Детерминантата на системот е $\Delta=-a^2+3a-3\neq 0$ за секој $a\in\mathbb{R}$. Системот има единствено решение: $x=\frac{a^2-2a+2}{a^2-3a+3}$, $y=\frac{-1}{a^2-3a+3}$, $z=\frac{5a+38}{2(a+2)}$, каде што a е параметар.
5. а) За $a=2$ системот има бесконечно многу решенија; б) за $a=-2$ системот нема решение; в) За $a\neq 2$ и $a\neq -2$ системот има единствено решение $x=\frac{35}{2(a+2)}$, $y=\frac{21}{2(a+2)}$, $z=\frac{5a+38}{2(a+2)}$.

2.8.

1. $x=2t,\ y=-3t,\quad z=5t,\quad t\in\mathbb{R}$. **2.** Бидејќи $\Delta\neq 0$, системот нема ненулти решенија. Значи $(0,0,0)$ е единствено решение. **3.** $a=-3$. **5.** Имаме $\Delta=(a-1)^2(a+2)$, па $a\in\{1,-2\}$.

2.9.

1. Равенките под а) и в). **2.** а) $(1,1)$, $\left(\frac{9}{14},-\frac{1}{14}\right)$, б) $(-1,2)$, $\left(\frac{59}{29},-\frac{52}{29}\right)$. **3.** а) $(1,2)$, б) $(-6,-2)$, $(-4,-4)$. **4.** а) $\varnothing$, б) $(-1,0)$, $\left(\frac{13}{4},\frac{51}{8}\right)$.

2.10.

1. Системот под а). **2.** а) $(\sqrt{5},\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5},-\sqrt{5})$, $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},\sqrt{2})$, б) $(4,2)$, $(-4,-2)$, $\left(3\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\frac{5}{3}},-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. **3.** а) $(1,2)$, $(-1,-2)$, $\left(\frac{5}{2\sqrt{262}},\frac{43}{2\sqrt{262}}\right)$, $\left(-\frac{5}{2\sqrt{262}},-\frac{43}{2\sqrt{262}}\right)$, б) $(3,1)$, $(-3,-1)$, $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},\sqrt{2})$. **4.** Системот под а). **5.** а) $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,1)$, $(1,-2)$, б) $(1,5)$, $(5,1)$, $(-1,-5)$, $(-5,-1)$, в) $(1,3)$, $(3,1)$, г) $(2,1)$, $(1,2)$, $(1,-3)$, $(-3,1)$.

2.11.

1. $\begin{cases} x-y=9 \\ 3x+9y=2 \end{cases}$, $x\geq 0,\ y\geq 0$, $\begin{cases} x-y=9 \\ -3x+9y=2 \end{cases}$, $x<0,\quad y\geq 0$, $\begin{cases} x+y=9 \\ 3x+9y=2 \end{cases}$, $x\geq 0,\quad y<0$, $\begin{cases} x+y=9 \\ -3x+9y=2 \end{cases}$, $x<0,\ y<0$. **2.** $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+3y^2=9 \end{cases}$, $x\geq -y$, $\begin{cases} -x-y=7 \\ x^2+3y^2=9 \end{cases}$, $x<-y$.
3. $\begin{cases} 2x^2-y^2+x+y=12 \\ x^2+5xy+3y^2=0 \end{cases}$, $x\geq 0$, $\begin{cases} 2x^2-y^2-x+y=12 \\ x^2+5xy+3y^2=0 \end{cases}$, $x<0$. **4.** $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. **5.** $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **6.** $\varnothing$.

2.12.

1. Да. **2.** а) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, б) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, в) $\varnothing$. **3.** а) $(-\infty,-5]$, б) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$, в) $[-2,1]$. **4.** $(-3,1)$. **5.** $[1,14]$.

2. 13.

2. а) $(-3\sqrt{3},0]\cup\left[\frac{8}{3},3\sqrt{3}\right)$, б) $(-\infty,-13)\cup(-2,4)\cup(11,+\infty)$, в) $(-9,-1)\cup(5,10)$,

3. а) $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{2}{3},4\right)\cup(4,+\infty)$, б) $[-3,2]\cup(4,7)$, в) $\varnothing$. **4.** а) $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, б) $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, в) $\mathbb{R}$. **5.** $m\in(-6,6)$.

2.14.

1. Вредноста на должината на страната на квадрат е во интервалот $(0,3)$. **2.** Меѓу втората и шестата секунда. **3.** а) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$, б) $\left(-\infty,-\frac{3}{7}\right)\cup\left(-\frac{3}{7},\infty\right)$, в) $\varnothing$, г) $\left(-\infty,\frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5},\infty\right)$. **4.** а) $(-\infty,-3]\cup[-2,2]\cup[3,+\infty)$, б) $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$, в) $(1,3)$, г) $[-7,1]\cup[2,3]$. **5.** Броевите се 3 и 4.

2.15.

1. а) $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=-2$, б) $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{4}{3}$. **2.** а) $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$, б) $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=2$, $x_4=\frac{1}{2}$. **3.** а) $x_1=\sqrt[3]{2}$, $x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, б) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$, в) $x_1=\frac{4}{3}$, $x_{2,3}=\frac{-2\pm i2\sqrt{3}}{3}$. **4.** а) $x_{1,2}=\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$, $x_{3,4}=-2\pm i2$, б) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 3i$, в) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{\frac{17}{11}}$, $x_{1,}=\pm\sqrt[4]{\frac{17}{11}}$. **5.** а) $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{2}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{5,6}=\frac{-3\pm i3\sqrt{3}}{4}$, б) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{4}$, $x_{3,4}=\frac{3\pm i3\sqrt{3}}{4}$, $x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$. **6.** а) $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=3$, $x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{3}$, $x_{5,6}=\frac{-3\pm i3\sqrt{3}}{2}$, б) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$, $x_{5,6}=\pm i$, $x_{7,8}=\pm 2i$. **7.** а) $x_{1,2}=\pm 2i$, $x_{3,4}=\pm 6i$, б) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{3}$. **8.** а) $\frac{9x^2-4}{4x^2-1}$, б) $\frac{x^2-1}{x^2-25}$. **9.** 0. **10.** а) $x_1=3$, $x_2=2$; б) $x_1=-1$, $x_2=-2$; в) $x_1=a$, $x_2=b$. **11.** а) $x^2+y^2+z^2+1$, б) 0, в) ax^2+bx+c. **12.** а) $x=1$, $y=5$, б) Системот има бесконечно многу решенија, $x=t$, $y=\frac{2}{3}t$. **13.** а) $m\neq -4$, б) $m=-4$, $n\neq 10$, в) $m=-4$, $n=10$. **14.** а) $x=8$, $y=4$, $z=2$, б) $x=1$, $y=2$, $z=3$, в) $\varnothing$. **15.** Упатство: а) Реципрочните вредности на $x+y+z$, $y-2x$ и $3z-y$ замени ги со u,v и w, $x=3$, $y=2, z=1$, б) $x=4$, $y=2, z=1$. **16.** а) $x=2t$, $y=-3t$, $z=5t$, $t\in\mathbb{R}$; б) Бидејќи $\Delta\neq 0$, системот има само тривијално решение. **17.** а) $(1,1)$, $\left(\frac{9}{14},-\frac{1}{14}\right)$, б) $(-1,2)$, $\left(\frac{59}{29},-\frac{52}{29}\right)$. **19.** а) $(1,3)$, $(-1,-3)$, $\left(\sqrt{\frac{19}{3}},\sqrt{\frac{19}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{19}{3}},-\sqrt{\frac{19}{3}}\right)$, б) $(1,1)$, $(-1,-1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$. **20.** а) $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2},\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2},\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$, б) $(\sqrt{2},2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2},2\sqrt{3})$, $(\sqrt{2},-2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2},-2\sqrt{3})$. **21.** а) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, б)

$(1{,}1)$, $(-1{,}-1)$, $(-1{,}1)$, $(1{,}-1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-3\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

22. а) $\left[-\frac{5}{8},-\frac{1}{8}\right)$, б) $\left(\frac{1-\sqrt{311}}{2},\frac{1+\sqrt{311}}{2}\right)$, в) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$, **23.** а) $0 \le x \le 4$, б) $-1 < x < 1$, в) $(-\infty,-4)\cup(-1{,}2)\cup(7{,}8)$. **24.** а) $-6 < x < 2$, б) $-6 < x < -2$. **25.** а) $(-\infty,-3)\cup\left(-2,-\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$, б) $[-4,-3]\cup(0,+\infty)$. **26.** $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1{,}2)$.

27. Должината на страната е помала од $4\sqrt{3}$. **28.** Годишната стапка е најмалку 5%. **29.** Броевите се 7 и 9.

3.1.

1. Идентитети се равенките под а), в) и г). **2**. а) Линеарна равенка со една непозната; б) Квадратна равенка со две непознати; в) Кубна равенка со една непозната; г) Квадратна равенка со три непознати. **3**. Еквивалентни равенки се равенките под а) и б). **4**. Во нормален вид е равенката под в). **5.** а) $3x-2=0$; б) $4x+5=0$; в) $7x-34=0$.

3.2.

1. $x=1$. **2**. $x=\frac{7}{11}$. **3**. $x=\frac{13}{3}$. **4**. $x=-2$. **5**. $x=1$. **6**. $\{(\alpha,\alpha-1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$.
7. $\left\{\left(\alpha,\frac{3-\alpha}{6}\right) \middle| \alpha\in\mathbb{R}\right\}$. **8**. $\{(\alpha,28\alpha+14) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$.

3.3.

1. $x=3$; **2**. $x=-2$; **3**. $\varnothing$; **4**. $x=-2$; **7**. x_2 оската.

3.4.

1. а) Линеарна неравенка со една непозната; б) Квадратна неравенка со една непозната; в) Квадратна неравенка со две непознати; г) Квадратна неравенка со три непознати. **2**. а) не; б) да; в) да. **3**. Еквивалентни неравенки се неравенките под а), б) и г). **4**. Во нормален вид се неравенките под б) и в). **5**. а) $2x-2<0$; б) $4x+3\le 0$; в) $x<0$.

3.5.

1. а) $(-\infty,0]$; б) $(-3,\infty)$; в) $(-\infty,4)$; г) $[2,\infty)$. **2**. $(1,\infty)$. **3**. $\mathbb{R}$. **4**. $[-2,\infty)$. **5**. $(-\infty,1]$.

3.7.

1. $(-\infty,-3)$. **2**. $(2{,}3]$. **3**. $\varnothing$. **4**. $\{-2\}$. **5**. $[-6,-1)$. **6**. а) $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$; б) $[-2{,}5]$; в) $(-\infty,-1]\cup(2,\infty)$.

3.9.

1. Најди ја најголемата вредност на функцијата $z=300x_1+375x_2$, ако важат $10x_1+10x_2\le 7500$, $20x_1+30x_2\le 19500$, $x_1\ge 0$ и $x_2\ge 0$ (x_1- број на панталони од прв тип, x_2- број на панталони од втор тип). **2**. Најди најмала вредност на функцијата $z=46x_{11}+40x_{12}+39x_{13}+50x_{21}+48x_{22}+40x_{23}+55x_{31}+50x_{32}+48x_{33}$, ако важат $x_{11}+x_{12}+x_{13}=2500$, $x_{21}+x_{22}+x_{23}=3000$, $x_{31}+x_{32}+x_{33}=4000$, $x_{11}+x_{21}+x_{31}=3200$, $x_{12}+x_{22}+x_{32}=2700$, $x_{13}+x_{23}+x_{33}=3600$, $x_{ij}\ge 0$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$ (x_{ij}- број на јајца кои треба да се превезат од i-тата фарма до j-тата продавница). **3**. Најди ја најмалата вредност на функцијата $z=180x_1+60x_2$, ако важат $20x_1+4x_2\ge 80$, $2x_1+x_2\ge 15$, $x_1+2x_2\ge 10$, $x_1\ge 0$ и $x_2\ge 0$ (x_1- килограми од првиот тип ѓубриво, x_2- килограми од вториот тип ѓубриво).

3.11.

1. Најмалата вредност е 9, а оптималното допустливо решение е $(2,3)$. **2**. Најголемата вредност е 30, а оптимално допустливо решение е $(0,5)$. **3**. Најмалата вредност е 16, а оптимално допустливо решение е $(0,2)$. **4**. Најголемата вредност 51 се достигнува во $(6,3)$, а најмалата 14 се достигнува во $(0,2)$. **5**. За да се добие максималната добивка од 258750 денари, треба да се произведат 300 пара панталони од првиот и 450 пара панталони од вториот тип.

3.12.

1. $x=\frac{1}{2}$. **2**. $x=7$. **3**. $x=-\frac{19}{14}$. **4**. $x=7$. **5.** $x=\frac{1}{3}$. **6**. $x--\frac{2}{3}$. **7**. $\{\left(\alpha,-\frac{2}{5}\alpha+1\right)\big|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$. **8**. $\{\left(\alpha,\frac{\alpha+2}{3}\right)\big|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$. **9**. $x=3$. **10**. $x=-1$. **11**. $x=2$. **12**. $\varnothing$. **15**. а) да; б) не. **16**. $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. **17.** $[7,\infty)$. **18**. $\left(-\infty,-\frac{19}{14}\right]$. **19**. $(7,\infty)$. **20**. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$. **21**. $\left(-\frac{2}{3},\infty\right)$. **26**. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$. **27**. $[-5,-3)$. **28**. $[-1,\infty)$. **29**. $\varnothing$. **30**. а) $[-5,2]$; б) $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$. **35**. Најмалата вредност е 32, а оптималното допустливо решение е $(2,3)$. **36.** Најголема вредност е $\frac{45}{2}$, а оптималното допустливо решение е $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$. **37**. Најголемата вредност 95 се достигнува во $(5,30)$, а најмалата 74 се достигнува во $(8,22)$. **38**. Првата фабрика треба да работи 30 дена, а втората 20 дена. Најмалиот трошок е 700000 евра. **39**. Максималната заработка е 32 евра. **40**. Максималниот број на риби со кои што езерото може да се порибли е 250.

4. 3.

3. 36 : 60 = 0,6 × 10 = 6 × 30 000 = 180 000 бруто плати за изработка на торти
48 : 60 = 0,8 × 12 = 9,6 × 20 000 = 192 000 бруто за изработка на колачи
192 000 + 180 000 – 372 000 вкупно бруто плата

Општи трошоци за изработка $K = \frac{\sum T}{\sum Ф} = \frac{111600}{372000} = 0{,}3$

Општи трошоци за изработка на торти 180 000 × 0,3 = 54 000.
Општи трошоци за изработка на колачи 192 000 × 0,3 = 57 600.
Вкупно 372 000 111 600.

Општи трошоци за менаџмент $K = \frac{\sum T}{\sum Ф} = \frac{148800}{372000} = 0{,}4$

Општи трошоци за менаџмент на торти 180 000 × 0,4 = 72 000.
Општи трошоци за менаџмент на колачи 192 000 × 0,4 = 76 800.
Вкупно 372 000 148 800.

Производ: торта.
Предвидени (планирани) единици – производ: $30000 kg$.

Претходна (планска) калкулација 1
за производство на торта (за 2009 година)

Р. бр.	Елементи на цената на чинење	Един. мера	Норматив за потрошувачка	Цена	Вредност на производите	
					За 1 парче	За 30 000 *kg*
1.	Материјал за изработка		1,73	160	60,96	1 828 800
	- брашно	*kg*	0,60	24	14,40	432 000
	- јајца	*kg.*	0,05	16	0,80	24 000
	- масло	*kg.*	0,40	48	19,2	576 000
2.	- ореви	*kg.*	0,08	32	2,56	76 800
3.	- чоколадо	*kg*	0,60	40	24,0	720 000
4.	Амортизација – директни трошоци		10	0,6	6	180 000
5.	Бруто плати на изработка				2	60 000
	Општи трошоци на изработка				1,8	54 000
	Општи трошоци на менаџмент и администрација				2,4	72 000
	Цена на чинење и вредност на производството				73,16	2 194 800

Производ: колачи.
Предвидени (планирани) единици – производ: 20 000 *kg*.

Претходна (планска) калкулација 2
за производство на бурек со сирење (за 2009 год.)

Р. бр.	Елементи на цената на чинење	Единица мера	Норматив за потрошувачка	Цена	Вредност на производите	
					За 1 парче	За 5 000 парчиња
	Материјал за изработка				36.04	720.800
1.	а) брашно	*kg*	0,60	22	13.2	264.000
	в) масло	*kg.*	0,50	44	22	440.000
	г) ореви	*kg*	0,03	28	0,84	16.800
	Амортизација – дир. трош.				2	40.000
2.	Бруто плати на изработка		12	0,8	9,6	192.000
3.	Општи трошоци на изработка				2,88	57.000
4.	Општи трошоци на менаџмент				3,84	76.800
5.	и администрација					
	Цена на чинење и вредност на производството				54,36	1.087.200

4.7.

4. $\frac{10}{10}=1$, $\frac{20}{10}=2$, $\frac{30}{10}=3$.

Следува изготвување на преглед во кој се множат еквивалентните броеви со произведените количини производи за да се добијат сметковни единици за секој производ.

Стакло	Еквивалентен број	Произведна количина кгр.	Сметковни единици	Забелешка
mm-4	1	5 000	5 000	
mm-6	2	10 000	20 000	
mm-8	3	12 000	36 000	
	Вкупно:	27 000	61 000	

Цената на чинење на една сметководна единица е еднаква на:

Цена на 1 сметковна единица $= \frac{\Sigma T}{\Sigma CE} = \frac{732\,000}{61\,000} = 12$.

За да се изработи калкулацијата се изготвува:

Помошна табела

Произведена количина	Стакло *mm*	Еквивалентен број	Сметковни единици	Цена на чинење на 1 сметковна единица	Вкупно трошоци по производи	Цена на чинење за 1 *kg* лим
5 000 10 000 12 000	4 6 8	1 2 3	5 000 20 000 36 000	12 12 12	60 000 240 000 432 000	12 24 36
27 000			61 000	12	732 000	

- Вкупниот износ на трошоците од секој елемент на цената на чинење од калкулацијата се дели со вкупниот број на сметковните единици и се добива износ на трошок за една сметководна единица.

- Добиениот износ на трошоци за една сметководна единица се множи со сметководните единици од секој производ и се добива износ од секој трошок што отпаѓа на секој производ.

Сметковни работи за калкулацијата по видови трошоци:

1. Материјали за изработка 244 000 : 61 000 = 4

- стакло 4 *mm* 5 000 × 4 = 20 000
- стакло 6 *mm* 20 000 × 4 = 80 000
- стакло 8 *mm* 36 000 × 4 = 144 000

Вкупно 244 000

2. Бруто плати за изработка 183 000 : 61 000 = 3

- стакло 4 *mm* 5 000 × 3 = 15 000
- стакло 6 *mm* 20 000 × 3 = 60 000
- стакло 8 *mm* 36 000 × 3 = 108 000

Вкупно 183 000

3. Општи трошоци за изработка 213 500 : 61 000 = 3,5

- стакло 4 *mm* 5 000 × 3,5 = 17 500
- стакло 6 *mm* 20 000 × 3,5 = 70 000
- стакло 8 *mm* 36 000 × 3,5 = 126 000

Вкупно 213 500

4. Општи трошоци за менаџмент и администрација 91 500 : 61 000 = 1,5

- стакло 4 mm 5 000 × 1,5 = 7,500
- стакло 6 mm 20 000 × 1,5 = 30 000
- стакло 8 mm 36 000 × 1,5 = 54 000

Вкупно 91 500

Поединечната цена по производи е добиена со делење на пооделните трошоци за односните производи со произведените количества.

Калкулација
за стакло 4 *mm*, 6 *mm* и 8 *mm* произведено во месец јануари 2009 година

Р. бр.	Елементи на цената	Вкупни трошоци за 28 000 сметковни единици	За една сметковна единица	Стакло					
				Стакло 4 *mm*		Стакло 6 *mm*		Стакло 8 *mm*	
				За 1 *kg*	Вкупно 5 000 *kg*	За 1 *kg*	Вкупно 10 000 *kg*	За 1 *kg*	Вкупно 12 000 *kg*
1.	Материјали за	244.000	4	4	20.000	8	80.000	12	144.000
2.	изработка	183.000	3	3	15.000	6	60.000	9	
3.	Бруто плати за	213.500	3,5	3,5	17.500	7	70.000	10,5	108.000
4.	изработка								
	Општи трошоци за	91.500	1,5	1,5	7.500	3	30.000	4,5	126000
	изработка								
	Општи трошоци на								54.000
	менаџмент и								
	администрација								
	ЦЕНА НА ЧИНЕЊЕ	**732.000**	**12,0**	**12,0**	**60.000**	**24,0**	**240000**	**36,0**	**144.000**

4.8.

5.

Калкулација
за месец јануари 2009 година

Споредни производи	Вредност на споредните производи			Вредност на целото производство по цена на чинење	Остаток на трошоците за главниот производ – платно
	Количина парче	Цена	Износ		
Панталони Блузи Здолништа	200 300 200	200 300 150	40 000 90 000 30 000		
Вкупно:			160 000	500 000	340 000

4.9.

1. 15 000 t × 50 000 = 750 000 денари

Цената на чинење на основните производи се добива кога од вкупните трошоци се одбива цената на чинење на споредните производи, односно

750 000 + 15 000 = 900 000 – 100 000 = 800 000

Следува пресметка на поединечните цени на главните производи:

100 : 100 = 1 (сметковна единица на подни плочки)

100 + 50 = 150 : 100 = 1,5 (сметковна единица на ѕидни плочки)

Вредност на сметковна единица $= \frac{\Sigma T}{\Sigma CE} = \frac{800\,000}{4\,000} = 200$ денари

1. Ѕидни плочки 2 500 × 1,5 = 3 750 × 200 = 750 000 : 2 500 = 300 денари

2. Подни плочки 1 500 ×1 = 1 500 × 200 = 300 000 : 1 500 = 200 денари

Вкупно 5 250 × 200 = 1 050 000

4. 10.

3. 15 000 $kg \times 50$ денари = 900 000 денари.

Цената на чинење на основните производи се добива кога од вкупните трошоци се одбива цената на чинење на споредните производи, односно

900.000 + 3.000 +5.000+45.350+4.000+15.000 = 972.350

972 350 – 136 724 = 835 626

Следува пресметка на поединечните цени на главните производи:

100 : 100 = 1 (сметковна единица на месото)

100 + 35 = 135 : 100 = 1,35 (сметковна единица на сланината)

100 – 53 =47 : 100 = 0,47 (сметковна единица на салото)

Вредност на сметковна единица $= \frac{\Sigma T}{\Sigma CE} = \frac{835626}{12661} = 66$ денари.

1. Месо 8 000 × 1 = 8 000 × 66 = 528 000 : 8 000 = 66 денари.

2. Сланина 3 000 ×1,35 = 4 050 × 66 = 267 300 : 3 000 = 89,1 денари.

3. Сало 1 300 × 0,47 = 611 × 66 = 40 326 : 1 300 = 31, 02 денари.

Вкупно 12 661 × 66 = 835 626

II дел

1. МАТРИЦИ

1. 1. Поим за матрица

Во економијата анализа на различни видови податоци бара нивно табеларно претставување. На пример, градежна фирма која гради три типови на куќи, со помош на табела ги претставила бројот на единици од секој вид материјал потребен за нивната изградба.

	Куќа за живеење	Викендица на море	Викендица на планина
Дрво	20	12	36
Железо	56	66	14
Цемент	68	84	24
Камен	15	70	40

Броевите од табелата можеме да ги запишеме во вид на правоаголна шема

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 36 \\ 56 & 66 & 14 \\ 68 & 84 & 24 \\ 15 & 70 & 40 \end{bmatrix}$$

која на поедноставен начин ги дава сите информации што ги содржи погорната табела. Ваквото размислување ни дава мотивација за воведување и изучување на поимот матрица.

Дефиниција 1. Правоаголна шема од облик $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{\ 1} & a_{\ 2} & \dots & a_{\ n} \end{bmatrix}$ каде што $a_i \in 3$, $i = 1,2,...,\ ,$ $\ = 1,2,...,n,$ се вика **матрица** и се означува со $= [a_i\ ]_{\ \times n}$, $i = 1,2,...,\ ,$ $\ = 1,2,....,n.$

Нека $= [a_i\ ]_{\ \times n}$ е дадена матрица. $\ -$ те хоризонтални $n-$торки

$$(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., (a_{\ 1}, a_{\ 2}, ..., a_{\ n})$$

се нарекуваат **редици** на матрицата, а $\mathrm{n}-$те вертикални $\mathrm{m}-$торки

$$(a_{11}, a_{21}, ..., a_{\ 1}),\ (a_{12}, a_{22}, ..., a_{\ 2}), ..., (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{\ n})$$

се викаат **колони** на матрицата. Реалните броевите a_{i}, $i=1,2,...,\ ,\ =1,2,...,n,$ се нарекуваат **елементи** на матрицата. Елементот a_{i} се нарекува i $-$ти елемент и се наоѓа во пресекот на $i-$тата редица и $-$тата колона. Матрицата со редици и n колони се нарекува $\times n$ матрица или матрица од ред $\times n$.

1. Матрицата $=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ е матрица од ред 3×4, бидејќи има три редици и четири колони. Поточно, трите четворки од реални броеви $(4,1,-6,0)$, $(9,0,7,10)$ и $(6,8,-2,5)$, ги сочинуваат првата, втората и третата редица, соодветно, на матрицата А, додека четирите вертикални тројки од реални броеви, $(4,9,6)$, $(1,0,8)$, $(-6,7,-2)$ и $(0,10,5)$, ги сочинуваат првата, втората, третата и четвртата колона, соодветно, на матрицата А, додека освен тоа, на пример $a_{23}=7$, односно елементот 7 се наоѓа во пресекот на втората редица и третата колона. Слично $a_{11}=4$, $a_{14}=0$, $a_{33}=-2$ итн. ♦

За две $\mathrm{m}\times\mathrm{n}$ матрици од ист ред $=[a_{i}]_{\times n}$ и $=[b_{i}]_{\times n}$ велиме дека се **еднакви**, ако $a_{i}=b_{i}$, за $i=1,2,...,$ и $=1,2,..,n.$ Значи, секое матрично равенство се сведува на $\cdot n$ скаларни равенства.

2. Матриците $=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ не се еднакви, бидејќи е 2×3 матрица, а е 3×2 матрица. ♦

3. За кои вредности на x, y, и матриците $=\begin{bmatrix} x & \\ y & \end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ се еднакви?

Матриците А и В се еднакви ако и само ако $x=3$, $y=1$, $=5$ и $=4$. ♦

Матрица со една редица ($=1$) се нарекува **вектор-редица**, додека матрица со една колона $(n=1)$ се вика **вектор-колона**. Секој реален број може да се смета за 1×1 матрица.

4. Матриците $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ и $\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0 & 9 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ се примери на вектор-редици, додека матриците $=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ се примери на вектор-колони. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Што е матрица?

2. Наведи пример на матрица од ред 3×5 и матрица 5×3.

3. Дадена е матрицата $= \begin{bmatrix} 41 & 1 & 16 & 0 \\ 9 & 30 & -9 & 10 \\ 62 & 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

а) Од кој ред е матрицата А?

б) Запиши ги првата редица и третата колона на матрицата .

в) Запиши ги елементите $a_{13}, a_{24}, a_{33}, a_{32}, a_{14}$ и a_{21} на матрицата .

4. Три недвижности $_1$, $_2$ и $_3$ може да бидат купени од четири фирми $_1$, $_2$, $_3$ и $_4$.

а) Формирај 4×3 матрица $B=[b_i\ ]$ каде b_i прима вредност 1 ако капиталот за инвестиции на фирмата $_i$ е поголем од цената на чинење на недвижноста , прима вредност 0 ако капиталот за инвестиции на фирмата $_i$ е колку цената чинење на недвижноста , прима вредност -1 ако капиталот за инвестиции на фирмата $_i$ е помал од цената на чинење на недвижноста .

б) Формирај 3×4 матрица $=[c_i\ ]$, каде c_i прима вредност 1 ако цената на чинење на недвижноста $_i$ е помала од капиталот за инвестиции на фирмата ,прима вредност 0 ако цената на чинење на недвижноста $_i$ е колку капиталот за инвестиции на фирмата , прима вредност -1 ако цената на чинење на недвижноста $_i$ е поголема од капиталот за инвестиции на фирмата .

5. Дали се еднакви матриците и од задача 4?

1. 2. Собирање и одземање на матрици. Множење на матрица со број

Со претставувањето на податоците со матрица можеме да ги анализираме и да донесуваме деловни одлуки со дефинирање на операции со матрици.

Дефиниција 1. Нека $=[a_i\ ]_{\times n}$ и $=[b_i\ ]_{\times n}$ се две $\times n$ матрици. Збир $+$ на матриците и е матрица $=[c_i\ ]_{\times n}$ така што $c_i = a_i + b_i$, за $i=1,2,..,$, $=1,2,...,n,$ и пишуваме $= +$.

Со други зборови, матрицата е од ист ред како и матриците и , а нејзините елементи се збирови на соодветните елементи на матриците и . Да забележиме дека операцијата собирање на матрици е дефинирана само за матрици од ист ред.

1. Најди го збирот на матриците $=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Според дефиницијата $+ \;=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1 & 3-2 & 4-3\\ 5+0 & 2-1 & 0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}$. ♦

2. Матрицата $=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}$ ги прикажува набавните и продажните цени (по редици) на три различни стоки во едно трговско друштво (по колони). Ако набавната цена на секоја стока се зголеми за 0,5 денари, а продажната цена се зголеми за 0,2 денари тогаш матрицата $=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2\end{bmatrix}$ го претставува зголемувањето на набавната цена и продажната цена на секоја стока. Матрицата

$$+ \;=\begin{bmatrix}1+0{,}5 & 3+0{,}5 & 2+0{,}5\\ 4+0{,}2 & 6+0{,}2 & 7+0{,}2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}5 & 3{,}5 & 2{,}5\\ 4{,}2 & 6{,}2 & 7{,}2\end{bmatrix}$$

ги прикажува новите набавни и продажни цени на трите различни стоки во трговското друштво. ♦

> **Дефиниција 2.** Нека $=[a_i\ ]_{\times n}$ и реален број. Производ на реалниот број со матрицата е матрицата $=[b_i\ ]_{\times n}$ таква што $b_i = a_i$, за $i=1,2,..,$, $=1,2,...,n,$ и пишуваме $=\ .$.

Со други зборови, матрица се множи со реален број така што секој нејзин елемент се множи со реалниот број.

Се договараме матрицата (-1) да ја означуваме со $-$, односно $(-1)\ = -$.

3. Нека $=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & -2\end{bmatrix}$. Најди ги матриците 2 и -3 .

Имаме $2\ =\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 4\\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 6 & -4\end{bmatrix}$ и

$$-3\ =\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3)\cdot 1 & (-3)\cdot 4\\ (-3)\cdot 3 & (-3)\cdot(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -12\\ -9 & 6\end{bmatrix}. ♦$$

Нека и се две $\times n$ матрици. Ќе дефинираме операција **одземање на матрици** со равенството $- \;=\; +(-\;)$. Со други зборови, ако $=[a_{i}\;]_{\;\times n}$ и $=[b_{i}\;]_{\;\times n}$ тогаш разлика $-$ на матрицата со матрицата е матрицата $=[c_{i}\;]_{\;\times n}$ така што $c_{i}\; = a_{i}\; - b_{i}\;$, за $i = 1,2,..,\;,\;\; = 1,2,...,n.$ Да забележиме дека операцијата одземање матрици е дефинирана само за матрици од ист ред.

4. Најди ја матрицата $2\;\; -3\;$ ако $=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

$$2\;\; -3\;\; = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

5. Со матрицата $=\begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 700 & 500 & 800 \end{bmatrix}$ е прикажан обемот на производство во летната и зимската сезона (по редици) на машки, женски и детски чевли (по колони) на една фабрика за чевли во текот на 2009 година. Со матрицата $=\begin{bmatrix} 400 & 200 & 500 \\ 600 & 500 & 300 \end{bmatrix}$ се дадени аналогни информации во текот на 2010 година. Тогаш матрицата

$$-\;\; = \begin{bmatrix} 300-400 & 400-200 & 200-500 \\ 700-600 & 500-500 & 800-300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 200 & -200 \\ 100 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

ја дава информацијата за промената во обемот на производство во летната и зимската сезона (по редици) на машки, женски и детски чевли (по колони) на фабриката од едната до другата година. Така, на пример, елементот $a_{11} = -100$ што значи дека производството на машки чевли во летната сезона опаднало за 100 од едната до другата година, додека $a_{22} = 0$ покажува дека немаме промена во производството на женски чевли во зимската сезона од едната до другата година. ♦

Една $\times n$ матрица се вика **нулта матрица**, ако секој нејзин елемент е еднаков на 0. Вообичаено се означува со .

Со следната теорема ќе ги искажеме некои својства на дефинираните операци

Теорема 1. Нека , и се $\times n$ матрици и нека $_1,\; _2 \in 3$. Тогаш важи:

(i) $+(\; + \;) = (\; + \;) +$ (ii) $+ \; = \; + \; =$

(iii) $+(-\;) = (-\;) + \; =$ (iv) $+ \; = \; +$

(v) $_1(\; + \;) = \; _1 \; + \; _1$ (vi) $(\; _1 + \; _2) \; = \; _1 \; + \; _2$

(vii) $_1(\; _2 \;) = (\; _1 \; _2)$ (viii) $1 \; = \;$ и $0 \; = \;$.

Доказ. Нека $\quad = [a_i]$, $\quad = [b_i]$ и $\quad = [c_i]$. Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за елементот на i – то место важи:

$$a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i, \qquad a_i + 0 = 0 + a_i = a_i,$$

$$a_i + (-a_i) = (-a_i) + a_i = 0, \qquad a_i + b_i = b_i + a_i,$$

$$_1(a_i + b_i) = {}_1a_i + {}_1b_i, \qquad (_1 + {}_2)a_i = {}_1a_i + {}_2a_i,$$

$$_1(_2a_i) = (_1\,_2)a_i, \qquad 1a_i = a_i \text{ и } 0a_i = 0.$$

Од дефиницијата за еднаквост на две матрици следува дека се точни и соодветните матрични равенства искажани во теоремата. ■

Задачи за самостојна работа

За матриците $\quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ и $\quad = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, најди ги матриците:

1. $\quad + \quad$ **2.** $3 \quad + \quad$ **3.** $3 \quad - 2 \quad + \quad$

4. Најди ги коефициентите x, y, z и t, така што да важи

$$x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5*. Во табелата се дадени податоци за просечниот век на живот, изразен во години, на белата и црната раса од машката и женската популација, измерен во 1990 година, 2000 година и 2010 година.

	Бела раса		Црна раса	
	Мажи	Жени	Мажи	Жени
1950	56,4	57,6	45,5	45,7
1970	64,4	65,6	55,5	56,2
1990	73,7	76,7	67,2	69,8
2010	75,4	79,5	70,7	74,6

а) Формирај матрица $\quad$ што ја содржи информацијата за белата раса и матрица $\quad$ што ја содржи информацијата за црната раса.

б) Со употреба на формираните матрици најди за колку години просечно повеќе белата раса во секоја категорија повеќе живее отколку црната раса.

1. 3. Множење на матрици

Слично, како и собирањето на матрици и производот на две матрици може да ни даде барана информација врз која ќе се базира некоја деловна одлука.

Дефиниција 1. Нека $=[a_i\ ]$ е $\times n$ матрица и $=[b_i\ ]$ е $n\times$ матрица. Производ на матриците и е матрица $=[c_i\ ]$ од ред $\times$ така што $c_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \ldots + a_{in}b_n$, за $i=1,2,..,$, $=1,2,...,n$ и пишуваме $=$.

Со други зборови кажано, елементот c_i на матрицата $=$ е збир на производите на елементите од $i-$тата редица на матрицата со соодветните елементи од $-$тата редица на матрицата .

Да забележиме дека производот не е дефиниран ако бројот на колони на матрицата е различен од бројот на редици на матрицата .

1. Нека $=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Тогаш

$$=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\cdot 2-3\cdot 4 & 1\cdot 1-3\cdot 2 \\ -2\cdot 2+6\cdot 4 & -2\cdot 1+6\cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot(-3)+1\cdot 6 \\ 4\cdot 1+2\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+2\cdot 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Од последниот пример може да заклучиме дека

- ✓ множењето на матрици не е комутативно;
- ✓ производ на две ненулти матрици може да биде нулта матрица.

2. Производите и се изработени од пластика, метал и стакло со број на единици од секој репроматеријал даден во следнава табела:

	Пластика	Метал	Стакло
Производ	3	4	0,5
Производ	4	0,5	2

Заради транспортните трошоци на две фабрички постројки и единичните цени на секој репроматеријал се различни. Во следната табела се дадени единечните трошоците на секој репроматеријал на двете фабрички постројки:

	Трговска фирма	Трговска фирма
Пластика	10	9
Метал	22	26
Стакло	14	14

Со помош на дадените информации ги формираме матриците $=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix}$ и $=\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$ со кои се дадени единиците репроматеријали за секој производ и единечните цени на секој репроматеријал, соодветно. Нивниот производ

$$=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0{,}5 \\ 4 & 0{,}5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30+22+7 & 27+26+7 \\ 40+11+28 & 36+13+28 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 59 & 60 \\ 79 & 77 \end{bmatrix}$$

ја дава цената на секој од производите и (по редици) во секоја од фабричките постројки и . ♦

За матричниот производ важат својствата искажани со следнава теорема:

Теорема 1. За секои три матрици , и за кои сите наведени производи се дефинирани и за секој реален број важи:

(i) $(\ \ )=(\ \ )$ (асоцијативен закон)

(ii) $(\ +\ )=\ \ +$ (лев дистрибутивен закон)

(iii) $(\ +\ )\ =\ \ +$ (десен дистрибутивен закон)

$(i\ )$ $(\ \ )=(\ \ )\ =\ (\ \ )$

Доказ. Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за елементот на i – то место важи:

(i) Ако $=[a_i\ ]$ е $\times$ матрица, $=[b_i\ ]$ е $\times$ матрица, и $=[c_i\ ]$ е $\times n$ матрица, тогаш

$$\sum_{=1} a_i \sum_{=1} b\ \ c\ \ =\sum_{=1}\sum_{=1} a_i\ b\ \ c\ \ =\sum_{=1}\left(\sum_{=1} a_i\ b\ \ \right)c\ \ .$$

(ii) Ако $=[a_i\ ]$ е $\times$ матрица, а $=[b_i\ ]$ и $=[c_i\ ]$ се $\times n$ матрици, тогаш

$$\sum_{=1} a_i\ (b \ \ + c \ \ ) = \sum_{=1} (a_i\ b \ \ + a_i\ c \ \ ) = \sum_{=1} a_i\ b \ \ + \sum_{=1} a_i\ c \ \ .$$

(iii) Ако $\ \ = [b_i\ ]$ и $\ \ = [c_i\ ]$ се $\ \ \times\ \ $ матрици, а $\ \ = [a_i\ ]$ е $\ \ \times n$ матрица, тогаш

$$\sum_{=1} (b_i \ \ + c_i \ \ )a \ \ = \sum_{=1} (b_i\ a \ \ + c_i\ a \ \ ) = \sum_{=1} b_i\ a \ \ + \sum_{=1} c_i\ a \ \ .$$

$(i\ \ )$ Ако $\ \ = [a_i\ ]$ е $\ \ \times\ \ $ матрица, а $\ \ = [b_i\ ]$ е $\ \ \times n$ матрица, тогаш

$$\sum_{=1} a_i\ b \ \ = \sum_{=1} (\ \ a_i\ )b \ \ = \sum_{=1} a_i\ (\ \ b\ \ ).$$

Од дефиницијата за еднаквост на две матрици следува дека се точни и соодветните матрични равенства искажани во теоремата.■

Задачи за самостојна работа

1. Нека $\ \ $ е $\ \ \times n$ матрица, а $\ \ $ е $n\times\ \ $ матрица. Најди го редот на матриците $\ \ $ и $\ \ $. Дали може $\ \ =\ \ $, ако $\ \ \neq n$?

Пресметај ги производите:

2. $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix}.$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

5*. Следнава табела дава информација за количините од производите кои треба да ги набават два оддели и , во една фирма:

	Волна	Свила	Памук
Оддел	30	20	10
Оддел	20	10	20

За производите имаат понуди од двајца добавувачи и , чии што единични цени се дадени со следнава табела:

	Добавувач	Добавувач
Волна	10	9
Свила	22	26
Памук	14	14

Најди ја матрицата која дава информации за цената на трите количества производи кои треба да ги набават одделите и од добавувачите и .

1. 4. Квадратни матрици

Матрица A се вика **квадратна**, ако бројот на редици е еднаков со бројот на колони. Ако бројот на колони, односно редици е n, велиме дека A е квадратна матрица од ред n или $n-$квадратна матрица. Елементите $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ ја сочинуваат главната дијагонала.

1. Матрицата $=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ е квадратна матрица од ред 3 со дијагонални елементи $1, 2, 3$. ♦

Горнотриаголна матрица е квадратна матрица, чии елементи под главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Долнотриаголна матрица е квадратна матрица, чии елементи над главната дијагоналата се еднакви на нула:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Дијагонална матрица е квадратна матрица чии елементи надвор од главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Единична матрица е дијагонална матрица чиишто дијагонални елементи се еднакви на 1 и се означува со :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Вообичаено, дијагоналната матрица со елементи по главната дијагонала $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ ја означуваме со $dia\ (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, додека единичната матрица од ред n ја означуваме со ${}_n$.

2. Во таа смисла, на пример имаме:

а) Матрицата $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ е горнотриаголна, додека матрицата

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ е долнотриаголна матрица.

б) Матрицата $G = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ е дијагонална матрица која можеме да ја означиме

со $diag(3,7)$, додека $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ е единична матрица од ред 4. ♦

Ако A е произволна $n-$квадратна матрицата тогаш $AI_n = I_n A = A.$

Матрица од облик kI_n, каде што k е реален број, се нарекува **скаларна матрица**. Тоа е всушност дијагонална матрица чиишто елементи по дијагоналата се еднакви на k:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix}$$

Ако А е квадратна матрица, тогаш производите

$$A^2 = AA, \;\; A^3 = A^2 A, \ldots., \;\; A^n = A^{n-1} A$$

се матрици со ист ред како и матрицата A и се нарекуваат **степени** на матрицата A.

3. За матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ имаме

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ и $A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 50 & 0 \end{bmatrix}$. ♦

4. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ имаме $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Покажи дека:

а) $I_3^{\ 2} = I_3$, б) $I_2^{\ 4} = I_2$, в) $I_3^{\ 5} = I_3$.

2. Покажи дека производот на матриците $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ е матрицата I_2.

3. Покажи дека за матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ важи $A^3 = O$.

4*. Нека е дадена матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Најди ја матрицата $A^2 = AA$, а потоа покажи дека $A^2 A = AA^2$. Покажи дека за секоја матрица A од ред 3×3 важи $A^2 A = AA^2$.

5*. Ако A и B се скаларни матрици од ист ред, покажи дека $AB = BA$.

1. 5. Елементарни трансформации на матрици

Матриците наоѓаат широка примена во најрзлични научни дисциплини, каде што математиката може да најде своја примена. Тоа бара поширок степен на развој на матричната теорија, а ние во ова поглавје ќе се задржиме на еден мал таков сегмент. Ќе стане збор за трансформации на матрици, со помош на редици.

Скалести матрици

Матрицата $A = (a_{ij})$ велиме дека е **скалеста**, односно е во скалеста форма, ако секоја наредна редица започнува со барем една нула повеќе од претходната. Исклучок од ова правило можат да бидат само нултите редици, ако такви има во матрицата, и тие треба да бидат последни редици.

Со t_1 да го означиме бројот на почетните нули во првата редица, со t_2 да го означиме бројот на почетните нули во втората редица,..., со t_m да го означиме бројот на почетните нули во m-редица редица. Тогаш матрицата е скалеста ако

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_r = t_{r+1} = \ldots = t_m = n \quad \text{или} \quad t_i < t_2 < \ldots < t_m .$$

Првите ненулти елементи во секоја редица се викаат **издвоени** елементи.

1. Следните матрици се во скалеста форма

$$A=\begin{bmatrix}2^* & 3 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 3^* & 0 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1^* & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1^* & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3^*\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^*\end{bmatrix},$$

а издвоените елементи се означени со ѕвезда.

Во специјален случај една скалеста матрица се вели дека има **редично редуцирана скалеста форма**, ако издвоените елементи се единици и притоа тие се единствените ненулти елементи во соодветните колони. Матрицата C во претходниот пример се наоѓа во редично редуцирана скалеста форма, додека A и B не се во таква форма.

Редична еквивалентност

Дефиниција 1. Елементарна редична трансформација е секоја трансформација на редиците на една матрица што припаѓа на еден од следните три типа:

E_1: Замена на i-та редица со j-та редица и обратно

$$R_i \leftrightarrow R_j\ ,$$

E_2: Множење на i-та редица со ненулти скалар k

$$R_i \to kR_i,\quad (k \neq 0)\ ,$$

E_3: j-та редица помножена со k се додава на i-та редица

$$R_i \to kR_j + R_i\ .$$

Како комбинација на трансформациите E_2 и E_3 се добива следната општа трансформација: j-тата редица се множи со ненулти скалар k и кон неа се додава i-тата редица помножена со произволен број k', т.е.

$R_j \to kR_j + k'\ R_i,\quad k \neq 0.$

Дефиниција 2. За матрицата A велиме дека е **редично еквивалентна** со B, ако B може да се добие од A со конечна низа од елементарни редични трансформации.

Следниот алгоритам ни дава трансформација на матрици во скалеста форма со помош на редични трансформации.

Чекор 1. Нека j_1-та колона е првата ненулта колона со ненулти елементи. Редиците ги заменуваме (трнасформација E_1) така што т.е. $a_{1j_1} \neq 0$.

Чекор 2. За секое i $(i>1)$ се применува комбинираната трансформацијата

$R_i \to -a_{ij_1} R_1 + a_{1j_1} R_i\ .$

(Со чекор 2 сите елементи во j_1-та колона што наоѓаат под елементот a_{1j_i} стануваат нули.)

Чекорите 1 и 2 се повторуваат со подматрицата добиени со отфрлање на првата редица.

Се продолжува овој процес се додека матрицата не се трансформира во скалеста форма.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -3R_1 + R_3]{R_2 \to -2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -5R_2 + 4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.♦

Да претпоставиме сега дека матрицата $R = (a_{\text{ij}})$ е доведена во скалеста форма со издвоени елементи $a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{rj_r}$. Со цел да ја трансформираме матрицата до редично редуцирана матрична форма постапуваме на следниот начин. За i=2 ги применуваме следните комбинирани редични трансформации:

$$R_k \to -a_{kj_i} R_i + a_{ij_i} R_k, \qquad k = 1,2,...,i-1.$$

Потоа ги применуваме истите трансформации за i = 3, i = 4, итн. до i = r. Со тоа матрицата A се трансформира до скалеста форма чиишто издвоени елементи се единствените ненулти елементи во соодветните колони. Потоа множејќи ја i-та редица со $a^{-1}{}_{ij_i}$, $1 \le i \le r$, однсоно делејќи со a_{ij_i} издвоените елементи стануваат единици, а со тоа матрицата сме ја трансформирале до редично редуцирана скалеста форма.

Со тоа покажавме дека **секоја матрица A е редично еквивалентна со барем една матрица во редично редуцирана скалеста форма.** Но може да се покаже дека за секоја матрица, соодветната матрица во редично редуцирана скалеста форма е единствена, што не е случај со скалестата форма.

2. Матрицата од претходниот пример ќе ја дотрансформираме до редично редуцирана скалеста форма.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 4R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 - 3R_3} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1, R_2 \to \frac{1}{4}R_2, R_3 \to \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ♦$$

3. Да се трансформира матрицата $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ до редично редуцирана канонична форма.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги сите можни 2×2 матрици во редично редуцирана скалеста форма.

2. а) Дали секоја дијагонална квадратна матрица со ненулти елементи по дијагоналата е во скалеста форма?

б) Дали секоја дијагонална квадратна матрица е во скалеста форма?

3. Со помош на редични трансформации, трансформирај ги следните матрици во скалеста форма:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Со помош на редични трансформации, трансформирај ги следните матрици во редична редуцирана скалеста форма:

а) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -11 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Дали единечната матрица е во а) скалеста форма, б) редично редуцирана скалеста форма?

6. Каков е обликот на произволна а) 3×1 матрица, б) 1×3 матрица, во редично редуцирана скалеста форма?

7*. Дали релацијата еквивалентност на матрици ги има следниве својства:

а) секоја матрица е еквивалентна со самата себе, (рефлексивност),

б) ако матрицата A е еквивалентна со матрицата B, а матрицата B е еквивалентна со матрицата C, тогаш и матрицата А е еквивалентна со матрицата C (транзитивност).

8*. Покажи со пример дека ако матрицата A е еквивалентна со матрицата B, тогаш и матрицата B е еквивалентна со матрицата A (својство на симетричност).

1. 6. Ранг на матрица

Нека A е произволна $m\times n$ матрица. Матрицата ја доведуваме до скалеста форма.

Дефиниција 1. Бројот на ненулти редици во скалестата форма на една матрица A се нарекува **ранг** на матрицата A.

Притоа рангот на матрицата А не зависи од тоа на кој начин сме ја довеле матрицата А во скалеста форма.

1. Најди го рангот на матрицата $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значи ранг на матрицата A е 2. ♦

2. Најди го рангот на матрицата $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па рангот на дадената матрица е 2.

3. Да се најде рангот на матрицата $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

па рангот на матрицата е еднаков на 2. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди го рангот на матриците:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Најди го рангот на матриците:

а) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 10 & 16 \\ 7 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Најди го рангот на матрицата чии што вектор-редици се:
$(-1,5,0,3,8)$, $(7,-3,7,3,-4)$, $(2,1,3,4,2)$, $(4,1,4,2,2)$.

4. Покажи, дека матриците

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 13 & 17 \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 13 \\ 4 & 9 & 17 \end{bmatrix}$$

имаат еднаков ранг. Како е добиена матрицата B од матрицата A?

5*. За колку ќе се промени рангот на една матрица, ако од неа отфрлиме една редица?

1. 7. Примена на рангот

Рангот има голема примена, но ќе се задржиме на само еден дел од тоа. Ќе разгледуваме квадратни матрици и за нив ќе го дефинираме поимот за регуларност и сингуларност на следниот начин.

Дефиниција 1. За една квадратна $n \times n$ матрица велиме дека е **регуларна**, ако нејзиниот ранг е еднаков на n, а ќе велиме дека е **сингуларна** ако нејзиниот ранг е помал од n.

1. Провери дали матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ е регуларна или сингуларна.

Дадената матрица ја доведуваме до скалеста форма за до го определиме нејзиниот ранг:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Рангот на матрицата е 3, а редот на матрицата е 3×3, па затоа матрицата е регуларна. ♦

2. Провери дали матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ е регуларна или сингуларна.

Најпрво го наоѓаме рангот на дадената матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Забележуваме дека рангот на дадената 4×4 матрица е 3 < 4, затоа таа е сингуларна.♦

3. Да покажеме дека потребен и доволен услов за да една квадратна 2×2 матрица $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ е регуларна е $ad-bc\neq 0$.

Да претпоставиме најпрво дека $a\neq 0$. Првата редица помножена со $-\frac{c}{a}$ ја додаваме на втората редица. На тој начин добиваме

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{bc}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}.$$

Ако $ad-bc\neq 0$ рангот на дадената матрица е 2 и таа е регуларна. Ако пак $ad-bc=0$, тогаш дадената матрица е сингуларна бидејќи нејзиниот ранг е 1.

Сега да претпоставиме дека $a=0$ и повторно да покажиме дека важи претходниот заклучок. Имено при $a=0$ тој заклучок гласи: Ако $bc\neq 0$ рангот на дадената матрица е 2 и таа е регуларна, а ако пак $bc=0$, тогаш дадената матрица е сингуларна.

Најпрво со замена на првата редица со втора, а на втората со прва добиваме

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Ако $bc \neq 0$, тогаш $b \neq 0$ и $c \neq 0$, па затоа рангот на матрицата е 2 и таа е регуларна. Нека $bc = 0$, т.е. $b = 0$ или $c = 0$. Ако $b = 0$ и $c \neq 0$, тогаш матрицата

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

има ранг 1 и дадената матрица е сингуларна. Ако $b \neq 0$ и $c = 0$, тогаш матрицата $\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{bmatrix}$ во скалеста форма се трансформира на следниот начин

$$\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ако } d \neq 0\text{) или}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ако } d = 0\text{)},$$

па повторно рангот на дадената матрица е 1 и таа е сингуларна. Ако пак $b = 0$ и $c = 0$, тогаш дадената матрица има облик $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, нејзината скалеста форма е $\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ па рангот е 1 ако $d \neq 0$, или 0 ако $d = 0$. Значи и во овој случај рангот е помал од 2, па матрицата е сингуларна. Со тоа ги исцрпивме сите можни случаи и покажавме дека ако $ad - bc \neq 0$ рангот на дадената матрица е 2 и таа е регуларна, а ако пак $ad - bc = 0$, тогаш дадената матрица е сингуларна. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Која матрица се нарекува сингуларна, а која регуларна?

2. а) Дали единечната матрица е регуларна или сингуларна?

б) Дали нулата матрица е регуларна или сингуларна?

3. Провери дали следните квадратни матрици се регуларни или сингуларни:

а) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

4*. Кога една 1×1 матрица $[a]$ е регуларна, а кога е сингуларна?

5*. Кога една горнотриаголна матрица е регуларна?

1. 8. Задачи за вежбање

1. Дадени се матриците $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Определи ги матриците: а) $A+B$, б) $A-B$, в) $2A$, г) AB.

2. Пресметај:

а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3$, в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4$.

3. Нека е дадена матрица $A=\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$, каде $x^2+y^2+z^2=1$. Докажи дека $A^3+A=O$.

4. Докажи дека ако матриците A и B комутираат, односно ако $AB=BA$, тогаш важат равенствата:

а) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, б) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

5. Дали нултата матрица е во

а) скалеста форма, б) редично редуцирана скалеста форма?

6. Дадените матрици доведи ги во скалеста форма:

а) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 10 & 7 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

7. Најди го рангот на матриците $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

8. Најди го рангот на матрицата $A+B$, ако: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Дадени се две матрици A и B од ист тип, при што ранг(A)=3, а ранг(B)=5. Може ли рангот на матрицата $A+B$ да биде:

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; ѓ) 5; е) 6; ж) 7; з) 8; ѕ) 9?

2. НИЗИ

2. 1. Поим на низа

Да разгледаме едно пресликување f од множеството на природните броеви во множеството на реалните броеви. Ова пресликување се задава потполно ако се познати $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $f(3)=a_3,...,f(n)=a_n,...$ Затоа низата ќе ја пишуваме кратко како $a_1,a_2,a_3,...$ или уште пократко (a_n), $\{a_n\}$ или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Со тоа низата е зададена бидејќи тоа подразбира дека a_1 е сликата на 1, a_2 е сликата на 2, итн. Затоа можеме да дефинираме.

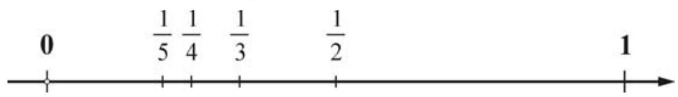
> **Дефиниција 1.** Низа е пресликување од множеството на природните броеви во множеството на реалните броеви.

1. Напиши ги првите пет члена на низата со општ член a_n, ако:

а) $a_n=\dfrac{1}{n}$;   б) $a_n=\dfrac{(-1)^n(n-1)}{n}$;   в) $a_n=n^{(-1)^n}$.

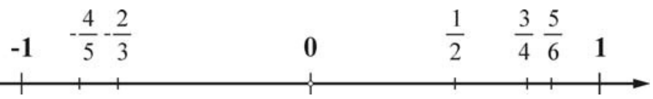
а потоа зададените низи претстави ги графички на бројната оска.

а) $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$, $a_4=\dfrac{1}{4}$, $a_5=\dfrac{1}{5}$.



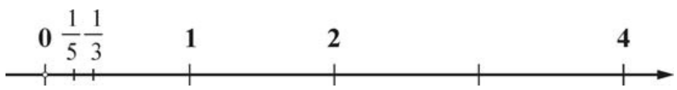
Црт. 1

б) $a_1=0$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_3=-\dfrac{2}{3}$, $a_4=\dfrac{3}{4}$, $a_5=-\dfrac{4}{5}$.



Црт. 2

в) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=\dfrac{1}{3}$, $a_4=4$, $a_5=\dfrac{1}{5}$. ♦



Црт. 3

2. Најди барем една формула за општиот член a_n на следните низи:

а) $-1,1,-1...$;   б) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3}...$;   в) $\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4},...$;

а) $a_n=(-1)^n$;   б) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$;   в) $a_n=\dfrac{n+2}{n+1}$. ♦

Како што може да се забележи од горните примери, низите се зададени непосредно, со формула за општиот член. Низата во следните примери е зададена рекурентно, односно со помош на формула која овозможува да се најде $n+1$-от член ако се познати претходните членови $a_1, a_2, ..., a_n$.

Низите можат да задоволуваат некои својства. Тие својства најчесто се условите за растење и опаѓање, како и ограниченост на низите.

Дефиниција 2. За низата (a_n) велиме дека е

- растечка (или монотоно растечка), ако за секој природен број *k* важи
  $a_{k+1} > a_k$, (1)
- опаѓачка (или монотоно опаѓачка), ако за секој природен број *k* важи
  $a_{k+1} < a_k$. (2)

Условот (1) за растење на една низа покажува дека секој нареден член на низата е поголем од претходниот член. На пример, низата со општ член $a_n = 5n-2$ е растечка, бидејќи $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ...$ т.е. $1 < 4 < 7 < 10 < ...$ Непосредно се уверуваме дека

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - 2 - [5n-2] = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5 > 0,$$

па оттука е $a_{n+1} > a_n$ за секој природен број *n*.

Условот (2) за опаѓање на една низа покажува дека секој нареден член на низата е помал од претходниот член. На пример, низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ е опаѓачка, бидејќи $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > ...$, т.е. $2 > 1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{9} > 1\frac{1}{16} > 1\frac{1}{25} > ...$ Непосредно се уверуваме дека

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0,$$

па оттука е $a_{n+1} < a_n$ за секој природен број *n*.

Да напоменеме дека не секоја низа мора да задоволува некое од својствата (1) и (2). Таква е низата 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2,....

Дефиниција 3. За една низа велиме дека е **ограничена од горе**, ако постои реален број *M*, така што за секој природен број *n* важи
$a_n < M$. (5)

Аналогно дефинираме низа ограничена од долу на следниот начин.

Дефиниција 4. За една низа велиме дека е **ограничена од долу**, ако постои реален број *M*, така што за секој природен број *n* важи
$a_n > M$. (6)

Низите кои истовремено се ограничени од горе и од долу ги нарекуваме ограничени. Нив можеме да ги дефинираме на следниот начин.

Дефиниција 5. За една низа велиме дека е **ограничена**, ако постои позитивен реален број M, така што за секој природен број n важи

$$|a_n| < M. \qquad (7)$$

3. Низата со општ член $a_n = 3^n$ е ограничена од долу (на пример со бројот 0), но не е ограничена од горе; низата $-1, 1, -2, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{3}, -4, \frac{1}{4}, -5, \frac{1}{5}, \ldots$ е ограничена од горе со бројот 2, но не е ограничена од долу; низата $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{n}$ е ограничена и од горе и од долу, со било кој број поголем од бројот 1, бидејќи $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n(n-1)}{n}\right| = \frac{n-1}{n} \le 1$. ♦

4. Да ја разгледаме низата со општ член $a_n = 3n - 2$. Оваа низа е растечка, бидејќи $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$ Во овој случај првиот член е $a_1 = 1$ и тој е најмалиот член во низата, па според тоа оваа низа е ограничена од долу со произволен број помал од 1, на пример со 0. ♦

Низа којашто не е ограничена се нарекува **неограничена**. Со други зборови, низата $\{a_n\}$ е неограничена ако за секој реален број M постои природен број n, така што $|a_n| \ge M$.

Задачи за самостојна работа

1. Најди барем една формула за општиот член a_n на следниве низи:

а) $2, 5, 8, 11, 14 \ldots$ б) $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5} \ldots$ в) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \ldots$

2. Кои низи велиме дека се растечки, а кои се опаѓачки?

3. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена одгоре:

а) $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $a_n = \frac{n^3 + 2}{n^3}$; в) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\log n}$.

4. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена оддолу:

а) $a_n = 2 + \frac{1}{n^2}$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = \frac{n-1}{n}$.

5*. Покажи дека низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-1}}$ е ограничена.

2.2. Граница на низа од реални броеви

Да ја разгледаме низата со општ член $a_n = \frac{1}{n}$. Интуитивно ни е јасно дека за големи броеви на индексот n n-тиот член на низата е близок до 0, така што како n расте, $a_n = \frac{1}{n}$ е сé поблиску до бројот 0. Тој очигледен факт го објаснуваме на следниот начин. За секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, односно $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. На пример, ако $\varepsilon = 0{,}01$ тогаш $n_o > \frac{1}{0{,}01} = 100$, ако $\varepsilon = 0{,}001$ тогаш $n_o > \frac{1}{0{,}001} = 1000$. Сега за произволен број $n > n_0$ важи $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, што значи дека $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. за големи вредности на n важи $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$. Во овој случај велиме дека низата конвергира (се стреми) кон бројот 0. Во општ случај, ако низата се стреми кон некој број a, тогаш ќе треба за кој било позитивен мал број ε, да постои број n_0, така што за $n > n_0$ да важи $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, т.е. сите членови a_n што одговараат за овие вредности на n да се разликуваат од a по апсолутна вредност помалку од ε. Последниот пример го мотивира воведувањето на поимот граница на низа.

Дефиниција 1. Реалниот број a се нарекува **гранична вредност** или **граница** на низата реални броеви $\{a_n\}$ ако за секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што

$|a_n - a| < \varepsilon$ за секој природен број $n \geq n_0$

и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Значи,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, велиме дека низата $\{a_n\}$ тежи кон бројот a кога n тежи кон ∞ и пишуваме $a_n \to a$, кога $n \to \infty$, а за самата низа $\{a_n\}$ велиме дека е **конвергентна**.

Со други зборови, низата $\{a_n\}$ тежи кон бројот a кога n тежи кон ∞, ако членовите a_n се ,,произволно блиску'' до бројот a кога n е ,,доволно големо'' .

Од дефиницијата и својствата на апсолутна вредност на реален број следува дека неравенството

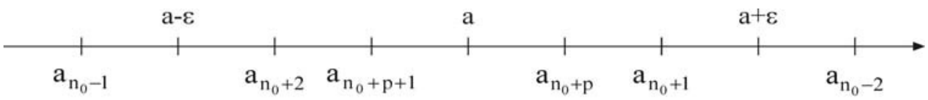
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

во дефиницијата за гранична вредност на низа е еквивалентно со двојното неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, односно условот

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ вообичаено се нарекува $\varepsilon -$околина на бројот a. Според тоа дефиницијата за граница на низа може да ја толкуваме на следниот начин:

Низата $\{a_n\}$ тежи кон бројот a ако за произволен позитивен број ε постои природен број n_0, така што $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за секој природен број $n \geq n_0$.



Црт.4

Тогаш велиме дека почнувајќи од n_0 сите членови на низата се наоѓаат во $\varepsilon -$околината на бројот a, што значи дека сите членови на низата, освен конечно многу членови, се наоѓаат во $\varepsilon -$околината на бројот a (црт. 4).

1. Низата со општ член $a_n = c$, каде што c е реален број, конвергира кон бројот c. Навистина, во овој случај за било кое $\varepsilon > 0$, бараниот број n_0 е 1. ♦

2. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$

За секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што $0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Тогаш

$|a_n - a| = \left|\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ за секој природен број $n \geq n_0$. ♦

Да се навратиме на дефиницијата за гранична вредност на низа. Ако за низата реални броеви $\{a_n\}$ не постои граница, тогаш велиме дека низата **дивергира**. Значи, низата $\{a_n\}$ дивергира ако за кој било реален број a постои $\varepsilon -$околина на бројот a таква што бесконечно многу членови на низата се надвор од околината, и тогаш низата нема граница.

На пример низата 1, 2, 3, 4, 5, 6,... не конвергира кон ниту еден рален број. Интуитивно може да кажеме дека оваа низа се стреми кон бесконечност. Причината за тоа е следната. Било колку голем број M да избереме, ќе постои број n_0 (што зависи од M), така што ако $n > n_0$, тогаш ќе важи $a_n > M$. За нашата низа $a_n = n$, бројот n_0 лесно се определува. На пример, за M=100, $n_0 = 101$, ако M=1000,7, $n_0 = 1001$, итн. Според тоа, ја даваме следната дефиниција.

Дефиниција 2. Ако за секој реален број M постои природен број n_0, така што $a_n > M$, за секој природен број $n \geq n_0$,
тогаш велиме дека **низата** $\{a_n\}$ **се стреми кон бесконечност** и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Значи,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Аналогно дефинираме кога една низа се стреми кон минус бесконечност.

Дефиниција 3. Ако за секој реален број M постои природен број n_0, така што $a_n < M$, за секој природен број $n \geq n_0$,
тогаш велиме дека **низата** $\{a_n\}$ **се стреми кон минус бесконечност** и пишувме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Значи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

На пример низата со општ член $a_n = -\sqrt{n}$ се стреми кон $-\infty$.

Во случај кога $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, велиме дека соодветните низи се дивергентни, бидејќи не конвергираат кон некој реален број.

3. Покажи дека низата 1, –1, 1, –1, 1, –1,... со општ член $a_n = (-1)^n$ нема граница.

Бројот 1 не може да биде граница на дадената низа, бидејќи членовите со парен индекс не можат да припаѓаат во некоја мала околина на пример за $\varepsilon = 1$ на бројот 1.

Аналогно и бројот –1 не може да биде граница на дадената низа, бидејќи членовите со непарен индекс не можат да припаѓаат во некоја мала околина, на пример, за $\varepsilon = 1$ на бројот –1. Било кој број a што е поголем од 1 не може да биде граница, бидејќи ако земеме $\varepsilon = a - 1 > 0$, тогаш ниту еден член од низата не припаѓа на ε-околина на бројот a. Било кој број a што е помал од –1 не може да биде граница бидејќи ако земеме $\varepsilon = -1 - a > 0$, тогаш ниту еден член од низата не припаѓа на ε-околина на бројот a. Било кој број a што е поголем од –1 а помал од 1 не може да биде граница на низата, бидејќи ако земеме за ε да е помалиот од броевите $1 - a$ и $a - (-1) = a + 1$, тогаш ниту еден член од низата не припаѓа на ε-околина на бројот a (направи цртеж). Значи ниту еден реален број не може да биде граница на дадената низа, па дадената низа нема граница. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Дадена е низа со општ член $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$, а потоа најди го n_0, ако

а) $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$; б) $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$; в) $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$.

2. Која од следниве низи тежи кон $+\infty$ или кон $-\infty$, а која кон реален број?

а) $a_n = n-4$; б) $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2}$; в) $a_n = 2-n^2$.

3. Дадена е низа со општ член $a_n = \dfrac{n+1}{3n+4}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$. Почнувајќи од кое n, бесконечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{100}\right)$?

4. Дали низата 1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5,... има граница?

5*. Ако низата $\{a_n{}^2\}$ има граница 1, покажи со пример дека низата $\{a_n\}$ може, а и не мора да има граница.

2. 3. Својства на конвергентни низи од реални броеви

Во ова поглавје ќе докажеме неколку важни својства на конвергентните низи. Пред да преминеме на нивното проучување, ќе предочиме една карактеристика на конвергентните низи со која често се служиме и ќе ја подразбираме при формулацијата и доказите на теоремите. Имено, со оглед на дефиницијта на граница на низа, при работа со гранични вредности не е секогаш неопходно соодветните својства на низите кои ги користиме да бидат исполнети за секој природен број n, туку доволно е тие да важат почнувајќи од некој природен број n_0.

Теорема 1. а) Секоја конвергентна низа од реални броеви има единствена граница.

б) Секоја конвергентна низа од реални броеви е ограничена.

а) Претпоставуваме спротивно, дека постои конвергентна низа $\{a_n\}$ која има две гранични вредности a_1 и a_2. Ако избереме $\varepsilon = \dfrac{|a_1 - a_2|}{2}$, тогаш $\varepsilon-$околините на броевите a_1 и a_2 се дисјунктни, односно не се сечат, па невозможно е и во едната и во другата да се наоѓаат бесконечно многу членови, а надвор конечно многу членови од низата.

б) Нека низата $\{a_n\}$ конвергира кон бројот a. Тогаш за секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што

$|a_n - a| < \varepsilon$ за секој природен број $n \geq n_0$.

Од броевите

$a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a + \varepsilon, a - \varepsilon$

го избираме оној кој има најголема апсолутна вредност M. Тогаш имаме

$|a_n| \leq M$, за секој природен број n,

од каде што следува дека дадената низа е ограничена. ■

Да забележиме дека обратното тврдење од тврдењето искажано во теоремата не важи, односно не секоја ограничена низа е конвергентна.

Како последица од теоремата добиваме дека секоја неограничена низа е дивергентна.

1. Низата со општ член $a_n = (-1)^n$ е ограничена, но не е конвергентна, додека низата со општ член $a_n = 1 + 2(n-1)$ е дивергентна бидејќи е неограничена.♦

Покрај поимот за граница на низа, корисно е да се воведе и следниот поим за точка на натрупување.

Дефиниција 1. Нека е дадена низа со општ член a_n. Бројот a се нарекува **точка на натрупување**, ако за произволен број $\varepsilon > 0$ постојат бесконечно многу членови на низата кои припаѓаат на интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Очигледно е дека за секоја конвергентна низа нејзината граница е точка на натрупување и дека таа е единствена. За дадена низа ги определуваме сите нејзини точки на натрупување, па ако нема точки на натрупување или има барем две, низата е сигурно дивергентна. Ако има една точка на натрупување, тогаш низата може да конвергира, а може и да дивергира. На пример низата 0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,... има само една точка на натрупување (0), но низата е дивергентна, бидејќи не е ограничена. Низата 1, –1, 1, –1,... има две точки на натрупување (1 и –1), па затоа таа е дивергентна. Во продолжение ќе дадеме две својства на конвергентните низи.

Теорема 2. Нака $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни низи од реални броеви. Ако $a_n \leq b_n$, за секој природен број n, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Теорема 3. (Сендвич - теорема) Нека $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ се конвергентни низи од реални броеви такви што

1. $a_n \le b_n \le c_n$, за секој природен број n, и
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a.$

Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a.$

2. Најди ја границата на низата со општ член $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

Дефинираме низа со општ член $b_n = 0$ и низа со општ член $c_n = \dfrac{1}{n}$. Од неравенството

$$0 < \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}, \text{ за секој природен број } n,$$

заради $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ и Сендвич - теоремата следува дека:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0. \ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги точките на натрупување за низите:

а) $1,0,-1,\ 1,0,-1,1,0,-1,...,$ б) $a_n = \dfrac{n^2+3}{n}$; в) $a_n = 3^n$.

2. Низата со општ член a_n е зададена на следниот начин: ако $n = k^2$, тогаш $a_n = \dfrac{1}{k}$, а ако n не е потполн квадрат, тогаш $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Дали оваа низа е конверегентна, кои се нејзини точки на натрупување?

3. Спореди ги границите на низата со општ член:

а) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ и $b_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ и $b_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

4. Со примена на Сендвич-теоремата докажи дека:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{9n^2+1}} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^3+4} = 0.$

5. Со примена на Сендвич-теоремата најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2n}$.

2. 4. Операции со конвергентни низи од реални броеви

Во множеството од низи од реални броеви ќе ги дефинираме следниве операции.

Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се две дадени низи, тогаш низата $\{a_n+b_n\}$ се нарекува **збир** на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, низата $\{a_n-b_n\}$ се нарекува **разлика** на низата $\{a_n\}$ со низата $\{b_n\}$, низата $\{a_nb_n\}$ се нарекува **производ** на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Ако $b_n\neq 0,$ за секој природен број $n,$ тогаш низата $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ се нарекува **количник** на низата $\{a_n\}$ со низата $\{b_n\}$.

Пред да преминеме на испитувањето на конвергенцијата на дефинираните низи од реални броеви ќе го воведеме поимот нула-низа и ќе докажеме неколку својства.

Низата $\{a_n\}$ се нарекува **нула - низа** ако има граница нула, односно $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$ Значи, низата $\{a_n\}$ е нула-низа ако за произволен позитивен број ε постои природен број n_0 така што $|a_n|<\varepsilon,$ за секој природен број $n\geq n_0.$

1. Низите со општ член $a_n=\frac{1}{n},$ $a_n=\frac{(-1)^n}{n},$ $a_n=\frac{1}{3^n},$ $a_n=\frac{n+1}{n^2+2},$ $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n},$ се примери на нула-низи, бидејќи секоја од нив тежи кон нула кога n тежи кон бескрајност: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2}=0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0.$ ♦

Својствата на нула-низите претставуваат згодна алатка за решавање на бројни проблеми во теоријата на низи. Еве неколку од нив:

1⁰ Низата $\{a_n\}$ има конечна граница a ако и само ако $a_n=a+x_n,$ каде што $\{x_n\}$ е нула-низа.

Доказ. Нека низата $\{a_n\}$ има конечна граница $a,$ односно $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,$ каде што a е конечен реален број. Дефинираме низа со општ член $x_n=a_n-a.$ Тогаш за произволен позитивен број ε постои природен број n_0 така што

$|x_n|=|a_n-a|<\varepsilon,$ за секој природен број $n\geq n_0,$

од каде што следува $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$ односно $\{x_n\}$ е нула-низа.

Обратно, нека $a_n = a + x_n,$ каде што $\{x_n\}$ е нула - низа. Тогаш за произволен позитивен број ε постои природен број n_0 така што

$$|a_n - a| = |x_n| < \varepsilon, \text{ за секој природен број } n \ge n_0,$$

од каде што следува дека низата $\{a_n\}$ има конечна граница $a.$ ■

2. Дадена е низа со општ член $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1.$

Општиот член на дадената низа може да го запишеме во облик $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}.$ Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, за дадената низа имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1.$ ♦

2⁰ Збир и разлика на две нула-низи е нула-низа.

Доказ. Нека $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ се нула-низи, односно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, и нека ε е произволен позитивен број. Тогаш постојат природни броеви n_1 и n_2 така што

$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2},$ за секој природен број $n \ge n_1$ и $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2},$ за секој природен број $n \ge n_2.$

Ако $n_0 = \max\{n_1, n_2\},$ тогаш имаме

$$|x_n \pm y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ за секој природен број } n \ge n_0,$$

од каде што заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = 0,$ односно низите $\{x_n \pm y_n\}$ се нула-низи.■

3. Низите со општи членови $z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2+1}$ и $u_n = \frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+1}$ се нула-низи како збир и разлика на нула-низите со општи членови $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{n}{n^2+1}$. ♦

3⁰ Производ од ограничена низа и нула-низа е нула-низа.

Доказ. Нека $\{x_n\}$ е ограничена низа и нека $\{y_n\}$ е нула-низа. Постои реален број М така што $|x_n| < M$ за секој природен број n.

Заради условот $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ следува дека за секој позитивен број ε постои природен број n_0 така што $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M},$ за секој природен број $n \ge n_0.$ Тогаш

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \text{ за секој природен број } n \ge n_0,$$

од каде што заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0,$ односно низата $\{x_n y_n\}$ е нула - низа.■

Од погорното својство непосредно следува дека производ на нула - низа со реален број е нула - низа, бидејќи секоја реална константа c може да ја интерпретираме како низа со општ член $a_n = c,$ за којашто покажавме дека е конвергентна, па според тоа и ограничена.

4. Низата со општ член $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ е нула-низа како производ од низата со општ член $a_n = (-1)^n$, која што е ограничена и нула - низата $y_n = \dfrac{1}{n}.$ ♦

Следнава теорема дава одговор на прашањето дали од конвергенцијата на две дадени низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следува конвергенција на збирот, разликата, производот и количникот на низите.

Теорема 1. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентна низа од реални броеви и нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$ Тогаш

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b},$ ако $b_n \neq 0,$ за секој природен број n и $b \neq 0.$

Доказ. Заради условот $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, од својството 1^0 следува егзистенција на нула - низи со општ член x_n и $y_n,$ соодветно, така што

$a_n = a + x_n$ и $b_n = b + y_n.$

1. Општиот член на збирот и разликата на дадените низи е од облик

$a_n \pm b_n = (a \pm b) + (x_n \pm y_n)$

каде што $x_n \pm y_n$ е општ член на нула-низа којашто е збир и разлика на две нула-низи. Оттука, заради својството 1^0 следува дека збирот и разликата на дадените низи, односно низата со општ член $a_n \pm b_n$ конвергира кон бројот $a \pm b.$

2. Општиот член на производот на дадените низи е од облик

$a_n b_n = ab + (ay_n + bx_n + x_n y_n)$

каде што $ay_n + bx_n + x_n y_n$ е општ член на нула-низа заради својствата 2^0 и 3^0. Оттука, заради својството 1^0 следува дека производот на дадените низи, односно низата со општ член $a_n b_n$ конвергира кон бројот $ab.$

3. Општиот член на количникот на дадените низи имаме

$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+x_n}{b+y_n}-\frac{a}{b}=\frac{1}{b\cdot b_n}(bx_n-ay_n).$$

Бидејќи низата $\{b_n\}$ конвергира кон бројот $b\neq 0,$ за $\varepsilon=\frac{|b|}{2}$ постои природен број n_0 така што

$$|b|-|b_n|<|b-b_n|<\varepsilon=\frac{|b|}{2},\text{ за секој природен број } n\geq n_0.$$

Оттука следува дека $|b_n|>\frac{|b|}{2}.$ Тогаш имаме

$$\frac{1}{|b\cdot b_n|}<\frac{2}{b^2},\text{ за секој природен број } n\geq n_0,$$

од каде што заклучуваме дека низата со општ член $\frac{1}{b\cdot b_n}$ е ограничена. Понатаму според својствата 2^0 и 3^0, низата со општ член ax_n-by_n е нула-низа. Оттука, заради својството 3^0 следува дека количникот на дадените низи, низата со општ член $\frac{a_n}{b_n}$ конвергира кон бројот $\frac{a}{b}$.■

Последица 1. Нека $\{b_n\}$ е конвергентна низа од реални броеви и нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b.$ Тогаш за произволен реален број c важи:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n\pm c)=b\pm c;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} cb_n=cb;$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{b_n}=\frac{c}{b},$ ако $b_n\neq 0,$ за секој природен број n и $b\neq 0.$

Доказ. Следува непосредно од теоремата за $a_n=c.$■

5. Најди ја границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-5}{2n^2-3n+4}.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-5}{2n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{1}{2}.\ \blacklozenge$$

6. Докажи дека ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k$, $k\in\mathbb{N}$.

Заради теорема 1 имаме $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k = a^k$. ♦

7. Докажи дека ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \geq 0$, за секој природен број n, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Нека ε е произволен позитивен број. Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следува дека за $\varepsilon\sqrt{a}$ постои природен број n_0 така што $|a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$, за секој природен број $n \geq n_0$. Оттука следува дека

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon, \text{ за секој природен број } n \geq n_0$$

од каде што заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следниве низи се нула-низи:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-1}{5n^2+n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n^3+4}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-3}{2n+7}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-1} - \sqrt{n^2+n+1}\right)$; ѓ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$?

Најди ги следниве граници:

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n-1}{5n^2+3n+6}$. **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-2n^2+4n-1}{7n^4+3n^2-4n+2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$. **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^2+2} - \frac{n^2}{n-1}\right)$. **9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2}{3n-5} - 2n\right)$. **10.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}$.

11*. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. **12*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$. **13*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

2. 5. Геометриска низа

Да ја разгледаме низата со општ член $a_n = q^n$, која често се користи во решавање на задачи. За различни вредност на q таа може да конвергира или да дивергира. Сите случаи се опфатени во следнава теорема.

Теорема 1. Нека $a_n = q^n$. Тогаш

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, за $|q|<1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, за $q=1$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, за $q>1$; г) низата нема граница, за $q=-1$.

Доказ. Пред да почниме со доказот, најпрво ќе покажеме дека за произволно $h>-1$ важи неравенството: $(1+h)^n \ge 1+nh$, познато како Бернулиево неравенство.

За $n=1$, очигледно е дека важи равенство. За $n=2$ неравенството важи, бидејќи

$$(1+h)^2 = 1+2h+h^2 \ge 1+2h.$$

Ако ова неравенство се множи со $1+h>0$ од лево и од десно добиваме

$$(1+h)^3 = (1+h)^2(1+h) \ge (1+2h)(1+h) = 1+3h+2h^2 \ge 1+3h,$$

што значи дека неравенството важи и за $n=3$. Множејќи повторно со $1+h>0$ од лево и од десно добиваме

$$(1+h)^4 = (1+h)^3(1+h) \ge (1+3h)(1+h) = 1+4h+3h^2 \ge 1+4h,$$

што значи дека неравенството важи и за $n=4$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека неравенството важи за секој природен број n.

Сега да се вратиме на доказот од теоремата.

а) Нека $0<q<1$. Тогаш $q=\dfrac{1}{1+h}$ за некое $h>0$. За секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што $0<\dfrac{1}{hn_0}<\varepsilon$. Тогаш со примена на Бернулиевото неравенство $(1+h)^n \ge 1+nh$ добиваме

$$\left|q^n - 0\right| = q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+hn} < \frac{1}{hn} < \varepsilon \text{ за секој природен број } n \ge n_0.$$

Слично, се дискутира и случајот $-1<q<0$. Очигледно, за $q=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0^n = 0$.

б) Ако $q=1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

в) Ако $q > 1$, тогаш $0 < \frac{1}{q} < 1$. Нека M е произволен позитивен број. Тогаш заради тврдењето докажано под а) имаме $0 < \frac{1}{q^n} < \frac{1}{M}$ за доволно големо n, од каде што следува дека $q^n > M$, за доволно големо n.

г) Ако $q < -1$, тогаш за сите парни броеви n имаме $q^n > M$, а за сите непарни броеви n имаме $q^n < -M$, каде што $M > 0$ е произволно избрано, а n доволно големо. Според тоа, постојат бесконечно многу членови на низата надвор од секоја околина на кој било реален број a, од каде што заклучуваме дека низата нема граница. ■

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. ♦

Проучувањето ќе го продолжиме со разледување на низата чиј општ член е збир на членовите на една геометриска прогресија. Имено, нека е дадена една геометриска прогресија со почетен член a и коефициент q, каде $a \neq 0$, $q \neq 0$. Тогаш збирот на првите n собироци е еднаков на

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}. \qquad (1)$$

Знаеме дека за $q \neq 1$ овој збир е еднаков на

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}, \qquad (2)$$

додека за $q = 1$ овој збир е еднаков на $S_n = na$.

Однесувањето на низата со општ член S_n зависи од вредноста на коефициентот q. Од тие причини за да ја испитаме конвергенцијата на низата $\{S_n\}$ ќе ги разгледаме следниве случаи:

- Ако $|q| > 1$, тогаш низата $\{S_n\}$ дивергира бидејќи низата со општ член q^n е дивергентна според теорема 1, а оттука и низата $1-q^n$ е дивергентна, па и $S_n = \frac{a}{1-q}(1-q^n)$ е дивергентна низа.
- Ако $q = 1$, тогаш $S_n = nq$, па низата $\{S_n\}$ дивергира бидејќи $q \neq 0$.
- Ако $q = -1$, тогаш низата $\{S_n\}$ е зададена со $a, 0, a, 0, a, 0, ...$ Таа е дивергентна бидејќи има две точки на натрупување a и 0 ($a \neq 0$).
- Ако $|q| < 1$, тогаш според тоерема 1 важи $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Користејќи го тоа добиваме

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot 0 = \frac{a}{1-q}.$$

Со тоа ги исцрпивме сите можни случаи за q и ја докажавме следнава теорема.

> **Теорема 2.** Низата $\{S_n\}$ конвергира кон $\frac{a}{1-q}$ ако $|q|<1$, а дивергира за $|q|\geq 1$.

Вообичаено е границата $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a+aq+aq^2+aq^3+...+aq^{n-1})$ доколку таа постои, или пак се стреми кон ∞ или $-\infty$, да ја озчуваме како

$a+aq+aq^2+aq^3+...$

2. За $a=1, q=2$ имаме

$1+2+2^2+...+2^{n-1}+...=+\infty$, бидејќи $\lim_{n\to\infty}(1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1})=+\infty$. ♦

3. За $a=1, q=1$ имаме

$1+1+1+...+1+...=+\infty$, бидејќи $\lim_{n\to\infty}(1+1+1+1+...+1)=+\infty$. ♦

4. За $a=1, q=2$ имаме

$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^{n-1}}+...=3$, бидејќи $\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^{n-1}})=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$. ♦

5. Во кружница со радиус r впишан е рамностран триаголник, во триаголникот е впишана кружница, во кружницата рамностран триаголник итн. Пресметај го збирот на периметрите на сите кружници.

Решение. Знаеме дека радиусот на опишаната кружница околу еден рамностран триаголник е двапати поголем од радиусот на впишаната кружница. Оттука добиваме дека периметарот на впишаната кружница е двапати помал од периметарот на опишаната кружница. Затоа за периметрите на кружниците имаме

$$L_1 = 2\pi r, \quad L_2 = \frac{2\pi r}{2}, L_3 = \frac{2\pi r}{2^2}, \ldots, L_n = \frac{2\pi r}{2^{n-1}}.$$

Забележуваме дека добиените вредности за периметрите на кружниците се членови на геометриска низа со коефициент $q=\frac{1}{2}$. За збирот на периметрите на првите *n* кружници добиваме

$$S_n = 2\pi r + \frac{2\pi r}{2} + \frac{2\pi r}{2^2} + .. + \frac{2\pi r}{2^{n-1}} = 2\pi r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+..+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2\pi r\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 4\pi r\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Затоа збирот на периметрите на сите кружници изнесува

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\pi r\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 4\pi r. \ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Испитај кон што се стреми низата со општ член:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^{n-1}}$;   б) $a_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1}$.

2. Испитај ја конвергенцијата и најди ја границата на низата со општ член:

а) $1 + 2m + (2m)^2 + ... + (2m)^{n-1}$, $|\mathrm{m}| < \frac{1}{2}$;   б) $1 + \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} + ... + \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$, $|\mathrm{a}| < |\mathrm{b}|$.

2. Пресметај го збирот:

а) $5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + ...$;   б) $8 + 12 + 18 + 27 + 40{,}5 + ...$

4. Пресметај: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$ ако е познато дека $|x| < 1$.

5*. Најди ја границата на низата:

а) $\sqrt{5},\ \sqrt{5\sqrt{5}},\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, ...$;   б) $\sqrt[3]{7},\ \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7}},\ \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7}}}$, ...

6*. Во кружница со радиус R вписан е рамностран триаголник, во триаголникот е вписана кружница, во кружницата рамностран триаголник итн. Пресметај го збирот на плоштините на сите кругови.

Пресметај ги следните гранични вредности.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{1+2^n}$.   **8.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$.   **9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-4}{1+2^n}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$.   **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}$.   **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+9^{n+1}}{2^n+3^{n+2}}$.

13*. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.   **14*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

2. 6. Монотони низи од реални броеви. Бројот e

Во ова поглавје преку поимот монотони низи ќе дадеме уште една карактеризација на конвергентните низи. Добиениот резултат ќе го искористиме за испитување на конвергенцијата на низата со општ член $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Следнава теорема дава критериум за конвергенција на монотоните низи и ја потврдува егзистенцијата на граница на монотона низа.

Теорема 1. 1. Нека $\{a_n\}$ е монотоно растечка (монотоно опаѓачка) низа реални броеви. Тогаш $\{a_n\}$ е конвергентна ако и само ако е ограничена одгоре (оддолу).

2. Секоја монотона неограничена низа се стреми кон $+\infty$ или $-\infty$.

Доказ. 1. Нека $\{a_n\}$ е монотоно растечка низа реални броеви.

Ако претпоставиме дека низата $\{a_n\}$ е конвергентна, тогаш таа е ограничена, па според тоа таа е ограничена одгоре.

Обратно, нека низата $\{a_n\}$ е ограничена одгоре, нејзината конвегенција ќе ја прифатиме без доказ. Всушност тоа ни дава едно својство на реланите броеви кое што можеме да го прифатиме аксиоматски (направи цртеж), а аксиомите не се докажуваат.

Ако низата $\{a_n\}$ е монотоно опаѓачка, тогаш низата $\{-a_n\}$ е монотоно растечка. Затоа според претходниот дел од тврдењето, низата $\{-a_n\}$ е конвергентна ако и само ако е ограничена од горе. Но $\{-a_n\}$ е конвергентна ако и само ако $\{a_n\}$ е конвергентна, а $\{-a_n\}$ е ограничена од горе ако и само $\{a_n\}$ е ограничена од долу. Според тоа, ако $\{a_n\}$ е монотоно опаѓачка, тогаш таа е конвергентна ако и само ако е ограничена од долу.

2. Нека низата $\{a_n\}$ е монотоно растечка. Ако низата $\{a_n\}$ е неограничена одгоре, тогаш за секој реален број M постои природен број n_0 така што $a_{n_0} > M$. Бидејќи дадената низа е монотоно растечка, $a_n > M$, за секој природен број $n \geq n_0$ од каде што заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Аналогно се докажува случајот кога низата $\{a_n\}$ е монотоно опаѓачка и е неограничена оддолу.■

1. Докажи дека низата со општ член $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ конвергира.

Од $a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^n}>0$

за секој природен број n, следува дека $a_{n+1}>a_n$ за секој природен број n. Според тоа дадената низа е монотоно растечка. Дадената низа е ограничена одгоре бидејќи

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}<2,$$ за секој природен број n.

Заради Теорема 1 следува дека дадената низа е конвергентна.♦

Во продолжение ќе ја разгледаме низата со општ член $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ако во Бернулиевото неравенството $(1+h)^n\geq 1+nh$ за $h>-1$, замениме $h=-\frac{1}{n^2}$, добиваме $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-n\cdot\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n}$, односно $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n}$, т.е. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$, за секој природен број $n>1$. Оттука следува дека

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=a_{n-1},$$

за секој природен број $n>1$. Оттука заклучуваме дека низата е монотоно растечка.

За да докажеме дека низата е ограничена избираме низа $b_n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$, $n>1$.

Од

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$ за секој природен број $n>1$,

следува дека $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n>1+\frac{1}{n}$, т.е. $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}>1$. Затоа

$$b_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=b_{n+1},$$ за секој природен број $n>1$,

од каде што заклучуваме дека низата со општ член b_n е монотоно опаѓачка.

Од друга страна, $a_n<b_n$, за $n=2,3,...$ На тој начин може да заклучиме дека низата $\{a_n\}$ е ограничена одгоре, на пример, со бројот $b_2=4$.

Значи низата $\{a_n\}$ е монотоно растечка и ограничена одгоре. Заради Теорема 1 низата е конвергентна, односно има граница. Оваа граница во математиката се означува со e во чест на математичарот Ојлер (Euler). Значи, $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Бројот e е една од најважните константи во математичката анализа и пошироко. Тој е ирационален број и со првите 15 децимали има вредност
$e=2{,}718281828459045.......$

2. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{e}{1}=e.\ \blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Кои од следниве низи се монотоно растечки, а кои се монотоно опаѓачки:

а) $a_n=\frac{2n+1}{n+1}$; б) $a_n=\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$; в) $a_n=n-\sqrt{n}$.

г) $a_n=\frac{1}{n^2}$; д) $a_n=\frac{3n+5}{6n-5}$; ѓ) $a_n=\frac{3n+4}{n+1}$?

2. Покажи дека следните низи се монотони:

а) $a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$; б) $a_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$;

в) $a_n=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\cdots\cdot(5n-4)}$; г) $a_n=\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-2)}$.

3. Покажи дека следниве низи се конвергентни:

а) $a_n=\frac{1}{n}$; б) $a_n=\frac{n}{n+5}$; в) $a_n=\frac{2n-1}{3n+1}$;

г)* $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$; д) $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$.

4. Покажи дека следните низи се конвергентни и најди ги нивните граници:

а) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; б) $a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$.

5. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$;

в)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+10}\right)^{n}$; г)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$.

2. 7. Задачи за вежбање

1. Запиши ги првите четири члена на низата со општ член a_n, ако:

а) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$; б) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$; в) $a_n=\frac{1}{n!}$.

2. Дадена е низа со општ член $a_n=\frac{2n-1}{n+3}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. Почнувајќи од кое n, бесконечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100},\frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right)$?

3. Дадена е низа со општ член $a_n=\frac{1}{2n}+\frac{2n}{3n+1}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$, а потоа најди природен број n_0 за кој е исполнет условот

$\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<10^{-4}$, за секој природен број $n\geq n_0$.

4. Најди го општиот член a_n на низата 0,9; 0,99; 0,999;... . Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Почнувајќи од кое n е исполнето $|a_n-1|<0{,}0001$?

5. Дадена е низата $a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$. Покажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$. Почнувајќи од кое n е исполнето $\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<0{,}001$?

6. Покажи дека следните низи се дивергентни:

а) $a_n = (-1)^n n$; б) $a_n = 1^n + (-1)^n$; в) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

7. Покажи дека низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^n}$ е ограничена од горе.

8. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена, ако:

а) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$; б) $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; в) $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}$.

9. Која од следниве низи со општ член a_n е ограничена, а која е неограничена, ако:

а) $a_n = \sqrt[n]{3}$; б) $a_n = \sqrt{n}$; в) $a_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$?

Најди ги следниве граници:

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}$. **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+3}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+7}{n^2+2n-1}$.

13*. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. **14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n-5}}$. **15.*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-5n+6}-n$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{1-5^n}$. **17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^{n+1}}{1+7^n}$. **18.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-9}{1+3^n}$.

19. Испитај монотоност кај следниве низи:

а) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; в) $a_n = 2^n$; г) $a_n = \sqrt[n]{5}$;

д) $a_n = \frac{n^3}{3^n}$; ѓ) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$; е) $a_n = \cos(n\pi)$.

20. Покажи дека следниве низи се конвергентни:

а) 0,42; 0,423; 0,4233; 0,42333;…. б) $a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + ... + \frac{1}{5^n+1}$.

21*. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n+k}\right)^{n}$, $k\in\mathbb{N}$.

3. РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

3. 1. Поим за функција

Во секојдневниот живот се користат најразлични величини, должина, плоштина, маса, волумен, температура, време итн. Тие се јавуваат во секој природен процес, зависат една од друга и се менуваат во зависност од менувањето на некоја друга величина.

Дефиниција 1. Ако на секој елемент $x \in D$, му се придружува точно определен елемент y од K (според некој однапред утврден закон или правило), тогаш се вели дека е определена **функцијата** или **пресликување** од D во K, каде што D и K се дадени множества, и пишуваме $f : D \to K$.

Зависноста на елементот y од x симболички ја запишуваме со

$y = f(x)$ или $f : x \to y$

и читаме: y е функција од x.

За $x \in D$ се вели дека е **независно променлива величина** или **аргумент**, а за $y \in K$ **зависно променлива величина**, бидејќи се менува во зависност од сликата x. Значи f е функција со домен D и кодомен K. Множеството на вредности на f е $V_f = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in D \right\}$ каде $V_f \subseteq K$.

1. Да се определат дефиниционите области (домените) на следните функции

а) $f(x) = x^2 - 3x - 4$, б) $f(x) = \dfrac{x^7 - 5}{x^2 + 4x + 3}$, в) $f(x) = \sqrt{4 - 5x}$,

г) $f(x) = \sin x$, д) $f(x) = \log_2(4x - 1)$, ѓ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 1}$.

а) Во овој пример $D_f = (-\infty, +\infty)$ или $D_f = R$.

б) Потребно е $x^2 + 4x + 3 \neq 0$, односно $(x+3)(x+1) \neq 0$ што значи дека $x \neq -3$ и $x \neq -1$. Затоа $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, +\infty)$

в) Во овој случај потребно е $4 - 5x \geq 0$, односно $x \leq \dfrac{4}{5}$. Значи $D_f = \left(-\infty, \dfrac{4}{5}\right]$.

г) Тука ќе имаме $D_f = \mathbb{R}$.

д) Потребно е $4x - 1 > 0$, т.е. $x > \dfrac{1}{4}$. Значи $D_f = \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

ѓ) Бидејќи се работи за третти (непарен) корен ќе нема ограничувања. ♦

Дефиниција 2. За функциите $f : A \to B$ и $h : C \to E$ се вели дека се **еднакви** ако:

(i) $A = C$, односно имаат еднакви домени,

(ii) $B = E$, односно имаат еднакви кодомени,

(iii) за секое $x \in A$ важи $f(x) = h(x)$, односно имаат исто дејство.

Функциите f и h не се еднакви, односно $f \neq h$, ако не е исполнет барем еден од трите услови.

Една функција може да биде зададена **аналитички**, **табеларно** или **графички**. Понатаму ќе бидат разгледани сите начини одделно.

Формулата од видот $y = f(x)$ каде што десната страна е израз со сите операции е аналитички зададена функција.

2. Примери за аналитички зададена функција се следните функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. ♦

Аналитички зададените функции можат да бидат во експлицитен облик и имплицитен облик. Во експлицитен облик функциите се запишани како $y = f(x)$, а во имплицитен облик функциите се запишани како $F(x, y) = 0$, каде $F(x, y)$ е функција од две променливи. Секоја функција во експлицитен облик $y = f(x)$ можеме да ја запишеме во имплицитен облик ставајќи $F(x, y) = y - f(x)$, но обратното не е секогаш лесно и изводливо, бидејќи равенката $F(x, y) = 0$ не секогаш можеме да ја решиме по y.

3. Функцијата $xy - 3 = 0$ е зададена во имплицитен облик и оттука лесно се добива нејзиниот експлицитен облик: $y = \dfrac{3}{x}$. Меѓутоа, функцијата $x + y + \sin y - 1 = 0$ не сме во состојба да ја запишиме во експлицитен облик, бидејќи не можеме точно да ја решиме равенката $x + y + \sin y - 1 = 0$ по y. ♦

За табеларно задавање на функција, во таблицата во првата редица (колона), се внесуваат вредностите на аргументот, а во втората редица (колона) соодветните вредности на функцијата. За појасно претставување на една функција на овој начин ќе ни послужи следниот пример.

4. Ја набљудуваме промената на температурата на воздухот T во функција од времето t (во h). Овие податоци ги внесуваме во следната табела.

t	$10h$	$11h$	$12h$	$13h$	$14h$	$15h$	$16h$	$17h$
$T(t)$	19°	21,5°	24°	25,5°	24°	22°	20,5°	18°

Од табелата лесно може да се прочита менувањето на температурата во текот на денот, на пример, во $10h$ е измерена температура од $19°C$, во $12h$ е измерена температура од $24°C$, во $14h$ е измерена температура од $24°C$ итн.

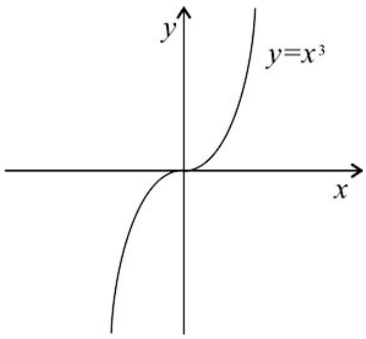
Овој начин на задавање е погоден ако сакаме да ја дознаеме вредноста на функцијата за прикажани вредности на аргументот, но не може да ја определиме вредноста на функцијата за вредност на аргументот што го нема во табелата. Во тој случај одредуваме приближна вредност на бараната. На пример, ако температурата во $14h$ била $24°C$, а во $15h$ била $22°C$, можеме да сметаме приближно дека во $14h$ и 30 минути температурата била $23°C$.♦

Графичкиот начин на задавање на функција се состои во избирање на координатен систем во кој се исцртува кривата на функцијата.

Овој начин на задавање на функција е најпрегледен од сите начини бидејќи лесно се согледува трендот на функцијата (кога расте, кога опаѓа) и за секоја барана вредност на аргументот може да ја отчитаме вредноста на функцијата. Недостатокот е во тоа што не може да се отчита вредноста на функцијата со доволно голема точност.

Често, за поголема прегледност функциите зададени на аналитички или табеларен начин дополнително се преставуваат на графички начин.

На пример, функција $f(x)=x^3$ од аналитички може да ја преставиме на графички начин (црт. 1).



Црт. 1

Дефиниција 3. Броевите $x_1, x_2, ..., x_n \in D_f$ за кои важи $f(x_1)=f(x_2)=...=f(x_n)=0$ се нарекуваат нули на функцијата $f(x)$.

5. Да се најдат нулите на функцијата $f(x)$:

а) $f(x)=3x^2-5x+2$; б) $f(x)=e^{5x}$; в) $f(x)=\sin(x-3)$.

а) Дадената функција е определена во множеството реални броеви, значи $D_f=\mathbb{R}$. Нулите ќе ги определиме ако ја решиме равенката $f(x)=3x^2-5x+2=0$. Значи нулите на функцијата се корените на квадратната равенка $3x^2-5x+2=0$, односно $x_1=1$ и $x_2=\frac{2}{3}$.

б) Бидејќи $D_f=\mathbb{R}$ и $f(x)=e^{5x}>0$ следува дека функцијата нема нули.

в) Во овој случај $D_f=\mathbb{R}$. Нули се корените на равенката $f(x)=\sin(x-3)=0$, односно $x-3=k\pi$, $x=3+k\pi$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Што е функција?

2. Најди ја дефиниционата област на функцијата:

а) $f(x)=\sqrt{3x-5}$, б) $f(x)=e^{\frac{1}{x-3}}$, в) $f(x)=\ln(|5x-2|)$,

г) $f(x)=\dfrac{\sin(5x-4)}{\sqrt[4]{x-5}}$, д) $f(x)=\dfrac{3x^4+5x^3-2x+1}{3^{5x-4}}$, ѓ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

3. Провери дали се еднакви функциите:

а) $f(x)=x(5x-3), x\in\mathbb{R}$ и $h(x)=5x^2-3x,\ x\in\mathbb{R}$,

б) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}, x\in\mathbb{R}$ и $h(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$,

4. Претстави ги графички следните функции:

а) $f(x)=x^3-4x+5$, б) $f(x)=\dfrac{5}{3x}$.

5. Да се најдат нулите на следните функции:

а) $f(x)=x^2-5x+6$, б) $f(x)=\lg(x^2+5)-3$, в) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt[5]{x^3-5x+6}}$,

г) $f(x)=(x-4)(x+3{,}15)(x^2+3x)$, д) $f(x)=x^{4-7x}$, ѓ) $f(x)=\sin(5x-6)+3$.

3. 2. Својства на функциите

Парност и непарност на функција

Пред да ги дефинираме поимите за парна и непарна функција, најпрво ќе го воведеме поимот симетрично множество на реалната права. Имено, ако $D\subseteq\mathbb{R}$ и за секој $x\in D$ и $-x\in D$, тогаш велиме дека D е **симетрично множество**.

1. Примери за симетрични множества се
$(-3,3)$, $[-2,2]$, $(-5,-4)\cup(4,5)$, $(-c,c)$, $(-\infty,\infty)$, $(-c,-d)\cup(d,c)$, $c,d\in\mathbb{R}^+$.♦

Дефиниција 1. Нека $f(x)$ е функција дефинирана на симетрично множество D. Тогаш дефинираме дека:

(i) $f(x)$ е **парна функција** ако за секој $x\in D$ важи $f(-x)=f(x)$;

(ii) $f(x)$ е **непарна функција** ако за секој $x\in D$ важи $f(-x)=-f(x)$.

2. На пример, функцијата $f(x)=ax^2$, $x\in D$ е парна, бидејќи:
$f(-x)=a(-x)^2=ax^2=f(x)$.

Функцијата $f(x)=\sin x$, $x\in D$ е непарна, бидејќи:
$f(-x)=\sin(-x)=-\sin(x)=-f(x)$.

Функцијата $f(x)=x^2-3x+2$ не е парна бидејќи
$f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2\neq f(x)$
и не е непарна бидејќи
$f(-x)=x^2+3x+2\neq -f(x)=-x^2+3x-2$.♦

Лесно може да се увиди дека графикот на парната функција е симетричен во однос на y-оската во однос на Декартовиот кооординатен систем, додека графикот на непарната функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

Монотоност на функција

Дефиниција 2. За функцијата $f(x)$, $x\in D_f$ се вели дека:
(i) строго монотоно расте на $M\subseteq D_f$, ако $\forall\ x_1,x_2\in M$ ($x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$)
(ii) строго монотоно опаѓа на $M\subseteq D_f$, ако $\forall\ x_1,x_2\in M$ ($x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$)
(iii) е неопаѓачка на $M\subseteq D_f$, ако $\forall\ x_1,x_2\in M$ ($x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$)
(iv) е нерастечка на $M\subseteq D_f$, ако $\forall\ x_1,x_2\in M$ ($x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$)

3. Функцијата $f(x)=2x+1, x\in R$ строго монотоно расте на целата своја област на определеност: $f(x_2)-f(x_1)=(2x_2+1)-(2x_1+1)=2(x_2-x_1)>0$ за $f(x)=2x+1$.
Функцијата $f(x)=ctg\, x$ монотоно опаѓа во интервалот $(0,\pi)$.♦

Ограничена и неограничена функција

Нека $f(x)$ е дефинирана на множеството $G\subseteq D_f$. Ако постои позитивен број M така што да важи $|f(x)|\leq M$ за секој $x\in G$, тогаш за функцијата $f(x)$ се нарекува ограничена функција на множеството G .

Доколку таков број M не постои, односно ако апсолутната вредност на функцијата го надминува кој и да било позитивен број, тогаш велиме дека функцијата $f(x)$ не е ограничена на множеството G .

4. Функцијата $f(x)=tg\, x$ е дефинирана на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, но не е ограничена во тој интервал.

Функцијта $f(x)=\sin x$ е дефинирана на интервалот $(-\infty,+\infty)$ и е ограничена во тој интервал, бидејќи се знае дека $-1\leq \sin x\leq 1$.♦

Задачи за самостојна работа

1. Дефинирај парна функција.

2. Провери дали секоја од следните функции е парна, непарна или ниту парна, ниту непарна:

а) $f(x)=x^4-5x+6$, б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, в) $f(x)=\sin x\cos x$.

3. Испитај ја монотоност на функцијата $f(x)$ на интервалот M,

а) $f(x)=5x+7,\ M=\mathbb{R}$, б) $f(x)=x^2+9,\ M=(-\propto,0]$,

в) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ M=(-\propto,0)$, г) $f(x)=2x^2+x,\ M=[1,9]$,

д) $f(x)=3x^3-1,\ M=(-\propto,0)$, ѓ) $f(x)=5x^2-x^3,\ M=(5,13)$.

4. Најди ги интервалите на монотоност на функцијата $f(x)=x^2-2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

5. Дали функцијата $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\quad x\neq 0$, е ограничена?

3. 3. Екстремни вредности и периодичност на функција

Поимот екстремна вредност на функција вообичаено се поврзува со поимот најголема и најмала вредност.

Дефиниција 1. Нека функцијата $f(x)$ е определена на интервалот (a,b) и $c\in(a,b)$.

(i) Функцијата $f(x)$ во точката c има **локален максимум** ако постои позитивен број δ, таков што $(\forall x\in(c-\delta,c+\delta))\ f(x)\leq f(c)$.

(ii) Функцијата $f(x)$ во точката c има **локален минимум** ако постои позитивен број δ, таков што $(\forall x\in(c-\delta,c+\delta))\ f(x)\geq f(c)$.

(iii) Ако функцијата $f(x)$ има (локален) минимум или максимум во точката c се вели дека има **локален екстрем** во точката c.

1. Функцијата $f(x)=x^2-2x+1$, $x\in R$ има минимум во точката $x=1$, бидејќи $f(1)=0\leq(x-1)^2\leq f(x)$.

Функцијата $f(x)=\cos x$ има локален максимум на интервалот $(-\pi,\pi)$ во точката $x=0$, бидејќи $f(0)=1\geq\cos x$. ♦

Дефиниција 1. Нека функцијата $f(x)$ е определена на множеството D. Ако постои реален број $T \neq 0$ така што за секое $x \in D$, $x+T, x-T \in D$ и $f(x+T) = f(x)$, велиме дека функцијата $f(x)$ е **периодична** со период T.

За периодичните функции важи следната базична теорема.

Теорема. Ако $f(x)$ е функција дефинирарна на множеството D и периодична со $T \neq 0$, тогаш за секое $x \in D$ и секој цел број k важи $f(x+kT) = f(x)$.

Во точноста на горната теорема можеме да се увериме на следниот начин:

$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$,

$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f(x)$,

$f(x+4T) = f((x+3T)+T) = f(x+3T) = f(x)$.

Продолжувајќи ја оваа постапка, за секој природен број k добиваме дека важи $f(x+kT) = f(x)$. Потоа,

$f(x-T) = f((x-T)+T) = f(x)$,

$f(x-2T) = f((x-2T)+T) = f(x-T) = f(x)$,

$f(x-3T) = f((x-3T)+T) = f(x-2T) = f(x)$.

Продолжувајќи ја оваа постапка, за секој природен број k добиваме дека важи $f(x-kT) = f(x)$. Значи за секој цел број k важи $f(x+kT) = f(x)$.

Дефиниција 2. Ако функцијата $f(x)$, дефинирана на множеството D е периодична, тогаш најмалиот позитивен број T за кој важи $f(x+T) = f(x) \ \ \forall x \in D$ се нарекува **основен период** на функцијата.

1. Функциите синус и косинус се периодични со периода 2π:

$\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Периоди на овие функции се и броевите $2k\pi$, каде k е цел број, но најмалиот позитивен број е 2π, па основниот период е 2π. ♦

2. Функциите $y = \sin kx$ и $y = \cos kx$ имаат период $T = \dfrac{2\pi}{k}$, додека функциите $y = tg\, kx$ и $y = ctg\, kx$ имаат период $T = \dfrac{\pi}{k}$.

Имено, $\sin k\left(x + \dfrac{2\pi}{k}\right) = \sin(kx + 2\pi) = \sin kx$.

Аналогно важи за функцијата $y = \cos kx$.

Потоа, за функцијата $y = tg\, kx$ имаме

$$tg\, k\left(x + \frac{\pi}{k}\right) = tg\,(kx + \pi) = \frac{\sin(kx+\pi)}{\cos(kx+\pi)} = \frac{-\sin kx}{-\cos kx} = tg\, kx .$$

Аналогно важи за функцијата $y = ctg\, kx$.

Споменатите периоди на тригонометриските функции се и нивни основни периоди. ♦

3. Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на множеството на реалните броеви на следниот начин. Ако за реалниот број x важи $k \le x < k+1$, тогаш дефинираме $f(x) = x - k$. Бројот 1 е период за оваа функција. Навистина, ако $k \le x < k+1$, тогаш $k+1 \le x+1 < k+2$, па оттука добиваме

$$f(x+1) = (x+1) - (k+1) = x - k = f(x).$$

Нацртајте го графикот на оваа функција и уверете се дека бројот 1 е основен период за оваа функција.

Задачи за самостојна работа

Најди го локалниот екстрем на функцијата. Дали тој е максимум или минимум?

1. $f(x) = x^2 + 4x + 3$, **2.** $f(x) = -4x^2 + 8x - 5$.

Дали се периодични функциите:

3. $f(x) = \sin x + \cos x.$ **4.** $f(x) = x^2 - 2x + 3.$

5. Докажи дека $T = \frac{\pi}{4}$ е период на $f(x) = 4 + \sin 8x$.

6. Дали е периодична функцијата $f(x) = x^2$? Зошто?

3. 4. Сложена функција

Дефиниција 1. Нека f е пресликување од множство A во множеството B, а g е пресликување од множество B во множеството C. Дефинираме пресликување h од множеството A во множеството C, со формулате $h(x) = g(f(x))$. Вака дефинираното пресликување h се нарекува **состав** или **композиција** на пресликувањата f и g и се означува со $h = g \circ f$.

Функцијата h се нарекува исто така и **сложена функција**. Значи по дефиниција $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Забележуваме дека неопходно е кодоменот на функцијата f да се совпаѓа со доменот на функцијата g, бидејќи во спротивно сложената функција не е дефинирана.

1. Нека $f(x)=2x$ и $h(x)=3x+1$. Да ги најдеме сложените функции $h\circ f$ и $f\circ h$.

Во множеството $\mathbb{R}$ можеме да ги дефинираме и двете сложени функции $h\circ f$ и $f\circ h$:

$$(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x)=3(2x)+1=6x+1$$

$$(f\circ h)(x)=f(h(x))=f(3x+1)=2(3x+1)=6x+2$$

Очигледно дека $h\circ f\neq f\circ h$, односно за состав на две функции во општ случај не важи комутативниот закон. ♦

2. Дадена е сложената функција $y=\cos(4x-3)$. Најди ги функциите што ја образуваат оваа функција.

Нека $f(x)=4x-3$ и $g(x)=\cos x$. Имаме $y=\cos(4x-3)=g(f(x))=(g\circ f)(x)$. ♦

Теорема. Нека f, g и h се три функции, такви што кодоменот на функцијата f се совпаѓа со доменот на g, а кодоменот на функцијата g се совпаѓа со доменот на h. Тогаш важи равенството

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f).$$

Доказ. Лесно се уверуваме дека двете функции имаат ист домен, а тоа е доменот на функцијата f и имаат ист кодомен, а тоа е кодоменот на функцијата h. Освен тоа

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))\text{ и}$$

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x))),$$

па оттука за секое x важи $((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Дефинирај состав на пресликувања.

2. Дадени се пресликувањата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ со $f(x)=2x, g(x)=-x$. Најди $f\circ g$ и $g\circ f$.

3. Најди ги сложените функции $f\circ h$ и $h\circ f$, ако:

а) $f(x)=\ln(x+1)$, $h(x)=e^{2x-3}$, $x\in\mathbb{R}$ б) $f(x)=\sin x-\cos x$, $h(x)=5x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

4. Најди ги функциите од кои е составена сложената функција:

а) $(f\circ h)(x)=3^{5x+4}$. б) $(f\circ h)(x)=\ln(\sin x-4)$.

5. Избери три линеарни функции f, g, h. Најди ги сложените функции $(h\circ g)\circ f$ и $h\circ(g\circ f)$ и провери дали се тие еднакви.

3. 5. Инверзна функција

Нека е зададена функцијата $f: A \to B$. Се поставува прашање дали постои функција $g: B \to A$ (чиј домен е кодоменот на g, а нејзиниот кодомен е доменот на g), така што за секое $x \in A$ да важи $g(f(x)) = x$ и за секое $y \in B$ да важи $f(g(y)) = y$. Може да се докаже дека таква функција постои ако и само ако функцијата f е биекција. Во тој случај функцијата g се нарекува **инверзна функција** на функцијата f и вообичаено се означува со f^{-1}. Притоа треба да се нагласи дека f^{-1} нема ништо заедничко со реципрочната вредност $\frac{1}{f}$ и тоа е само симболична ознака.

Значи, аргументот на дадената функција е променлива на нејзината инверзна функција, а променливата на дадената функција е аргумент на нејзината инверзна функција. Затоа можеме да запишеме

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Оттука произлегува следното практична постапка за наоѓање на инверзна функција на дадена функција. Во формулата $y = f(x)$ доволно е само x и y да си ги заменат своите места, а потоа така добиената равенка се решава по однос на y за да се изрази како функција по x.

1. Нека е дадена линеарната функција $y = ax + b$. Нејзината инверзна функција е $x = ay + b$. Ако така добиената равенка се реши по однос на y, нејзината функција е повторно линерна функција: $y = \dfrac{x-b}{a}$. ♦

Од самата дефиниција на инверзната функција добиваме дека точката (x, y) припаѓа на графикот на дадена функција f ако и само ако точката (y, x) припаѓа на графикот на нејзината инверзна функција. Точките (x, y) и (y, x) се симетрични во однос на правата $y = x$ во координатната рамнина. Оттука добиваме дека графикот на инверзната функција $f^{-1}(x)$ е **симетричен** на графикот на функцијата $f(x)$ во однос на симетралата на I и III квадрант, односно $x = y$.

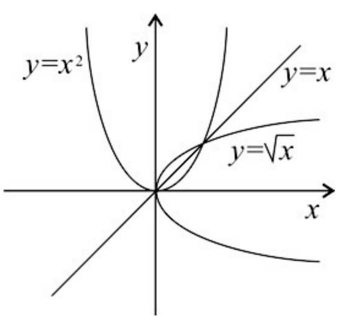
Оттука, а исто така и од самата дефиниција следува дека ако g е инверзна функција на функцијата f, тогаш f е инверзна функција на функцијата g, што значи дека тие се заемно инверзни една на друга.

Рековме дека инверзната функција постои само ако дадената функција е биекција. Но, во практика тоа не се случува често. Ако дадената функција не е биекција (такви се, на пример, тригонометриските функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$), во тој случај ја разгледуваме дадената функција на помал домен, каде што функцијата е биективна и за така направената рестрикција на дадената функција можеме да бараме инверзна функција. Така за да се воведат функциите

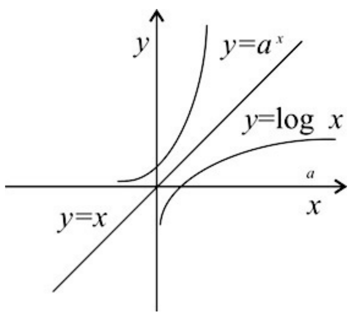
$f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\mathrm{arctg}\, x$ $f(x)=\mathrm{arcctg}\, x$

кои се инверзни на функциите $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ и $ctg\, x$, соодветно, функцијата $\sin x$ се разгледува на интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, функцијата $\cos x$ се разгледува на интервалот $[0,\pi]$, функцијата $tg\, x$ се разгледува на интервалот $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, а функцијата $ctg\, x$ се разгледува на интервалот $(0,\pi)$. На овие интервали функциите се биективни и нивните инверзни постојат и се добро дефинирани.

2. Функциите $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ се инверзни една на друга во интервалот $[o,\propto)$. Но ако ја разгледуваме истата функција на интервалот $(-\propto,0)$, тогаш инверзна на функцијата $y=x^2$ е функцијата $y=-\sqrt{x}$ (црт. 2).♦



Црт. 2



Црт. 3

3. Инверзни се една на друга и функциите $y=a^x$ и $y=\log_a x$ (црт. 3). ♦

Задачи за самостојна работа

1. Што е инверзна функција на дадена функција f ?

Најди ја инверзната функција на функцијата:

2. $f(x)=2x+1.$ **3.** $f(x)=x^2-3.$ **4.** $f(x)=x^2+1.$ **5.** $f(x)=2^x.$

6. $f(x)=\frac{1}{x}.$ **7.** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x.$ **8.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **.**

9. Какви се графиците на два заемно инверзни функции?

3. 6. Графици на некои елементарни функции

Основни елементарни функции се:

1. Константна функција $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$;

2. Степенска функција $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{R}$;

3. Експоненцијална функција $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 0$;

4. Логаритамска функција $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 0$;

5. Тригонометриски функции $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ и нивните инверзни функции

$f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $f(x)=\operatorname{arcctg} x$.

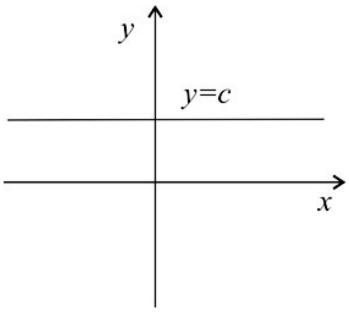
Елементарна функција е функција што се добива од основните елементарни функции со примена на конечен број на аритметички операции.

Во понатамошниот дел ќе бидат разгледани некои елементарни функции.

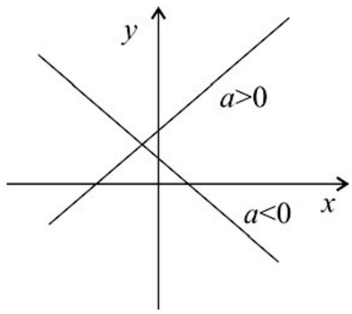
Константна функција

Константна функција е функцијата $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ (црт. 4).

Графикот е права паралелна со x-оската и минува низ точката $(0,c)$.



Црт. 4



Црт. 5

Степенска функција и полиномна функција

а) Линеарна функција $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Графикот преставува права (црт. 5).

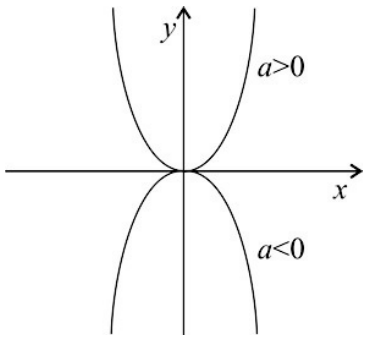
б) Квадратна функција

$f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

• Ако $b=c=0$, тогаш $f(x)=ax^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Графикот е парабола, симетричен во однос на y-оската (црт. 6). Притоа, ако

- $a>0$ тогаш параболата е отворена нагоре, односно



Црт. 6

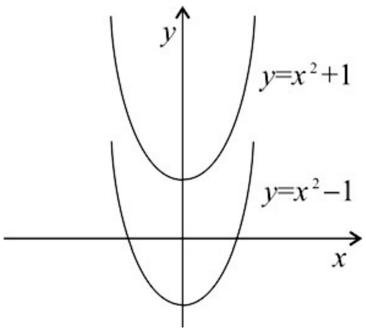
графикот на функцијата е свртен во позитивната насока на y-оската;
- $a<0$ тогаш параболата е отворена надоле, односно графикот на функцијата е свртен во негативната насока на y-оската.

• Ако $b=0$, тогаш $f(x)=ax^2+c$, $x\in\mathbb{R}$.

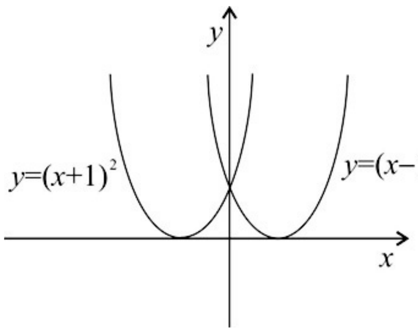
Графикот на функцијата $f(x)=ax^2+c$ е ист со графикот на функцијата $f(x)=ax^2$ само со поместување по y-оската за c. Притоа, ако:

- $c>0$ графикот се поместува во позитивната насока на y-оската;
- $c<0$ графикот се поместува во негативната насока на y-оската.

1. На црт. 7 се прикажани графиците $f(x)=x^2+1$ и $f(x)=x^2-1$. ♦



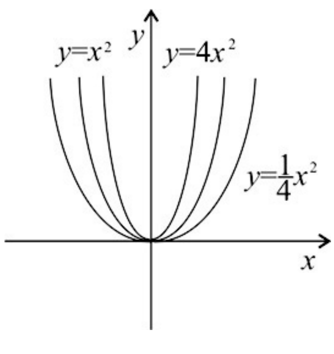
Црт. 7



Црт. 8

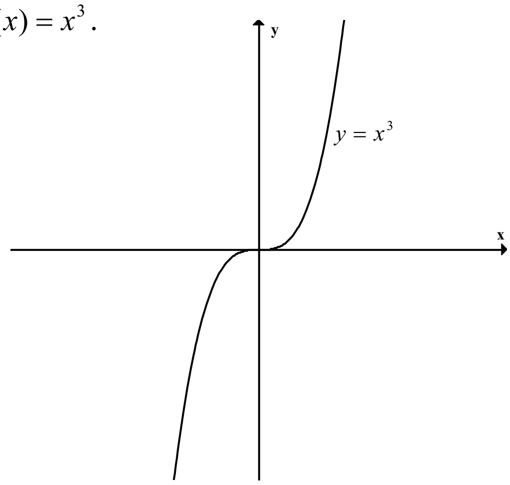
2. На црт. 8 се прикажани графиците на функциите $f(x)=(x+1)^2$ и $f(x)=(x-1)^2$. Графикот е ист како графикот на функцијата $y=x^2$ само поместен долж x-оската за единица.♦

3. На црт. 9 се прикажани графиците на функциите $f(x)=4x^2$; $f(x)=\frac{1}{4}x^2$; $f(x)=x^2$. Од цртежот гледаме дека графиците се стегаат или растегнуваат. ♦



Црт. 9

в) Функцијата $f(x) = x^3$.

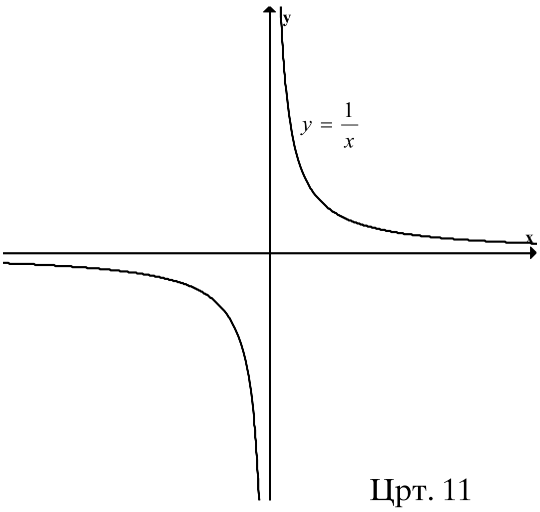


Црт. 10

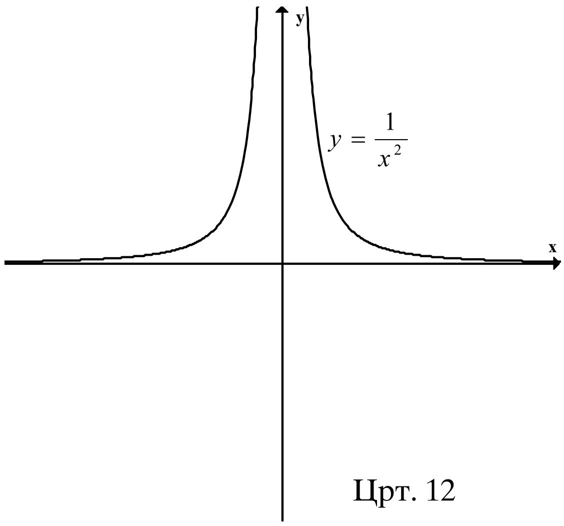
Графикот на функцијата се нарекува кубна парабола (црт. 10).

г) Функцијата $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$.

Графикот се нарекува хипербола и се состои од два дела (црт. 11)



Црт. 11

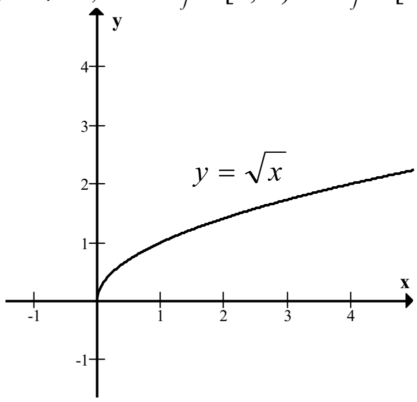


Црт. 12

д) Функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Графикот на функцијата се состои од два дела (црт. 12).

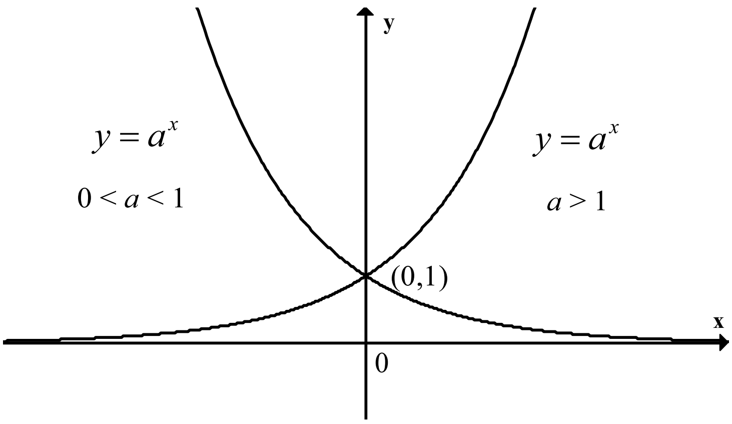
ѓ) Функцијата $f(x)=\sqrt{x}$, на $D_f=[0,\infty)$ и $V_f=[0,\infty)$



Црт. 13

Експоненцијална функција

$f(x)=a^x$, $a>0$, $x\in R$



Црт. 14

Ако $a<1$, функцијата строго монотоно опаѓа кога x расте по целата дефинициона област.
Ако $a>1$, функцијата строго монотоно расте кога x расте по целата дефинициона област (црт. 14).
$D_f=R$, $V_f=(0,\infty)$

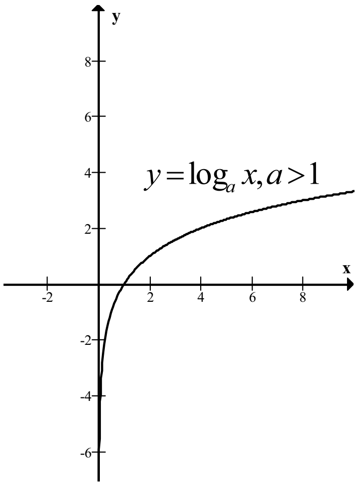
Логаритамска функција

$f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$,

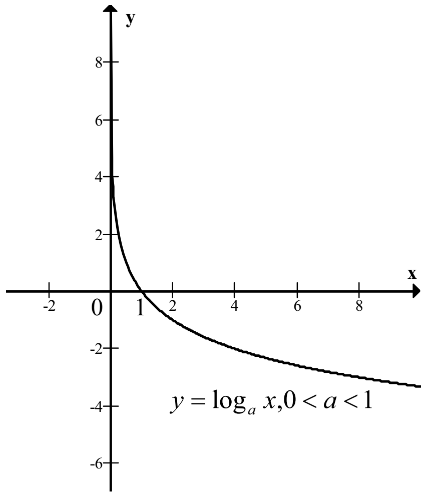
Ако $a > 1$, тогаш функцијата строго монотоно расте кога x расте по целата област (црт. 15а)

Ако $a < 1$, тогаш функцијата строго монотоно опаѓа кога x расте по целата дефинициона област (црт. 15б).

$D_f = R$, $V_f = (0, \propto)$



Црт. 15а

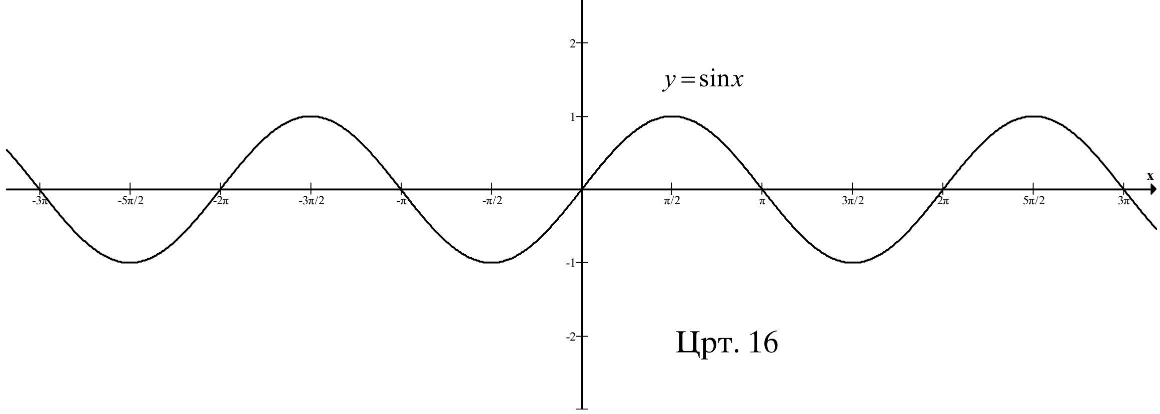


Црт. 15б

Графикот на логаритамската функција е симетричен на графикот на експоненцијалната функција во однос на правата $y = x$.

Тригонометриски функции

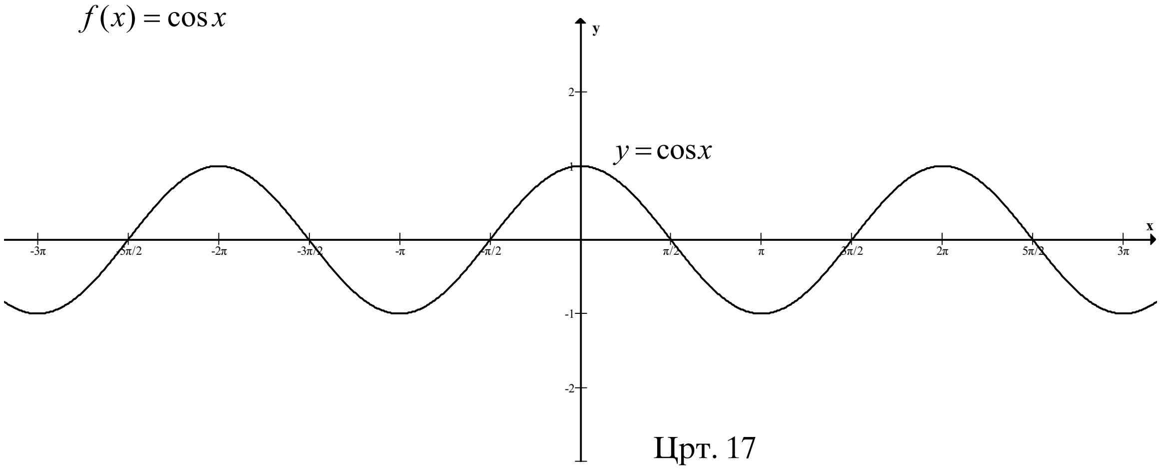
$f(x) = \sin x$, $\quad x \in R$.



Црт. 16

Графикот се нарекува синусоида. Функцијата има нули во точките $x = k\pi$, има максимум (1) во точките $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, има минимум (-1) во точките $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, расте на интервалите $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, опаѓа на интервалите $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, каде што k е цел број (црт. 16).

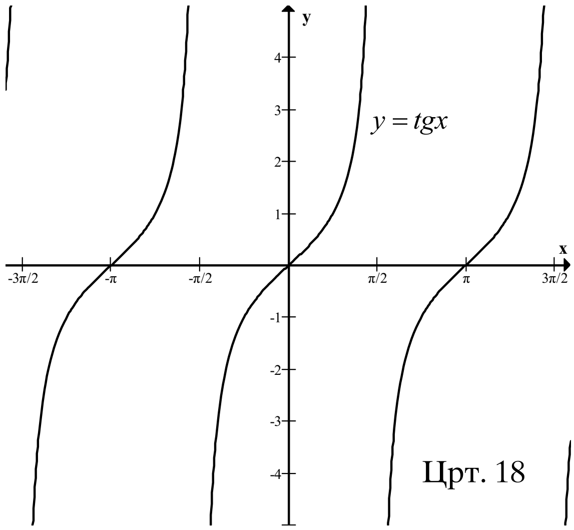
$f(x) = \cos x$



Црт. 17

Графикот се нарекува косинусоида. Функцијата има нули во точките $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, има максимум (1) во точките $2k\pi$, има минимум (-1) во точките $-\pi + 2k\pi$, расте на интервалите $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$, опаѓа на интервалите $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, каде што k е цел број (црт. 17).

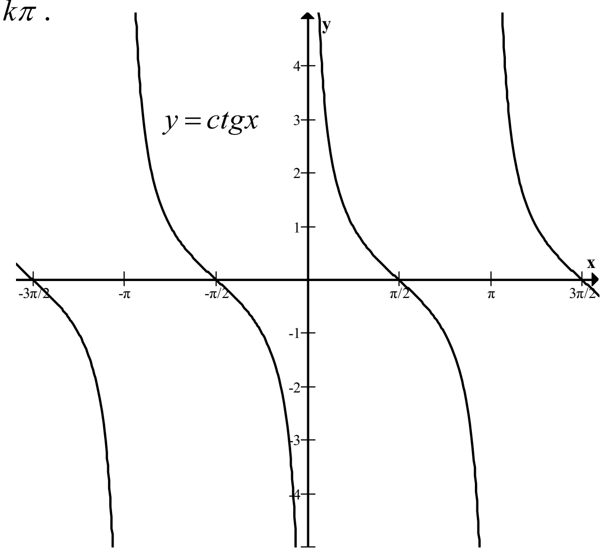
$f(x) = tg\, x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.



Црт. 18

Функцијата нема максимум ниту минимум, и на секои од интервалите $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ функцијата расте од $-\infty$ до $+\infty$ (црт. 18).

$f(x)=ctgx$, $x\neq k\pi$.



Црт. 19

Функцијата нема максимум ниту минимум, и на секои од интервалите $(k\pi,\pi+k\pi)$ функцијата монотоно опаѓа од ∞ до $-\infty$.

Дробнорационални функции

Дробнорационалните функции се важен дел од елементарните функции. Тоа се функции кои претставуваат количник на два полинома. Од нив ќе ја разгледаме билинеарната функција $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, ($x\neq-\frac{d}{c}$), при претпоставка дека $ad-bc\neq0$. Оваа функција може да се трансформира на следниот начин во облик $y=\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$. На тој начин заклучуваме дека незиниот график е ист со графикот на функцијата $y=\frac{\beta}{x}$, само што е поместен за α единици долж y оската и за γ единици вдолж x оската.

4. $y=\frac{4x-5}{2x-1}=\frac{(4x-2)-3}{2x-1}=2-\frac{3}{2x-1}=2+\frac{-\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}$. ♦

Задачи за самостојна работа

Скицирај ги графиците на следните функции:

1. а) $f(x)=3$, б) $f(x)=5x^2-x+1$, в) $f(x)=2^x$, г) $f(x)=5\log_2 x$.

2. а) $f(x)=2\sin x$, б) $f(x)=1/2\cos x$, в) $f(x)=\dfrac{3}{7x^3}-1$.

3*. Скицирај го графикот на функцијата $y=|x^2-1|$.

(Упатство. Делот од графикот на функцијата $y=x^2-1$ кој што се наоѓа под x-оската треба да се преслика со осна симетрија во однос на x-оската.)

4. Скицирај го графикот на функцијата $y=\log_2(x-1)$.

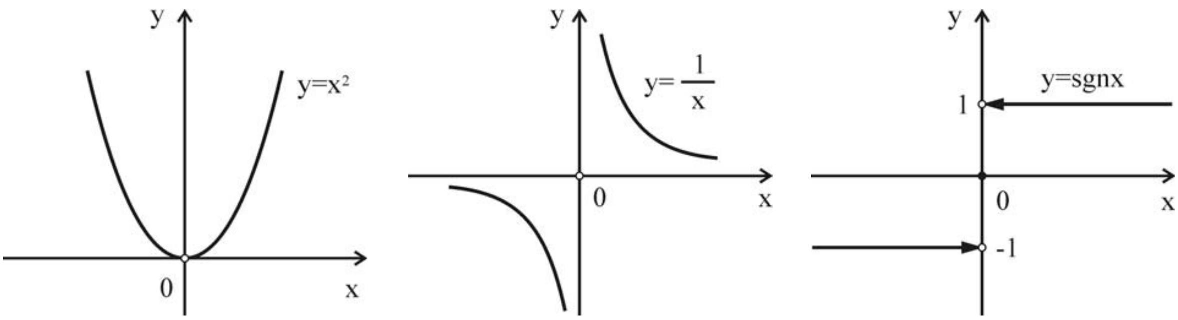
5. Скицирај го графикот на функцијата $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+2$.

3. 7. Непрекинатост на функција

Ќе разгледаме некои графици на функции со кои сме се сретнале порано. На црт. 20 се прикажани графиците на функциите

$$y=x^2,\quad y=\frac{1}{x}\quad \text{и}\quad y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

Се поставува прашањето: дали графикот на секоја од дадените функции може да го нацртаме без да го подигнеме моливот од хартијата, односно со непрекинато движење на моливот по хартијата?



Црт. 20

Функцијата $y=x^2$ може да се нацрта со еден потег, па велиме дека таа е **непрекината** или дека е непрекината во секоја точка. При цртањето на графикот на функцијата $y=\frac{1}{x}$ моливот мора да се одвои од хартијата за да го нацртаме графикот за вредностите $x \neq 0$. Може да се каже дека функцијата $y=\frac{1}{x}$ е непрекината во секоја точка од интервалот $(-\infty,0)$ и во секоја точка од интервалот $(0,+\infty)$, додека во точката $x=0$ функцијата не е дефинирана.

Прецизна дефиниција на поимот непрекинатост на функција во точка би била следната:

Дефиниција 1. Нека функцијата f е дефинирана на интервалот (a,b) и нека $x_0 \in (a,b)$. За функцијата f велиме дека е непрекината во точката x_0, ако за секој позитивен број ε постои позитивен број δ, таков што за секој $x \in (a,b)$ за кој е исполнето неравенството $|x-x_0|<\delta$, важи неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Од дефиницијата следува дека за секоја $\varepsilon-$околина $\left(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right)$ на точката $f(x_0)$ постои соодветна $\delta-$околина $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$ на точката x_0 која со функцијата f се пресликува во околината $\left(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\right)$.

1. Докажи дека функцијата $f(x)=3x+1$ е непрекината во точката $x=1$.

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Тогаш за секој реален број x таков што $|x-1|<\delta$, имаме

$$|f(x)-f(1)|=|3x+1-4|=3\,|x-1|<3\cdot\delta=3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \ \blacklozenge$$

2. Докажи дека функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ е непрекината во точката $x=2$.

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $\delta=\sqrt{2}\varepsilon$. Тогаш за секој ненегативен реален број x таков што $|x-2|<\delta$, имаме

$$|f(x)-f(2)|=|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right|=\frac{|x-2|}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\leq\frac{|x-2|}{\sqrt{2}}<\frac{\delta}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}}=\varepsilon. \blacklozenge$$

На сличен начин може да се докаже дека функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ е непрекината во произволна точка $x_0>0$. Дискусијата за непрекинатост на функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ во точката $x=0$ нема смисла бидејќи точката $x=0$ не е внатрешна точка од дефиниционата област на функцијата. Во таквите гранични точки можеме да зборуваме за **непрекинатост одлево (оддесно)**. Имено, ако во погорната дефиниција условот $|x-x_0|<\delta$ го замениме со условот $-\delta<x-x_0\le 0$ ($0\le x-x_0<\delta$), тогаш за функцијата f велиме дека е непрекината одлево (од десно) во точката x_0. Во таа смисла функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ е непрекината оддесно во точката $x=0$.

Непрекинатоста наоѓа примена кај приближните пресметувања, бидејќи во практиката скоро сите пресметувања се вршат со определена точност. Нека, на пример, функцијата f е непрекината во некој интервал и нека x_0 е ирационален број. Во таков случај знаеме дека записот на тој број има бесконечно многу децимали, па најчесто е невозможно да се пресмета точната вредност $f(x_0)$. Затоа, бројот x_0 се заокружува, односно наместо x_0 избираме број x со конечно многу децимали, а потоа наместо $f(x_0)$ ја пресметуваме вредноста $\mathrm{f(x)}$. Грешката која е направена е еднаква на $|f(x)-f(x_0)|$ и таа зависи грешката на аргументот $|x-x_0|$.

За функцијата f велиме дека е непрекината на затворениот интервал $[a,b]$ ако е непрекината во сите внатрешни точки на тој интервал, додека во точката a, односно b, е непрекината оддесно, односно одлево.

Може да докажеме непрекинатост во секоја точка од соодветната дефинициона област и на елементарните функции: степенски (x^{α}), експоненцијални, логаритамски, тригонометриски и инверзни на тригонометриските функции (иако таа постапка не мора секогаш да биде едноставна како погорните примери). Во случај на посложени функции ќе ги користиме следните теореми.

Теорема 1. Ако функциите f и g се непрекинати во точката x_0, тогаш во таа точка се непрекинати и функциите $f\pm g, kf$ $(k\neq 0)$, fg и $\dfrac{f}{g}$ (при услов $g(x_0)\neq 0$).

Теорема 2. Нека функцијата g е непрекината во точката $x=x_0$, а функцијата f е непрекината во точката $y_0=g(x_0)$. Тогаш и сложената функција $f\circ g$ е непрекината во точката $x=x_0$.

Теорема 3. Ако биективната функција $f:[a,b]\to[c,d]$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш функцијата f^{-1}, инверзната на функцијата f, е непрекината на интервалот $[c,d]$.

3. Докажи дека функцијата $f(x)=2x^3-x^2+5$ е непрекината за секој реален број x.

Функцијата $f_1(x)=x$ е непрекината за секој реален број x_0. Навистина, за произволно $\varepsilon>0$ избираме $\delta=\varepsilon$. Тогаш за секој реален број x, таков што $|x-x_0|<\delta$, имаме $|f_1(x)-f_1(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$

Потоа со примена на теоремата 1 може да заклучиме дека се непрекинати и функциите $f_2(x)=x^2$ и $f_3(x)=x^3$. Бидејќи константната функција е, исто така, непрекината (доказот на овој факт е едноставен), имаме дека и функцијата $g(x)=5$ е непрекината. На крајот, применувајќи ја теорема 1 на функциите $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$ и $g(x)=5$, заклучуваме дека функцијата $f(x)=2x^3-x^2+5$ е непрекината за секој реален број x_0. ♦

4. Најди го множеството на точки во кои функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ е непрекината.

Бидејќи функцијата $g(x)=x-1$ е непрекината, со примена на теорема 1 заклучуваме дека функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ е непрекината за секој $x\neq 1$. ♦

Во претходниот пример забележуваме дека со отфрлање на точката $x=1$ се добиваат интервалите $(-\infty,1)$ и $(1,+\infty)$ на кои функцијата е непрекината. Во општ случај со отфрање на точките на прекин од дефиниционата област, се добиваат интервалите на непрекинатост.

Слично како и во погорните примери може да се покаже дека полиномот

$$P=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$$

е непрекината функција за секој реален број x_0. Понатаму, рационалната функција

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m} \qquad (a_0\neq 0,\ b_0\neq 0)$$

е непрекината за секој реален број x_0 за кој именителот на функцијата не се анулира.

Задачи за самостојна работа

1. Кога функција f е непрекината во точка x_0?

2. Докажи дека функцијата $f(x)=x^2$ е непрекината во точката $x=3$.

3. Докажи ја непрекинатоста на функциите $y = \sin x$ и $y = \cos x$ во произволна точка користејќи го неравенството $|\sin x| \leq |x|$ (точноста на ова неравенство може да се провери геометриски).

4. Објасни зошто следните функции се непрекинати за назначените вредности на x:

а) $y = \sqrt{\sin x},\ 0 \leq x \leq \pi$;

б) $y = \sin(\ln x),\ x > 0$;

в) $y = x^x,\ x > 0$;

г) $y = \operatorname{tg} x$ ($x \neq k\pi$, k е цел број);

д) $y = e^x \cos x$;

ѓ) $y = \sin x + \cos x$;

5. Најди ги точките на прекин и интервалите на непрекинатост на следните функции:

а) $y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$, б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$, в) $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3. 8. Гранична вредност на функција

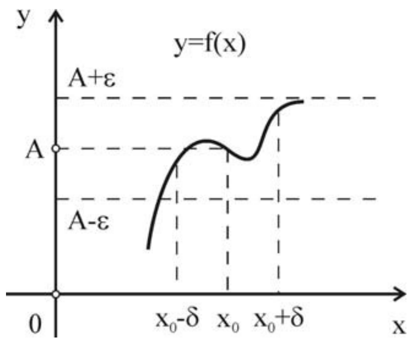
3.8.1. Поим за гранична вредност

Пред да ја воведеме дефиницијата за гранична вредност на функција, ќе ја разгледаме функцијата $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, која е дефинирана за секој реален број x, освен за $x = 2$. Со непосредно пресметување може да заклучиме дека кога вредностите на променливата x малку се разликуваат од 2, тогаш вредностите на функцијата $f(x)$ се приближуваат до бројот 4. Причина за тоа е што при $x \neq 2$, важи $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$, па $f(x) \approx 2 + 2 = 4$ кога $x \approx 2$.

Дефиниција 1. Нека функцијата f е дефинирана во некоја околина U на точката x_0 освен, можеби, во точката x_0. Реалниот број A се нарекува **гранична вредност** или **граница** на функцијата f кога x тежи кон x_0, ако за секој позитивен број ε постои позитивен број δ, таков што за сите $x \in U$ (освен можеби за x_0) за кои е исполнето неравенството $|x - x_0| < \delta$ важи неравенството $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тогаш пишуваме $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Од самата дефиниција непосредно следува дека функцијата f има гранична вредност A кога x тежи кон x_0, ако за секоја $\varepsilon-$околина на точката A постои $\delta-$околина на точката x_0, така што за секое $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $f(x)\in(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$.

Дефиницијата 1 може и геометриски да се интерпретира. На црт. 21 е претставен графикот на функцијата f дефинирана во некоја околина на точката x_0. За $\varepsilon>0$ конструираме лента ограничена со правите $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$.



Црт. 21

Соодветниот број δ треба да биде таков што дел од графикот на функцијата на интервалот $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ се содржи во претходно конструираната лента (освен, можеби, точката $(x_0,f(x_0))$).

1. Докажи дека $\lim\limits_{x\to3}(2x-1)=5$. Колкав треба да биде бројот δ, за $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$?

За $\varepsilon>0$, бираме $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогаш за секој број x, таков што $|x-3|<\delta$, имаме $|(2x-1)-5|=|2x-6|=2\,|x-3|<2\delta=2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$ Ако $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$, тогаш $\delta=\dfrac{1}{200}$. ♦

2. Докажи дека $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6.$

Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $\delta=\varepsilon.$ Тогаш за секој реален број $x\neq3,$ таков што $|x-3|<\delta$, имаме

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|(x+3)-6|=|x-3|<\delta=\varepsilon. \ ♦$$

Да забележиме дека во овој случај дадената функција не е дефинирана во точката $x=3$.

Во практика не секогаш пресметуваме граница на функција како во претходните примери, туку работиме по скратена постапка. Имено, од дефиницијата за непрекинатост на функција, ако функцијата f е непрекината функција во точката x_0, тогаш $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. И обратно, ако $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, тогаш функцијата f е непрекината во точката x_0. Врз основа на ова својство на непрекинатите функции, лесно може да се пресмета граничната вредност на непрекината функција во некоја точка. На пример, бидејќи функцијата $y=x^2-1$ е непрекината во секоја точка, имаме $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=2^2-1=3$. Меѓутоа, ако границата на функција се сведува на облик $\frac{0}{0}$, како во претходниот пример бидејќи $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$, тогаш именителот и броителот претходно ги скратуваме, а потоа бараме гранична вредност.

3. Пресметај $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Ако $x\neq 0$, тогаш $\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$, па затоа $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$, бидејќи $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$ е непрекината за $x=0$. ♦

4. Пресметај ја границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$, каде n е природен број.

Користејќи го идентитетот

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

се добива:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[(1+x)-1][(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+...+(1+x)+1]=$$
$$=\lim_{x\to 0}[(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+...+(1+x)+1]=n\,.\ ♦$$

5. Пресметај $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, каде n е природен број.

Ако ги помножиме броителот и именителот на изразот

$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ со $(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+...+(\sqrt[n]{1+x})+1$

и го искористиме идентитетот наведен во примерот 4, ќе добиеме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+...+1]}{x[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+...+1]}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+...+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+...+\sqrt[n]{1+x}+1}=\frac{1}{n}.\ ♦$$

3.8.2. Основни својства на граничната вредност

За пресметување на гранични вредности ја користиме следната теорема.

Теорема 1. Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, тогаш важат следните својства за гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},\ (B\neq 0)$.

Значи, граница од збир (разлика, производ или количник) на две функции е еднаква на збирот (разликата, производот или количникот) од границите на тие функции. Тврдењата под а) и б) на Теоремата 1 важат не само за две, туку за конечно многу функции.

6. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{x^3-1}\right)$.

Бидејќи $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ и

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2}{3}$,

заради Теорема 1 имаме $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$.♦

7. Најди ја границата $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

Во овој случај не би можеле да ја примениме теорема 1 бидејќи не постојат граничните вредности на собироците. Заради тоа ќе го трансформираме изразот на следниот начин (имајќи предвид дека $x\neq 1$):

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}=\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Овде е јасно дека бараната гранична вредност е еднаква на 1, кога $x\to 1$.♦

8. Најди $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}$.

Оваа гранична вредност се наоѓа со примена на резултатот $\lim\limits_{x\to 0} = \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n}$, каде n е природен број и теоремата 1. Имено, со делење на броителот и именителот на изразот со x и преминот на граничната вредност во количникот, се добива

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}. \blacklozenge$$

3.8.3. Проширување на поимот за гранична вредност

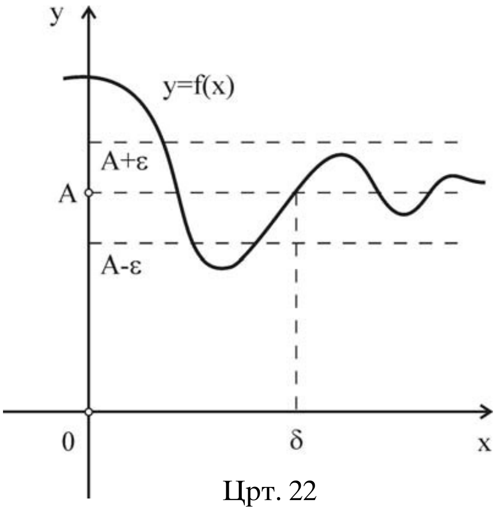
При решавањето на разни проблеми неопходни се и следните дефиниции:

Дефиниција 2. Нека функцијата f е дефинирана на некој интервал $(a,+\infty)$. Ако за секое $\varepsilon > 0$ постои број $\delta > a$ таков што за секое $x > \delta$ важи $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогаш бројот A се нарекува гранична вредност на функцијата кога $x \to +\infty$ и се пишува $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (црт. 22).

9. Докажи дека $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш за секое $x > \delta$ имаме $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$. ♦

Слично, се дефинира и граничната вредност $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ на функција кога $x \to -\infty$.



Црт. 22

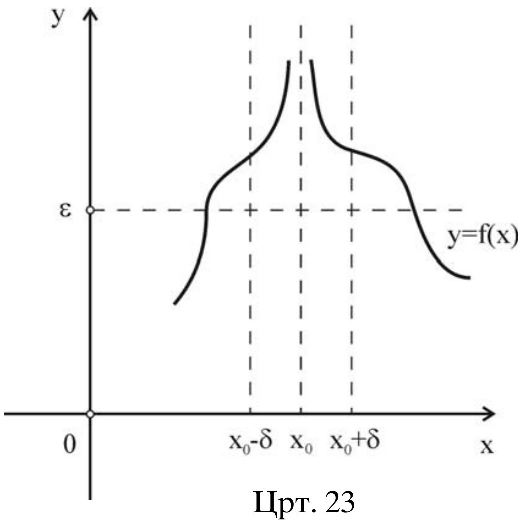
Дефиниција 3. Нека функцијата f е дефинирана во околина U на точката x_0, (освен, можеби, во точката x_0). Ако за секое $\varepsilon > 0$, постои број $\delta > 0$, таков што за сите $x \in U$ за кои за кои $0 < |x - x_0| < \delta$ важи неравенството $f(x) > \varepsilon$, тогаш се вели дека функцијата f тежи кон $+\infty$ кога $x \to x_0$ и се пишува $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (црт. 23).

10. Докажи дека $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty.$

Решение. Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $\delta=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$ Тогаш за сите $x\in U$ за кои $0<|x-1|<\delta,$ важи неравенството

$$\frac{1}{(1-x)^2}>\frac{1}{\delta^2}=\varepsilon.\ \blacklozenge$$

Аналогно се дефинира $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.



Црт. 23

Дефиниција 4. Нека функцијата f е дефинирана на некој интервал $(a,+\infty)$. Ако за секое $\varepsilon>0,$ постои број $\delta>a,$ таков што за секое $x>\delta$ важи неравенството $f(x)>\varepsilon$, тогаш се вели дека функцијата f тежи кон $+\infty$ кога $x\to+\infty$ и се пишува $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$

11. Докажи дека $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty.$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $\delta=\sqrt{\varepsilon}.$ Тогаш за секое $x>\delta$ важи неравенството $|x^2|>\delta^2=\varepsilon.\ \blacklozenge$

Аналогно се дефинираат $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

3.8.4. Некои поважни гранични вредности

Ќе наведеме неколку гранични вредности кои не се очигледни, но се јавуваат при решавањето на различни типови на задачи. Некои нивни примени кај пресметувањето на други гранични вредности ќе бидат прикажани во примерите што следуваат.

1⁰ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}.$

2⁰ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}.$

Да забележиме дека ова својство важи не само кога $x \to +\infty$, туку и кога $x \to -\infty$.

3⁰ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

4⁰ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)}$

Во специјален слчај, кога $a = e$ добиваме: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

5⁰ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \ (\alpha \neq 0)}$

12. Определи ги следните гранични вредности:

а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$; б) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$;

г) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$, $(\alpha \neq \beta)$; д) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

ѓ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}$; е) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, каде што ја применивме 1^0 и фактот дека $x \to 0$ повлекува дека $2x \to 0$ и $3x \to 0$.

б) Ако ја примениме трансформацијата

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

и го искористиме резултатот 1^0, заклучуваме дека $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

в) Бидејќи $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x} = \left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{4x}{x-1}}$, ако за изразот во средната заграда ставиме дека $\frac{2}{x-1}=y$, имаме (поради $x\to\infty \Leftrightarrow y\to 0$):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e \text{, додека}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}=4 \text{. Оттука } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=e^4 .$$

Напомнуваме дека овде го користевме следното правило:

Ако $\lim_{x\to x_0} f(x)=A>0$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$ (A и B се конечни броеви), тогаш $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=A^B$. Имено, користејќи ја трансформацијата $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ и непрекинатоста на функцијата e^x и $\ln x$ лесно доаѓаме до претходниот факт.

г)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\ e^{\beta x}\ \frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{x}=(\alpha-\beta)\lim_{x\to 0}\ e^{\beta x}\lim_{x\to 0}\ \frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}=(\alpha-\beta)\cdot 1\cdot 1=\alpha-\beta$$

каде што го користевме резултатот 4^0 (може да се воведе смената $(\alpha-\beta)x=y$).

д) Изразот $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ можеме да го трансформираме на следниот начин:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}}=e^{\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

Ако ставиме $\cos x-1=y$, тогаш $y\to 0$ кога $x\to 0$ и $\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$ (применет е резултатот 3^0), додека $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$ (види го резултатот под б). Од споменатото следува $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}$.

ѓ) Ако во броителот на изразот го одземеме и додадеме бројот 1, а потоа го примениме резултатот по 5^0, добиваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1-(\sqrt{1+x}-1)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.$$

е) Да ставиме $y=\arcsin x$. Тогаш $x=\sin y, -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ и $x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$. Сега имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1\,.\blacklozenge$$

Задачи за самостојна работа

1. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3;$ б) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5;$ в) $\lim\limits_{x\to -1}(5x-3)=-8;$

г) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} 9x=3;$ г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3};$ д) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-4}=0.$

2. Докажи дека $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$. Колкав треба да биде бројот δ за $\varepsilon=\frac{1}{1000}$?

3. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4};$ б) $\lim\limits_{x\to 0,1} -5;$ в) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \log_2 3.$

4. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 2} x^2;$ б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}(6x-1);$ в) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\sqrt{\mathrm{x}+2}.$

5. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x(x-1)};$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1};$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1};$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x^4-1};$ д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2};$ ѓ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-5x+3}.$

Најди ги следниве граници:

6. а) $\lim\limits_{x\to -2}(7x+1);$ б) $\lim\limits_{x\to -2}(x+4)^2;$ в) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3-2x^2+4).$

7. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3};$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2};$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}.$

8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1};$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{3x^3+2x^2};$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$

9. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x+6}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-7x+6}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{2x^2-12x+16}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-9x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+7x-11}{x^2+9x-10}$.

11*. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{1-\sqrt{x-1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$.

12*. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

13. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+2x-x^2}{2x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{1+x^4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^3}{1-x^2}$.

14. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$; ѓ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$.

15. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{2x-3}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{2x-3}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x-3}$.

16*. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+t\,g\,x}$.

17*. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1-\operatorname{tg} x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 3x-\sin x}$.

18*. Најди ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{3-4x+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$; в) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

г) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$; ѓ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

3. 9. Асимптоти на функција

При скицирање и цртање на графици на функции, особено е корисно ако претходно се најдат неговите асимптоти. Асимптоти на графикот се прави во рамнината, кон кои дел од графикот на функцијата, односно некое подмножество на точки $(x, f(x))$, се стреми кон некоја права p, кога точката $(x, f(x))$ се оддалечува кон бескрајност од координатниот почеток. Овде под терминот „се стреми“ се подразбира дека граничната вредност на растојанието од точките со координати $(x, f(x))$ до дадената права p е еднаква на нула.

Во зависнот од тоа каква е заемната положба на правата со кординатните оски, разликуваме три вида на асимптоти:

- хоризонтална асимптота, ако правата p е паралелна со x-оската,
- вертикална асимптота, ако правата p е паралелна со y-оската,
- коса асимптота, ако правата p не е паралелна со x-оската и не е паралелна со y-оската. Притоа, дозволено е графикот да ја сече правата p во конечно многу точки или бесконечно многу точки. Исто така еден график може да има и повеќе асимптоти.

Правите кои се паралелни со x-оската имаат равенки од облик $y=b$. Притоа геометриски е јасно дека правата $y=b$ е **хоризонтална асимптота,** ако важи барем еден од двата услови:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Ако важи првиот услов, тогаш десната „гранка“ на графикот се страми кон правата $y=b$, а ако важи вториот услов, тогаш левата „гранка“ на графикот се страми кон правата $y=b$. Но можно е левата гранка на графикот да се стреми кон една (хоризонтална) права, а десната гранка се стеми кон друга (хоризонтална) права.

1. На пример, ако го погледаме графикот на функцијата $y = \arctan x$, неговата десна гранка се стрми кон правата $y = \frac{\pi}{2}$, бидејќи $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, а неговата лева гранка се стрми кон правата $y = -\frac{\pi}{2}$, бидејќи $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Графиците на функциите $y = 1 + \frac{x}{x^2+1}$, $y = 1 - \frac{x}{x^2+2}$ и $y = 1 + \frac{\sin x}{x}$ имаат иста хоризонтална асимптота $y = 1$, бидејќи за сите нив важи $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 1$. Но тие се разликуваат по тоа што првиот график се наоѓа над асимптота за големи вредности на x, вториот график се наоѓа под асимптота, а третиот график бесконечно многу пати ја сече асимптотата. Исто така, за доволно мали (негативни) вредности на аргументот првиот график се наоѓа под асимптотата, вториот е над асимптотата, а третиот график повторно ја сече асимптотата во бесконечно многу точки. ♦

Затоа пред исцртувањето на графикот потребно е да видиме каков е знакот (+ или -) на разликата $f(x) - b$ за доволно големи вредности на x и доволно мали вредности на x. Притоа ако $f(x) - b > 0$ за секое $x > M$ ($x > M$), тогаш графикот е над асимптотата, а ако $f(x) - b < 0$ за секое $x > M$ ($x > M$), тогаш графикот е под асимптотата.

Правите кои се паралелни со y-оската имаат равенки од облик $x = a$. Притоа правата $x = a$ е **вертикална асимптота**, ако важи барем еден од четирите услови:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a+} f(x) = -\infty .$$

Притоа знакот (+ или -) после a укажува дали x се стреми кон a од десно $(a+)$ или од лево $(a-)$. Притоа, кога x се стреми кон a и од лево и од десно, функцијата се стреми кон $+\infty$ или $-\infty$, што значи можни се четири случаи.

Правите кои не се паралелни со x-оската и не се паралелни со y-оската имаат равенки од облик $y = kx + n$, каде $k \neq 0$. Притоа може да се покаже дека **ако правата** $y = kx + n$, **(** $k \neq 0$ **) е коса асимптота, тогаш**

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Важи и обратното, ако границите $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ постојат и тие се конечни, тогаш правата $y = kx + n$, е коса асимптота. Исто како и кај хоризонталните асимптоти и тука може да пресметуваме независно гранични вредности кога $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ и да зборуваме за коса аимптота од лево и од десно. Исто така и овде е пожелно да видиме каков е знакот на разликата

$f(x)-kx-n$. Ако тој е позитивен, графикот е над асимптотата, а аке е негативен, графикот е под асимптотата.

2. За функцијата $y=\dfrac{2x^2-x+3}{3x+2}$ имаме

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+2x}=\frac{2}{3} \quad \text{и}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+3}{3x+2}-\frac{2}{3}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x+9-6x^2-4x}{3(3x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+9}{9x+6}=-\frac{7}{9},$$

без разлика дали $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Значи правата $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{9}$ претставува коса асимптота. Знакот на изразот

$$\frac{2x^2-x+3}{3x+2}-\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}=\frac{-7x+9}{9x+6}+\frac{7}{9}=\frac{-21x+27+21x+14}{9(3x+2)}=\frac{41}{9(3x+2)}$$

е позитивен кога $x\to+\infty$, што покажува дека во овој случај графикот е над асимптотата. Но кога $x\to-\infty$, знакот на претходниот израз е негативен, што покажува дека во овој случај графикот е под асимптотата. Забележуваме дека правата $x=-\dfrac{2}{3}$ претставува вертикална асимптота, при што

$$\lim_{x\to-2/3-}f(x)=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-2/3+}f(x)=\infty.$$

Задачи за самостојна работа

1. Кога правата $y=kx+n, k\neq 0$ е коса асимптота за функцијата $f(x)$?

Најди ги асимптотите на следните криви:

2. а) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, б) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, в) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^5+1}$.

3. а) $f(x)=e^x$, б) $f(x)=e^x+e^{-x}$, в) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

4. а) $f(x)=\tan x$, б) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$, в) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$.

5*. Најди ја вредноста на параметарот *k*, за која функцијата $f(x)=\dfrac{2x^k+x+1}{x+2}$ има коса асимптота, а потоа најди ги асимптотите на таа функција.

3. 10. Задачи за вежбање

1. Кое множество е домен, а кое е кодомен на функцијата

а) $y = 2\sin(x+1)$, б) $y = 2x^2 - 1$?

2. Докажи дека функцијата $y = 0$ е истовремено и парна и непарна функција. Дали има други такви функции кои се истовремено и парни и непарни?

3. Најди ја инверзната функција на функцијата $y = \sqrt[3]{x-3}$.

4. Нацртај го графикот на функцијата $y = x^3 + x + 1$ и одговори дали таа има екстрем.

5. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2\sin x + 1$.

6. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2x^2$, а потоа и графокот на функцијата $y = 2(x+1)^2 = 2x^2 + 4x + 2$.

7. Зошто функцијата $y = \ln(1 + \frac{1}{2}\sin(e^x))$ е непрекината за секое x?

8. Најди ги точките на прекин и интервалите на непрекинатост на следните функции:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 4}$, б) $y = \dfrac{e^x - 2e^{-2x}}{x^2(x-4)}$.

9*. Докажи дека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ ако и само ако $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.

10*. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - x + 1)$; б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{2 + x^2}$; в) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x^2 + 1}$;

г) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2 - 2x - 3}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$; ѓ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - 1}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$; ж) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - a^2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{a-1}}$ $(a > 1)$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

11*. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$, б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$, в) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{1+x} - 3}{\sqrt[3]{x} - 2}$.

12. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2-x+16}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-13x^2+36}{x^3-27}$,

г) $\lim\limits_{x\to 6-0}\dfrac{x}{x-6}$, д) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2x+1}{x-2}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x+4}{4-x}$.

13*. Пресметај $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$.

14*. Докажи дека $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=+\infty\ (q>1)$.

15*. Пресметај

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+6x+16}-4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$.

4. ИЗВОДИ

Поимот извод се појавува на крајот на 17 век во врска со изучувањето на нерамномерните движења. Имено, со помош на поимот за извод беше овозможено воведување на поимот моментна брзина кај праволиниско движење. Воопшто, со помош на извод може да се претстави брзината на промената на величините кои нерамномерно се менуваат, на пример, температура на тело, електрична струја, итн. Поимот за извод се појавува и кај методот на наоѓање на тангента на крива во дадена точка. Во таа смисла, поимот извод зазема значајно место во математиката и нејзината примена. Во економијата поимот за извод може да се интерпретира како брзина на пораст на производстото на една фирма, т.е. зголемување на производството за единица време.

4. 1. Средна и моментна брзина. Проблем на тангента

Да разгледуваме најпрво тело кое се движи праволиниски. Нека $= (\ )$ е функцијата која ја дава зависноста на изминатиот пат од времето. Под нараснување на патот во временски интервал $[\ _0,\ _1]$, во ознака Δ , ја подразбираме разликата $(\ _1)-(\ _0)$, односно изминатиот пат во тој временски интервал. Значи, по договор, воведуваме ознака

$$\Delta = (\ _1) - (\ _0). \qquad (1)$$

Понатаму ако ставиме $_1 - \ _0 = \Delta$, ќе добиеме $_1 = \ _0 + \Delta$. Тогаш од (1) имаме

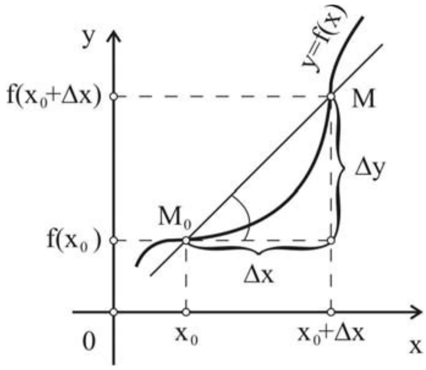
$$\Delta = (\ _0 + \Delta\ ) - (\ _0). \qquad (2)$$

Средна брзина на движење на тело во временски интервал $[\ _0,\ _1]$ се нарекува односот на изминатиот пат Δ , кој одговара на тој временски интервал, и изминатото време $_1 - \ _0 = \Delta$, односно

$$= \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{(\ _0 + \Delta\ ) - (\ _0)}{\Delta} \qquad (3)$$

Потполно аналогно можеме да ја разгледуваме и средната брзина на промената на функцијата $y = f(x)$ на интервалот $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (каде што Δx може да биде и негативна величина) како количник од нараснувањето на функцијата во точката x_0: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и соодветното нараснување Δx на независната променлива:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (4)$$



Црт. 1

На количникот (4) можеме да му дадеме и геометриско толкување. Имено, од црт. 1 гледаме дека односот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ претставува аглов коефициент на правецот на секантата која ги сврзува точките $_0(x_0, f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Меѓутоа, вредноста на средната брзина на движење на телото во интервалот $[\ _0,\ _0+\Delta\ ]$ не дава доволно информации за карактерот на движењето во споменатиот интервал. Колку временскиот интервал е поголем, толку претходниот заклучок е појасен. Заради тоа позначајно е да се разгледува вредноста на средната брзина за мали промени на времето Δ . Ако допуштиме интервалот $[\ _0,\ _0+\Delta\ ]$ да се стеснува за фиксно $_0$, односно ако $\Delta \to 0$, тогаш можеме да ја разгледуваме граничната вредност

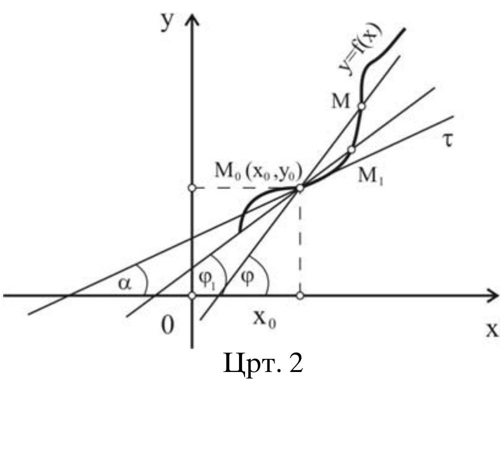
$$\lim_{\Delta \to 0}\frac{\Delta}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0}\frac{(\ _0+\Delta\ )-(\ _0)}{\Delta}$$

Доколку таа постои, се нарекува **моментна брзина** на телото во моментот $_0$.

Значи,

$$(\ _0) = \lim_{\Delta \to 0}\frac{\Delta}{\Delta}. \qquad (5)$$

Да се навратиме повторно на проблемот на средна брзина на промената на функцијата $y = f(x)$ на интервалот $[x_0, x_0+\Delta x]$. Попрецизно, да го разгледаме количникот (4) и да дадеме неговото геометриско толкување.



Црт. 2

Под **секанта** на крива се подразбира секоја права која со кривата има барем две заеднички точки. Нека е дадена точката $_0(x_0, f(x_0))$ на кривата чија равенка е $y = f(x)$, каде што f е некоја непрекината функција.

Ако на кривата избереме точка $M \neq M_0$, тогаш правата M_0M ќе биде секанта на таа крива.

Доколку постои права τ (низ $_0$) која претставува гранична положба на секантата $_0$ кога точката , долж дадената крива, тежи кон точката $_0$, тогаш правата τ се вика **тангента** на таа крива во точката $_0$ (црт. 2).

Да напомнеме дека исказот ,,точката тежи кон точката $_0$" треба да се сфати дека апсцисата на точката тежи кон апсцисата x_0 на точката $_0$, а ординатата на точката тежи кон ординатата $f(x_0)$ на точката $_0$.
Имено, ако $(x_0+\Delta x, f(x_0)+\Delta y)$, тогаш условот $\to {}_0$ е еквивалентен на условот $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ (истовремено) или поради непрекинатоста само на условот $\Delta x \to 0$. Понатаму, ако со φ го означиме аголот кој секантата $_0$ го зафаќа со позитивниот дел на x- оската и ако постои

$$\lim_{\to {}_0} \varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \varphi = \alpha ,$$

тогаш правата τ која минува низ точката $_0$ и со позитивниот дел на x- оската зафаќа агол α е токму бараната положба на секантата, односно тангента на кривата низ точката $_0$.

Наместо границата $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \varphi$ попогодно е да се разгледува границата $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi$ бидејќи коефициентот на правец на секантата $_0$ изнесува

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

од каде следува дека во граничната положба

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (6)$$

Претходната релација (6) го решава проблемот на тангента, што можеме да го илустрираме на следниот пример.

1. Најди ја равенката на тангента на параболата $y = x^2$ низ точката $_0(2,4)$ на таа парабола.

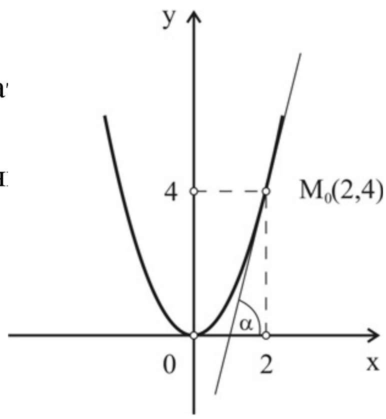
Равенката на тангента на дадената парабола низ точката $_0(2,4)$ гласи

$$y-4 = (x-2),$$

каде што $=\operatorname{tg}\alpha$ е коефициент на правец кој се пресметува по формулата (6). Затоа

$$= \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = 4,$$

па равенката на тангента е $y-4 = 4(x-2)$ (црт. 3), односно $y = 4x-4$.♦



Црт. 3

Задачи за самостојна работа

1. Што е средна е средна брзина?

2. Еден автомобил поаѓајќи од Скопје во 8 часот, стигнал во Охрид во 10 часот и 30 минути. Колкава е просечната брзина на автомобилот, ако се знае дека од Скопје до Охрид патот е долг 170 километри?

3. Што е моментна брзина? Наведи пример.

4. Што е секанта, а што е тангента на дадна крива во дадена точка?

5. Нека е зададена произволна линеарна функција. Што е нејзината тангента во произволна точка од таа права?

4. 2. Дефиниција на поимот извод на функција

Во претходниот дел заклучивме дека во решавањето на проблемот на брзина и проблемот на тангента, се јавува гранична вредност од ист тип, гранична вредност на количникот

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ кога } \Delta x\to 0.$$

Бидејќи има и други важни ситуации во кои се јавуваат ваквите вредности, станува јасно значењето на изучувањето и разработувањето на методи и правила за пресметување на таквите гранични вредности на функциите. Во таа смисла, го воведуваме поимот на извод на функција.

Дефиниција 1. Нека функцијата f е дефинирана во интервалот (a,b) и $x_0\in(a,b)$ е фиксна точка. Нека Δx е нараснување на аргументот на функцијата такво што $x_0+\Delta x\in(a,b)$. Под **извод на функцијата** f во точката x_0, во ознаката y' или $f'(x_0)$, се подразбира граничната вредност

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Во употреба се и следните ознаки за извод на функција: $\frac{dy}{dx},\frac{df(x)}{dx}$.

Да напомнеме дека погорната дефиницијата не претпоставува непрекинатост на функцијата. Но, не е тешко да се докаже дека ако функцијата f има извод во точката x_0, тогаш таа е непрекината во таа точка. Имено, ако постои граничната вредност (1) тогаш

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\to f'(x_0)\cdot 0=0 \text{ кога } \Delta x\to 0,$$

што значи дека функцијата f е непрекината во точката x_0.

Погорните примери сега може да ги искажеме на следниот начин:

а) Изводот на функцијата = ( ) во точката $_0$ претставува моментната брзина (во момент од времето $_0$) на телото кое се движи праволиниски по законот = ( ), што претставува **механичко толкување на поимот за извод**.

б) Изводот на функцијата f во точка x_0 претставува коефициент на правец на тангентата на графикот на таа функција во точка $_0$ на графикот со апсциса x_0, што претставува **геометриско толкување на поимот за извод**.

1. Определи го изводот на функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ во точка $x=1$. Нека нараснувањето Δx е такво што $1+\Delta x>0$. Тогаш заради

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}\,\frac{\sqrt{1+\Delta x}+1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}$$

добиваме дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2}$, односно $f'(1)=\frac{1}{2}$. ♦

2. За функцијата $f(x)=x^2$ и произволна точка x_0 имаме

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^{\,2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

Значи, $f'(x_0)=2x_0$. Со ова докажавме дека функцијата $f(x)=x^2$ има извод во произволна точка x_0 и дека $f'(x_0)=2x_0$. Исто така, јасно е дека со промената на x_0 се добива нова функција $f'(x)=2x$, каде што наместо x_0 ставивме x. Ако сакаме да најдеме извод на функцијата во определена точка, тогаш таа вредност ја заменуваме на местото од x во функцијата f'. Така, за функцијата $f(x)=x^2$, $f'(2)=2\cdot 2=4$. ♦

При барање на извод на функција, наместо точката x_0 ќе пишуваме x, односно наместо $f'(x_0)$ ќе бараме $f'(x)$.

3. Нека $f(x)= \quad =c\ n$ за секое x. Тогаш за произволно x:

$f(x+\Delta x)=$, па

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0 \qquad (\Delta x\neq 0).$$

Затоа $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. ♦

Значи, покажавме дека изводот од константа е еднаков на нула, т.е. $(\ )'=0$. Овој резултат има едноставно механичко и геометриско толкување: ако кај праволиниско движење на тело патот не се менува, тогаш телото е неподвижно, па неговата брзина е еднаква на нула. Од друга страна, графикот на функцијата $f(x)=\ $ е права паралелна со x- оската, па оттука тангентата во која било точка на графикот се совпаѓа со таа права. Значи, има коефициент на правец кој е еднаков на нула.

4. За функцијата $f(x)=x^n$, (n природен број), за $x\neq 0$ имаме:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x^{n-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{n-1}n=nx^{n-1}.$$

За $x=0$ се добива

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^n-0^n}{\Delta x}=\begin{cases}1, & n=1\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}=0, & n=2,3,...\end{cases}$$

Овој случај се вклопува во претходно добиениот резултат за $x\neq 0$, па имаме

$f'(x)=nx^{n-1}$, односно $(x^n)'=nx^{n-1}$ (2)

Специјално за $n=1,2,3,...$, имаме

$x'=1,\ (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2$ итн. ♦

Аналогно, со користење на соодветната гранична вредност, доаѓаме до изводот на функцијата $y=x^\alpha$, каде што α е рационален број различен од нула и x е таков за да функцијата биде дефинирана. Имено, би добиле

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Подоцна ќе докажеме дека оваа формула важи за секој реален број α различен од нула.

На пример, за $\alpha=\frac{1}{n}$, каде n е природен број, односно за функцијата $y=\sqrt[n]{x}$ имаме

$$y'=(x^{\frac{1}{n}})'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Специјално за функцијата $y=\sqrt{x}$, $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. За функцијата $f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$, имаме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Значи, $(a^x)'=a^x\ln a$. За $a=e$ се добива $(e^x)'=e^x$. ♦

6. Определи го изводот на функцијата $y=\ln x$.

Нека $x>0$ е фиксно, а Δx е такво што $x+\Delta x>0$. Тогаш со примена на граничната вредност $\lim\limits_{\to 0}\frac{\ln(1+\ )}{}=1$ се добива

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

Значи, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. ♦

7. Најди ги изводите на функциите:

а) $f(x)=\sin x$ б) $f(x)=\cos x$

а) Од $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$,

непосредно се добива

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$

при што ја искористивме границата $\lim\limits_{\to 0}\frac{\sin}{}=1$ и непрекинатоста на функцијата $\cos x$.

Значи $(\sin x)'=\cos x$.

б) Слично како во а) се добива дека $(\cos x)'=-\sin x$. ♦

8. Дадена е функцијата $f(x)=x^3$.

а) Најди ја равенката на тангента на графикот на дадената функција во точката $_0(1,1)$.

б) Најди ја равенката на тангентата повлечена од точката $(2,0)$ кон графикот на дадената функција.

а) Со помош на изводот на функцијата $f(x)=x^3$ ќе го пресметаме коефициентот на правец на тангентата во точката $_0(1,1)$. Од $f'(x)=3x^2$ имаме дека коефициентот на правец $=f'(1)=3$, па равенката на бараната тангента во точката $_0$ е $y-1=3(x-1)$, односно $y=3x-2$.

б) Бидејќи точката $(2,0)$ не припаѓа на графикот на функцијата не можеме да ја примениме истата постапка како под а). Затоа нека $_0(x_0, x_0^3)$ е произволна точка од графикот на функцијата. Аналогно на а), тогаш можеме да ја добиеме равенката на тангента која минува низ точката $_0$, односно

$$y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0), \qquad (3)$$

каде што, се разбира, x и y се координати на произволна точка на тангентата. Ако бараме тангентата да минува низ точката $(2,0)$, тогаш координатите на оваа точка мора претходно да ја задоволуваат равенката (3), односно

$$0 - x_0^3 = 3x_0^2(2 - x_0),$$

што е еквивалентно со $x_0 = 0$ или $x_0 = 3$. Заменувајќи ги добиените вредности за x_0 во равенката (3), добиваме равенки на две тангенти низ точката $(2,0)$

$$\tau_1 : y = 0$$

$$\tau_2 : y - 27 = 27(x - 3) \ \ (\Leftrightarrow y = 27(x - 2)).$$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Дадена е функцијата $y = \dfrac{1}{x}$. Определи го нараснувањето Δy, ако:

а) $x = 3,\ \Delta x = 0{,}1$; б) $x = 0{,}2,\ \Delta x = 0{,}1$; в) $x = -1,\ \Delta x = 0{,}01$.

2. Изрази го со помош на x_0 и Δx нараснувањето на функциите во точката x_0:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = 2x^2$; в) $y = x^3 - x$.

3. Дадени се функциите $y = x^2$ и $y = x^3$. Спореди го нараснувањето на функциите, ако:

а) $x = -2,\ \Delta x = 0{,}1$; б) $x = 1,\ \Delta x = 0{,}1$.

4. Дадена е функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Пресметај $f'(1),\ f'(-1),\ f'(2)$.

5. Најди ги по дефиниција изводите на следните функции:

а) $y = 3 - 2x$; б) $y = x^3$; в) $y = \sqrt[3]{x}$.

6. Определи ја равенката на тангентата на графикот на функцијата во точка $(1, y)$, која припаѓа на графикот, ако:

а) $y = x^2 - x$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = -x^2$.

7. Од точката $(1,1)$ конструирај тангента на параболата $y = x^2$.

4. 3. Правила за пресметување на извод

Покажавме како со примена на дефиницијата на извод се наоѓаат изводите на некои елементарни функции во произволна внатрешна точка на нивната дефинициона област. Меѓутоа, во некои други посложени примери таквата постапка може да биде покомплицирана. Затоа во ова поглавје ќе дадеме одредени правила кои ќе ни овозможат значително поедноставно да ги најдеме изводите на останатите функции.

Теорема 1. Ако секоја од функциите u и v има извод во точката x, тогаш функцијата Cu ($C = \text{const.}$) и збирот, разликата, производот и количникот на функциите u и v (во случајот на количник се претпоставува дека $v(x) \neq 0$), исто така, имаат извод во точката x и при тоа важат формулите:

а) $[(Cu(x)]' = Cu'(x),\ C = \text{const.}$;

б) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;

в) $[u(x)\ v(x)]' = u'(x)\ v(x) + u(x)\ v'(x)$; (1)

г) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{v^2(x)}$.

Доказ. а) Доказот следува од фактот дека $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(C\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) = C\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, каде што со Δu е означно нараснувањето на функцијата u во точка x кое одговара на нараснувањето Δx.

б) Нека $y(x) = u(x) \pm v(x)$ и нека $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ ги означуваат соодветно нараснувањата на функциите $u(x), v(x), y(x)$ во дадена точка x, кои одговараат на нараснувањето Δx. Тогаш имаме:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = [u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]$$
$$= [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.$$

Оттука, со делење со $\Delta x \neq 0$, се добива

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Бидејќи, по претпоставка, постојат граничните вредности

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x),$$

од (2), кога $\Delta x \to 0$, заклучуваме дека постои и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ и дека важи

$$y'(x) = u'(x) \pm v'(x),$$

што требаше да се докаже.

в) Сега ставаме $y(x) = u(x)\ v(x)$. Со истата ознака како под б) се добива дека

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)\ v(x+\Delta x) - u(x)\ v(x)\\ &= u(x+\Delta x)\ v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\ v(x) + u(x+\Delta x)\ v(x) - u(x)\ v(x)\\ &= u(x+\Delta x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x)\,[u(x+\Delta x) - u(x)]\\ &= u(x+\Delta x)\ \Delta v + v(x)\ \Delta u\end{aligned}$$

Со делење со $\Delta x \neq 0$ од последното равенство се добива

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Од претпоставка $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x),\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и егзистенцијата на изводот $u'(x)$, следува дека функцијата $u(x)$ е непрекината во точка x, односно $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$, па со премин на граничната вредност во (3) кога $\Delta x \to 0$ се добива

$$y'(x) = u(x)\ v'(x) + v(x)\ u'(x)$$

што ја дава третата формула во (1).

г) Во овој случај ќе ставиме $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Сега добиваме:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \qquad (4)\\ &= \frac{u(x+\Delta x)\ v(x) - u(x)\ v(x+\Delta x)}{v(x)\ v(x+\Delta x)}\\ &= \frac{u(x+\Delta x)\ v(x) - u(x)\ v(x) + u(x)\ v(x) - u(x)\ v(x+\Delta x)}{v(x)\ v(x+\Delta x)}\\ &= \frac{v(x)\,[u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x)\ v(x+\Delta x)}\\ &= \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x)\ v(x+\Delta x)}.\end{aligned}$$

Со делење со $\Delta x \neq 0$, од релацијата (4), добиваме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\ v(x+\Delta x)} \qquad (5)$$

Ако, на крајот, во релацијата (5) $\Delta x \to 0$, тогаш слично како под б) и в) ќе добиеме дека

$$y'(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{v^2(x)}$$

што е четврта формула во (1). ■

1. Со примена на правилата дадени во (1) сега сме во можност без напор да го пресметаме изводот на кој било полином. Користејќи го и претходниот резултат $(x^n)' = nx^{n-1}$, каде n е природен број, имаме, на пример, за полиномот

$P(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 1;$

$P'(x) = (2x^5)' - (3x^3)' + (x^2)' - (1)' = 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 + 2x - 0 = 10x^4 - 9x^2 + 2x.$

Значи, извод на полиномот $P(x)$ е повторно полином $P'(x)$, но со степен за еден помал од степенот на дадениот полином. ♦

2. Користејќи ја теоремата 1 и изводите на некои порано наведени елементарни функции, пресметај ги изводите на функциите:

а) $y = e^x \sin x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

а) Бидејќи $(e^x)' = e^x$ и $(\sin x)' = \cos x$, со примена на правилата за извод се добива

$y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$.

б) Бидејќи $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$, имаме

$y' = 2\,[(\sin x)' \cos x + \sin x\,(\cos x)'] = 2\,[\cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x)] = 2\cos 2x$

в) Применувајќи го правилото за извод на количник, имаме

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Значи,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in 9\right)$$

г) Со слична постапка како под в) се добива

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$ ♦

Задачи за самостојна работа

Пресметај ги изводите на следните функции:

1. $y = x^4 - x^2$. **2.** $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$. **3.** $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$. **4.** $y = \sqrt{x} + 3x$.

5. $y = \sin x + 5\cos^2 x$. **6.** $y = 4\sin x + 3x^3 \cos x - 2x^6$. **7.** $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

8. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. **9.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **10.** $y = 2x^3 - \sqrt[3]{x} + 2x^2\sqrt{x}$.

4. 4. Извод од сложена функција

Следната теорема ќе ни овозможи да ги пресметаме изводите на сложени функции како што се, на пример $y=\ln(3x^2-1)$, $y=\mathrm{tg}\,\frac{x+1}{x-1}$, $y=\sqrt{x^3+1}$ и сл.

Теорема 2. Ако функцијата u има извод во фиксна точка x, а функцијата $y=f(u)$ има извод во точката $u=u(x)$, тогаш и функцијата $y=f(u(x))$ има извод во точката x и притоа важи формулата

$$y'=f'(u)\ u'(x).$$

Доказ. Веднаш да истакнеме дека доказот на оваа теорема не е строг. Да го означиме со Δu прирастот кој одговара на прираст Δx во точка x, т.е. $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$, а со Δy прирастот на функцијата $y=f(u(x))$ кој одговара на прираст Δx. Ако постои околина на точката x во која $\Delta u\neq 0$, тогаш

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u(x+\Delta x))-f(u(x))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{u(x+\Delta x)-u(x)}\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=f'(u)\cdot u'(x)$$

бидејќи $\Delta u\to 0$ кога $\Delta x\to 0$, што следува од непрекинатоста на функцијата u во точка x (егзистенцијата на изводот на функцијата u во точката x повлекува непрекинатост на функцијата во истата точка).

Ако $\Delta u=0$ на бесконечно многу места, произволно блиску до точката x, тогаш $\Delta y=f(u(x+\Delta x))-f(u(x))=f(u+\Delta u)-f(u)=0$ на бесконечно многу места произволно блиску до точката x, односно и односот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ би бил еднаков на нула на бесконечно многу места, произволно блиску до точката x, па $y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$

Значи, формулата (1) важи и во овој случај. ■

Да напомнеме дека формулата (1) често се запишува во обликот

$$y_x'=f_u'\ u_x'$$

Исто така, во случај на посложени функции, на пример $y=f(g(u(x)))$, имаме слична формула:

$$y_x'=f_g'\ g_u'\ u_x'$$

3. Во случајот на функцијата $y=e^{\sin x}$, ставајќи $u=\sin x$, се добива дека

$$y'=(e^u)_u'(\sin x)_x'=e^u\cos x=e^{\sin x}\cos x$$

Слично за функцијата $y=\ln(3x^2-1)$, ставајќи $u=3x^2-1$, имаме

$$y' = (\ln u)'_u \cdot (3x^2 - 1)'_x = \frac{1}{u}(6x) = \frac{6x}{3x^2 - 1}$$

Понатаму, кај функцијата $y = \mathrm{tg}(\sqrt{x^2 - 1})$ имаме $y = \mathrm{tg}\, u$, каде што $u = \sqrt{v}$ и $v = x^2 - 1$

$$y' = (\mathrm{tg}\, u)'_u \cdot (\sqrt{v})'_v \cdot (x^2 - 1)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} 2x = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x^2 - 1})} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.\ \blacklozenge$$

4. Пресметај го изводот на функцијата $y = x^x \ \ (x > 0)$.

Дадената функција може да се запише во обликот $y = e^{x \ln x}$, односно $y = e^u$ каде што $y = x \ln x$. Затоа

$$y' = (e^u)'_x = e^u (x \ln x)' = e^{x \ln x}\left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1).\ \blacklozenge$$

5. Пресметај го изводот на функцијата $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, каде $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Дадената функција може да се запише во облик $y = e^{\alpha \ln x}$, па добиваме дека

$$y' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Задачи за самостојна работа

Најди ги изводите на следните функции:

1. $y = \sqrt{x + 5}$. **2.** $y = \sin(x^2 + \frac{1}{x})$. **3.** $y = \cos\sqrt[3]{x}$. **4.** $y = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$.

5. $y = \sqrt{\sin x + \cos x}$. **6.** $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, **7.** $y = \mathrm{tg}(x^2 + 1)$. **8.** $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

4. 5. Извод од имплицитно зададена функција

Нека вредностите на две променливи x и y се сврзани со равенката

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Ако функцијата $y = f(x)$ дефинирана на некој интервал (a, b) е таква што со замена на y со $f(x)$ во (1) се добива идентитет по x, велиме дека $y = f(x)$ е имплицитна функција зададена со равенката (1).

1. Равенката

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

имплицитно ги задава елементарните функции

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{3}$$

Навистина, по замената на овие вредности во (2) го добиваме идентитетот

$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$ ♦

Изразите (3) ги добиваме со решавање на равенките (2) по y. Но, не секогаш е можно имплицитна функција да се претстави експилицитно, односно во вид $y = f(x)$, каде што $f(x)$ е елементарна функција.

2. Функцијата зададена со равенката

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

не може да се претстави преку елементарни функции.

Слично, функцијата

$$y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0$$

не може да се претстави преку елементарни функции.♦

Да забележиме дека термините имплицитна функција и експлицитна функција не ја карактеризираат природата на функцијата, туку начинот на нејзиното задавање. Секоја експлицитна функција $y = f(x)$ може да ја претставиме имплицитно, како $y - f(x) = 0$.

Да го посочиме сега правилото на наоѓање на извод на имплицитно зададена функција, во случај кога функцијата не може да биде зададена експлицитно.

3. Нека е дадена функцијата

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Ако побараме извод на двете страни на последното равенство по x, претпоставувајќи дека y е функција од x, добиваме:

$$2x + 2yy' = 0$$

од каде што следува дека

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

На крај, да забележиме дека ако побараме извод на соодветната експлицитна функција

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

доаѓаме до истиот резултат, односно добиваме

$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$. ♦

4. Да разгледаме уште еден пример на имплицитна функција y од x:

$y^6 - y - x^2 = 0.$

Ако побараме извод на двете страни на последното равенство по x, претпоставувајќи дека y е функција од x, добиваме:

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

од каде што следува дека

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}. \ \blacklozenge$$

Од погорните примери може да забележиме дека за пресметување на изводот на имплицитно зададена функција за дадена вредност на аргументот, потребно е да ја знаеме вредноста на функцијата y за дадена вредност на x.

5. Нека $y = f(x)$ е дадена функција, а нејзината инверзна функција да ја означиме со $g(x)$. Со диференцирање на равенството $f(g(x)) = x$, добиваме $f'(g(x))g'(x) = 1$, односно $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ и тоа претставува формула за извод од инверзна функција на дадена функција $f(x)$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кога велиме дека една функција е зададена експлицитни? Наведи пример.

2. Најди извод на функцијата $x^3 + y^3 = 1$ два начина: како имплицитно зададена функција, а потоа изразувајќи го y експлицитно, а потоа увери се дека се добива ист резултат.

Најди извод на следните функции зададени во имплицитен вид:

3. $y + x + \sqrt{y - x} = 2$. **4.** $x + \sin y - 3 = 0$. **5.** $e^x + y^2 = 5$. **6.** $xy^2 - x^2 y + y = 0$.

4. 6. Изводи на елементарни функции

Во примерите наведени досега ги определивме изводите на многу функции. Притоа ја користевме или самата дефиниција за извод на функција или правила и теореми кои се однесуваат на посложени функции добиени од една или повеќе функции со примена на аритметички операции или состав, композиција на функции или инверзните функции на некои функции. Користејќи ги добиените резултати, а имајќи го предвид значењето за понатамошна употреба, ќе формираме таблица на изводи на некои елементарни функции.

Функција	Извод на функцијата
$y = C = \text{const}.$	$y' = 0$
$y = x^{\alpha} (\alpha \in 3,\ \alpha \neq 0,\ x > 0)$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
$y = \sqrt{x}\ \ (x > 0)$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \dfrac{1}{x}\ \ (x \neq 0)$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
$y = a^x\ \ (0 < a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x\ \ (0 < a \neq 1, x > 0)$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x\ \ (x > 0)$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x\ \ (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in 9)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x\ \ (x \neq k\pi,\ k \in 9)$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x\ \ (-1 < x < 1)$	$\mathrm{y}' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{x}^2}}$
$\mathrm{y} = \arccos \mathrm{x}\ \ (-1 < \mathrm{x} < 1)$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Задачи за самостојна работа

1. Најди ги изводите на следните функции:

а) $y = x^2 \ln x$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; в) $y = \dfrac{4 - x^3}{x^2 + 2}$; г) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

д) $y = e^x \sin x$; ѓ) $y = x \operatorname{arctg} x$; е) $y = \arcsin x + \arccos x$.

2. Најди ги изводите на следните функции:

а) $y = (2x+1)^{25}$; б) $y = (1-x)^{13}$; в) $y = (x^2 + x - 1)^{20}$;

г) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; д) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; ѓ) $y = \ln(\sin x)$;

е) $y = \sin(\sin x)$; ж) $y = e^{\operatorname{tg} x}$; з) $y = \arcsin(x^2 - 1)$;

ѕ) $y = \operatorname{arctg}\,(\sqrt{x})$; и) $y = \ln^2(2\sin x - 1)$.

3. Користејќи го правилото за извод на инверзна функција, најди ги изводите на следните функции:

а) $y = x$; б) $y = \log_2 x$. в) $y = \sqrt[3]{x}$.

4. Најди ги изводите на следните функции:

а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $y^2 - 4y - 2x + 6 = 0$; в) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

г) $x\cos y - \sin x + y\cos x = 0$; д) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; ѓ) $x^y - y^x = 0$.

5*. Најди ја равенката на тангента на графикот на функцијата $y = f(x)$ во точката $M_0(1, y)$ која припаѓа на тој график, ако :

а) $y = (x^2 + x - 1)^{10}$; б) $y = \sqrt{2 - x^2}$; в) $y = e^{\sin\,(\pi x)}$;

г) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$; д) $y = \operatorname{arctg}(2x^2 - 1)$; ѓ) $x^2 + y^2 - 5 = 0.$

4. 7. Диференцијал на функција и неговата примена кај апроксимација на функција

На почеток да го разгледаме нараснувањето на функција, на пример, $y = x^3$, во произволна (но фиксна) точка x_0, ако нараснувањето на независно променливата е Δx. Се добива дека

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

или

$$\Delta y = 3{x_0}^2 + (3x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2)\,\Delta x\,. \qquad (1)$$

Ако ставиме $3{x_0}^2 = A,\ 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \alpha(\Delta x)$, тогаш бројот A не зависи од Δx, додека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$. Сега нараснувањето (1) има облик

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,(\Delta x)\,\Delta x\,. \qquad (2)$$

Ако $x_0 \neq 0$, тогаш $A \neq 0$, па од (2) гледаме дека нараснувањето Δy може да се прикаже како збир од два собирока $A\,\Delta x$ и $\alpha\,(\Delta x)\,\Delta x$, кои тежат кон нула кога $\Delta x \to 0$, но ако побараме гранична вредност на количникот

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\,(\Delta x)\,\Delta x}{A\ \Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\,(\Delta x)}{A} = 0\,,$$

заклучуваме дека величината $\alpha(\Delta x)\Delta x$ побрзо тежи кон нула (се вели дека е бесконечно мала од повисок ред) од величината $A\Delta x$, кога $\Delta x \to 0$. Затоа $A\Delta x$ се нарекува главен дел на нараснувањето Δy.

Дефиниција 1. Функцијата f се нарекува диференцијабилна во точката x_0, ако нараснувањето на функцијата Δy во таа точка кое соодветствува на нараснувањето Δx има облик (2), каде што A е број кој не зависи од Δx, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$. Величината $A\Delta x$ се вика диференцијал на функцијата f во точка x_0 и се означува со dy:

$$dy = A\Delta x \qquad (3)$$

Од претходниот пример за функцијата $y = x^3$ заклучуваме дека оваа функција е диференцијабилна во произволна точка x_0 и дека диференцијалот на функцијата во истата точка, при нараснување Δx е еднаков на $dy = 3x^2\Delta x$.

Наредната теорема од поблизу го објаснува поимот диференцијабилност.

Теорема 1. Потребен и доволен услов за една функција да биде диференцијабилна во точка x_0, е функцијата да има извод во таа точка.

Доказ. Ако функцијата е диференцијабилна во x_0, тогаш нараснувањето на функцијата во таа точка може да се прикаже во облик (2), од каде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)\,.$$

Од последната релација имаме дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, односно $f'(x_0) = A$, па изводот во точката x_0 постои.

Обратно, ако постои граничната вредност $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ и ако ставиме дека $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, тогаш $\alpha(\Delta x)$ ќе тежи кон нула, кога $\Delta x \to 0$, додека

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x .$$

Со тоа покажавме дека е застапено и прикажувањето (2), односно дека функцијата f е диференцијабилна во точка x_0. ■

Од претходната теорема заклучуваме дека поимот егзистенција на извод во некоја точка се совпаѓа со поимот диференцијабилност на функцијата во истата таа точка. Во таа смисла често операцијата барање на извод се вика **диференцирање**.

Од доказот на теоремата 1 заклучуваме дека ако постои извод на функцијата во точката x_0, тогаш диференцијалот на функцијата во истата точка е еднаков на

$$dy = f'(x_0)\Delta x . \tag{4}$$

Ако $\Delta x = dx$, тогаш dx го нарекуваме диференцијал на независно променливата Δx. Оправдување за оваа ознака можеме да најдеме во фактот дека за функцијата $y = x$ имаме $dy = dx = \Delta x$. Сега од (4) следува

$$dy = f'(x_0)dx . \tag{5}$$

Од релацијата (5) добиваме $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, па може да се каже дека изводот $f'(x_0)$ е еднаков на количникот од диференцијалот на функцијата dy и диференцијалот на независно променливата dx во точката x_0.

Ако во релацијата (5) ставиме x, наместо x_0, ќе имаме $dy = f'(x)dx$. Така, за функциите $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \sin x$, . . . , ќе имаме соодветно

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx, \quad d(a^x) = a^x \ln a\, dx, \quad d(\sin x) = \cos x\, dx, \ldots$$

На таков начин би можеле да формираме таблица на диференцијали на основните елементарни функции, аналогна на таблицата на изводи на истите функции.

Од релацијата $dy = f'(x)dx$ и правилата за барање на извод на збир (разлика), производ и количник на две функции, ги имаме следните правила за наоѓање на диференцијал на збирот, производот и количникот на две функции:

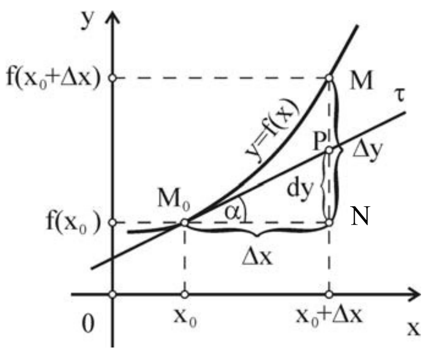
$$\boxed{d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = v\,du + u\,dv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}}$$

Нека $y = f(x)$, а $x = \psi(t)$, т.е. нека x не е независно променлива, туку функција од независно променливата t. Тогаш $dy = y_t'\,dt$. Бидејќи y е сложена функција, имаме $dy = y_t'\,dt$. Бидејќи y е сложена функција, имаме $y_t' = y_x' x_t'$, па

$$dy = y'_t\,dt = y'_x x'_t\,dt = y_x{}'\,dx = f'(x)\,dx$$

бидејќи $dx = x'_t\,dt$. Значи, обликот на диференцијалот на функција не зависи од тоа дали x е независно променлива функција или посредна променлива (функција на некоја независно променлива). Ова својство е својство на инваријантност на диференцијалот.

Диференцијалот на функција има и едноставно геометриско толкување. Имено, од црт. 4 од ΔM_0NP заклучуваме дека $NP = M_0N\,\mathrm{tg}\,\alpha = \Delta x f'(x_0)$, односно $NP = dy = f'(x_0)dx$, па диференцијалот на функцијата е еднаков на нараснувањето на функцијата определен со тангентата τ на графикот на функцијата во точка $M_0(x_0, f(x_0))$. Од друга страна, $NM = \Delta y$ е нараснувањето на функцијата, а $PM = \Delta y - dy$ е величината која претходно ја означувавме со $\alpha(\Delta x)$.



Црт. 4

Од претходните разгледувања за нараснувањето на функцијата и диференцијалот заклучивме дека

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

каде, кога $\Delta x \to 0$, величината $\alpha(\Delta x)\Delta x \to 0$, но многу побрзо отколку диференцијалот, односно нараснувањето на функцијата Δy е приближно еднакво на диференцијалот dy за мали вредности Δx. Тој податок може корисно да ни послужи кај приближните пресметувања. Имено, од $\Delta y \approx dy$ (се разбира за Δx блиску до нулата) следува

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

од каде што

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (6)$$

Од приближната формула (6) гледаме дека вредноста на функцијата f за вредности на независно променливата кои се блиски на вредноста x_0, приближно се заменува со линеарна функција.

1. Пресметај ја приближно вредноста $\sqrt{4{,}03}$.

Во овој случај ќе ја разгледуваме функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ во точката $x_0 + \Delta x$, каде што $x_0 = 4,\ \Delta x = 0{,}03$. Бидејќи $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, приближната формула (6) сега го има обликот $\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$.

Ставајќи во последната формула $x_0=4,\ \Delta x=0{,}03$, ќе добиеме

$$\sqrt{4{,}03}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}0{,}03=2{,}0075.$$

Воопшто, ако разгледуваме n- ти корен, можеме да ја добиеме приближната формула (кога Δx е блиску до нулата)

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x_0}}{x_0}\Delta x. \qquad (7)$$

На пример, ако треба приближно да се пресмета $\sqrt[3]{25}$, тогаш можеме да постапиме на следниот начин

$$\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{27-2}=3\sqrt[3]{1-\frac{2}{27}}\approx 3\left(\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{1}}{1}\left(-\frac{2}{27}\right)\right)=2{,}9259...$$

каде што во последниот корен ја применивме приближната формула (7), ставајќи $n=3,\ x_0=1,\ \Delta x=-\frac{2}{27}$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Кога една функција е диференцијабилна во точка x_0?

Најди ги диференцијалите на следните функции:

2. а) $y=\operatorname{tg}x$, б) $y=\arcsin x$, в) $y=\frac{1}{x}$.

3. а) $y=xe^x$, б) $y=x^2\sin x+\ln x$

4. Пресметај ја приближната вредност на $\frac{1}{2{,}01}$.

5. Пресметај ја приближната вредност на $\sqrt{8{,}97}$.

4. 8. Изводи од повисок ред

Видовме дека со дифернцирање на дадена функција $y=f(x)$ за произволно $x\in D_f$, изводот $y'=f'(x)$, ако постои, е нова функција дефинирана на множеството $D_{f'}\subseteq D_f$. Ако $f'(x)$ е диференцијабилна, со нејзиното диференцирање за произволно $x \in D_{f'}$ добиваме повторно нова функција која ја нарекуваме **втор извод** или *извод од втор ред* за дадената функција $y = f(x)$ што го означуваме $y'' = f''(x) = (f'(x))'$. Во таа смисла изводот y' се вика прв извод на функцијата y.

1. Ако $y = x^2 - 5x + 3$, тогаш

$y' = (x^2 - 5x + 3)' = 2x - 5$

$y'' = (y')' = (2x - 5)' = 2$. ♦

Вториот извод на функцијата повторно е функција, па со ново диференцирање на таа функција добиваме извод на вториот извод кој го нарекуваме **трет извод** на функцијата $y = f(x)$ и го означуваме со $y''' = f'''(x) = (y'')'$.

За функцијата од пример 1 ќе имаме $y''' = (y'')' = (2)' = 0$.

Ако ја продолжиме оваа постапка на барање изводи додека е можно, можеме да дефинираме n-ти извод од некоја функција или извод од n-ти ред. Имено, при претпоставка дека постои $(n-1)$-ви извод на функцијата $y = f(x)$, може да дефинираме n-ти извод (за $n > 3$ изводите ќе ги означуваме со $y^{(n)}$) како извод на $(n-1)$-от извод:

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

При определување на изводите од повисок ред ги применуваме истите правила за диференцирање, определувајќи по прв, втор, трет, ... извод.

2. Да го определиме четвртиот извод од функцијата $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1$.

$y' = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1)' = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{1}{2}2x = x^2 - x$

$y'' = (x^2 - x)' = 2x - 1$

$y''' = (2x - 1)' = 2$

$y^{(4)} = (2)' = 0$. ♦

3. Да го определиме четвртиот извод од функцијата $y = \sin x$.

$y' = (\sin x)' = \cos x$

$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x$

$y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x$

$y^{(4)} = (y''')' = (-\cos x) = \sin x$. ♦

Со ова увидовме дека $y^{(4)} = y = \sin x$, што значи дека понатамошните изводи ќе се повторуваат па ќе може да запишеме за оваа функција дека важи $y^{(4n+k)} = y^{(k)}$.

Задачи за самостојна работа

Најди ги изводите од означениот ред на функциите:

1. $y = x^5 + 3x^3 - 2x + 1$, $y^{(5)}$. **2.** $y = \sqrt{x}$, $y^{(6)}$. **3.** $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y^{(3)}$.

4. $y = \ln x$, $y^{(4)}$. **5.** $y = e^{-3x}$, $y^{(5)}$. **6.** $y = \cos 3x$, $y^{(4)}$.

Најди ги изводите од n-ти ред на функциите:

7. $y = x^n$. **8.** $y = \dfrac{1}{x}$. **9*.** $y = \cos x$. **10.** $y = e^{-x}$.

4. 9. Задачи за вежбање

1. Најди ги по дефиниција изводите на следните функции:

а) $y = x^2 - 2x - 1$; б) $y = ax + b$; в) $y = \sqrt{x+5}$.

2. Пресметај колку е изводот на функцијата $y = \sin x$ во точка $x = \dfrac{\pi}{3}$ и тоа искористи го за да ја конструираш тангентата на графикот на функцијата $y = \sin x$ во точка $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Најди ги изводите на следните функции (зад. 3 - 14).

3. а) $y = x^4 + 3x^2 - 6,$ б) $y = \dfrac{x^5}{a+b} - \dfrac{x^2}{a-b} - x.$

4. а) $y = x(2x-1)(3x+2),$ б) $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}.$

5. а) $y = \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{x}},$ б) $y = \sqrt{x^2 + a^2}.$

6. а) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}},$ б) $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}$.

7. а) $y = \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$, б) e^{e^x}.

8. а) $y = \sin ax + \cos bx$, б) $y = 4\sin x^2 + 3\cos x^3.$

9. а) $y = \cos(\sin x),$ б) $y = \sin(\cos x)$.

10. а) $y = e^{ax^2+bx+c}$, б) $y = \cos(x + \frac{1}{x})$.

11. а) $y = \sin^2 x$, б) $y = \ln tgx$.

12. а) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. б) $y = e^x(1-x^2)$.

13. а) $y = e^x \ln\sin x$. б)* $y = x^{\frac{1}{x}}$.

14*. а) $y = (\sin x)^x$, б) $y = 10^{xtgx}$.

15. Најди го изводот на функцијата зададена со $x + y + y^3 - 1 = 0$.

16. Најди ги диференцијалите на следните функции:

а) $y = ctg\, x$, б) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, в) $y = \sqrt{x+1}$.

17. Пресметај го третиот извод од функцијата $y = \sqrt{x-1}$.

18. Пресметај *n*-ти извод од функцијата e^{kx}, каде што *k* е произволна константа.

5. ПОТРОШУВАЧКИ КРЕДИТ

5. 1. Поим за потрошувачки кредит

При секојдневното работење, банките и финансиските институции постојано вршат трансфер на капиталот со цел исполнување на одредени продуктивни цели, свои, но и за правните и физичките лица. Фирмите имаат инвестициски планови, а домаќинствата се соочуваат со потребата од дополнителни средства наменети за лична потрошувачка. Со цел да се задоволат барањата на клиентите и домаќинствата, банките одобруваат бизнис кредити и потрошувачки кредити за населението.

Во секојдневното работење и практиката, помеѓу должникот и доверителот настануваат различни кредитни односи. Самиот збор кредит потекнува од латинскиот збор credere, што значи да се позајми, да се верува некому, односно да се гледа со доверба на некого, конкретно доверба во должникот дека ќе ја изврши преземената обврска. Каматата е надокнада која должникот ја плаќа за користење на позајмените средства на одредено време, најчесто во процент од позајмената сума за секоја година додека се користат средствата. Позајмената сума се нарекува капитал или главница и се бележи со , каматната стапка изразена во проценти е најчесто означена со , а износот кој треба да се надокнади како камата се бележи со . Времето на користење на капиталот може да биде изразено во години, месеци или денови и соодветно се означува со , или d, а заради униформност на формулите ќе користиме и ознака . Каматата на позајмената сума не зависи само од висината на капиталот туку и од времето на кое е позајмена сумата. Каматата кај каматното сметање е пропорционална со висината на капиталот и со должината на времето на користење на истиот.

Каматата може да биде проста или сложена. Каматата се нарекува проста ако секоја година се пресметува на ист позајмен капитал, додека кај сложеното вкаматување, од период на период капиталот се зголемува за пресметаната камата од претходниот период. Каматната стапка може да биде еднаква за целиот период или да се менува. Времето може да се мери календарски или често пати, заради побрзо пресметување се користи матрица согласно која секој месец има по 30 денови, односно годината има 360 денови.

Првото прашање кое се поставува е колкава камата носи главница од парични единици за време со каматна стапка од % при просто вкаматување?

Важно е да забележиме дека важи пропорцијата $\ : \ = 100 : (\ \ )$ кога каматната стапка е дадена во проценти, односно $\ : \ = 1 : (\ \ )$ кога каматната стапка е дадена како децимален број. Во зависност од тоа во каква единица е изразено времето, важат следниве релации: $=$ ако времето е дадено во години, $= \frac{\ }{12}$ ако времето е дадено во месеци и $= \frac{d}{360}$ или $= \frac{d}{365}$ ако времето е дадено во денови, зависно од претходната дискусија. Значи, за пресметаната камата, на еден период добиваме $= \frac{}{100}$. Ако времето е дадено во години важи $= \frac{}{100}$, односно $= \frac{}{1200}$ ако времето е дадено во месеци и $= \frac{d}{36000}$ или $= \frac{d}{36500}$ ако времето е дадено во денови.

Јасно, вкупниот износ кој должникот треба да го врати изнесува $+ \ = \ + \frac{}{100} = \ (1+\frac{}{100})$.

Низ неколку примери ќе се потсетиме на примената на простата каматна сметка.

1. Колкава камата треба да платиме за 34500 денари за 4 години со 5% каматна стапка? Колкав е вкупниот износ кој треба да се врати?

За каматата која се пресметува имаме $= \frac{}{100} = \frac{34500 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 6900$ денари, а вкупниот долг е $+ \ = 41400$ денари. ♦

Јасно, од појдовната формула за пресметаната камата лесно може да се изведат и формулите за пресметување на:

- главницата $= \frac{100}{}$,

- каматната стапка $= \frac{100}{}$, каде каматната стапка се добива во облик на процент, и

- времето за кое се позајмени средствата $= \frac{100}{}$, каде времето се добива во години.

2. Пресметај го капиталот кој за време од 20 март до 28 јуни истата година (со временска матрица во која месеците се бројат календарски, а годината со 360 денови), со каматна стапка од 4,75%, ќе донесе два пати поголема камата отколку следниве суми
- 20000 денари на 3 месеци ($_1 = 20000$, $_1 = 3$);
- 40000 денари на 5 месеци ($_2 = 40000$, $_2 = 5$);
- 12000 денари на 6 месеци ($_3 = 12000$, $_3 = 6$).
со каматна стапка од 4,5%.

Да ја пресметаме каматата која се добива за различните вложени суми.

$$' = \frac{\ _1\ \ _1 \cdot 4,5}{1200} + \frac{\ _2\ \ _2 \cdot 4,5}{1200} + \frac{\ _3\ \ _3 \cdot 4,5}{1200} =$$

$$= \frac{4,5}{1200}(20000 \cdot 3 + 40000 \cdot 5 + 12000 \cdot 6) = 332000 \cdot \frac{4,5}{1200} = 1245 \text{ денари.}$$

Според почетните услови, бараме главница која ќе донесе два пати поголема камата. Нека $\ = 2\ ' = 2490$ денари, нека главницата е $\ $, каматната стапка е $\ = 4,75\%$, а бројот на денови за кои се врши вкаматувањето е 11 дена во март, 30 дена во април, 31 ден во мај и 28 дена во јуни, односно вкупно $d = 100$ дена. Тогаш важи $\ = \frac{\ 100}{\ }$,

односно $\ = \frac{36000\ }{\ d} = \frac{36000 \cdot 2490}{4,75 \cdot 100} = 176147,30$ денари. Значи, потребната главница за да при дадените услови се добие камата $\ = 2490$ е $\ = 176147,30$ денари. ♦

Важно е да се знае како тече постапката за побарување и одобрување на кредит. Вообичаено, кога се договара заемот, се договара и рокот во кој истиот треба да биде исплатен, со определен број на периоди на враќање, односно рати. Износите на тие рати, се нарекуваат **ануитети**, планот за враќањето на заемот е познат како **амортизациски план**, а делот од заемот кој се враќа со една рата, не земајќи ја предвид каматата, се нарекува **отплата**. Ануитетите можат, но и не мора да бидат исти во секој период на амортизација. Договорот меѓу должникот и доверителот, покрај бројот на отплатни периоди, го определува и видот на ануитетот. Каматата, најчесто, се враќа заедно со главницата, па ануитетот претставува сума од два дела, дел од заемот кој треба да се врати, односно отплатата и дел кој ја претставува каматата пресметана на долгот за изминатиот период. Временски интервалот на отплатен период, покрај вообичаените години или месеци, може да биде и било кој временски интервал.

Ако заемот се враќа со нееднакви ануитети, тогаш тие најчесто се однесуваат по определено правило, на пример, да растат или опаѓаат, по аритметичка или геометриска прогресија.

Во редовната настава, се разгледуваат заемите со еднакви и заокружени ануитети, а овде ќе разгледаме кредит кој се амортизира со еднакви отплати, но различни ануитети. При тоа, за пресметувањата на каматата, се користи исклучиво проста каматна сметка. Ваквите кредити се нарекуваат **потрошувачки кредити**. Потрошувачките кредити се амортизираат во однапред утврден рок, кој може да биде краток (до една година), среден (од една до три години) или долг рок (повеќе од три години). Враќањето на кредитот, најчесто е во еднакви месечни ануитети до рокот на враќање или револвинг со договорна динамика. Договорот за потрошувачкиот кредит ги содржи висината на кредитот, намената, рокот на враќање и гаранција за уредно враќање на кредитот, во вид на меница или пак обезбедувањето на кредитот со хипотека на недвижност, залог на подвижни предмети, депозит, банкарска гаранција, хартии од вредност и слично, како за корисникот на кредитот, така и за жирантите. Потрошувачкиот кредит се користи за финансирање на тековните потреби на клиентите, производство, плаќање на услуги и слично. Пред одобрувањето на кредитот, доверителот ја оценува кредитната способност на кредитобарателот во смисла на месечни примања, непосредни обврски (по административни и судски забрани, други заеми), посредни обврски (како жирант на меница), неподвижен имот и други извори на приходи. Можно е по договорот, доколку кредитот се користи за плаќање услуги или стока, да постои уплата во готово, изразена како процент од износот на кредитот, која е најчесто и законски утврдена, зависно од услугата или производот за кој се побарува кредитот.

По одобрувањето на кредитот, кредитобарателот е должен да го почитува договорот и согласно со направената пресметка за отплата, да ги уплаќа ратите.

Задача за самостојна работа

1. Пресметај ја каматната стапка со која за 60000 денари, вложени на периодот $8.03-29.06$, по принцип $(\ ,360)$, се пресметува камата која претставува 45% од пресметаната камата за сумите од 25000 денари на период $8.04-30.06$, 62000 денари на период $18.04-30.06$ и 75600 денари на период $4.05-30.06$, со временска матрица $(\ ,365)$ и каматна стапка $6{,}5\%$.

2. Една третина од основната сума е вложена на $1{,}5$ година, две петтини од сумата на 4 месеци, а остатокот на 80 дена. Каматната стапка за сите поединечни суми е 4%. Вкупната пресметана камата е 8500 денари. Колкава е основната сума?

3. По намалување на основната сума за камата од $4{,}75\%$, за четири месеци, должникот примил 295250 денари. Колкав е долгот, а колкава каматата?

4. Наведи ги основните причини за побарување на кредит.

5. Кој кредит се нарекува потрошувачки кредит?

6. Каква каматна стапка се користи при утврдување на каматата на потрошувачките кредити и како се користи?

7. Наведи ги основните карактеристики на потрошувачкиот кредит.

5. 2. Пресметување на редовната камата и отплатата кај потрошувачки кредит

Потрошувачки кредит со износ , се амортизира со n еднакви месечни отплати. Каматната стапка е $\ \%$, а каматата се пресметува со проста каматна сметка. Бидејќи се работи за заем, на ист принцип како кај заемите со еднакви ануитети, каматата се пресметува за секој период на амортизација поединечно, на делот на долгот кој е сеуште неотплатен. Па така, за првиот период на амортизација, каматата се пресметува за целиот долг, но веќе за вториот период, каматата се пресметува на делот од долгот кој преостанал, а тоа е износот на кредитот намален за првата отплата. На третиот период, каматата се пресметува на преостанатиот долг, а тоа е заемот намален за првите две отплати. Постапката продолжува до последниот период, кога каматата се пресметува на делот од долгот кој е разлика на заемот и направените $n-1$ отплата. Општо, каматата се пресметува на износот на долгот намален за претходно исплатените месечни отплати од главницата.

Станува збор за кредит со отплати $b_1, b_2, ..., b_n$, кои се меѓу себе еднакви, $b_i = b \quad = b,$ за секои $i, \quad \in \{1,2,...,n\}$. При тоа заемот е збир на сите отплати,

$$= b_1 + b_2 + ... + b_n = nb\,,$$

од каде секоја отплата има вредност дека $b = \frac{\ }{n}$.

Ќе ги користиме истите ознаки како кај заемите со еднакви или со заокружени ануитети. Имено, $-$тиот ануитет ќе го означуваме со a , каматата пресметана за $-$тиот период е i , отплатениот дел на долгот со $-$тиот ануитет се бележи со , а преостанатиот дел од долгот, после платени ануитети е $_{n-}$.

Во практиката, кредитобарателот, но и давателот на заемот, се заинтересирани да знаат, колкав дел од заемот е отплатен после секој период и уште колку останува да се амортизира. За таа цел се изработува амортизационен план, кој заради поголема прегледност се испишува во табела. Но, треба да забележиме дека во практика, во најголем број случаи се користи просечната рата $\frac{+}{n}$, каде е вкупната пресметана камата. За проблемот кој се јавува кога место амортизациониот план, се користи просечната рата, ќе зборуваме подоцна.

Да ги пресметаме сите големини кои се јавуваат во изработката на амортизациониот план за потрошувачкиот кредит.

Каматата во првиот месец, се пресметува на целиот долг. Тогаш каматата за првиот месец се пресметува со формулата

$$i_1 = \frac{\ }{100}\frac{1}{12} = \frac{\ }{1200}\,.$$

Константата $\frac{1}{12}$ се појавува заради тоа што времето, за кое пресметуваме камата, е еден месец, претворен во години.

Првата отплата е $b_1 = b = \frac{}{n}$, а од таму и отплатениот дел по првиот ануитет е ${}_1 = \frac{}{n}$. Остатокот од долгот, по првиот ануитет е

$${}_{n-1} = \quad - \quad {}_1 = \quad - \frac{}{n} = \quad \left(1-\frac{1}{n}\right) = \quad \frac{n-1}{n}.$$

Првиот ануитет е $a_1 = b_1 + i_1 = \frac{}{n} + \frac{}{1200} = \quad \left(\frac{1}{n} + \frac{}{1200}\right)$.

Каматата за вториот месец, се пресметува на остатокот од главницата кој не е е отплатен, односно на преостанатиот долг кој изнесува ${}_{n-1} = \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)$. Тогаш каматата за вториот месец е

$$i_2 = \frac{{}_{n-1}}{1200} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{}{1200} = \frac{n-1}{n}\frac{}{1200}.$$

Втората отплата е еднаква со првата и изнесува $b = \frac{}{n}$, а отплатениот дел по вториот ануитет е ${}_2 = 2b = 2\frac{}{n}$. Преостанатиот дел од долгот по два платени ануитети е ${}_{n-2} = \quad - \quad {}_2 = \quad - 2\frac{}{n}$, односно

$${}_{n-2} = \quad \left(1-\frac{2}{n}\right) = \quad \frac{n-2}{n}.$$

Вториот ануитет е $a_2 = b_2 + i_2 = \frac{}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{}{1200} = \quad \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{}{1200}\right)$.

За каматата во третиот месец се добива

$$i_3 = \quad {}_{n-2}\frac{}{1200} = \left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{}{1200} = \quad \frac{n-2}{n}\frac{}{1200},$$

затоа што веќе се исплатени два дела од главницата , односно $2\frac{}{n}$ денари. Третата отплата е $b = \frac{}{n}$, а отплатениот дел од долгот по третиот ануитет е ${}_3 = 3b = 3\frac{}{n}$. Преостанатиот дел од долгот по три отплатени ануитети е ${}_{n-3} = \quad - \quad {}_3 = \quad - 3\frac{}{n} = \quad \left(1-\frac{3}{n}\right)$, односно

$${}_{n-3} = \quad \frac{n-3}{n}.$$

Третиот ануитет е $a_3 = b_3 + i_3 = \frac{\ }{n} + \frac{n-2}{n}\frac{\ }{1200} = \left(\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n}\frac{\ }{1200}\right)$.

Соодветно на претходната дискусија, ако се отплатени $n-1$ делови од главницата се пресметува каматата за $n-$тиот дел од долгот и тоа

$$i_n = \ _{n-1}\frac{\ }{1200} = \left(\ -(n-1)\frac{\ }{n}\right)\frac{\ }{1200} = \left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{\ }{1200} = \frac{1}{n}\frac{\ }{1200},$$

а $n-$тиот ануитет изнесува вкупно $a_n = \frac{\ }{n} + \frac{1}{n}\frac{\ }{1200}$.

Се разбира, отплатениот дел по $n-$тиот ануитет е $\ _n = n\frac{\ }{n} = \ $, а преостанатиот дел е $\ _0 = \ - \ _n = 0$.

Од изведените формули, може да заклучиме дека, секоја $\ -$та отплата е $b = \frac{\ }{n}$, а отплатениот дел по ануитети е $\ = \ \frac{\ }{n}$. Остатокот од долгот, по платени ануитети е $\ _{n-} = \left(1-\frac{\ }{n}\right) = \frac{n-}{n}$ или уште полесно $\ _{n-} = (n-\ )b = (n-\ )\frac{\ }{n}$, формула од која се гледа дека од вкупно n отплати, отплатени се и за отплата остануваат уште $n-\ $. За $\ -$тата камата важи $i\ = \ _{n-\ +1}\frac{\ }{1200} = \frac{n-\ +1}{n}\frac{\ }{1200}$.

Соодветниот ануитет е $a\ = \frac{\ }{n} + \frac{n-\ +1}{n}\frac{\ }{1200}$.

Амортизациониот план е зададен со следната табела.

Период	Отплата	Камата	Ануитет	Остаток од заемот на крај на периодот
				$\ _n =$
1	b	$i_1 = \frac{\ }{1200}$	$a_1 = b + i_1$	$\ _{n-1} = \ - b$
2	b	$i_2 = \ _{n-1}\frac{\ }{1200}$	$a_2 = b + i_2$	$\ _{n-2} = \ _1 - b$
...	...	...	...	...
$n-1$	b	$i_{n-1} = \ _2\frac{\ }{1200}$	$a_{n-1} = b + i_{n-1}$	$\ _1 = \ _2 - b$
n	b	$i_n = \ _1\frac{\ }{1200}$	$a_n = b + i_n$	$\ _0 = 0$

1. Потрошувачки кредит од 100000 денари треба да се амортизира за 10 месеци со каматна стапка 3%. Пресметај ги отплатите и направи амортизационен план.

Амортизираме со вкупно 10 ануитети, односно $n = 10$. Тогаш отплатата на кредитот е $b = \frac{100000}{10} = 10000$ денари. Понатаму, за годишна каматна стапка 3%, да ги пресметаме каматите и остатоците од кредитот.

$i_1 = \frac{3}{1200}100000 = 250$, $\quad {}_1 = 10000$, $\quad {}_9 = 100000 - 10000 = 90000$.

$i_2 = \frac{3}{1200}90000 = 225$, $\quad {}_2 = 20000$, $\quad {}_8 = 90000 - 10000 = 80000$.

$i_3 = \frac{3}{1200}80000 = 200$, $\quad {}_3 = 30000$, $\quad {}_7 = 80000 - 10000 = 70000$.

$i_4 = \frac{3}{1200}70000 = 175$, $\quad {}_4 = 40000$, $\quad {}_6 = 70000 - 10000 = 60000$.

Пред да продолжиме со пресметките, може да забележиме дека пресметаните камати формираат аритметичка прогресија со прв член 250 и разлика -25. Тоа значи дека можеме сите наредни камати да ги пресметаме како членови на прогресијата. Истото може да се забележи и за остатоците од кредитот. Во табелата, директно, само со собирање, ќе ги пресметаме и ануитетите.
Секоја наредна камата во табелата е за 25 денари помала од претходната, а секој остаток за 10000 денари, колку што изнесува отплатата, помал од претходниот остаток на долгот. Да ја пополниме табелата за амортизација на кредитот.

Период	Отплата	Камата	Ануитет	Остаток од заемот
				100000
1	10000	250	10250	90000
2	10000	225	10225	80000
3	10000	200	10200	70000
4	10000	175	10175	60000
5	10000	150	10150	50000
6	10000	125	10125	40000
7	10000	100	10100	30000
8	10000	75	10075	20000
9	10000	50	10050	10000
10	10000	25	10025	0
Сума	100000	1375	101375	

Притоа вкупната камата која ќе се плати е помала отколку при амортизацијата на заеми со еднакви ануитети и декурзивно пресметување на каматата (провери). Последново се должи на фактот дека при еднакви отплати, првите неколку ануитети се поголеми отколку при еднакви ануитети, со што всушност се намалува остатокот од долгот, а со тоа и каматата.

Исто така, може да забележиме дека во табелата погоре, вредностите за ануитетите формираат аритметичка прогресија. Ова може лесно да се покаже и директно со користење на формулите за ануитетот. Имено, разликата на два последователни ануитети, $a_{\ +1}$ и a е

$$a_{\ +1} - a \ = \frac{}{n} + \left(1 - \frac{}{n}\right)\frac{}{1200} - \frac{}{n} - \left(1 - \frac{-1}{n}\right)\frac{}{1200} = \frac{}{1200}\left(1 - \frac{}{n} - 1 + \frac{-1}{n}\right),$$

односно

$$a_{\ +1} - a \ = -\frac{1}{n}\frac{}{1200}.$$

Разликата меѓу било кои два последователни члена на низата не зависи од , односно е константна, што е доволно за да потврдиме дека ануитетите формираат аритметичка прогресија, со разлика $-\frac{1}{n}\frac{}{1200}$.

Како што веќе споменавме, во пракса, потрошувачките кредити не се амортизираат според горе наведениот амортизационен план, туку преку пресметување на просечната рата, која е еднаква за секој поединечен период. Се пресметува според формулата $\frac{\ +\ }{n}$, каде е вкупната пресметана камата.

Да ја пресметаме вкупната камата која е пресметана за долгот . Собирајќи ги поединечните камати, за вкупната камата добиваме

$$= \frac{}{1200}\left[1 + \left(\frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-2}{n}\right) + \ldots + \left(\frac{n-(n-1)}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{}{1200}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right].$$

Збирот во заградата претставува збир на n членови на аритметичка прогресија, со прв член 1 и разлика $-\frac{1}{n}$. Согласно формулата за пресметување на збирот на првите n членови на аритметичка прогресија со прв член a_1 и разлика d, $_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$ имаме:

$$= \frac{}{1200}\frac{n}{2}\left[2 + (n-1)\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{}{1200}\frac{n}{2}\left[2 - \frac{n-1}{n}\right] = \frac{}{1200}\frac{n}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{}{1200}\frac{n+1}{2}$$

односно, вкупно пресметананата камата во овој модел на издавање потрошувачки кредит изнесува

$$= \frac{(n+1)}{2400}.$$

Вкупниот долг има вредност

$$+ \quad = \quad \left(1+\frac{(n+1)}{2400}\right),$$

а една просечна рата на кредитот, кога $n-$те месечни рати се еднакви, изнесува

$$\frac{}{n}\left(1+\frac{(n+1)}{2400}\right).$$

Ќе ја решиме задача 1, користејќи просечна рата.

2. Потрошувачки кредит од 100000 денари треба да се амортизира за 10 месеци со каматна стапка 3%. Пресметај ја просечната рата.

Бидејќи претходно веќе имаме пресметано колку изнесуваат поединечните камати, сега ќе ги искористиме добиените резултати за да ја пресметаме вкупната камата и просечната рата.

$$= 250 + 225 + 200 + ... + 25 = \frac{10}{2}\left(2\cdot 250 + 9(-25)\right) = 1375 \text{ денари.}$$

Искористивме формула за збир на 10 членови на аритметичка прогресија, со прв член 250 и разлика -25. Тогаш, вкупниот долг изнесува $+ \quad = 101375$ денари, а просечната рата е $\frac{101375}{10} = 10137{,}5$ денари.

Добиената вредност од некои ануитети е помала, а од некои поголема. ♦

Забелешка. Двата модели се разликуваат. Се поставува прашањето што е резултат на ваквото упросечување на ануитетите. Кога должникот плаќа просечна рата за потрошувачкио кредит, тогаш дел од обврските од првите периоди ги поместува за подоцна, а со тоа се олеснува враќањето на долгот, практично настанува бескаматно кредитирање. Значи од аспект на должникот, просечната рата е поволна. Но овој начин не е поволен за кредиторот, како заради бескаматното кредитирање кое должникот го добива, така и од административни причини, имајќи во предвид дека поместувањето кое се прави, за големи суми и не е безначајно. Само за пример, од нашите пресметки, во првиот период должникот добива бескаматно кредитирање од $10250 - 10137{,}5 = 112{,}5$ денари.

Да ги споредиме месечните рати, добиени според двата модели. Ако ратата се отплаќа согласно амортизациниот план изнесува $\frac{}{n} + i$, за $\quad = 1,2,...,n$, односно $\frac{}{n} + \frac{}{1200}\left(1-\frac{-1}{n}\right)$. Разликата во моделот кој користи реален амортизациски план и моделот на просечна рата, во апсолутен износ е

$$\frac{}{n} + \frac{}{1200}\left(1-\frac{-1}{n}\right) - \frac{}{n}\left(1+\frac{(n+1)}{2400}\right) = \frac{}{1200}\left(1-\frac{-1}{n}\right) - \frac{}{n}\frac{(n+1)}{2400}$$

$$= \frac{}{1200} - \frac{}{2400} - \frac{}{1200}\,\frac{-1}{n} - \frac{}{2400n} = \frac{}{2400} - \frac{}{1200}\left(\frac{-1}{n} + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{}{1200}\left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{}{1200}\left(\frac{1}{2} - \frac{2\quad -1}{2n}\right) \neq 0\,.$$

3. Добиен е потрошувачки кредит во износ од 170000 денари. Истиот треба да се врати во 17 еднакви месечни рати со годишна каматна стапка од 3%. Пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата.

Ќе го разгледаме уште еднаш методот на просечна рата. Имаме $=170000, n=17, \ =3\%$. Делот од ратата кој доаѓа од главницата е $\frac{}{n} = \frac{170000}{17} = 10000$ денари. За месечни камати важи:

$i_1 = \frac{}{1200} = \frac{170000\cdot 3}{1200} = 425$ денари, $i_2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{}{1200} = 425\cdot\frac{16}{17} = 400$ денари,

$i_3 = \left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{}{1200} = 425\cdot\frac{15}{17} = 375$ денари итн. Последната камата е

$i_{17} = \frac{1}{n}\frac{}{1200} = 425\cdot\frac{1}{17} = 25$ денари. Значи за да се пресмета вкупната камата доволно е да се пресмета збирот $\ = i_1 + i_2 + ... + i_{17}$ кој може да се пресмета како збир на првите 17 члена на аритметичката прогресија $425, 400, 375, ...$ Јасно првиот член е 425, а разликата на прогресијата -25. За сумата имаме

$$= \frac{17}{2}\left[2\cdot 425 + 16\cdot(-25)\right] = \frac{17}{2}\cdot 450 = 3825 \text{ денари.}$$

Просечната рата е $\frac{\ +\ }{17} = \frac{170000+3825}{17} = 10225$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Потрошувачки кредит од 100000 денари се амортизира за 8 месеци со годишната каматна стапка 8%. Пресметај ја отплатата и направи амортизационен план. Спореди ги вредностите на ануитетите по амортизациониот план и просечната рата.

2. Потрошувачки кредит од 240000 денари се амортизира за 2 години, со месечни отплати и со годишната каматна стапка 12%. Пресметај ја вкупната камата и определи ја просечната рата.

3. Лице подигнало потрошувачки кредит од 3000000 денари. При подигање на кредитот, во готово е уплатено 20% од кредитот, а остатокот треба да се отплати на

24 еднакви месечни рати. Ако каматната стапка е 12%, пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата.

4. Објасни зошто при пресметка на просечната рата, не мора да се пресметаат сите поединечни камати?

5. Каде сé се појавува аритметичката прогресија во изработката на план за отплата на потрошувачки кредит?

6. Која е разликата во двата методи за амортизација на потрошувачки кредит, кои се поволностите, а кои недостатоците на двата методи?

5. 3. Пресметување на казнена и бонифицирана камата за потрошувачки кредит

5.3.1. Казнена камата

При отплата на ратите на потрошувачки кредит, од различни причини, може да се случи должникот да не ги уплаќа редовно пресметаните рати, односно, да отстапува од рокот за уплата. Доколку, корисникот на кредитот доцни со уплата, должен е покрај редовната камата, да плати и соодветна **казнена камата**. Казнената камата се пресметува пред самата ликвидација на долгот, односно пред доспевање на последната отплата. Казнената камата се пресметува по стапка која е определена со договорот за издавање на кредитот. За периодот за кој корисникот доцни со исплата, се пресметува и редовна и казнена камата, збирно, на пресметаната рата на кредитот. Зависно од законските прописи, казнената камата, може да се пресметува за целиот период за кој се доцни, или пак може однапред да е утврдено колкаво доцнење се толерира и се занемарува, а колкаво не.

Ќе наведеме пример во кој условите за казнена камата утврдуваат дека доцнењето до 15 дена се толерира, а задоцнување од 15 и преку 15 дена, се заокружува на цел месец.

1. Потрошувачки кредит се амортизира со просечни рати од 3650 денари. На крајот на годината е утврдено дека, две рати од по 3650 денари, корисникот ги уплатил со задоцнување. Првата рата со задоцнување од 13 дена, а втората со задоцнување од 20 дена. Казнената камата е 6% и исто толку е и редовната камата. Согласно условите кои се предвидени во договорот, задоцнувањето од 13 дена се толерира, но задоцнувањето од 20 дена се третира како задоцнување од еден месец. Тогаш, за второто задоцнување, корисникот треба да доплати збирна камата од 12% годишно, односно 1% за еден месец, што со проста каматна сметка, би изнесувало $\frac{12}{1200}3650 = 36{,}5$ денари. ♦

2. Должник последната рата од 5250 денари ја уплатил со задоцнување од 5 месеци. Казнената камата е 6% и исто толку е и редовната камата. Корисникот на кредитот е должен покрај ратата, да уплати и збирна камата од 12% годишно, редовна камата од 6% и дополнително и казнена камата од 6%. Користејќи проста каматна стапка, дополнителната уплата е во износ $\frac{12 \cdot 5}{1200} 5250 = 262{,}5$ денари. ♦

5.3.2. Бонифицирана камата

Ако должникот, го исплатил целиот долг пред договорениот рок, има право, под одредени услови, на повраток - бонификација на соодветниот дел од пресметаната камата. Бонификацијата вообичаено се врши кога:
- должникот во готово го подмири целиот остаток од долгот пред предвидениот рок;
- при ново одобрување на кредит, должникот го подмирил долгот од претходниот потрошувачки кредит;
- должникот со зголемени или вондредни рати го подмири долгот пред време.

При пресметување на износите за бонифицирана камата, доверителот се придржува до следните принципи:
- за бонификација, се зема во предвид само остатокот од главниот долг, а не и делот на камата кој е содржан во салдото на вкупниот долг;
- износот на првата наредна отплата не се зема предвид за бонифицирање, таа отплата должникот, реално и не ја подмирува пред време, каматата која ја вклучува се однесува за тековниот период;
- каматата се бонифицира за поединечните отплати, зголемени или вонредни, уплатени пред рокот.

Пресметувањето на бонифицирана камата всушност значи утврдување колку изнесува реалниот остаток од долгот кој предвреме се отплаќа, се разбира само во износ на отплати од главниот долг, без пресметана камата. Откако ќе се пресмета бонифицираната камата за остатокот од долгот, таквиот износ се одзема од салдото на долгот, а разликата се наплатува од должникот. Реално, ова значи дека вкупниот износ на преостанати рати, се намалува за пресметаната бонифицирана камата само на делот кој е отплата од главниот долг. Ќе се задржиме само на бонификација на камата кога должникот пред време, со уплата во готово, го подмирува долгот во целост.

3. Одобрен е потрошувачки кредит во износ од 20000 денари, со рок на отплата 12 месеци, со уплата на 10% учество. Вкупната пресметана камата за кредитот е 585 денари, добиена со годишна стапка од 6%. Должникот уплатил навремено седум рати, и пред уплатата на осмата побарал да го исплати остатокот од долгот, наеднаш, во готово. Остануваат за плаќање уште пет рати, но бонификацијата се врши само за четири отплати, затоа што во осмата рата е вклучена каматата за тековниот период на отплата. Просечната рата на долгот изнесува $\left(20000-\frac{10}{100}20000+585\right)\cdot\frac{1}{12}=1550$ денари. Тогаш од салдото на долгот кое е $7\cdot1550=7750$ денари, треба да се одземе бонифицираната камата за преостанатите четири отплати. Поединечната отплата е $\left(20000-\frac{10}{100}20000\right)\cdot\frac{1}{12}=1500$. За секоја од четирите преостанати отплати, ја пресметуваме припишаната камата. Деветтата отплата е вкаматена еден период, односно еден месец, десеттата два месеци, единаесеттата три месеци, а последната, дванаесеттата четири месеци. Тогаш припишаната вкупна камата за остатокот од долгот е

$$1500\frac{6}{1200}+1500\frac{6}{1200}\cdot2+1500\frac{6}{1200}\cdot3+1500\frac{6}{1200}\cdot4=75$$ денари.

Оваа камата ја одземаме од сите преостанати идни рати и со тоа долгот е бонифициран. За должникот да го исплати целиот остаток од долгот наеднаш, треба да плати $5\cdot1550-75=7675$ денари. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Зошто се воведува казнена камата и како се пресметува?

2. Зошто се воведува бонифицирана камата и кога се пресметува?

3. Како се пресметува бонифицирана камата во случај кога должникот наеднаш го отплаќа остатокот од долгот?

4*. Подигнат е потрошувачкиот кредит за кој се пресметува редовна камата од 4%, а казнена камата од 6%. Просечната рата за кредитот е 12410 денари. Корисникот задоцнил со уплата на една рата и тоа за три месеци. Пресметај колку треба да доплати кредитобарателот на име на казнена камата?

5*. Одобрен е потрошувачки кредит во износ од 20000 денари, со рок на отплата 12 месеци, со уплата на 20% учество, со годишна стапка од 6%. Должникот уплатил навремено девет рати и пред уплатата на десеттата побарал да го исплати остатокот од долгот, наеднаш, во готово. Пресметај колку средства треба да уплати должникот, ако пред уплатата на десеттата рата, се пресметува бонифицирана камата.

5. 4. Задачи за вежбање

1. Колку години треба да биде вложена основна сума , за да со годишна проста каматна стапка од 5%, пресметаната камата изнесува колку и вложената сума? (Забелешка. =).

2. За која вложена сума се пресметува камата од 3540 денари, при каматна стапка од 6% за:

а) 4 години б) 8 месеци.

3. Во банка се вложени две различни основни суми кои се разликуваат за 12000 денари. Поголемата сума е вложена на една година, со 4% каматна стапка, а помалата сума на 10 месеци, со 6% каматна стапка. Пресметај ја вкупната вложена сума, доколку пресметаните камати, за двете суми поединечно се еднакви.

4. Пресметај колкава вкупна камата, со каматна стапка од $6{,}5\%$, ќе донесат следниве суми: 38000 денари вложени на период $31.01-30.06$, 72600 денари вложени на период $8.03-30.06$ и 18900 денари вложени на период $1.05-30.06$, во истата календарска година?

5. Лице подигнало потрошувачки кредит од 3000000 денари. Истиот треба да се отплати на 24 еднакви месечни рати. Ако каматната стапка е 12%, пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата. Направи амортизационен план и спореди ги ануитетите.

6. Лице подигнало потрошувачки кредит од 600000 денари. Истиот треба да се отплати на 27 еднакви месечни рати. При подигање на кредитот, уплатени се 10% во готово. Ако каматната стапка е 12%, пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата.

7. Лице подигнало потрошувачки кредит од 300000 денари. При подигање на кредитот, во готово е уплатено 30% од кредитот, а остатокот треба да се отплати на 27 еднакви месечни рати. Ако каматната стапка е 20%, пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата.

8*. Лице подигнало потрошувачки кредит од 300000 денари. При подигање на кредитот, во готово е уплатено 30% од кредитот, а остатокот треба да се отплати на 27 еднакви месечни рати. Ако каматната стапка е 20%, пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата. Лицето платило со задоцнување две рати, едната со задоцнување од 2 месеци, а втората со задоцнување од 4 месеци и 20 дена. Колку ќе изнесува последната отплата, ако истата вклучува и казнена камата од 10% годишно? (задачата е проширување на задача 7).

9*. Лице подигнало потрошувачки кредит од 600000 денари. Истиот треба да се отплати на 27 еднакви месечни рати. При подигање на кредитот, уплатени се 10% во готово. Ако каматната стапка е 12%, пресметај ја вкупната камата и просечната месечна рата. Должникот уплатил навремено 20 рати, и пред уплатата на $21-$вата побарал да го исплати остатокот од долгот, наеднаш, во готово. Пресметај колку средства треба да уплати должникот, ако пред уплатата на $21-$та рата, се пресметува бонифицирана камата. (задачата е проширување на задача 6).

6. ЕЛЕМЕНТИ НА АКТУАРСКА МАТЕМАТИКА

6. 1. Предмет на проучување на актуарската математика

Денес, во современи техничко - технолошки услови на живеење и работење, не постојат материјални добра, ниту пак граѓани, на кои што не им се заканува опасност од остварување на определен ризик, а со тоа и настанување на економски штетен настан. Постојано примаме информации за големи човечки жртви и економски штети, кои настануваат како последица на разни опасности: земјотреси, пожари, експлозии, поплави, тероризмот, авионски и автомобилски несреќи, болести, и кои директно го поставуваат прашањето за осигурувањето на човечкиот живот и материјалните добра.

Осигурувањето претставува посебна математичка, финансиска, економска и правна категорија. Поради мултидисциплинарниот пристап, тешко е да дадеме конкретна и кратка дефиниција на самиот поим осигурување. Осигурувањето на лица и материјални добра, со нашата позитивна законска регулатива е назначено како дејност од посебен општествен интерес. **Осигурувањето** е дејност која се остварува со цел надоместување на настанатите штети од стихии, несреќните случаи и договорени ризици, во стопанството и граѓаните, согласно претходен договор. Суштината на осигурувањето е договор помеѓу осигурител (осигурително друштво) и осигуреник (или корисник на осигурувањето), согласно кој осигуреникот се обврзува да плаќа договорена сума, за да осигурителот, во случај на настанување на определениот ризик, односно осигурениот случај, ја исплати осигурената сума или покрие определен износ од настанатата штета.

Определувањето на износите кои ги уплаќа осигуреникот, во облик на премија, пресметувањето на осигурените суми, проценката на настанатите штети и соодветните покритија кои ги покрива уплатената премија, износите кои осигурителната компанија треба да ги има за да ги обезбеди своите обврски по склучените осигурувања, спаѓаат во доменот на **актуарската математика**. Актуарската математика, како научна дисциплина, со бројните методи и модели настојува да ја збогати техничката основа на осигурувањето, со цел да се создадат услови за развој и унапредување на осигурувањето. Актуарската математика е тесно поврзана со финансиската математика, бидејќи и двете проблематики се засновани на вкаматувањето. Разликата е во тоа што финансиската математика не се базира на староста на лицето. Така, според финансиската математика, кога едно лице ќе се договори со банката извесен број на периоди да прима рента, тогаш и после неговата смрт рентата ќе се исплатува на неговите наследници. Од друга страна, според актуарската математика, приемот на рентата е поврзан со животот на лицето, па со смртта на осигуреното лице се гасне и правото на прием на рента. Со други зборови, финансиската математика е безлична, додека актуарската математика е лична. Финансиската математика се применува главно во банкарското работење, а актуарската математика има примена во работењето на осигурителните компании, пензиските фондови, инвестициските фондови и слични институции.

Актуарската математика има широк спектар на проучување, но овде ќе се задржиме само на еден мал дел, математичките основи на животното осигурување. Кај неживотните (имотни) осигурувања, ризикот треба да биде иден и независен и непредвидлив, додека кај осигурувањето на живот ризикот е извесен и сигурен и полесно предвидлив.

Осигурувањето на животот се однесува на сите осигурувања кај кои што престанокот или траењето на животот на едно или повеќе лица (осигурени) доведува до исплата на осигурената сума од страна на осигурителот. Осигурување на животот е писмен договор, наречен полиса, склучен меѓу едно осигурено лице и осигурително друштво спрема кое осигуреното лице се обврзува, дека под определени услови ќе му плаќа на друштвото определена договорена сума веднаш или по извесен број години, во повеќе рати и врз база на тоа осигурителното друштво според договорот му ја исплаќа договорената сума на лицето или корисникот, при настанување на осигурениот случај. Осигуреното лице се вика осигуреник, а осигурителното друштво осигурувач (осигурител).

Кога договорената сума се уплаќа (вложува) наеднаш, тогаш се вели дека осигурувањето е направено со уплата на миза. Ако договорената сума се плаќа повеќе пати се вели дека осигурувањето се извршува со уплата на премија. Премијата може да биде доживотна или временска. Доживотната премија осигуреникот ја плаќа додека е жив, а временската премија ја плаќа додека е жив при однапред определен број на години.

Исплатата на осигурената сума зависи како од висината на премијата така и од тоа дали наплатената премија е добро пласирана. Висината на премијата зависи од висината на интересната стапка со која се пресметува премијата.

Премија пресметана со помош на статистичкиот материјал и интересната стапка се вика нето премија.

Осигурителното друштво освен трошоците за осигурената сума има и други трошоци, како на пример, за заклучна или аквизациона провизија, за инкасо провизија, административни трошоци. Кога нето премијата се наголеми за наведените трошоци се добива бруто премијата (тарифна или комерцијална премија). Така, ако е нето премија, ' е бруто премија, тогаш $' = + \frac{\quad}{100}$, каде е пресметаниот процент за дадените трошоци. Во осигурувањето на животот често се вклучуваат и ризиците на инвалидност, разни болести, осигурување во семејството во случај на смрт, за брачниот другар и децата и слично. Осигурувањето на животот е облик кој успешно ги комбинира осигурувањето и штедењето. Развиеното осигурување на животот значи акумулација на огромни финансиски средства кои се долгорочни и кои поради тоа можат да се употребат за долгорочно финансирање и разни инвестиции. Животното осигурување е важно од аспект на акумулација на капитал и обезбедување социјална сигурност. Од овие причини државата го стимулира развојот на осигурувањето на животот, по пат на различни олеснувања за негово спроведување (ослободување од даноци, такси и сл.), а од друга страна со посебна заштита на осигурениот, преку задолжително формирање и пласман на средствата на премиската резерва.

Осигурувањето на живот треба да обезбеди голем број на можности и комбинации за осигурување така што секој граѓанин во тоа да го пронајде својот интерес и начин за задоволување на одредени потреби. Единствено на тој начин постои шанса за опфаќање на голем број граѓани. Во Република Македонија, осигурувањето на живот (особено некои видови), во однос на западно-европските и останатите развиени национални економии не е развиено, впрочем и покрај особеното значење како социјална компонента.

Кога се во прашање производи на осигурување на живот тие се денес во поголема или помала мера, меѓусебно слични во сите економски развиени земји во светот. Ова е посебно изразено во Европа, каде со донесување на Директивата на Европската Унија во осигурување на животот 2002 година започна хармонизација на осигурувањето во оваа област.

Најчести видови на животно осигурување се: осигурувањето во случај на смрт, осигурувањето во случај на доживување, мешаното осигурување во случај на смрт или доживување, осигурување при кое е гарантирана исплата на договорената осигурена сума зголемана за припишаната добивка.

Општите карактеристики на осигурување на лица се следни:

а) опасноста покриена во осигурувањето се остварува на осигурената личност, како на, условно речено, на предмет кој не може да се искаже во материјална вредност;

б) според тоа, целта не може да биде надомест, туку исплатата на однапред договорена осигурена сума; и

в) материјалниот интерес не е услов за остварување на право од осигурувањето.

Осигурувањето на лица разбрано како заштитување на човекот и на она што го опкружува, станува од ден на ден позначително, поактуелно и посодржајно. Животното осигурување претставува совршен пример за здружување на ризикот, ризикот од предвремена смрт или доживување, се пренесува од индивидуата на групата.

Самото животно осигурување како економска институција за обезбедување на човекот претставува општествена потреба и еден вид на организирана борба за отстранување и сузбивање на причинителите кои можат да предизвикаат штета, намалување и ограничување на веќе настанатите штетни настани и несреќни случаи, како и материјален надоместок за штетите, односно исплатата на осигурителната сума за последиците од настани кои што не можеле да се избегнат ниту пак да се спречат.

Задачи за самостојна работа

1. Кој е основниот предмет на проучување на актуарската математика?

2. Објасни ја потребата и оправданоста на дејноста осигурување.

3. Наведи неколку типови животно осигурување.

4. Наведи некои општите карактеристики на осигурување на лица.

5. Која е основната разлика помеѓу финансиската и актуарската математика?

6. Во што се состои мултидисциплинарноста на осигурувањето?

7. Кои се ризиците во животното осигурување, односно кои се осигурените случаи кои може да настанат?

8. На кој начин осигуреникот обезбедува исплата од страна на осигурителот при настанување на осигурениот случај?

9. Што е нето, а што бруто премија?

6. 2. Таблици на смртност (Морталитетни таблици)

За пресметвање на соодветната и доволна премија, при осигурување на лица во случај на доживување или во случај на смрт, се јавува потребата од податоци за веројатноста на доживување или смртта на поединечен осигуреник. Поединечните податоци не е можно да бидат познати, времето на доживувањето и смртта не се мерливи, па затоа, потребен е статистички материјал за доживувањето и за смртноста прегледно среден во посебни таблици, кои се викаат таблици на смртноста (морталитет) и доживување (живеење).

Се работи за следново олеснување, доколку знаеме колку луѓе на одредена возраст, во состав на определена група луѓе, умираат, постои можност да се пресмета веројатноста на смрт за определено лице.

На пример, од 100000 лица на $45-$годишна возраст, во текот на една година умреле 408 лица, а следната $46-$та година, је доживеале 99592 лица. Податоците се запишуваат соодветно, во редица за лицата кои ја доживеале $46-$тата година.

Осигурителните компании имаат потреба од посебни таблици специјално направени за нивни потреби. Затоа големите осигурителни компании во поединечни земји изработуваат заеднички таблици на смртноста (морталитетни таблици) врз база на своите искуства.

Сите морталитетни таблици почнуваат со 0 години и завршуваат со 100 години возраст. Меѓутоа, човечкиот живот е најтаинствената големина која зависи од многу фактори и следователно на тоа, морталитетните таблици се само потребна база за пресметување на осигуреникот.

Првите таблици ги конструирал Хели (Halley), во 1693 година. Од тогаш до денес се изработени се голем број таблици, зависно од потребите на осигурителните компании. Сеуште се користат англиските таблици, од 20 компании, изработени во 1869 година, кои содржат засебни податоци за машки осигуреници, за женски осигуреници, комбинирани таблици, таблици за болест и друго.

Во таблиците се користат биометриски броеви кои се општо прифатени (интернационални).

Основните ознаки кои се користат се:

- x - возраст, односно број на години на лицето;

- $_{x}$ - (leaving = живи) , бројот на живи лица на возраст x години, односно лица од почетната популација на возраст x.

Така, $_{0}$ е бројот на новороденчиња кои сé уште не наполниле 1 година, $_{1}$ е бројот на лица на возраст 1 година, ..., $_{58}$ е бројот на лица на возраст 58, ..., се до возраст ω, каде $_{\omega}$ е последната вредност различна од нула, односно возраст за која $_{\omega+1} = 0$.

Во таблиците се внесени и податоци за бројот на лицата кои не доживеале определена возраст, па се користи и ознаката:

- d_x - број на лица на возраст x, кои не ја доживеале $x+1-$та година.

Така, d_0 е бројот на новороденчиња кои починале пред да наполнат 1 година, ..., d_{45} е бројот на лица на возраст 45 години, кои починале пред да наполнат 46 години, се до d_{ω}. Во принцип d_x е број на лица кои починале на возрастен интервал $[x, x+1)$.

Забелешка. Во пресметките кои се направени во примерите, се користени различни таблици, издадени од заводот за статистика на Република Македонија, согласно со различни пописи на населението. Последната таблица која е користена, е изработена во тек на $2004-2007$ година, кои покрај заедничките таблици имаат и посебни податоци за машки и женски лица.

Од дефинициите погоре, може да се изведат следниве формули:

$$_{x} = d_x + {}_{x+1} \ ,$$

бројот на живи лица на возраст x е збир на живите лица на возраст $x+1$ и оние кои починале на возраст x, пред да наполнат $x+1$ година. Односно

$$d_x = {}_{x} - {}_{x+1},$$

бројот на лица кои починале на возраст x е разлика на лица живи на возраст x и лица живи на возраст $x+1$. Исто така, може да кажеме дека

$$_{x+1} = {}_{x} - d_x,$$

бројот на живи лица на возраст $x+1$, е разлика на живите лица на возраст x и оние кои починале на возраст x, пред да наполнат $x+1$ година.

1. Ако бројот на машки лица на возраст 25 е $_{25} = 97691$, а бројот на машки лица кои починале на возраст 25 е $d_{25} = 687$, тогаш бројот на живи лица на возраст 26 е $_{26} = {}_{25} - d_{25} = 97691 - 687 = 97004$.♦

2. Ако се знае дека $_{34} = 95605$, а $_{35} = 95298$, тогаш бројот на лица кои починале на возраст 34 е $d_{34} = {}_{34} - {}_{35} = 307$.♦

Во продолжение на таблиците на смртност, односно доживување, се дефинираат и пресметуваат и така наречени комутативни броеви, кои се користат за директни пресметки на сегашните вредности на идните исплати на осигурените суми, за различни видови на животни осигурувања. Но, предмет на нашите разгледувања се само математичките веројатностни основи на актуарската математика, па комутативните броеви нема да ги разгледуваме ниту да ги дефинираме.

6.2.1. Веројатност на живеење и смрт на едно лице

Главна задача во овој дел е, користејќи ги таблиците на смртност, да се пресметаат веројатностите едно лице да доживее определена возраст или да почине пред да наполни определена возраст. Основа за изведување на формулите е класичната дефиниција на веројатност $P = \frac{}{n}$, каде е бројот на поволни настани, а n вкупниот број на настани.

Дали едно лице на возраст x, ќе доживее возраст $x+n$, или ќе почине во меѓувреме, никој не може да предвиди. Затоа, доживувањето на одредена возраст и умирањето, се случајни големини (случајни променливи), чии веројатности за определена вредност, се пресметуваат преку податоците од таблицата на смртност.

Се дефинираат следните веројатности:

- $_x$ - веројатност лице на возраст x, да ја доживее $x+1-$та година

$$_x = \frac{_{x+1}}{_x};$$

- $_x$ - веројатност на возраст x, да почине пред да наполни $x+1$ година

$$_x = \frac{d_x}{_x} = \frac{_x - {}_{x+1}}{_x};$$

поврзани со релација $_x + {}_x = 1$.

Двете наведени веројатности се веројатности за спротивни настани.

Потоа:

- $_n \; _x$ - веројатност лице на возраст x, да ја доживее $x+n-$тата година

$_n \; _x = \frac{_{x+n}}{_x}$;

- $_n \; _x$ - веројатност лице на возраст x, да почине пред да наполни $x+n$ години

$$_n \; _x = 1 - _n \; _x = 1 - \frac{_{x+n}}{_x} = \frac{_x - _{x+n}}{_x};$$

и овде двете наведени веројатности се веројатности за спротивни настани.

Веројатноста $_n \; _x = \frac{_{x+n}}{_x}$, можеме да ја изведеме постапно. За лице кое има x години, настанот лицето да ја доживее $x+n-$та година, е пресек на независни настани и тоа, прво лицето да ја доживее $x+1-$ вата година, па потоа лице на $x+1$ година, да ја доживее $x+2-$та година, и така натаму, до лице на возраст $x+n-1$ година да ја доживее $x+n-$тата година. Заради независноста, веројатноста на настанот е производ од веројатностите на настаните кои учествуваат во пресекот па

$$_n \; _x = \; _x \; _{x+1} \; _{x+2} \cdot \ldots \cdot \; _{x+n-1} = \frac{_{x+1}}{_x} \frac{_{x+2}}{_{x+1}} \cdots \frac{_{x+n}}{_{x+n-1}} = \frac{_{x+n}}{_x}.$$

Ќе дефинираме уште една веројатност, веројатноста лице на возраст x, да ја доживее $x+n-$тата година и да не ги доживее следните $x+n+$ години, значи да почине пред да наполни $x+n+$ години. Всушност, зборуваме за веројатност лице на возраст x, да ги доживее следните n години, но да почине во наредните $n+$ години. И овде ќе искористиме пресек на настани. Настанот може да го опишеме како настан лицето на возраст x, да ја доживее $x+n-$тата година, а кога е на возраст $x+n$, да не ја доживее $x+n+$ $-$тата година. Со симболи, тоа ќе го запишеме во облик

$$_{n|} \; _x = _n \; _x (1 - \; _{x+n}) = _n \; _x \left(1 - \frac{_{x+n+}}{_{x+n}}\right) = _n \; _x - \frac{_{x+n}}{_x} \frac{_{x+n+}}{_{x+n}},$$

односно

$$_{n|} \; _x = _n \; _x - \; _{+n} \; _x = \frac{_{x+n} - \; _{x+ \; +n}}{_x}.$$

Ова може да се толкува и поинаку, во облик

$$_{n|} \; _x = _n \; _x \cdot \; _{x+n}$$

Од овде веројатноста лице на возраст x, да почине во својата $x+n-$та година е

$$_{n|} \; _x = _n \; _x \cdot \; _{x+n} = \frac{_{x+n}}{_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{_{x+n}} = \frac{d_{x+n}}{_x}.$$

Сите овие резултати се логични, доколку се размислува од аспект на класичната теорија на веројатност.

3. Изрази ги со формула и пресметај ги веројатностите, лице на $30-$годишна возраст да:
а) доживее 40 години;
б) почине пред да наполни 40 години;
в) да почине во возрастниот интервал $[60,80)$.

а) ${}_{10}\ {}_{30} = \frac{{}_{30+10}}{{}_{30}} = \frac{{}_{40}}{{}_{30}} = \frac{93529}{96721} = 0,967$;

б) ${}_{10}\ {}_{30} = 1 - {}_{10}\ {}_{30} = 1 - 0,967 = 0,033$;

в) ${}_{30|20}\ {}_{30} = \frac{{}_{60} - {}_{80}}{{}_{30}} = \frac{77221-25116}{96721} = 0,539$. ♦

4. Колкава е веројатноста едно лице старо 50 години да:
а) ја доживее 51-та година; б) не ја доживее 51-та година.

а) ${}_{50} = \frac{{}_{51}}{{}_{50}} = \frac{87271}{88043} = 0,991$;

б) ${}_{50} = \frac{{}_{50} - {}_{51}}{{}_{50}} = \frac{88043-87271}{88043} = \frac{772}{88043} = 0,009$.

Ова значи дека од 1000 лица со 50 години старост, 51-та година ќе ја доживеат 991 лица, а 9 лица нема да ја доживеат. ♦

5. Во претпријатието работат 30 работници од кои: 10 работници со старост од 20 години, 8 работници со старост од 25 години, 5 работници со старост од 30 години и 7 работници со старост од 35 години. Пресметај колку од овие работници ќе бидат живи по 30 години.

${}_{30}\ {}_{20} = \frac{{}_{50}}{{}_{20}} = \frac{88043}{99005} = 0,889$, ${}_{30}\ {}_{25} = \frac{{}_{55}}{{}_{25}} = \frac{83578}{97929} = 0,853$,

${}_{30}\ {}_{30} = \frac{{}_{60}}{{}_{30}} = \frac{77211}{96721} = 0,798$, ${}_{30}\ {}_{35} = \frac{{}_{65}}{{}_{35}} = \frac{68286}{95298} = 0,717$.

Тогаш, бројот на работници кои ќе бидат живи по 30 години е
$10 \cdot 0,889 + 8 \cdot 0,853 + 5 \cdot 0,798 + 7 \cdot 0,717 = 25$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај d_{50}, d_{51} и d_{52}, користејќи таблици за доживување.

2. Колкава е веројатноста едно лице старо 40 години да:
а) ја доживее 70-та година; б) не ја доживее 70-та година.

3*. Пресметај ја веројатноста лице старо 45 години да:

а) умре во 55-тата година; б) умре во 60-тата година.

(увиди дека формулата која се користи е $_{x} = \ _{x+} \ _{x+} = \frac{_{x+}}{_{x}} \cdot \frac{d_{x+}}{_{x+}} = \frac{d_{x+}}{_{x}}$)

4. Колкава е веројатноста лице старо 40 години да

а) умре во наредните три години;

б)* ја доживее 50-тата, а умре во наредните 6 години;

в) умре во 62-та година;

г)* умре помеѓу 52-та и 65-тата година?

5. Во претпријатието се вработени 30 лица со следната старосна структура: 5 лица со старост од 28 години, 12 лица со старост од 32 години, 8 лица со старост од 49 години и 5 лица со старост од 42 години. Колку лица веројатно ќе бидат живи по 15 години?

6. Која е веројатноста лице старо 60 години да

1) доживее, 2) не доживее уште:

а) 5 години; б) 8 години; в) 15 години?

7*. Докажи го идентитетот $_{n} \ _{x} = \frac{_{n} \ _{x} - _{n+1} \ _{x}}{_{x+n}}$.

8. Колкава е веројатноста лице на возраст 40 години, да

а) почине во наредните три години;

б)* да доживее 50, а да почине до 53 години;

в) да почине во 62 - рата година;

г)* да почине меѓу 52 и 65 година.

6. 3. Веројатност на доживување и смрт на два живота

Користејќи ги равенствата за веројатност за живеење и смрт на едно лице може да се направи генерализација на пресметувањето на веројатноста за живеење и смрт за две и повеќе лица. Ако треба да се случат два независни настани, тогаш нивната веројатност е производ од поединечните веројатности за тие настани. Веројатностите за живот и смрт на две и повеќе лица се разгледуваат како независни. Нека првото лице во моментот на разгледување има x години, а второто y години.

- Веројатноста за доживување на n години, за две лица, едното на возраст x, другото на возраст y години,

$_{n} \ _{xy}$,

се пресметува како производ на веројатностите за доживување на истиот број на години за првото и второто лице, односно

$${}_{n}\;{}_{xy}={}_{n}\;{}_{x}\cdot{}_{n}\;{}_{y}=\frac{{}_{x+n}}{{}_{x}}\frac{{}_{y+n}}{{}_{y}}.$$

- Веројатноста, ниту едно од лицата да не доживеат уште n години,

${}_{n}\;{}_{xy}$,

може да се пресмета како:

$${}_{n}\;{}_{xy}={}_{n}\;{}_{x}\cdot{}_{n}\;{}_{y}=\left(1-{}_{n}\;{}_{x}\right)\left(1-{}_{n}\;{}_{y}\right)=\left(1-\frac{{}_{x+n}}{{}_{x}}\right)\left(1-\frac{{}_{y+n}}{{}_{y}}\right),$$

односно

$${}_{n}\;{}_{xy}=\frac{{}_{x}-{}_{x+n}}{{}_{x}}\frac{{}_{y}-{}_{y+n}}{{}_{y}}.$$

- Веројатноста, после n години да биде живо само првото од двете лица е

$${}_{n}\;{}_{x|y}={}_{n}\;{}_{x}\cdot{}_{n}\;{}_{y}.$$

Аналогно,

- веројатноста, после n години да биде живо само второто од двете лица е

$${}_{n}\;{}_{y|x}={}_{n}\;{}_{y}\cdot{}_{n}\;{}_{x}.$$

- Веројатноста, после n години, да биде живо најмалку едно лице, се пресметува како спротивна веројатност од веројатноста и двете лица да не се живи, односно

$$1-{}_{n}\;{}_{xy}.$$

Веројатноста, по n години да биде живо само едно лице, значи дека може да биде живо првото, а второто не или, да биде живо второто лице, а првото да не е живо. Со равенство, се опишува на следниот начин

$${}_{n}\;{}_{x|y}+{}_{n}\;{}_{y|x}={}_{n}\;{}_{x}\cdot{}_{n}\;{}_{y}+{}_{n}\;{}_{y}\cdot{}_{n}\;{}_{x}.$$

1. Лицето е старо 35 години, а лицето е старо 32 години. Колкава е веројатноста по 20 години:

а) и лицето и лицето да бидат живи;

б) лицето да биде живо, а лицето да биде мртво;

в) лицето да биде живо, а лицето да биде мртво;

г) да биде живо најмалку едно лице (било кое)?

а) $${}_{20}\;{}_{35}\cdot{}_{20}\;{}_{32}=\frac{{}_{55}}{{}_{35}}\cdot\frac{{}_{52}}{{}_{32}}$$

б) $${}_{20}\;{}_{35/32}={}_{20}\;{}_{35}\cdot{}_{20}\;{}_{32}=\frac{{}_{55}}{{}_{35}}\cdot\left(1-\frac{{}_{52}}{{}_{32}}\right)=0{,}0912;$$

в) $_{20}\quad_{32/35} = {}_{20}\quad_{32} \cdot {}_{20}\quad_{35} = \frac{_{52}}{_{32}} \cdot \left(1 - \frac{_{55}}{_{35}}\right) = 0{,}110$;

г) $_{20}\quad_{35,32} = \left(1 - {}_{20}\quad_{35}\right) \cdot \left(1 - {}_{20}\quad_{32}\right) = \frac{_{55}}{_{35}} + \frac{_{52}}{_{32}} - \frac{_{55}}{_{35}} \cdot \frac{_{52}}{_{32}} = 0{,}987$. ♦

Ќе разгледаме пример во кој се вклучени повеќе од две лица, притоа користејќи аналогија со претходната задача, ќе изведеме формули за веројатности за доживување и смрт на повеќе од две лица.

2. Едно друштво го сочинуваат три лица со иста возраст (25 години). Колкава е веројатноста ниту еден од нив да не ја доживее:

а) 50-тата година; б) 60-тата година?

а) Никој да не ја доживее 50-тата година значи сите три лица да починат пред да наполнат 50, а бидејќи животитте на трите лица се независни, за веројатноста добиваме производ од веројатностите за смрт на трите лица

$$_{n}\quad_{xy} = {}_{25}\quad_{25} \cdot {}_{25}\quad_{25} \cdot {}_{25}\quad_{25} = \left({}_{25}\quad_{25}\right)^3 = \left(1 - {}_{25}\quad_{25}\right)^3 = \left(1 - \frac{_{50}}{_{25}}\right)^3 = 0{,}001028;$$

б) Слично, $_{n}\quad_{xy} = \left({}_{35}\quad_{25}\right)^3 = 0{,}00945$. ♦

3. Колкава е веројатноста дека маж од 30 години и жена од 25 години по 20 години:

а) двајцата ќе бидат живи;

б) мажот жив, жената умрена.

а) $_{20}\quad_{30,25} = \frac{_{50}}{_{30}} \cdot \frac{'_{45}}{'_{25}} = \frac{76645}{94202} \cdot \frac{81633}{97658} = 0{,}6801$;

б) $_{20}\quad_{30} \cdot {}_{20}\quad_{25} = 0{,}1335$. ♦

За две лица може да се пресметуваат и други сложени веројатности. Аналогно на начинот на кој се пресметуваат веројатностите за живеење и смрт на две лица може да се пресметаат и веројатностите за повеќе лица.

Од појавата на морталитетните таблици па сé до денес се работи на креирање на функции за смртност и креирање на модели за пресметка на премиите за разни видови на животно осигурување.

Осигурувањето, има научна основа и е синтеза од повеќе научни области како што се економските, правните и техничките науки. Во основа, кај моделите кои се користат кај актуарската математика, се две области од применета математика и тоа: теорија на сложена каматна стапка и теоријата на веројатност. Современите трендови во испитување на моделите за пресметка на премии се поголемо значење даваат на анализа на ризиците кои се дел од моделот за пресметка на премии.

Задачи за самостојна работа

1. Колкава е веројатноста дека за маж од 30 години и жена од 25 години, по 20 години, ќе важи:

а) мажот е умрен, жената е жива;

б) двајцата се умрени?

2. Колкава е веројатноста дека за маж од 50 години и жена од 45 години, по 10 години, ќе важи:

а) мажот е жив, жената е умрена;

б) двајцата се живи?

3. Две лица се со старост 32 и 35 години. Пресметај ја веројатноста по 20 години:

а) двете лица да се живи;

б) првото лице да е живо, а другото не;

в) ниту едно лице да не биде живо;

г) само едно лице да биде живо;

д) да е живо барем едно лице;

е) да умре барем едно лице.

4. Две лица се со старост 40 и 48 години. Пресметај ја веројатноста по 15 години:

а) двете лица да се живи;

б) првото лице да е живо, а другото не;

в) ниту едно лице да не биде живо;

г) само едно лице да биде живо;

д) да е живо барем едно лице;

е) да умре барем едно лице.

5. Колкава е веројатноста дека по 15 години, синот стар 10 години и таткото стар 45 години:

а) двајцата ќе бидат живи;

б) синот ќе биде жив;

в) двајцата ќе се умрени?

6. 4. Задачи за вежбање

1. Пресметај d_{43}, d_{44} и d_{45}. Бројот на живите лица е $_{43} = 92200$, $_{44} = 91710$, $_{45} = 91200$ и $_{46} = 90600$.

2. Колкава е веројатноста лице старо 30 години да:
а) умре помеѓу 52-та и 60-тата година;
б) умре во 50-тата година;
в) ја доживее 40-тата година, а умре во наредните 5 години?

3. Во учебната 2007/2008 година имало 50 ученици од кои: 15 со старост од 17 години, 10 со старост од 18 години, 8 со старост од 19 години, 5 со старост од 20 години и 12 со старост од 21 година. Колкав е веројатниот број на учениците што ќе ја прослават 30 годишнината од матурирањето?

4*. Четири браќа се стари 15, 20, 25 и 30 години. Колкава е веројатноста
а) сите четворица да ја доживеат 40-тата година;
б) ниту еден да не ја доживее 40-тата година;
в) помладите браќа да ја доживеат, а постарите браќа да не ја доживеат 40-тата година?
(обиди се примерот од две лица да го примениш за четири лица)

5*. Едно друштво се состои од три лица со следнава старост:
а) 30, 32 и 34 години;
б) 38, 40 и 41 години;
в) 50, 51 и 55 години.
Која е веројатноста сите членови на ова друштво да бидат живи уште 20 години?

6. Колкава е веројатноста дека 30 годишна машко лице:
а) ќе ја доживее следната година;
б) нема да ја доживее следната година?

7. Колкава е веројатноста лице на 20 години да ја
а) доживее 40-та; б) да не ја доживее 40-тата година?

8. Колкава е веројатноста дека 25 годишно лице ќе доживее старост од 80 години?

9. Од 5 лица на 17 години, 10 на 18 години, 12 на 19 години и 8 на 20 години, колку од нив ќе бидат живи по 40 години.

10. Колкава е веројатноста дека лице старо 20 години:
а) ќе ја доживее идната година; б) ќе ја доживее 70-тата година?

11. Колкава е веројатноста дека лице од 70 години:
а) не ќе ја доживее следната година;

б) ќе умре во тек на 75-тата година?

12. Група вработени во еден сектор се состои од 5 лица од по 60 години. Колкава е веројатноста дека:

а) точно две лица ќе ја доживеат 70-тата година;

б) сите ќе ја доживеат 70-тата година;

в) ниту едно лице нема да ја доживее 70-тата година?

13. Колкава е веројатноста дека лице од 35 години:

а) ќе умре во 60-тата година;

б) ќе ја доживее 40-тата година;

в) ќе умре во наредните 6 години?

14. Во класот има 8 ученици од 16 години, 12 ученици од 17 години, 6 ученици од 18 години и 3 ученици од 19 години. Колкав е очекуваниот број на живи ученици по 30 години?

Решенија и одговори на задачите

1. 1.

3. а) 3×4, б) (41,1,16,0), (16,-9,-4), в) 16, 10, -4, 8, 0, 9. **5.** Не.

1. 2.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$. **2.** $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 3 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 13 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. **4.** $x=5,\ y=0,\ z=2,\ t=3$.

1. 3.

1. AB има ред $m\times m$, а BA име ред $n\times n$. Ако $m\neq n$, тогаш $AB\neq BA$.

2. $\begin{bmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. **4.** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} 880 & 930 \\ 700 & 720 \end{bmatrix}$.

1. 4.

4. $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 7 & 11 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$, $AA^2 = A^2A = \begin{bmatrix} 18 & 14 & 5 \\ 15 & 47 & 3 \\ -4 & 16 & 15 \end{bmatrix}$.

1.5.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(a\in R)$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **2.** а) Да, б) не.

3. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 \end{bmatrix}$. **5.** а) да, б) да.

6. а) $[1\ \ 0\ \ 0]^t$, б) $[1\ \ a\ \ b]$ или $[0\ \ 1\ \ a]$ или $[0\ \ 0\ \ 1]$. **7.** а) да, б) да.

1.6.

1. а) 3, б) 4, в) 2. **2.** а) 2, б) 2, в) 3. **3.** 3. **4.** Матрицата B се добива од матрицата A на тој начин што колоните (редиците) на матрицата A се земаат за редици (колони) на матрицата B. **5.** Ќе се намали за единица или нема да се промени.

1. 7.

2. а) Регуларна матрица, б) сингуларна матрица. **3.** а) Регуларна матрица, б) сингуларна матрица, в) регуларна матрица, г) сингуларна матрица. **4.** Ако $a = 0$ матрицата е сингуларна, а ако $a \neq 0$ матрицата е регуларна. **5.** Ако сите дијагонални елементи се различни од нула.

1. 8.

1. а) $A+B=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, б) $A-B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, в) $2A=\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -12 & -8 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$,

г) $AB=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -4 \\ -10 & -18 & 8 \\ 5 & 9 & -4 \end{bmatrix}$. **2.** а) I_2, б) $\begin{bmatrix} 17 & 16 & 44 \\ 16 & 39 & 38 \\ 22 & 19 & 14 \end{bmatrix}$, в) I_3. **5.** а) Да, б) да.

6. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 7. а) ранг $A =$ ранг $B = 2$.

8. ранг $(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 3$. **9.** а) Да, б) да, в) да, г) да, д) да, ѓ) да, е) да, ж) да, з) да, ѕ) не.

2.1.

1. а) $a_n = -1+3n$, b) $a_n = 3+\frac{1}{n}$, v) $a_n = (-1)^n\frac{1}{n}$.

2.2.

1. а) $n_0 = 9$, б) $n_0 = 99$, в) $n_0 = 999$. **2.** а) $+\infty$, б) $\frac{1}{2}$, в) $-\infty$. **3.** $n_0 = 10$. **4.** Не. **5.** Низата $a_n = 1$ има граница, а низата $a_n = (-1)^n$ нема граница.

2.3.

1. а) 1, –1 и 0, б) нема, в) нема. **2.** Не е конвергентна. Точки на натрупување се 0 и 1. **3.** а) $a < b$, б) $a < b$. **5.** а) 0, б) 0, в) 0.

2.4.

1. а), б), в), ѓ). **2.** $\frac{3}{5}$. **3.** 0. **4.** 0. **5.** 15. **6.** $\frac{27}{64}$. **7.** $\frac{1}{1024}$. **8.** –1. **9.** $\frac{10}{3}$. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** 1. **13.** 0.

2.5.

1. 1,25; б) $+\infty$. **2.** Низата конвергира кон а) $\frac{1}{1-2m}$, б) $\frac{b}{b-a}$. **3.** а) 7,5; б) $+\infty$. **4.** $\frac{1}{1-x^2}$.

5. а) 5, б) $\sqrt{7}$. **6.** $\frac{4}{3}\pi R^2$. **7.** 1. **8.** –3. **9.** 2. **10.** $\frac{1}{5}$. **11.** 7. **12.** $+\infty$. **13.** $\frac{4}{3}$. **14.** $\frac{1}{2}$.

2.6.

1. а) расте, б) расте, в) расте, г) опаѓа, д) опаѓа, ѓ) опаѓа. **2.** а) расте, б) расте, в) опаѓа, г) опаѓа. **4.** а) e, б) 1,5. **5.** а) e^2, б) e, в) e, г) e^2.

2. 7.

1. а) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$; б) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; в) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}$. **2.** $n_0 = 697$. **3.** $n_0 = 2777$.**4.** $n_0 = 5$.

5. $n_0 = 501$. **9.** а) Ограничена; б) неограничена; а) ограничена. **10.** 2.**11.** $\frac{2}{5}$. **12.** 2.

13. $\frac{1}{2}$. **14.** 1. **15.** $-\frac{5}{2}$.2. **16.** -1. **17.** -2. **18.** 3.**19.** а) Монотоно опаѓа; б) монотоно расте; в) монотоно опаѓа; г) монотоно опаѓа; д) монотоно расте; ѓ) не е монотона. **21.** а) e^k; б) e^k; в) e^k.

3.1.

2. а) $D_f = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$, б) $D_f = R \setminus \{3\}$, в) $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$, г) $D_f = (5, +\infty)$,

д) $D_f = R$, ѓ) $D_f = R \setminus \{1\}$. **3.** а) $f(x) = h(x)$, б) $f(x) \neq h(x)$. **5.** а) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, б)

$x_{1/2} = \pm\sqrt{995}$, в) $x_1 = -\frac{1}{2}$, г) $x_1 = 4$, $x_1 = -3{,}15$, $x_3 = 0$, $x_4 = -3$, д) $x_1 = 0$, ѓ) нема нули.

3.2.

2. а) Функцијата е ниту парна, ниту непарна, б) функцијата е парна, в) функцијата е непарна. **3.** Функцијата $f(x)$ на интервалот M монотоно: а) расте, б) расте, в) опаѓа, г) расте, д) опаѓа, ѓ) опаѓа. **4.** Функцијата $f(x)$ монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 1)$, а монотоно расте на интервалот $[1, \infty)$. **5.** Не.

3.3.

1. $x_{f\min} = -\frac{b}{2a} = -2$, $f(x)_{\min} = -1$. **2.** $x_{f\max} = -\frac{b}{2a} = 1$, $f(x)_{\max} = -1$. **3.** Да. **4.** Не.

3.4.

2. $g \circ f(x) = -2x$, $f \circ g$ не може да се дефинира. **3.** а) $f \circ h = \ln(e^{2x-3}+1)$, $h \circ f = e^{2\ln(x+1)-3}$, б) $f \circ h = \sin(5x+3) - \cos(5x=3)$, $h \circ f = 5(\sin x - \cos x) + 3$. **4.** а) $f(x) = 3^x$, $h(x) = 5x + 4$, б) $f(x) = \ln x$, $h(x) = \sin x - 4$.

3.5.

2. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{5}$. **3.** $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{4+x}$. **4.** $f^{-1}(x) = \ln x - 5$. **5.** $f^{-1}(x) = \log_4(\arcsin x)$. **6.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3x} - 2$. **7.** $f^{-1}(x) = 7^x + 1$. **8.** $f^{-1}(x) = x^5$. **9.** Симетрични во однос на правата $y = x$.

3.7.

5. а) Точка на прекин е -1, а интервали на непрекинатост се $(-\infty,-1)$ и $(-1,\infty)$; б) Точки на прекин се 2 и 3, а интервали на непрекинатост се $(-\infty,2)$, $(2,3)$ и $(-1,\infty)$; в) Точки на прекин се $\frac{\pi}{2} + k\pi$, каде k е цел број, а интервали на непрекинатост се $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, каде k е цел број.

3.8.

2. $\delta = \frac{1}{3000}$. **3.** а) $\frac{1}{4}$, б) -5, в) $\log_2 3$. **4.** а) 4, б) -4, в) $\sqrt{2}$. **5.** а) 3, б) $\frac{1}{3}$, в) 2, г) $\frac{7}{4}$, д) 6, ѓ) -3. **6.** а) -13, б) 4, в) 5. **7.** а) 6, б) 4, в) $\frac{2}{3}$. **8.** а) 3, б) $\frac{5}{2}$, в) -1. **9.** а) -7, б) $\frac{1}{6}$, в) $-\frac{3}{5}$. **10.** а) -2, б) $\frac{7}{3}$, в) $\frac{15}{11}$. **11.** а) $\frac{1}{4}$, б) -1, в) -2. **12.** а) $-\frac{1}{12}$, б) $-\frac{1}{3}$, в) 4. **13.** а) $\frac{2}{3}$, б) $-\frac{1}{2}$, в) -2, г) 1, д) 0, ѓ) $+\infty$. **14.** а) 0, б) 1, в) -1, г) 0, д) 0, ѓ) 0. **15.** а) $-\infty$, б) $+\infty$, в) $+\infty$. **16.** а) 4, б) 2, в) $\frac{\pi}{2}$, г) $\frac{m^2}{2}$, д) -4, ѓ) $\frac{1}{2}$. **17.** а) e, б) e^{-2}, в) e^6, г) e^6, д) 1, ѓ) -2, е) $\frac{1}{a}$, ж) 4, з) $\frac{1}{2}$. **18.** а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{a+1}{3a^2}$, в) $3x^2$, г) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$, д) 1, ѓ) 0.

3.9.

2. а) вертикална асимптота: $x = 1$, $x = -1$, коса асимптота: $y = x$; б) хоризонтална асимптота: $y = 1$, в) вертикална асимптота: $x = -1$. **3.** а) хоризонтална асимптота: $y = 0$, б) нема асимптоти, в) хоризонтална асимптота: $y = 0$ и вертикална асимптота: $x = -1$. **4.** а) вертикална асимптота: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, каде k е цел број, б) хоризонтална асимптота: $y = 0$ и вертикална асимптота: $x = 0$, в) хоризонтална асимптота: $y = 0$ и вертикална асимптота: $x = 0$. **5.** За $k = 2$; вертикална асимптота: $x = -2$, коса асимптота: $y = 2x - 3$.

3.10.

1. Домен е множеството на реалните броеви, а кодомен е множеството $[-2,2]$; б) домен е множеството на реалните броеви, а кодомен е множеството $[-1,\infty)$. **2.** Нема. **3.** $y=x^3+3$. **4.** Функцијата нема екстрем. **7.** Функцијата $y=\sin(e^x)$ е непрекината за секое x како сложена функција. Потоа и $y=1+\frac{1}{2}\sin(e^x)$ е непрекината и позитивна функција, па затоа и $y=\ln(1+\frac{1}{2}\sin(e^x))$ е напрекината како сложена функција. **8.** а) Точки на прекин се 2 и -2, а интервали на непрекинатост се $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ и $(2,\infty)$, б) точки на прекин се 0 и 4, а интервали на непрекинатост се $(-\infty,0)$, $(0,4)$ и $(4,\infty)$. **10.** а) 3, б) $-\frac{1}{3}$, в) $\sqrt{2}$, г) $\frac{1}{4}$, д) $\frac{1}{2}$, ѓ) 2, е) $\frac{3}{2}$, ж) $4a\sqrt{a-1}$, з) $\frac{3}{2}$. **11.** а) $\frac{2}{3}$, б) $\frac{1}{3}$, в) 2. **12.** а) $\frac{1}{2}$, б) 0, в) $\frac{10}{9}$, г) $-\infty$, д) $+\infty$, ѓ) $-\infty$. **13.** 0. **15.** а) e, б) $\frac{4}{3}$, в) 1.

4.1.

2. 68 km/h.

4.2.

1. а) $-\dfrac{1}{93}$, б) $-\dfrac{5}{3}$, в) $-\dfrac{1}{9}$. **2.** а) $2\Delta x$, б) $4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2$, в) $(3{x_0}^2-1)\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$. **3.** Нараснувањето на функцијата $y=x^3$ е поголемо. **4.** $f'(1)=-1$, $f'(-1)=-1$, $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$. **5.** а) $y'=-2$, б) $y'=3x^2$, в) $y'=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$.

6. а) $y=x-1$, б) $y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$, в) $y+1=-2(x-1)$. **7.** $y=2x-1$.

4.3.

1. $y'=4x^3-2x$. **2.** $y'=2x-\dfrac{1}{x^2}$. **3.** $y'=-\dfrac{4}{3}x^{-5/3}$. **4.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3$.

5. $y'=\cos x-10\cos x\sin x$. **6.** $y'=4\cos x+9x^2\cos x-3x^3\sin x-12x^5$.

7. $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **8.** $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **9.** $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$. **10.** $y'=6x^2-\dfrac{1}{3}x^{-2/3}+5x\sqrt{x}$.

4.4.

1. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$. **2.** $y'=\cos(x^2+\dfrac{1}{x})\cdot(2x-\dfrac{1}{x^2})$. **3.** $y'=-\sin\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

4. $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2+5x+6}}$. **5.** $y'=\dfrac{\cos x-\sin x}{2\sqrt{\sin x+\cos x}}$. **6.** $y'=\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3}$. **7.** $y'=\dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$.

8. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})\right)$.

4.5.

3. $y'=\dfrac{1-2\sqrt{y-x}}{1+2\sqrt{y-x}}$. **4.** $y'=-\dfrac{1}{\cos y}$. **5.** $y'=-\dfrac{e^x}{2y}$. **6.** $y'=\dfrac{2xy-y^2}{2xy-x^2+1}$.

4.6.

1. а) $y'=2x\ln x+x$, б) $y'=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$, в) $y'=-\dfrac{x^4+6x^2+8x}{(x^2+2)^2}$, г) $y'=\dfrac{1-x}{2(1+x)^2\sqrt{x}}$,

д) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$, ѓ) $y'=\dfrac{x}{1+x^2}+arctg\,x$, е) $y'=0$. **2.** а) $y'=50(2x+1)^{24}$,

б) $y'=-13(1-x)^{12}$, в) $y'=20(x^2+x-1)^{19}(2x+1)$, г) $y'=-x^2(1-x^3)^{-2/3}$,

д) $y'=\dfrac{-2x^2+x-1}{2(x+1)^2\sqrt{1+x^2}}$, ѓ) $y'=ctg\,x$, е) $y'=\cos(\sin x)\cdot\cos x$, ж) $y'=e^{tg\,x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$,

з) $y'=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$, ѕ) $y'=\dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$, и) $y'=\dfrac{4\cos x\cdot\ln(2\sin x-1)}{2\sin x-1}$. **3.** а) $y'=1$, б) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$,

в) $y'=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$.

4. а) $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}$, б) $y'=\dfrac{1}{y-2}$, в) $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$, г) $y'=\dfrac{y\sin x+\cos x-\cos y}{\cos x-x\sin y}$, д) $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$,

ѓ) $y'=\dfrac{y^x\ln y-x^{y-1}y}{x^y\ln x-y^{x-1}x}$. **5.** а) $y-1=30(x-1)$, б) $y-1=-(x-1)$, в) $y-1=\pi(x-1)$,

г) $y-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, д) $y-\dfrac{\pi}{4}=2(x-1)$, ѓ) $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$.

4.7.

2. а) $dy=\dfrac{dx}{1+x^2}$, б) $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, в) $dy=-\dfrac{dx}{x^2}$. **3.** а) $dy=(1+x)dx$,

б) $dy=(2x\sin x+x^2\cos x+\dfrac{1}{x})dx$ **4.** 0,4975. **5.** 2,995.

4.8.

1. $y^{(5)}=120$. **2.** $y^{(6)}=-\dfrac{105}{64}x^{-11/2}$. **3.** $y^{(3)}=\dfrac{8}{27}x^{-7/3}$. **4.** $y^{(4)}=-\dfrac{6}{x^4}$. **5.** $y^{(5)}=-243e^{-3x}$.

6. $y^{(4)}=81\cos 3x$. **7.** $y^{(n)}=n!\ (=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)$. **8.** $y^{(n)}=(-1)^n n! x^{1-n}$. **9.** $y^{(4k)}=\cos x$, $y^{(4k+1)}=-\sin x$, $y^{(4k+2)}=-\cos x$, $y^{(4k+3)}=\sin x$. **10.** $y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}$.

4.9.

1. а) $y'=2(x-1)$, б) $y'=a$, в) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$. **2.** $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **3.** а) $y'=4x^3-6x$, б) $y'=\dfrac{5x^4}{a+b}-\dfrac{2x}{a-b}-1$. **4.** а) $y'=18x^2+2x-2$, б) $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{x}}+\dfrac{1}{3}x^{-2/3}-\dfrac{1}{x^2}$.
5. а) $y'=\dfrac{3(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{3}(x+1)^3x^{-4/3}$, б) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **6.** а) $y'=\dfrac{4x^2+1}{x^2(\sqrt{1+x^2})^3}$, б) $y'=\frac{1}{3}(x+\sqrt[3]{x})^{-2/3}\left(1+\dfrac{1}{3}x^{-2/3}\right)$. **7.** а) $y'=\dfrac{4}{9}x^{-5/9}$, б) $y'=e^{e^x}\cdot e^x$.
8. а) $y'=a\cos ax-b\sin bx$, б) $y'=8x\cos x^2-9x^2\sin x^3$. **9.** а) $y'=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$, б) $y'=-\cos(\cos x)\cdot\sin x$. **10.** а) $y'=(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$, б) $y'=-(1-\dfrac{1}{x^2})\sin(x+\dfrac{1}{x})$.
11. а) $y'=2\sin x\cos x$, б) $y'=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$. **12.** а) $y'=\dfrac{1}{\cos x}$, б) $y'=e^x(1-2x-x^2)$.
13. а) $y'=e^x\ln\sin x+e^x ctg\,x$, б) $y'=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. **14.** а) $y'=(\sin x)^x(x\,ctg\,x+\ln(\sin x))$, б) $y'=10^{x\,tg\,x}\cdot\ln 10\cdot\left(tg\,x+\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$. **15.** а) $y'=-\dfrac{1}{1+3y^2}$. **16.** а) $dy=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$, б) $dy=\dfrac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^3}$, в) $dy=\dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}}$. **17.** $y'''=\dfrac{3}{8}x^{-5/2}$. **18.** $y^{(n)}=k^n e^{kx}$.

5.1.

1. $p=4{,}64\%$. **2**. $K=306748$ денари. **3**. $K=300000$ денари.

5.2.

1. Вкупна камата 7688 денари, просечна рата 13461 денари. **2**. вкупна камата 85200 денари, просечна рата 13550 денари. **3**. Вкупна камата 7688 денари, просечна рата 13461 денари

5.3.

4. 310,25 денари. **5**. Искористи го примерот.

5.4.

1. 20 години. **2**. а) 14750 денари; б) 87500 денари. **3**. $K=K_1+K_2=108000$ денари. **4**. 2691 денари. **5**. Вкупна камата 1065000 денари, просечна рата 169375 денари.

6. вкупна камата 75600 денари, просечна рата 22800 денари. **7**. Вкупна камата 140130 денари, просечна рата 12968 денари. **8**. Искористи ја задача 7. **9**. Искористи ја задача 6.

6.2.

1. Од $d_x = l_x - l_{x+1}$ следува дека

$d_{50} = l_{50} - l_{51} = 87730 - 87300 = 430$, $d_{51} = l_{51} - l_{52} = 87300 - 86418 = 882$ и

$d_{52} = l_{52} - l_{53} = 86418 - 85495 = 923$. **2**. а) ${}_{30}p_{40} = \dfrac{l_{40+30}}{l_{40}} = \dfrac{56240}{93529} = 0{,}601$;

б) ${}_{30}q_{40} = \dfrac{l_{40} - l_{40+30}}{l_{40}} = \dfrac{93529 - 56240}{93529} = 0{,}399$. Ова значи дека од 1000 лица со 40 години старост, 70-та година ќе ја доживеат 601 лица, а 399 лица нема да ја доживеат.

3. а) ${}_{10}q_{45} = \dfrac{d_{55}}{l_{45}} = \dfrac{1099}{91213} = 0{,}0120487$; б) ${}_{15}q_{45} = \dfrac{d_{60}}{l_{45}} = \dfrac{1549}{91213} = 0{,}0169822$.

4. а) ${}_{3}q_{40} = \dfrac{l_{40} - l_{43}}{l_{40}} = 0{,}0139$; б) ${}_{10/6}q_{40} = \dfrac{l_{50} - l_{56}}{l_{40}} = 0{,}0594$;

в) ${}_{22}q_{40} = \dfrac{l_{62} - l_{63}}{l_{40}} = 0{,}0191$; г) ${}_{12/13}q_{40} = \dfrac{l_{52} - l_{65}}{l_{40}} = 0{,}1941$. **5**. 28 лица.

6. 1а) $0{,}884$; 1б) $0{,}796$; 1в) $0{,}534$; 2а) $0{,}045$; 2б) $0{,}147$; 2в) $0{,}212$. **8**. а) ${}_{3}q_{40} = 0{,}0139$, б) ${}_{10|6}q_{40} = 0{,}0594$, в) ${}_{20}p_{40} \cdot q_{62} = 0{,}0191$, г) ${}_{12|}\, q_{40} = 0{,}1941$.

6.3.

1. а) ${}_{20}q_{30} \cdot {}_{20}p_{25} = 0{,}1558$; б) $0{,}0306$. **2**. а) ${}_{10}q_{45} \cdot {}_{10}p_{50}$; б) ${}_{10}p_{45} \cdot {}_{10}p_{50}$. **3**. а) ${}_{20}p_{32} \cdot {}_{20}p_{35}$; б) ${}_{20}p_{32} \cdot {}_{20}q_{35}$; в) ${}_{20}q_{32} \cdot {}_{20}q_{35}$; г) ${}_{20}p_{32} \cdot {}_{20}q_{35} + {}_{20}q_{32} \cdot {}_{20}p_{35}$; д) $1 - {}_{20}q_{32} \cdot {}_{20}q_{35}$; ѓ) $1 - {}_{20}p_{32} \cdot {}_{20}p_{35}$. **4**. а) ${}_{15}p_{40} \cdot {}_{15}p_{48}$; б) ${}_{15}p_{40} \cdot {}_{15}q_{48}$; в) ${}_{15}q_{40} \cdot {}_{15}q_{48}$; г) ${}_{15}p_{40} \cdot {}_{15}q_{48} + {}_{15}q_{40} \cdot {}_{15}p_{48}$; д) $1 - {}_{15}q_{40} \cdot {}_{15}q_{48}$; ѓ) $1 - {}_{15}p_{40} \cdot {}_{15}p_{48}$. **5.** а) ${}_{15}p_{10} \cdot {}_{15}p_{45}$; б) ${}_{15}p_{10}$; в) ${}_{15}q_{10} \cdot {}_{15}q_{45}$.

6.4.

1. 490, 510 и 600. **2**. а) $0{,}0953$; б) $0{,}0114$; в) $0{,}0239$. **3**. 45 лица. **4**. а) $0{,}816$; б) $0{,}184$; в) $0{,}0013$. **5**. а) $0{,}724$; б) $0{,}57$; в) $0{,}193$.

6. $p_{30} = \dfrac{l_{31}}{l_{30}} = \dfrac{93483}{94201} = 0{,}9924$, $q_{30} = \dfrac{d_{30}}{l_{30}} = \dfrac{718}{94201} = 0{,}0076$.

7. а) ${}_{20}p_{20} = \dfrac{l_{40}}{l_{20}} = \dfrac{93429}{99005} = 0{,}944$; б) ${}_{20}q_{20} = 1 - {}_{20}p_{20} = 1 - 0{,}944 = 0{,}056$. **8**. Според едно таблици, ${}_{55}p_{25}=\frac{l_{80}}{l_{25}}=\frac{16760}{97691}=0{,}1716$ за машко, според истите таблици за женско ${}_{55}p_{25}=\frac{l_{80}}{l_{25}}=\frac{23331}{97658}=0{,}2389$. Според други таблични податоци ${}_{55}p_{25}=\frac{l_{80}}{l_{25}}=\frac{13987}{93044}=0{,}1503$ за машко, ${}_{55}p_{25}=\frac{l_{80}}{l_{25}}=\frac{25116}{97929}=0{,}2585$ за женско.

9. $s=5\cdot\frac{l_{57}}{l_{17}}+10\cdot\frac{l_{58}}{l_{18}}+12\cdot\frac{l_{59}}{l_{19}}+8\cdot\frac{l_{60}}{l_{20}}=22{,}1$. Значи, 22 лица ќе бидат живи по 40 години.

10. - **13**. Исто како претходните задачи, само да се прочитаат вредностите од таблица. **14**. $8\cdot{}_{30}p_{16}+12\cdot{}_{30}p_{17}+6\cdot{}_{30}p_{18}+3\cdot{}_{30}p_{19}$.

Користена литература

1. A. C. Shapiro, S.D. Balbirer, Modern Corporate Finance, USA,2004

2. A. Damodaran, Investment Valuation 2nd Edition University with Investment Set

3. D. C. M. Dickson, M. R. Hardy, H. R. Waters, Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks (International Series on Actuarial Science), Cambridge University Press, 2009

4. D.Watson, A. Head, Corporate Finance Principles and Practice, Harlow, UK, 2007

5. G. Atrill, Financial Management for Decision Makers, Harlow, UK, 2007

6. G. F. Hardy, Theory of the Construction of Tables of Mortality, BiblioBazaar, 2009

7. G. Ninian, Actuarial Science: An Elementary Manual, BiblioLife, LLC, 2009

8. Mishkin, Eakins, Financial Markets and Institutions, Pearson, 2007

9. S. David Promislow, Fundamentals of actuarial mathematics, Wiley-Blackwell, 2005

10. T.Bradley, P. Patton, Essential Mathematics for Economics and Business, John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2002

11. Б. Попов, Математика за IV клас за стручните училишта, Просветно дело, Скопје, 1977

12. В. Враниќ, Основи финансијске и актуарске математике, Загреб 1964

13. Г. Тренчевски, Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2001

14. Д. Димовски, Б. Крстеска, Л. Кондинска, С. Здравеска, Математика за втора година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2002

15. Е. Стипаниќ, Математика за III и IV разред гимназије друштвено - језичног смера, Завод за издавање уџбеника Народне Републике Србије, Београд, 1962

16. К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, Математичка анализа за четврта година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2003

17. К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија за трета година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2002

18. К. Сориќ, Збирка задатака из математике с примјеном у економији, Елемент, Загреб, 2005

19. М. Ивовиќ, Финансијска математика, Економски факултет, Београд, 2003

20. Н. Давидовиќ, Основи на математиката за економисти, Култура, Скопје, 1975

21. Р. Раљевиќ, Финансијска и актуарска математика, Савремена администрација, Београд, 1975

Автори

Анета Гацовска
Јованка Тренчева Смилески
Надица Ивановска

Лектура

Маја Цветковска

Компјутерска обработка

Авторите

Корица

Стоиле Давчевски